FELADATOK 1

A BEVEZETŐ FEJEZETEK A MATEMATIKÁBA TÁRGY II. FÉLÉVÉHEZ (PROGRAMTERVEZŐ ÉS INFORMATIKUS BSC SZAKON)

ÖSSZEÁLLÍTOTTA: LÁNG CSABÁNÉ
ELTE IK Budapest 2007-02-04

A 2. fejezet feladatai megoldva megtalálhatók a *Gráfok; csoportok; gyűrűk és testek: Példák és megoldások* anyagban.

Az 1. és a 3. fejezet feladatainak egy része megtalálható megoldva a fenti anyagban.

A példatár letölthető Láng Csabáné honlapjáról:

http: //compalg.inf.elte.hu/∼zslang

valamint az IK Kari Digitális Könyvtárából.

Tartalomjegyzék

1. Feladatok

1.1. Gráfok

Megjegyzés. A feladatok véges gráfokra vonatkoznak.

1.1.1. Alapfogalmak

1.1-1. Van-e olyan 9 pontú egyszerű gráf, amelyben a pontok fokai rendre a következők:

a. 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5;

b. 6, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 1.

1.1-2. Van-e olyan 8 pontú egyszerű gráf, amelyben a fokszámok 6, 6, 6, 6, 3, 3, 2, 2?

1.1-3. Van-e olyan (legalább két pontú) egyszerű gráf, amiben minden pont foka különböző?

1.1-4. **a.** A $V(G) = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,n\}$ halmazon hány egyszerű gráf adható meg?

b. Ezek között hány m élű gráf van?

1.1-5. Egy k-reguláris egyszerű gráfnak hány pontja lehet?
1.1-6. Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf, melyre $v(G) \leq 2n + 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Lássuk be, hogy ha minden $v \in V$ esetén $d(v) \geq n$, akkor G összefüggő.
1.1-7. Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf, melyre $v(G) \leq 2n + 1$, és minden $v \in V$ esetén $d(v) \geq n - 1$. Igaz-e, hogy a gráf összefüggő?
1.1-8. Lássuk be, hogy egy G gráf vagy a komplementere összefüggő.
1.1-9. Mutassuk meg, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör.
1.1-10. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább k $(k \geq 2)$, akkor van a gráfban olyan kör, amely $k + 1$, vagy több pontú.
1.1-11. Mutassuk meg, hogy az összefüggő G gráfból elhagyva egy körének egyik élét, a gráf továbbra is összefüggő marad.
1.1-12. Az alábbiakban egy-egy egyszerű gráfot definiálunk. Rajzoljuk le ezeket.

i. A gráf pontjai egy tetraéder csúcsai. Két pont a gráfban össze van kötve, ha a tetraéderben a megfelelő csúcsok között van él.

ii. A gráf pontjai egy kocka csúcsai. Két pont a gráfban össze van kötve, ha a kockában a megfelelő csúcsok között van él.

iii. Egy kör kerületén vegyünk fel öt pontot. Gráfunk csúcsai a pontok által meghatározott $\binom{5}{2}$ húr lesz. Két csúcsot a gráfban akkor kötünk össze, ha a megfelelő húroknak nincs közös végpontjuk.
1.1-13. Adjuk meg az összes 4, illetve 5 pontú gráfot, amelyek izomorfak komplementerükkel.
1.1-14. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsuk be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, akik egyike sem játszott a másik kettővel.
1.1-15. Lássuk be, hogy az előző állítás nem igaz 5 résztvevő esetére.
1.1-16. a. Bizonyítsuk be, hogy n szögpontú, $n + 1$ élű gráfban van olyan pont, amely legalább harmadfokú.

b. Mutassuk meg, hogy ha az élek száma n, akkor nincs mindig legalább harmadfokú pont.
1.1-17. Van-e olyan nem összefüggő gráf, amelynek nincs 6-nál több pontja, és minden pontja másodfokú?
1.1-18. Lássuk be, hogy ha egy n szögpontú gráfnak legalább n éle van, akkor van a gráfban kör.
1.1-19. Jelöljük egy fagráf elsőfokú pontjainak számát f_1-gyel, a 2-nél nagyobb fokú pontjainak számát pedig c-vel. Bizonyítsuk be, hogy ha a pontok száma legalább 2, akkor $f_1 \geq c + 2$.
1.1-20. Mutassuk meg, hogy összefüggő gráf bármely két leghosszabb útjának van közös pontja. (A lehető legtöbb élt tartalmazó utakról van szó.)
1.1-21. Igazoljuk, hogy bármely fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át.

