Integrálszámítás

a Matematika A1a-Analízis nevű tárgyhoz

2009. november

Tartalomjegyzék

I. rész

Feladatok

1. A határozatlan integrál (primitív függvények)

1.1. A definíciók egyszerű következményei

F1. Határozza meg az alábbi függvények *összes* primitív függvényét:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x}\ \ \big(x \in (0, +\infty)\big)$; (b) $f(x) := \dfrac{1}{x}\ \ \big(x \in (-\infty, 0)\big)$;

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\sin^2 x}\ \ \big(x \in (0, \pi)\big)$; (d) $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}\ \ \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

F2. Határozza meg az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in I$ pontban eltűnő primitív függvényét, ha

(a) $f(x) := \cos x\ \ \big(x \in \mathbb{R},\ \ x_0 := \frac{3\pi}{4}\big)$;

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\ \ \big(x \in \mathbb{R}^+,\ \ x_0 := 8\big)$.

F3. Keresse meg azt a f függvényt, amelyre

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \ (x \in \mathbb{R}^+),\ \ f(4) = 1$;

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}\ \ (x > -1),\ \ f(0) = 2$;

(c) $f''(x) = x\ \ (x \in \mathbb{R}),\ \ f(0) = -3,\ f'(0) = 2$;

(d) $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}\ \ (x \in \mathbb{R}^+),\ \ f(1) = 0,\ f'(2) = 0$;

(e) $f''(x) = 3e^x + 5\sin x\ \ (x \in \mathbb{R}),\ \ f(0) = 1,\ f'(0) = 2$;

(f) $f'''(x) = \sin x,\ \ (x \in \mathbb{R}),\ f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1$.

1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

1.2.1. Alapintegrálok

F4. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\int \big(6x^2-8x+3\big)\,dx,\ I:=\mathbb{R};$ (b) $\int \big(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\big)\,dx,\ I:=\mathbb{R}^+;$

(c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx,\ I:=R^+;$ (d) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx,\ I:=\mathbb{R}^+;$

(e) $\int \big(2x+\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\big)\,dx,\ I:=(-1,1).$

1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

- **$\int \frac{f'}{f}$ alakú integrálok**

F5. Mutassa meg, hogy ha $f:I\to\mathbb{R}$ pozitív és differenciálható az I intervallumon, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln f(x)+c} \qquad (x\in I).$$

F6. Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx,\ I:=\mathbb{R};$ (b) $\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\,dx,\ I:=\mathbb{R};$

(c) $\int \operatorname{tg} x\,dx,\ I:=\big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big);$ (d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx,\ I:=\mathbb{R};$

(e) $\int \frac{dx}{x\ln x},\ I:=(0,1);$ (f) $\int \frac{dx}{x\ln x},\ I:=(1,+\infty);$

- **$\int f^\alpha\cdot f'$ alakú integrálok**

F7. Tegyük fel, hogy az $f:I\to\mathbb{R}$ függvény pozitív és differenciálható az I intervallumon és $\alpha\neq-1$ valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\boxed{\int f^\alpha(x)f'(x)\,dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c} \qquad (x\in I).$$

F8. Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int x^2(2x^3+4)^{2004}\,dx,\ I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{6x^3+4}\,dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(c) $\displaystyle\int e^x(1-e^x)^3\,dx,\ I := \mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx,\ I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx,\ I := \mathbb{R}^+;$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}}\,dx,\ I := \mathbb{R}^+;$

(g) $\displaystyle\int \frac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}}\,dx,\ I := \left(-\tfrac{5}{2},+\infty\right);$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}}\,dx,\ I := \left(0,\tfrac{\pi}{2}\right);$

- $\int f(ax+b)\,dx$ **alakú integrálok**

F9. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $F : I \to \mathbb{R}$ a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek egy primitív függvénye. Mutassa meg, hogy ekkor bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ esetén

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c} \qquad (x \in I).$$

F10. Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int (2x-3)^{10}\,dx\ \ (x > \tfrac{3}{2});$ (b) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx\ \ (x < \tfrac{1}{3});$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx\ \ (x \in \mathbb{R});$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{2-3x^2}\,dx\ \ (x > \tfrac{2}{3});$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx\ \ \left(|x| < \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right);$ (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx\ \ \left(x > \sqrt{\tfrac{2}{3}}\right).$

F11. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2-12x+23}\ \ (x \in \mathbb{R});$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+12x+16}\ \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}}\ \ (x \in \mathbb{R});$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx \quad \big(1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}\big).$

- $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ **alakú integrálok**

F12. **Az első helyettesítési szabály:** Tegyük fel a következőket:

(i) a $g : I \to \mathbb{R}$ függvény deriválható az I intervallumon,

(ii) $J \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és $\mathcal{R}_g \subset J$,

(iii) az $f : J \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik primitív függvénye.

Ekkor az $f \circ g \cdot g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big)+c} \qquad (x\in J),$$

ahol F a f egy primitív függvénye.
(Gondolja meg, hogy ez az állítás speciális esetként tartalmazza az **F5.**, **F7.** és **F9.** feladatok eredményeit!)