1.1-22. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz hurokélt, és minden pontjának a foka legalább 3, akkor van a gráfban páros hosszúságú kör.
1.1-23. Bizonyítsuk be, hogy egy legalább két pontú összefüggő gráfból mindig elhagyható egy pont (a belőle induló élekkel együtt) úgy, hogy összefüggő maradjon.
1.1-24. Igazoljuk, hogy bármely, legalább 5 pontú gráfban, vagy a komplementerében van kör.
1.1-25. **a.** Legfeljebb hány szeparáló él van egy $n(\in \mathbb{N})$-pontú gráfban? Adjuk meg az olyan gráfokat, amelyekben pontosan ennyi szeparáló él van.

b. Legfeljebb hány szeparáló csúcs van egy $n(\in \mathbb{N})$-pontú gráfban? Adjuk meg az olyan gráfokat, amelyekben pontosan ennyi szeparáló csúcs van.
1.1-26. **a.** Igaz-e, hogy minden szeparáló pont illeszkedik legalább egy szeparáló élre?

b. Mi a válasz az előző kérdésre akkor, ha minden csúcs foka legalább három?
1.1-27. Igaz-e, hogy egy gráfban

a. minden él legalább egy vágásnak eleme,

b. minden csillag élhalmaza vágás (csillag egy csúcs a belőle kiinduló élekkel, és azok végpontjaival).
1.1-28.

a. Lássuk be, hogy hibás a következő okoskodás.

Állítás: Ha egy n pontú egyszerű gráf éleinek száma $e \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, akkor összefüggő.

„Megoldás”: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \binom{n-1}{2}$ egy $n-1$ pontú teljes gráf éleinek a száma. Ha ehhez még egy élt hozzáveszünk, mely egy eredeti pontból az n-edikbe fut, összefüggő gráfot kapunk.

Hol a hiba?

b. Bizonyítsuk be az állítást.
1.1-29. Rajzoljuk fel az összes 3, 4, 5 pontú fát (az izomorfokat csak egyszer).
1.1-30. Legalább hány kör van egy 10-csúcsú, 16 élt tartalmazó összefüggő gráfban?

1.1-31. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az n-csúcsú teljes gráf egy alapkörrendszere hány körből áll?

1.1-32. Legyen G v-csúcsú egyszerű gráf, ahol v természetes szám. Milyen lehet G, ha

a. a rangja a lehető legnagyobb,

b. a nullitása a lehető legkisebb.
1.1-33. Jelöljük A-val egy gráf tetszőlegesen kiválasztott pontjainak halmazát, és k-val a gráf azon éleinek számát, melyek egyik végpontja A-ba tartozik, a másik pedig nem. Bizonyítsuk be, hogy k páros, illetve páratlan aszerint, hogy az A-ba tartozó páratlan fokú csúcsok száma páros illetve páratlan.
1.1-34. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka legalább 3, akkor nincs

olyan 2-nél nagyobb egész szám, amellyel a gráf minden körének hossza osztható.

1.1.2. Euler-gráf

1.1-35. Van-e olyan Euler-gráf, amelynek páros számú pontja és páratlan számú éle van?
1.1-36. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei megszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.
1.1-37. Legyen G egy olyan gráf, amelynek bármely két pontja között vezet út. Legyen S egy olyan élsorozat, amely az összes élt tartalmazza, és minimális hosszú. Bizonyítsuk be, hogy S egyetlen élen sem halad át kettőnél többször.

1.1.3. Hamilton-út, Hamilton-kör

1.1-38. Rajzoljunk olyan összefüggő gráfot, amelyben minden pont legalább másodfokú és nem tartalmaz Hamilton-kört.
1.1-39. Adjunk meg olyan gráfot, amelyben minden pont foka k ($k \geq 3$), és van olyan pontja, amelyen nem halad át kör.
1.1-40. Igazoljuk a következőket.

a. Ha a G gráfban létezik k darab pont, amelyeket törölve G több mint k komponensre esik szét, akkor G-nek nincs Hamilton-köre.

b. Ha a G gráfban létezik k darab pont, amelyeket elhagyva G még $k+1$-nél is több komponensre esik szét, akkor Hamilton-útja sincs.
1.1-41. Mutassuk meg, hogy egy ping-pong körmérkőzés résztvevői sorbaállíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a közvetlenül mögötte állót. (Azt nem követeljük meg, hogy az összes mögötte állót le kellett volna győznie.) (Más szóval lássuk be, hogy ha teljes gráfból irányított gráfot készítünk, abban mindig van irányított Hamilton-út.)

1.1-42. Mutassuk meg, hogy egy legalább 2 pontú teljes gráfból egyetlen élének törlése révén nyert gráfot lehet úgy irányítani, hogy ne legyen irányított Hamilton-útja.
1.1-43. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráf K köréből egy élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak.

1.1.4. Síkbeli gráfok

1.1-44. A Petersen-gráf síkbarajzolható-e?
1.1-45. **i.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor vagy G, vagy G komplementere nem síkgráf.

ii. Adjunk meg 8 pontú síkgráfot úgy, hogy a komplementere is síkgráf legyen.
1.1-46. Hány éle van egy n pontú összefüggő síkgráfnak, ha minden tartománya (a

külső is) háromszög?

1.1.5. Vegyes feladatok

1.1-47. Melyek azok a gráfok, amelyekben bármely két élnek van közös pontja?
1.1-48. Milyen komponensekből állhat egy gráf, ha minden pontjának foka legfeljebb kettő?
1.1-49. Lássuk be, hogy ha egy n pontú ($n > 1$) összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint csúcsa, akkor van elsőfokú csúcsa.
1.1-50. Lássuk be, hogy n csúcsú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.
1.1-51. Mutassuk meg, hogy egy véges összefüggő gráfban található olyan élsorozat, amely valamennyi élét tartalmazza.
1.1-52. Egy fagráf összefüggő G_1 és G_2 részgráfjának van közös éle. Jelöljük G_3-mal azt a gráfot, amelynek élei G_1 és G_2 közös élei, pontjai pedig a közös élek végpontjai. Igazoljuk, hogy G_3 összefüggő gráf.
1.1-53. Lássuk be, hogy hibás a következő okoskodás.

Állítás: n pontú fának $n-1$ éle van.

Megoldás: indukció n szerint.

a. $n = 1$ vagy 2-re triviális.

b. Tegyük fel, hogy n pontú fákra igaz az állítás. Vegyünk hozzá egy n pontú fához egy új élt, melynek egyik végpontja az eredeti fában van, a másik végpontja új, egy $n+1$-edik pont. Így nyilván összefüggő körmentes gráfhoz, tehát fához jutunk. Az induló feltétel szerint az n pontú fának $n-1$ éle volt. Ehhez vettünk hozzá még egyet, $n+1$ pontú $n = (n+1) - 1$ élű fához jutottunk.

Hol a hiba?
1.1-54. Az alábbiakban egy-egy egyszerű gráfot definiálunk. Rajzoljuk le ezeket.

a. Gráfunk 4! csúcsa négy ember lehetséges sorba állításait reprezentálja. Két csúcs össze van kötve, ha az egyik sorba állításból két szomszédos ember felcserélésével a másik megkapható.

b. A gráf csúcsai Magyarország megyéi. Két csúcs össze van kötve, ha a megfelelő megyék szomszédosak.
1.1-55. Egy sakkversenyen n nő és $2n$ férfi vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen, és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint 7:5. Mekkora lehet az n?
1.1-56. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos elemek szerepelnek.
1.1-57. Lássuk be, hogy egy összefüggő gráfban bármely feszítő fának van legalább egy közös éle egy tetszőleges szétvágó halmazzal. ($G = (V, E)$ összefüggő gráfban $X \subseteq E$ ***szétvágó halmaz***, ha $\exists V_1,\ V_2,\ V_1 \cup V_2 = V,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset$ oly módon, hogy X a V_1 és V_2 között futó élekből áll.)

1.1-58. Bizonyítsuk be, hogy a $G = (V, E)$ összefüggő gráfban az F szétvágó halmaz akkor és csak akkor vágás, ha a $G' = (V, E - F)$ részgráfnak pontosan két komponense van. (Szétvágó halmazt lásd az előbbi példánál.)

1.2. Csoportok

1.2.1. Félcsoport, csoport

1.2-1. Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a művelet vajon művelet-e az adott halmazon, s ha igen, akkor a halmaz a művelettel félcsoport-e, csoport-e.

a. $(\mathbb{Z}, \circ)$, ha $a \circ b = (a + b)/2 \quad (a, b \in \mathbb{Z})$;

b. $(\mathbb{Q}, \circ)$, ha $a \circ b = (a + b)/2 \quad (a, b \in \mathbb{Q})$;

c. $(A, \circ)$, ha A a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett valós függvények halmaza és $(f \circ g)(x) = \max(f(x), g(x))$;

d. $(\mathbb{R}$, osztás$)$;

e. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}$, osztás$)$.