F13. Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx,\ I:=\mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\ I:=\mathbb{R}^+;$

(c) $\displaystyle\int (6x+2)\sin(3x^2+2x-1)\,dx,\ I:=\mathbb{R};$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx,\ I:=\mathbb{R}^+;$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx,\ I:=\big(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big);$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx,\ I:=\big(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\big).$

1.2.3. Integrálás „ügyesen”

F14. Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x-2}\,dx, \quad I := (2, +\infty);$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right);$ (f) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right);$

(g) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (h) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(i) $\displaystyle\int \sin 3x \cdot \cos 7x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (j) $\displaystyle\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx, \quad I := (0, \pi);$ (l) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx, \quad I := \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right).$

1.2.4. Parciális integrálás

F15. **Parciális integrálás:** Tegyük fel, hogy az f és a g függvények deriválhatók az I intervallumon és $f'g$-nek van primitív függvénye. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye az I intervallumon és

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx} \qquad (x \in I).$$

F16. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott I intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (b) $\displaystyle\int x^2 \sin 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(c) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{ch} 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(f) $\displaystyle\int \ln x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 3x\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(h) $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (i) $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}\,dx, \quad I := \mathbb{R};$

(j) $\displaystyle\int x \ln^2 x\,dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$ (k) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx, \quad I := (-1,1);$

(l) $\displaystyle\int \cos x \ln(\sin x)\,dx, \quad I := (0,\pi).$

1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

F17. A második helyettesítési szabály: Tegyük fel a következőket:

(i) I és J $\mathbb{R}$-beli intervallumok,

(ii) $g : I \to J$ egy bijekció (tehát g-nek van inverze) és $g \in D(I)$,

(iii) $f : J \to \mathbb{R}$ és az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek létezik primitív függvénye az I intervallumon.

Ekkor az f függvénynek is létezik primitív függvénye a J intervallumon és

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)}} \qquad (x \in J).$$

(Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x = g(t)$ *helyettesítést alkalmazzuk.*)

F18. Állítsa elő helyettesítéses integrálással a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx \ \ (x \in (-1,1));$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx \ \ (x \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx \ \ (x > 1);$ (d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-3x+3}\,dx \ \ (x \in \mathbb{R}).$

1.2.6. Racionális függvények integrálása

Racionális függvénynek nevezzük két polinom hányadosát, azaz az

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

alakú függvényeket, ahol P és Q polinomok.

• A három alaptípus integrálása

Először azt jegyezzék meg, hogy az alábbi három típusú racionális függvény primitív függvényét hogyan lehet meghatározni.

1. alaptípus:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \qquad \big(x \in (\alpha, +\infty)\big),$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ adott számok. Ez egy *alapintegrál*:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx = \begin{cases} \ln(x-\alpha)+c, & \text{ha } n=1 \\ \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}+c, & \text{ha } n=2,3,\dots \end{cases}$$

2. alaptípus:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$(x \in I, \quad \text{ahol } I \text{ egy olyan intervallum, amelyen } ax^2+bx+c>0),$$

azaz *a számlálóban a nevező deriváltja szerepel*; az integrandus tehát $\frac{f'}{f}$ alakú. Ennek is tudjuk már a primitív függvényét:

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \ln(ax^2+bx+c)+C \qquad (x \in I).$$

3. alaptípus:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \text{ahol } b^2-4ac<0 \ \text{ és } \ x \in \mathbb{R}.$$

(A nevezőben levő másodfokú polinomnak nincs valós gyöke, ezért az integrandus az egész $\mathbb{R}$-en értelmezve van.) A számláló tehát egy *tetszőleges elsőfokú polinom, a nevező pedig olyan másodfokú polinom, aminek nincs valós gyöke*. Ez már nehezebb (!!!). A mindig alkalmazható eljárást a **(d)** feladatban mutatjuk be.

F19. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx, \quad x>3;$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx, \quad x<3;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx,\quad I:=\mathbb{R};$ (d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx,\quad I:=\mathbb{R};$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx,\quad I:=\mathbb{R};$ (f) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-x+5}\,dx,\quad I:=\mathbb{R};$

(g) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2-2x+7}\,dx,\quad I:=\mathbb{R}.$

F20. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

Határozza meg az $f(x) := \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény primitív függvényét.

• Parciális törtekre bontás módszere

Tetszőleges $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionális függvény primitív függvényének meghatározását az a fontos *észrevétel* teszi lehetővé, hogy **minden ilyen tört egyszerű alakú törtek** (az ún. *parciális törtek*) **összegére bontható**. Ennek az eljárásnak az egyes lépései a következők:

1. lépés: A $\frac{P(x)}{Q(x)}$ törtet egy polinomnak és egy olyan racionális törtnek az összegeként írjuk fel, amelyben a számláló fokszáma már **kisebb**, mint a nevező fokszáma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)},$$

ahol $T(x)$ és $P^*(x)$ polinomok, de $P^*(x)$ fokszáma kisebb, mint $Q(x)$ fokszáma. Ezt sok esetben egyszerű átalakításokkal, az általános esetben pedig *polinomosztással* végezhetjük el.

Például:

$$\frac{2x^4+x^2+2x+1}{x^3+1} = 2x + \frac{x^2+1}{x^3+1};$$

$$\frac{x^3+5x^2+6x+7}{x^2-1} = \quad (\text{az } x^3+5x^2+6x+7 = (x+5)(x^2-1)+7x+12 \text{ alapján})$$

$$= x+5+\frac{7x+12}{x^2-1}$$

2. lépés: Itt már feltesszük, hogy a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ törtben a $P(x)$ fokszáma kisebb, mint $Q(x)$ fokszáma. A nevezőben levő polinomot (ameddig csak tudjuk) **szorzatra alakítjuk**. (Emlékezzenek a korábban megismert technikákra!!!)