1.2-2. Lássuk be, hogy a 8-adik komplex egységgyökök a szorzással csoportot alkotnak.

1.2-3. Legyen n rögzített pozitív egész szám. Lássuk be, hogy az n-edik egységgyökök halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot.

1.2-4. Lássuk be, hogy az összes n-edik egységgyök halmaza (n befutja a pozitív egész számokat) a szorzásra nézve csoportot alkot.

1.2-5. a. Vizsgáljuk meg, hogy a modulo 5 maradékosztályok a maradékosztályok szorzására csoportot alkotnak-e.

b. Állapítsuk meg, hogy a modulo 5 maradékosztályok halmazából elhagyva a 0 által reprezentált maradékosztályt, a maradékosztályok szorzására csoportot kapunk-e?

1.2-6. a. Vizsgáljuk meg, hogy a modulo 8 maradékosztályok a maradékosztályok szorzására csoportot alkotnak-e.

b. Állapítsuk meg, hogy a modulo 8 maradékosztályok halmazából elhagyva a 0 által reprezentált maradékosztályt, a maradékosztályok szorzására csoportot kapunk-e?

c. Állapítsuk meg, hogy a modulo 8 vett redukált maradékosztályok a maradékosztályok szorzására csoportot alkotnak-e?

1.2-7. a. Vizsgáljuk meg, hogy a modulo m vett maradékosztályok a szorzásra nézve csoportot alkotnak-e.

b. Vizsgáljuk meg, hogy a modulo m vett redukált maradékosztályok a szorzásra nézve csoportot alkotnak-e.

1.2-8. Csoportot alkotnak-e a következő konstrukciók?

a. A modulo 35 maradékosztályok közül az $A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ által reprezentáltak a maradékosztály összeadásra;

b. A modulo 35 maradékosztályok közül $A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ által reprezentáltak a maradékosztály szorzásra;

c. A modulo 35 maradékosztályok közül az $A \setminus \{0\}$ által reprezentáltak a maradékosztály szorzásra;

d. A modulo 25 maradékosztályok közül a $B = \{5, 10, 15, 20\}$ által reprezentáltak a maradékosztály szorzásra.

1.2-9. Az alábbi struktúrák közül válassza ki a félcsoportokat, illetve csoportokat:

a. A természetes számok halmaza az összeadásra nézve.

b. A páros számok halmaza az összeadásra nézve.

c. A páratlan számok halmaza a szorzásra nézve.

d. Az egész számok halmaza az összeadásra nézve.

e. Az egész számok halmaza a szorzásra nézve.

f. A nemnegatív racionális számok halmaza a szorzásra nézve.

g. A pozitív racionális számok halmaza a szorzásra nézve.

h. A nullától különböző valós számok halmaza a szorzásra nézve.

i. A sík vektorainak halmaza az összeadásra nézve.

j. A komplex számok halmaza az összeadásra nézve.

k. A valós elemű n-ed rendű mátrixok halmaza a szorzásra nézve. (n rögzített természetes szám.)

l. A valós elemű n-ed rendű nem szinguláris, (n rangú) mátrixok halmaza a szorzásra nézve.

1.2-10. Legyen $(G, \cdot)$ csoport, $u \in G$ rögzített elem. Definiáljunk G-n egy új $\circ$ műveletet $a \circ b := a \cdot u \cdot b$ segítségével. Csoport lesz-e $(G, \circ)$?

1.2-11. Lássuk be, hogy ha egy csoport minden elemének inverze önmaga, akkor a csoport kommutatív.

1.2-12. Bizonyítsuk be, hogy ha a $(G, \cdot)$ csoport minden a, b elempárjára $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, akkor a csoport kommutatív.

1.2.2. Csoport rendje, elem rendje, részcsoport, generátum, Lagrange-tétel

1.2-13. a. A 8-adik komplex egységgyökök szorzással alkotott csoportjában határozzuk meg a csoport rendjét és az egyes elemek rendjét.

b. Ebben a csoportban határozzuk meg az egyes elemek generátumát.

c. Ciklikus-e ez a csoport?

1.2-14. Vizsgáljuk meg, hogy a következő algebrai struktúrák csoportot alkotnak-e? Ha igen, adjuk meg a csoport rendjét. A csoportok közül melyek ciklikusak?

a. Az m-mel osztható (m pozitív egész) egész számok az összeadásra nézve.

b. Az egész számok halmaza az $a \circ b = a + b + 1$ műveletre nézve.