Például:

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4);\\
Q(x) &= x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1);\\
Q(x) &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3;\\
Q(x) &= 2x^3 - 7x^2 + x + 10 = (x-2)(x+1)(2x-5);\\
Q(x) &= 1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2).
\end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy a felbontásban elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei.

Általában

is bizonyítható, hogy minden $Q(x)$ valós együtthatós polinomot fel lehet írni valós együtthatós első- és másodfokú tényezők szorzataként, ahol a másodfokú tényezőknek már nincsenek valós gyökeik. (Adott $Q(x)$ polinom esetén egy ilyen felbontás meghatározása nem mindig egyszerű feladat!!!)

3. lépés: a parciális törtekre bontás. A nevezőtől függően keressük az egyszerű alakú törteket mégpedig „határozatlan” együtthatókkal.

Például:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x-4)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-4};\\
\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1};\\
\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Itt vegyék észre, hogy az elsőfokú tényezők esetén a számlálóban egy *állandót*, a másodfokú tényezők esetén pedig a számlálóban egy *elsőfokú polinomot* kell venni.

Általában:

Ha a nevezőben szereplő $Q(x)$ polinomban az $(x-r)$ elsőfokú tényező az m-edik hatványon szerepel, akkor ehhez a tényezőhöz

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

alakú törtek tartoznak.

Ha a nevezőben szereplő $Q(x)$ polinomban a (x^2+px+q) másodfokú tényező (ez tehát már egy olyan polinom, aminek nincs valós gyöke, mert a p^2-4q diszkriminánsa negatív) az n-edik hatványon szerepel, akkor ehhez a tényezőhöz

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

alakú törtek tartoznak.

Az $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ racionális tört az ilyen parciális törtek összege.

Az A_i, B_i, C_i együtthatók meghatározására egy „természetes” módszer kínálkozik: a jobb oldalon hozzunk közös nevezőre, majd a számlálót x hatványai szerint rendezzük. Az így adódó tört számlálója egyenlő a bal oldalon levő tört számlálójával. Tudjuk már azt, hogy két polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő együtthatói megegyeznek. A két oldal számlálójában az együtthatók egyenlőségéből a határozatlan együtthatókra egy egyenletrenszert kapunk. Ennek megoldásai a keresett A_i, B_i, C_i együtthatók.

F21. Parciális törtekre bontással számítsa ki a következő határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx,\quad I:=(2,4);$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx,\quad I:=(-1,1);$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx,\quad I:=(1,+\infty);$

(d) $\displaystyle\int \frac{11-x}{6x^2+x-2}\,dx,\quad I:=(1,+\infty);$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx,\quad I:=(-1,+\infty);$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx,\quad I:=\mathbb{R}^+;$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx,\quad I:=(-1,+\infty).$

1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\, dx$ **alakú integrálok**,

ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ezekben a gyökös kifejezést *egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk.* Pontosabban: legyen

$$t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

A $x = g(t)$ helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből az x-et kifejezzük, majd a második helyettesítési szabályt alkalmazzuk.

F22. Alkalmas helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx \quad (x>0);$ (b) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx \quad (x>0);$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\, dx \quad (x>\tfrac{3}{2});$ (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\, dx \quad (x<0).$

- $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ **alakú integrálok**,

ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

helyettesítést, azaz az $x = 2\operatorname{arctg} t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazzuk, és felhasználjuk az alábbi azonosságokat:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Mivel

$$g'(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad (t\in\mathbb{R}),$$

ezért a g függvény szigorúan monoton növekedő, ezért van inverze és az a $t = g^{-1}(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $(x \in (-\pi, \pi))$ függvény.

F23. Alkalmas helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx \quad (0 < x < \pi);$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx \quad (-\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2});$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx \quad \left(-\tfrac{\pi}{2} < x < \pi\right);$

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \quad (-\pi < x < \pi);$

(e) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx \quad (0 < x < 2\pi).$

• $\int S\,(e^x)\;dx$ **alakú integrálok**,

ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$t = e^x$$

helyettesítést, azaz az $x = \ln t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazzuk. Mivel $g'(t) = \frac{1}{t} > 0$, ha $t > 0$, ezért g szigorúan növekedő, ezért van inverze, és az a $t = e^x = g^{-1}(x)$ $(x > 0)$ függvény.

F24. Alkalmas helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx \quad (x > \ln 2);$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx \quad (x \in \mathbb{R});$

2. A határozott integrál

2.1. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

F25. A Newton–Leibniz-tétel felhasználásával számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; (d) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$;

(e) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$; (f) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$; (h) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

2.2. A határozott integrál alkalmazásai

Síkidom területe

Ha a korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $f(x) \geq 0$ ($x \in [a,b]$), akkor az f grafikonja alatti

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét így *értelmezzük:*

$$t(A) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha $f \leq 0$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor a

$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

síkidom területe:

$$t(B) := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

F26. Határozza meg az R sugarú kör területét.

F27. Számolja ki az $y = x - 1$ egyenletű egyenes és a az $y^2 = 2x + 6$ egyenletű parabola által közrezárt síkidom területét.

F28. Határozza meg az $y = x^4$ és az $y = 4 - x^2$ görbék által meghatározott síkidom területét.

F29. Határozza meg az $y = x^4$ és az $y = 3x^2 - 2$ görbék által meghatározott síkidom területét.