Diédercsoport

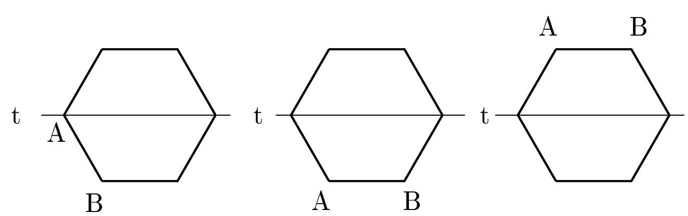
A D_n *diédercsoport* a síknak egy szabályos n oldalú sokszögét önmagába vivő egybevágósági transzformációkból áll, művelet a transzformációk egymás utáni végrehajtása. Ha φ a $\frac{2\pi}{n}$-nel való forgatást, τ pedig egy szimmetriatengelyre való tükrözést jelöl, akkor D_n elemei:

$$\{e, \varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}, \tau, \tau \cdot \varphi, \tau \cdot \varphi^2 \ldots, \tau \cdot \varphi^{n-1}\}$$

A számolás szabályai:

$$\varphi^n = \tau^2 = e \quad \varphi \cdot \tau = \tau \cdot \varphi^{n-1}$$

Belátható, hogy D_n a fenti művelettel csoportot alkot.



2. ábra. Szabályos hatszög elforgatása a középpontja körül $\frac{\pi}{6} = 60°$-kal, majd tükrözés a t tükörtengelyre

Az $n = 2$ esetben a *Klein-féle* csoportot kapjuk. Ez az egyetlen kommutatív diédercsoport. $D_2 = \{e, a, b, c\}$, az egységelem kivételével mindegyik elem másodrendű, és bármelyik két elem szorzata a harmadik elem.

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

1.2-15. Adott egy sík és abban egy szabályos háromszög. Tekintsük azon síkbeli egybevágósági transzformációk G halmazát, amelyek a szabályos háromszöget önmagába viszik át. A G halmazon értelmezzük a műveletet a transzformációk egymás utáni végrehajtásával (függvénykompozícióként). (Két háromszöget akkor tekintünk azonosnak, ha a megfelelő csúcsok ugyanott vannak.)

a. Bizonyítsuk be, hogy G csoportot alkot.

b. Határozzuk meg a G csoport rendjét.

c. Jelölje φ a szabályos háromszög középpontja körüli pozitív irányú $\frac{2\pi}{3} = 120°$-os elforgatást, τ pedig egy (a síkban rögzített) magasságvonalra vonatkozó tükrözést. Írjuk fel ezek segítségével G összes elemét, határozzuk meg az egyes elemek rendjét, inverzét, valamint a $\{\varphi\}$, a $\{\tau\}$, illetve a $\{\varphi, \tau\}$ halmazok által generált részcsoportokat.

d. Kommutatív-e ez a csoport?

e. Ciklikus-e ez a csoport?

1.2-16. Tekintsük a 15. példában szereplő síkbeli, szabályos háromszöget önmagába vivő egybevágósági transzformációk G csoportját. Határozzuk meg a részcsoportok rendjét.

1.2-17. Írjuk fel a D_4 diédercsoport elemeit, és a számolás szabályait.

1.2-18. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban a és a^{-1} rendje egyenlő.

1.2-19. Bizonyítsuk be, hogy $(G, \cdot)$ csoportban az a és $b^{-1} \cdot a \cdot b$ elemek rendje egyenlő.

1.2-20. Legyen $(G, \cdot)$ véges, páros rendű csoport. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van olyan az egységelemtől különböző eleme, amelynek az inverze önmaga.

1.2-21. Bizonyítsuk be, hogy ha $(G, \cdot)$ véges csoport, akkor minden $a \in G$-re $a^{|G|} = e$, ahol e a csoport egységeleme.

1.2-22. Egy multiplikatív csoport c elemére $c^{100} = e$ és $c^{1999} = e$. Határozzuk meg c-t.

1.2-23. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $(G, \cdot)$ csoportnak van az egységelemtől különböző véges rendű eleme, akkor van prímrendű eleme is.

1.2.3. Mellékosztályok, invariáns részcsoportok

1.2-24. Tekintsük a 15. példában szereplő síkbeli, szabályos háromszöget önmagába vivő egybevágósági transzformációk G csoportját.

a. Jelölje H a τ által generált részcsoportot. Határozzuk meg G-nek a H szerinti bal, illetve jobb oldali mellékosztályait. Invariáns részcsoportja-e H a G csoportnak?

b. Jelölje K a φ által generált részcsoportot. Határozzuk meg G-nek a K szerinti bal, illetve jobb oldali mellékosztályait. Invariáns részcsoportja-e K a G csoportnak?

1.2.4. Homomorfizmus, izomorfizmus

1.2-25. A komplex számok $\mathbb{C}$ halmazában a $*$ és $\circ$ műveleteket az alábbi módon értelmezzük: $a * b = a + b + 1, \qquad a \circ b = a + b + i.$

a. Igazoljuk, hogy a $(\mathbb{C}, *)$ és a $(\mathbb{C}, \circ)$ struktúrák csoportok.

b. Igazoljuk, hogy az $\varphi : a \mapsto ai$ leképezés izomorfizmust létesít a $(\mathbb{C}, *)$ és a $(\mathbb{C}, \circ)$ csoportok között.

1.2-26. Az alábbi struktúrák közül melyek izomorfak?

a. a valós számok az összeadásra;

b. a pozitív valós számok a szorzásra;

c. a nem nulla valós számok a szorzásra;

d. az $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrixszorzásra;

e. az $\left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \middle| a \neq 0, a \in \mathbb{R} \right\}$ mátrixok a mátrixszorzásra;

f. a racionális számok az összeadásra $(\mathbb{Q}, +)$.

1.2-27. Az alábbi csoportok közül melyek izomorfok?

a. a modulo 15 redukált maradékosztályok a szorzásra;

b. a modulo 24 redukált maradékosztályok a szorzásra;

c. a nyolcadik komplex egységgyökök a szorzásra;

d. a négyzet szimmetriacsoportja (a D_4 diédercsoport) a transzformációk egymás utáni végrehajtására, mint műveletre.

1.3. Gyűrűk, testek

1.3.1. Gyűrű, test, integritási tartomány, nullosztó

1.3-1. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:

a. egész számok az összeadásra és szorzásra nézve;

b. a páros számok az összeadásra és szorzásra nézve;

c. adott n egész szám többszörösei az összeadásra és szorzásra nézve (az $n = 0$ esetet külön nézzük meg);

d. $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve;

e. $\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (Gauss-egészek);

f. az n-edrendű ($n\times n$-es) egész elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve;

g. az n-edrendű valós elemű mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra nézve.

h. $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$ a modulo m tekintett maradékosztályok a maradékosztály összeadásra és szorzásra.

1.3-2. Jelöljön $(S;+)$ egy Abel-csoportot. Definiáljuk a $\circ$ műveletet a következő módon: $a\circ b=0$. 0 az $(S;+)$ egységeleme. Bizonyítsuk be, hogy az $(S;+,\circ)$ struktúra gyűrű. (Ezt nevezzük *zérógyűrűnek.*)

1.3-3. Teljesüljenek az $(R;+,\cdot)$ struktúrában a következő tulajdonságok:
a. $(R;+)$ csoport, **b.** $(R;\cdot)$ egységelemes félcsoport, **c.** a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Bizonyítsuk be, hogy $(R;+,\cdot)$ gyűrű.

1.3-4. Bizonyítsuk be, hogy ha az $(R;+,\cdot)$ egységelemes gyűrű minden elemének van multiplikatív inverze, akkor a gyűrűnek csak egyetlen eleme van.

1.3-5. Testet alkotnak-e a modulo $2m$ maradékosztályok közül a párosak, $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4},\overline{6},\dots,\overline{2m-2}\}$ a maradékosztályok közötti összeadásra és szorzásra, ha

a. $2m=10$,

b. $2m=20$.

1.3-6. Bizonyítsuk be, hogy ha $(T,+,\cdot)$ véges, legalább két elemet tartalmazó integritási tartomány, akkor test.

1.3-7. Milyen m értékre ismerünk m elemű gyűrűt, illetve testet?

1.3-8. Határozzuk meg a modulo 12 maradékosztályok gyűrűjében a nullosztókat.

1.3-9. Legyen $(R,+,\cdot)$ egységelemes gyűrű. Jelölje a nullelemet 0, az egységelemet e. Bizonyítsuk be, hogy ha az $a\in R$ elemre fennáll az $a^n=0$ valamilyen $n\in\mathbb{N}$-re (a *nilpotens elem*), akkor az $e-a$ elemnek van inverze.