F30. Számítsa ki az alábbi síkbeli halmazok területét:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4x - x^2\}$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{3}{2} \le x \le e, \quad 0 \le y \le \ln x\}$.

Síkbeli görbe ívhossza

Legyen Γ az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény grafikonja. Ekkor a Γ görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(t)\big]^2}\, dt.$$

F31. Számítsa ki az R sugarú kör kerületét.

F32. Határozza meg az alábbi függvények grafikonjának a hosszát:

(a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad (0 \le x \le 4)$;

(b) $f(x) = \ln\big(\cos x\big) \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{3})$.

Forgástest térfogata

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és tegyük fel, hogy $f \ge 0$ az $[a, b]$ intervallumon. Az f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b, \ y^2 + z^2 \le f(x)\}$$

forgástest térfogata:

$$V(H) := \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

F33. Számítsa ki az R sugarú gömb térfogatát.

F34. Határozza meg az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát:

(a) $f(x) := 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ $(x \in [-2,2])$;

(b) $f(x) := \sin^2 x$ $(x \in [0,\pi])$;

(c) $f(x) := xe^x$ $(x \in [0,1])$.

Forgástest felszíne

Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény és tegyük fel, hogy $f \geq 0$ az $[a,b]$ intervallumon. Az f grafikonjának az x-tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 = f(x)\}$$

forgásfelület felszíne:

$$F(H) := 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

F35. Számítsa ki az R sugarú gömb felszínét.

F36. Határozza meg az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest felszínét:

(a) $f(x) := \sqrt{x}$ $(x \in [1,4])$;

(b) $f(x) := x^2$ $(x \in [0,1])$.

II. rész

Megoldások

1. A határozatlan integrál (primitív függvények)

1.1. A definíciók egyszerű következményei

M1. **(a)** $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c \quad \big(x \in (0,+\infty)\big);$

(b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(-x) + c \quad \big(x \in (-\infty,0)\big);$

(c) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \; -\operatorname{ctg} x + c;$

(d) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c.$

M2. **(a)** $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ és $\sin \frac{3}{4}\pi + c = 0 \implies c = -\frac{\sqrt{2}}{2};$

$$\int\limits_{\frac{3}{4}\pi} \cos x\,dx = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c$ és $\frac{3}{2}\sqrt[3]{8^2} + c = 0 \implies c = -6;$

$$\int\limits_{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} - 6.$$

M3. **(a)** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = f(x) = \sqrt{x} + c$ és $f(4) = 1 \;\Rightarrow$
$\sqrt{4} + c = 1 \Leftrightarrow 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -1,$ *azaz* $f(x) = \sqrt{x} - 1.$

(b) $f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x}\,dx = f(x) = \ln(1+x) + c$ *és* $f(0) = 2 \Rightarrow$
$\ln(0+1) + c = 2 \Leftrightarrow 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$, azaz $f(x) = \ln(x+1) + 2.$

(c) $f''(x) = x \Rightarrow \int x\,dx = f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$ *és* $f'(0) = 2 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + c_1 = 2 \Leftrightarrow$
$c_1 = 2$ *és* $f'(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \Rightarrow \int (\frac{x^2}{2} + 2)\,dx = f(x) =$

$\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+2x+c_2$ *és* $f(0)=-3 \Rightarrow \dfrac{0^3}{6}+2\cdot 0+c_2=-3 \Leftrightarrow c_2=-3$ *és*
$f(x)=\dfrac{x^3}{6}+2x-3.$

(d) $f''(x)=\dfrac{1}{x^2} \ \Rightarrow \ \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx = f'(x) = -\frac{1}{x}+c_1$ és $f'(2)=0 \ \Rightarrow$
$-\dfrac{1}{2}+c_1=0 \ \Leftrightarrow \ c_1=\dfrac{1}{2}$ és $f'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2} \ \Rightarrow \ \displaystyle\int\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\Big)\,dx =$
$f(x)=-\ln x+\dfrac{x}{2}+c_2$ és $f(1)=0 \ \Rightarrow \ -\ln 1+\dfrac{1}{2}+c_2=0 \ \Leftrightarrow \ c_2=-\dfrac{1}{2}$
és $f(x)=-\ln x+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}.$

(e) $f''(x)=3e^x+5\sin x \Rightarrow \displaystyle\int (3e^x+5\sin x)\,dx = f'(x) =$
$=3e^x-5\cos x+c_1$ *és* $f'(0)=2 \Rightarrow 3e^0-5\cos 0+c_1=2 \Leftrightarrow$
$c_1=4$ *és* $f'(x)=3e^x-5\cos x+4 \Rightarrow \displaystyle\int (3e^x-5\cos x+4)\,dx = f(x) =$
$=3e^x-5\sin x+4x+c_2$ *és* $f(0)=1 \Rightarrow 3e^0-5\sin 0+4\cdot 0+c_2=1 \Leftrightarrow$
$c_2=-2$ *és* $f(x)=3e^x-5\sin x+4x-2.$

(f) $f'''(x)=\sin x \Rightarrow \displaystyle\int \sin x\,dx = f''(x) = -\cos x+c_1$ *és* $f''(0)=1 \Rightarrow$
$-\cos 0+c_1=0 \Leftrightarrow c_1=1$ *és* $f''(x)=-\cos x+1 \Rightarrow \displaystyle\int (1-\cos x)\,dx =$
$=f'(x)=x-\sin x+c_2$ *és* $f'(0)=1 \Rightarrow 0-\sin 0+c_2=1 \Leftrightarrow$
$c_2=1$ *és* $f'(x)=x-\sin x+1 \Rightarrow \displaystyle\int (x-\sin x+1)\,dx = f(x) =$
$\frac{x^2}{2}+\cos x+x+c_3$ *és* $f(0)=1 \Rightarrow \frac{0^2}{2}+\cos 0+0+c_3=1 \Leftrightarrow$
$c_3=0$ *és* $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\cos x+x.$

1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

1.2.1. Alapintegrálok

M4. **(a)** $\displaystyle\int \big(6x^2-8x+3\big)\,dx \ = 2x^3-4x^2+3x+c,$

(b) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c,$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx = \int x^{\frac{7}{8}}\, dx = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c,$

(e) $\displaystyle\int \left(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2\int x\, dx + 5\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x^2 + 5\arcsin x + c.$

1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

- $\int \frac{f'}{f}$ **alakú integrálok**

M5. Az $\frac{f'}{f}$ függvény egy primitív függvénye $\ln f$, mert $\big(\ln f\big)' = \frac{f'}{f}$. Mivel $\frac{f'}{f}$ intervallumon értelmezett, ezért minden primitív függvénye $\ln f$-től egy konstansban különbözik.

M6. **(a)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+27}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+27) + c,$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln(\cos x) + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+5}\, dx = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + c,$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \ln(-\ln x) + c,$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \ln\ln(x) + c.$

- $\int f^\alpha \cdot f'$ **alakú integrálok**

M7. **M5**-höz hasonlóan.

M8. **(a)** $\displaystyle\int x^2(2x^3+4)^{2004}\, dx = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)^{2004} = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^{2005}}{2005} + c,$

(b) $\int x^2\sqrt{6x^3+4}\,dx = \frac{1}{18}\int 18x^2(6x^3+4)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{18}\frac{(6x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c,$

(c) $\int e^x(1-e^x)^3\,dx, = -\int(-e^x)(1-e^x)^3\,dx = -\frac{(1-e^x)^4}{4} + c,$

(d) $\int \sin^3 x\cos x\,dx = \int \sin^3 x(\cos x)\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c,$

(e) $\int \frac{\ln^5 x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\ln^5 x\,dx = \frac{\ln^6 x}{6} + c,$

(f) $\int\sqrt{\frac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}}\,dx, = \int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arsh}^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{\operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{3} + c,$

(g) $\int\frac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}}\,dx = \int(4x+7)\cdot(2x^2+7x+5)^{-\frac{5}{4}}\,dx =$

$= -\frac{4}{\sqrt[4]{2x^2+7x+5}} + c,$

(h) $\int\frac{1}{\cos^2 x\sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot(\operatorname{tg} x)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c.$

- $\int f(ax+b)\,dx$ **alakú integrálok**

M9. **M5**-höz hasonlóan.

M10. **(a)** $\int(2x-3)^{10}dx = \frac{(2x-3)^{(10+1)}}{2\cdot(10+1)} + c = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + c,$

(b) $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx = \int(1-3x)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}\cdot(-3)} + c = -\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(1-3x)^4} + c,$

(c) $\int\frac{1}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$

(d) $\int\frac{1}{2-3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1-\frac{3}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arth} \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$$

(e) $$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x\right) + c,$$

(f) $$\int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arch}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}x\right) + c.$$

M11. **(a)** $$\int \frac{dx}{2x^2-12x+23} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-6x+\frac{23}{2}}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)^2+\frac{5}{2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \int \frac{1}{\frac{2}{5}(x-3)^2+1}\,dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{[\sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)]^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}(x-3)\right) + c,$$

(b) $$\int \frac{dx}{3x^2+12x+16} = \int \frac{1}{3(x^2+4x)+16}\,dx = \int \frac{1}{3(x+2)^2+4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{[\sqrt{\frac{3}{4}}(x+2)]^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} + c,$$

(c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} = \int \frac{1}{\sqrt{3(x+2)^2+18}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{18}} \int \frac{1}{\sqrt{[\sqrt{\frac{3}{18}}(x+2)]^2+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arsh}\left(\sqrt{\tfrac{3}{18}}(x+2)\right) + c,$$

(d) $$\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-1)^2+5}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left[\sqrt{\frac{1}{5}}(x-1)\right]^2}}\,dx = \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{1}{5}}(x-1)\right) + c.$$

- $\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx$ **alakú integrálok**

M12. **M5**-höz hasonlóan.

M13. **(a)** $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int 2x\,\sin x^2\,dx = -\frac{\cos x^2}{2} + c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}\,dx = 2\operatorname{ch}\sqrt{x} + c,$

(c) $\displaystyle\int (6x+2)\sin(3x^2+2x-1)\,dx = -\cos(3x^2+2x-1) + c,$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+(\ln x)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + c,$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} x) + c,$

(f) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,e^{\operatorname{tg} x}\,dx = e^{\operatorname{tg} x} + c.$

1.2.3. Integrálás „ügyesen”

M14. **(a)** $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int \Big(1 - \frac{1}{1+x^2}\Big)\,dx = x - \operatorname{arctg}(x) + c,$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x-2}\,dx = \int \frac{2x-4+7}{x-2}\,dx = \int \Big(2 + \frac{7}{x-2}\Big)\,dx =$