1.3-10. Mutassuk meg, hogy egy gyűrű egységeleme nem lehet két nilpotens elem összege. (Lásd az előző példát.)

1.3-11. Vizsgáljuk meg, hogy gyűrűt alkotnak-e az alábbi kétműveletes struktúrák:

a. $\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve.

b. A [-1, 1] intervallumon értelmezett valós függvények a függvények összeadására és szorzására nézve. (Az f és g függvények összegét $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, a szorzatát pedig az $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in[-1,1]$ hozzárendeléssel definiáljuk.)

c. Az $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$ mátrixok a mátrix összeadásra és szorzásra.

1.3-12. Vizsgáljuk meg, hogy testet alkot-e az $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ halmaz az összeadásra és szorzásra nézve.

1.3-13. Végezzük el a kijelölt műveleteket a $\mathbb{Z}_{17}$ maradékosztály testben.

a. $(\overline{5})^{-1}$, **b.** $\overline{9}-\overline{11}$, **c.** $(\overline{15}+\overline{10})(\overline{3}+\overline{5})^{-1}$, **d.** $\overline{1}\cdot\overline{2}\cdot\overline{3}\cdot\ldots\cdot\overline{16}$.

1.3-14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $(R; +, \cdot)$ egységelemes gyűrű a elemének van bal oldali multiplikativ inverze, akkor az a elem nem lehet a gyűrű bal oldali nullosztója.
1.3-15. Legyen $D = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x = m \cdot 2^k, m, k \in \mathbb{Z}\}$ a véges diadikus törtek halmaza. Lássuk be, hogy a véges diadikus törtek az összeadásra és szorzásra integritási tartományt alkotnak, de nem alkotnak testet.
1.3-16. a1. Tekintsük a $\mathbb{Z}_{10}$ maradékosztály-gyűrűt. Írjuk fel ebben minden elem (minden maradékosztály) osztóit.

a2. Mik az egységek, és mik a nullosztók?

b. Legyen a a $\mathbb{Z}_m$ maradékosztály-gyűrű egy maradékosztálya. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy mikor osztható minden maradékosztály a-val - vagyis hogy az a maradékosztály mikor egység.

1.3.2. Karakterisztika

1.3-17. Mutassuk meg, hogy ha egy R gyűrű minden a elemére $a^2 = a$ teljesül, akkor R karakterisztikája 2 és kommutatív. (*Boole-gyűrű.*)
1.3-18. Legyen H halmaz, $R = \{P(H), \circ, \cap\}$, ahol $(A \circ B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, a szimmetrikus differencia.) Lássuk be, hogy R gyűrű, keressük meg a nullelemét, és az egységelemét. Lássuk be, hogy R Boole-gyűrű. Keressünk benne nullosztót.

1.3.3. Oszthatóság, osztók, egységek, felbonthatatlan, prím

1.3-19. Ha valamely kommutatív gyűrűben $a = a \cdot e$ teljesül, következik-e ebből, hogy e egységelem?
1.3-20. a. Felbonthatatlan-e $\mathbb{Z}_{10}$-ben $\overline{5}$? **b.** Prím-e $\mathbb{Z}_{10}$-ben $\overline{5}$?
1.3-21. Mely számok osztói az 1-nek a véges diadikus számok gyűrűjében? Mik az egységek? Adjunk egyszerű feltételt arra, hogy ebben a gyűrűben egy szám oszt egy másikat.
1.3-22. A véges diadikus számok gyűrűjében hány osztója van egy számnak. Lehet-e egy számnak nála nagyobb osztója is?
1.3-23. A véges diadikus számok gyűrűjében mely elemeknek van végtelen sok lényegesen különböző osztója? (Vagyis olyanok, amelyek nem csak egységszorzóban különböznek egymástól.)
1.3-24. A véges diadikus számok gyűrűjében felbonthatatlan-e a 12?
1.3-25. Melyek a felbonthatatlanok és melyek a prímek a véges diadikus számok gyűrűjében?
1.3-26. Legyen $G = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve (*Gauss-egészek*). Legyen $\varphi(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Bizonyítsuk be ennek a leképezésnek a felhasználásával, hogy a Gauss-egészek körében az egységek $1, -1, i, -i$.

1.3.4. Euklideszi gyűrű

1.3-27. A (páros számok, $+, \cdot$) integritási tartományt képeznek. Euklideszi gyűrű-e?

1.3-28. Legyen $L = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadással és szorzással. (L egészek.)

a. Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ struktúra egységelemes integritási tartomány.

b. Bizonyítsuk be, hogy az L egészek körében két egység van, ezek 1 és -1.