$\displaystyle= \int 2\,dx + 7\int \frac{1}{x-2}\,dx = 2x + 7\ln(x-2) + c,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx = \int x\frac{1}{4+(x^2)^2} = \frac{1}{4}\int x\frac{1}{1+\frac{1}{4}(x^2)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + c,$

(d) $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \int [x(1+x^2) - x]\sqrt[3]{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle= \int x(1+x^2)^{1+\frac{1}{3}}\,dx - \int x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\,dx -$

$\displaystyle-\frac{1}{2}\int 2x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c,$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + c,$

(f) $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \int \Big(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\Big)\, dx =$
$= \operatorname{tg} x - x + c$,

(g) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \int \frac{1}{2}\, dx - \int \frac{\cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$,

(h) $\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x \cdot (\cos^2 x)\, dx = \int \cos x \cdot (1-\sin^2 x)\, dx =$
$= \int \cos x\, dx - \int \cos x \cdot \sin^2 x\, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$,

(i) a $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$ azonosság alapján
$\int \sin 3x \cdot \cos 7x\, dx = \int \frac{\sin 10x + \sin(-4x)}{2}\, dx =$
$= \int \frac{\sin 10x - \sin(4x)}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 10x\, dx - \frac{1}{2} \cdot \int \sin 4x\, dx =$
$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 10x}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 4x}{4} + c$,

(j) most a $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ azonosságot alkalmazzuk:
$\int \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3}\, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}) + \cos(\frac{x}{2}-\frac{x}{3})]\, dx =$
$= \frac{3}{5} \cdot \sin\frac{5}{6}x + 3\sin\frac{x}{6} + c$,

(k) $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\, dx = \int \frac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}\, dx =$
$= \int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\, dx = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + c.$

(l) alkalmazza a $\cos x = \sin\big(x + \frac{\pi}{2}\big)$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosságot, valamint az előző feladatot.

1.2.4. Parciális integrálás

M15. ...

M16. **(a)** $\int xe^{2x}\,dx = \left(f(x)=x \Longrightarrow f'(x)=1\,,\quad g'(x)=e^{2x} \Longrightarrow g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

$= x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x} + c.$

(b) $\int x^2 \sin 3x\,dx =$

$\left(f(x)=x^2 \Longrightarrow f'(x)=2x\,,\quad g'(x)=\sin 3x \Longrightarrow g(x)=\frac{-\cos 3x}{3}\right)$

$= -x^2\frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\int x\cos 3x\,dx =$

$\left(f(x)=x \Longrightarrow f'(x)=1\,,\quad g'(x)=\cos 3x \Longrightarrow g(x)=\frac{\sin 3x}{3}\right)$

$= -\frac{x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{x\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int 1\sin 3x\,dx\right] =$

$= \frac{-x^2\cos 3x}{3} + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{9}\frac{\cos 3x}{3} + c.$

(c) $\int e^x \sin x\,dx =$

$\left(f(x)=e^x \Longrightarrow f'(x)=e^x\,,\quad g'(x)=\sin x \Longrightarrow g(x)=-\cos x\right)$

$= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx =$

$\left(f(x)=e^x \Longrightarrow f'(x)=e^x\,,\quad g'(x)=\cos x \Longrightarrow g(x)=\sin x\right)$

$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx$; rendezés után kapjuk, hogy

$\int e^x\sin x\,dx = \frac{-e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + c.$

(d) $\int e^{2x}\mathrm{ch}\,3x\,dx$ parciális integrálással is meghatározható, de egyszerűbb a következő:

$\int e^{2x}\mathrm{ch}\,3x\,dx = \int e^{2x}\cdot\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\,dx = \int\left(\frac{e^{5x}}{2}+\frac{e^{-x}}{2}\right)dx =$

$= \frac{e^{5x}}{10} - \frac{e^{-x}}{2} + c;$

(e) $\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx =$

$$\left(f(x) = e^{3x+2},\ f'(x) = 3e^{3x+2};\quad g'(x) = \cos(2x+1),\ g(x) = \frac{\sin(2x+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{e^{3x+2}\sin(2x+1)}{2} - \frac{3}{2}\int e^{3x+2}\sin(2x+1)\,dx =$$
$$\left(f(x) = e^{3x+2},\ f'(x) = 3e^{3x+2};\quad g'(x) = \sin(2x+1),\ g(x) = -\frac{\cos(2x+1)}{2}\right)$$
$$= e^{3x+2}\frac{\sin(2x+1)}{2} - \frac{3}{2}\Big[\frac{-e^{3x+2}\cos(2x+1)}{2} - \int \frac{-3e^{3x+2}\cos(2x+1)}{2}\,dx\Big] =$$
$$= e^{3x+2}\frac{\sin(2x+1)}{2} + \frac{3}{4}e^{3x+2}\cos(2x+1) - \frac{9}{4}\int e^{3x+2}\cos(2x+1)\,dx,$$

rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int \cos(2x+1)e^{3x+2}\,dx = \frac{2e^{3x+2}\sin(2x+1) + 3e^{3x+2}\cos(2x+1)}{13} + c;$$

(f) $\displaystyle\int \ln x\,dx = \int 1\cdot\ln x\,dx =$

$$\left(g'(x) = 1\,,\, g(x) = x;\ f(x) = \ln x,\ f'(x) = \tfrac{1}{x}\right)$$
$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + c;$$