1.3-29. Lássuk be, hogy ha integritási tartományban létezik prím, akkor létezik egységelem.

1.3-30. Legyen $L = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ a szokásos összeadással és szorzással.

a. Bizonyítsuk be, hogy az L egészek körében $1+i\sqrt{5}, 1-i\sqrt{5}, 2, 3$ felbonthatatlan elemek, de nem prímelemek.

b. Bizonyítsuk be, hogy az $(L, +, \cdot)$ gyűrű nem euklideszi gyűrű.

1.3-31. Igaz-e hogy ha érvényes az egyértelmű felbontás tétele valamely gyűrűben, akkor az euklideszi gyűrű?

1.3-32. Legyen $H_2 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ az összeadásra és szorzásra nézve, és $\varphi(a + b\sqrt{2}) =\mid (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) \mid=\mid a^2 - 2b^2 \mid$. Bizonyítsuk be, hogy a $(H_2, +, \cdot)$ struktúra euklideszi gyűrű.

1.3-33. Mik az egységek az előző példabeli euklideszi gyűrűben.

1.3.5. Részgyűrű, ideál, faktorgyűrű

1.3-34. Melyek $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ részgyűrűi. Van-e köztük ideál? ($\mathbb{Z}_4$ a modulo 4 maradékosztályok halmaza.)

1.3-35. Legyen R véges gyűrű, I ideál R-ben, és $I \neq R$. Bizonyítsuk be, hogy I minden a nullelemtől különböző eleme nullosztó R-ben.

1.3-36. Határozzuk meg a $(T, +, \cdot)$ test ideáljait. (Lássuk be, hogy testben nincs nem triviális ideál.)

1.3-37. Tekintsük a racionális számok $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gyűrűjét. Bizonyítsuk be, hogy a páros egészek a racionális számok gyűrűjének részgyűrűjét alkotják, de nem ideálját.

1.3-38. Bizonyítsuk be, hogy az egész számok részgyűrűt képeznek a racionális számok gyűrűjében, de nem ideált.

1.3-39. Jelölje M a valós számtest feletti 2×2-es mátrixok halmazát,
$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$, illetve $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$

a. Igazoljuk, hogy $(K, +, \cdot)$ bal oldali ideálja $(M, +, \cdot)$-nak de nem jobb oldali ideálja.

b. Igazoljuk, hogy $(L, +, \cdot)$ jobb oldali ideálja $(M, +, \cdot)$-nak, de nem bal oldali ideálja.

1.3-40. a. Lássuk be, hogy a páros számok (P) az egészek részgyűrűjét, sőt ideálját alkotják.

b. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}/P$ maradékosztály gyűrűt.

1.3-41. Legyen $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$, és $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in 2\mathbb{Z} \right\}$

a. Mutassuk meg, hogy I ideál R-ben.

b. Hány elemű az R/I faktorgyűrű?

1.3-42. Jelöljük N-nel az R kommutatív gyűrűben a nullosztók és a 0 által alkotott halmazt.

a. Lehet-e, hogy N nem részgyűrű?

b. Lehet-e, hogy N részgyűrű, de nem ideál?

c. Bizonyítsuk be, hogy ha N ideál, akkor R/N nullosztómentes.

d. Mely m-ekre igaz, hogy a modulo m maradékosztály-gyűrűben N ideál?

1.3-43. Legyen $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$, Bizonyítsuk be, hogy az $(M; +, \cdot)$ struktúra izomorf az $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ gyűrűvel.

1.3-44. Izomorfak-e a $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ és $K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűk?

1.3.6. Vegyes feladatok

1.3-45. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gyűrűben pontosan egy balegységelem van, akkor az szükségképpen egységelem.

1.3-46. Igazoljuk, hogy ha egy gyűrűben az $1 - ab$ elemnek van inverze, akkor az $1 - ba$ elemnek is van.

1.3-47. Írjuk fel a $\mathbb{Z}_{12}$ maradékosztály-gyűrűben minden elem osztóit!

1.3-48. Jelölje M a valós számtest feletti 2×2-es mátrixok halmazát, valamint $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a. Igazoljuk, hogy $(K, +, \cdot)$ részgyűrűje az $(M, +, \cdot)$ gyűrűnek.

b. Ideálja-e K az M-nek?

1.3-49. Legyen $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Bizonyítsuk be, hogy a $(K, +, \cdot)$ struktúra izomorf a komplex számok testével.