(g) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} 3x\,dx = \int 1\cdot\operatorname{arctg} 3x\,dx =$

$$\left(g'(x) = 1,\ g(x) = x,\quad f(x) = \operatorname{arctg} 3x,\ f'(x) = \frac{3}{1+(3x)^2}\right)$$
$$= x\operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3x}{1+(3x)^2}dx = x\operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6}\int \frac{18x}{1+9x^2}dx =$$
$$= x\operatorname{arctg} 3x - \tfrac{1}{6}\ln(1+9x^2) + c;$$

(h) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx =$

$$\left(g'(x) = x^2,\ g(x) = \tfrac{x^3}{3};\quad f(x) = \ln x,\ f'(x) = \tfrac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c;$$

(i) $\displaystyle\int x^5e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}3x^2\,x^3dx$

$$\left(g'(x) = e^{x^3}3x^2,\ g(x) = e^{x^3};\quad f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2\right)$$
$$= \frac{1}{3}\int e^{x^3}3x^2\,x^3dx = \frac{1}{3}(e^{x^3}x^3 - \int e^{x^3}3x^2\,dx) = \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1) + c.$$

(j) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx =$

$$\Big(g'(x)=x,\ g(x)=\tfrac{x^2}{2};\quad f(x)=\ln^2 x,\quad f'(x)=\tfrac{2\ln x}{x}\Big)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int\frac{x^2}{2}\frac{2\ln x}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x\,dx=$$

$$\Big(g'(x)=x,\ g(x)=\tfrac{x^2}{2};\quad f(x)=\ln x,\ f'(x)=\tfrac{1}{x}\Big)$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\Big(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx\Big)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+c.$$

(k) $\displaystyle\int\arcsin x\,dx=\int 1\cdot\arcsin x\,dx=$

$$\Big(g'(x)=1,\ g(x)=x;\quad f(x)=\arcsin x,\ f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$$

$$=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int(-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=x\arcsin x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c;$$

(l) $\displaystyle\int\cos(\ln x)\,dx=\int\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,x\,dx=$

$$\Big(g'(x)=\cos(\ln x)\frac{1}{x},\ g(x)=\sin(\ln x);\quad f(x)=x,\ f'(x)=1\Big)$$

$$=x\sin(\ln x)-\int\sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)+\int-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,x\,dx=$$

$$\Big(g'(x)=-\sin(\ln x)\frac{1}{x},\ g(x)=\cos(\ln x);\quad f(x)=x,\ f'(x)=1\Big)$$

$$=x\sin(\ln x)+x\cos(\ln x)-\int\cos(\ln x)\,dx\Longrightarrow$$

$$\int\cos(\ln x)\,dx=\frac{x\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)}{2}+c;$$

1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

M17.

M18. Az elkövetkező feladatok megoldásához az alábbi összefüggés nyújt segítséget:

$$\boxed{\int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}}$$

Itt f egy I intervallumon adott (pl. folytonos) függvény, $g : J \to I$ pedig egy szigorúan monoton (növekedő vagy csökkenő) differenciálható függvény a J intervallumon. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $x = g(t)$ *helyettesítést alkalmazzuk*. (Figyeljünk majd a g helyettesítő függvény szigorú monotonitásának az ellenőrzésére!)

(a) Most az $x = \sin t =: g(t)$ helyettesítést alkalmazzuk. Mivel $-1 \le x \le 1$, ezért, ha g-t a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon tekintjük, akkor itt g szigorúan monoton növekedő, ezért a fenti képlet alkalmazható:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt_{\big|t=\arcsin x} = \int \cos^2 t_{\big|t=\arcsin x} =$$
$$= \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right)_{\big|t=\arcsin x} + c = \frac{\mathrm{arcin}\, x}{2} - \frac{\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)}{2} + c =$$
$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$$

(b) Itt az

$$x = \operatorname{sh} t =:= g(t)\ (t \in \mathbb{R});\quad g\ \uparrow,\quad g'(t) = \operatorname{ch} t\ (t \in \mathbb{R})$$

helyetesítést alkalmazzuk:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} =$$
$$= \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}\,dt_{\big|t=\operatorname{arsh} x} = \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + \frac{t}{2}\right)_{\big|t=\operatorname{arsh} x} + c = \left(\frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t}{2} + \frac{t}{2}\right)_{\big|t=\operatorname{arsh} x} + c =$$
$$= \frac{x\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c == \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c;$$

(c) Az $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ $(x > 1)$ integrál kiszámításához alkalmazza az $x = \operatorname{ch} t =: g(t)$ $(t > 0)$ helyettesítést.

1.2.6. Racionális függvények integrálása

M19. **(a)** $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln(x-3) + c$, ha $x \in (3, +\infty)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln(3-x) + c$, ha $x \in (-\infty, 3)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + c$,

(d) $$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}\,dx = \int \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{x^2+2x+3}\right) dx =$$
$$= \ln(x^2+2x+3) + \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \ln(x^2+2x+3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)]^2+1}\,dx = \ln(x^2+2x+3) + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\tfrac{x}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) + c,$$

(e) $$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\cdot \int \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot (x+\frac{1}{2})\right]^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot (x+\frac{1}{2})\right] + c,$$

(f) $$\int \frac{x+5}{x^2-x+5}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \int \frac{2x+10}{x^2-x+5}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot [\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}\,dx \; + \; 11\cdot \int \frac{1}{x^2-x+5}\,dx] = \frac{1}{2}\cdot [\ln(x^2-x+5) \; +$$
$$+ 11\cdot \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}\,dx] = \frac{1}{2}\cdot [\ln(x^2-x+5) \; +$$
$$+ \frac{4}{19}\cdot 11\cdot \int \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{19}}(x-\frac{1}{2})]^2+1}\,dx] = \frac{1}{2}\cdot \ln(x^2-x+5) \; +$$
$$+ \frac{11\cdot\sqrt{19}}{19}\cdot \operatorname{arctg}[\tfrac{2}{\sqrt{19}}\cdot (x-\tfrac{1}{2})] + c,$$

(g) $$\int \frac{6x}{x^2-2x+7}\,dx = 3\cdot \int \frac{2x-2+2}{x^2-2x+7}\,dx = 3\cdot [\int \frac{2x-2}{x^2-2x+7}\,dx \; +$$
$$+2\cdot \int \frac{1}{(x-1)^2+6}\,dx] = 3\cdot[\ln(x^2-2x+7) + \frac{2}{6}\cdot \int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{6}}(x-1)]^2+1}\,dx] =$$
$$= 3\cdot \ln(x^2-2x+7) \; + \; \sqrt{6}\cdot \operatorname{arctg}[\tfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot (x-1)] \; + \; c.$$

M20. A feladatban megadott rekurzív formula az egyenlőség mindkét oldalának deriválásával igazolható.

Az f primitív függvényének kiszámításához először azt jegyezzük meg, hogy az $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény határozatlan integrálja $\operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$. A rekurzív formulát $n = 1$-re alkalmazva kapjuk az $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ primitív függvényét. Ennek ismeretében ismét a rekurzív formulát felhasználva $n = 2$-re adódik az $\frac{1}{(1+x^2)^3}$ $(x \in \mathbb{R})$ primitív függvénye. ■

M21. (a) Az integrandust parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \\ = \frac{(A+B)x-(4A+2B)}{(x-2)(x-4)}$$

alapján $A+B=0$, $-(4A+2B)=1$ adódik, amiből $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$ következik. Ezért

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-4)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-4}\,dx = \\ = -\frac{1}{2}\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(4-x) + c, \quad \text{ha } 2 < x < 4. \ \blacksquare$$

(b)

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \Big(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}\Big)\,dx = \dots = \\ = \int \Big(\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\Big) = \\ = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + c = \\ = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c, \qquad \text{ha } \ x \in (-1,1). \ \blacksquare$$

(c) Az ln függvény értelmezési tartományára kell figyelni! A számolások az előző feladathoz hasonlók; a változások:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \dots = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\Big) = \\ = \frac{1}{2}\Big(-\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\Big) = \\ = -\frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(1+x) + c = \\ = \ln\sqrt{\frac{1+x}{x-1}} + c, \qquad \text{ha } \ x \in (1,+\infty). \ \blacksquare$$

(d)

$$\int \frac{11-x}{6x^2+x-2}\,dx = \int \frac{11-x}{(3x+2)(2x-1)}\,dx = \int \Big(\frac{A}{3x+2} + \frac{B}{2x-1}\Big)\,dx =$$
$$= \int \Big(\frac{-5}{3x+2} + \frac{3}{2x-1}\Big)\,dx =$$
$$= -\frac{5}{3}\ln(3x+2) + \frac{3}{2}\ln(2x-1) + c \quad \text{ha } x \in (1,+\infty). \ \blacksquare$$

(e)

$$\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{3x-5}{(x+1)^2}\,dx = \int \Big(\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}\Big)\,dx = \cdots =$$
$$= \int \Big(\frac{3}{x+1} + \frac{-8}{(x+1)^2}\Big)\,dx =$$
$$= 3\ln(x+1) + \frac{8}{x+1} + c \quad \text{ha } x \in (-1,+\infty). \ \blacksquare$$

(f) Az integrandus így bontható fel:

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)} =$$
$$= \frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)}$$

alapján $A+B=0$, $C=0$, $4A=1$, azaz $A=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$. Ezért

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) + c, \qquad \text{ha } x > 0. \ \blacksquare$$

(g)

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx = \int \Big(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\Big)\,dx =$$
$$= \cdots = \Big(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\Big)\,dx =$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = (*)$$

Az $\frac{x-2}{x^2-x+1}$ a 3. alaptípusnak megfelelő törtfüggvény. A primitív függvénye:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}(x-1)^2}\right]}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c = \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \quad \text{ha } x\in(-1,+\infty).
\end{aligned}$$

Ezért

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c \quad \text{ha } x\in(-1,+\infty). \quad \blacksquare$$

1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

M22. **(a)** Legyen $t=\sqrt{x}$. A helyettesítő függvény

$$x = t^2 =: g(t) \quad (t>0).$$

Mivel $g'(t) = 2t > 0$, ha $t>0$, ezért g szigorúan monoton növekedő, következésképpen a második helyettesítési szabály alkalmazható:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \\
&= 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = \\
&= 2\left(t-\ln(1+t)+c\right)\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c,
\end{aligned}$$

ha $x > 0$. ■

(b) $t = \sqrt{x}$, $x > 0$; $x = t^2 =: g(t)$ $(t > 0)$ és $g'(t) = 2t$ $(t > 0)$ miatt g szigorúan monoton növekedő. Így

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t^2 - t}{t^2 + t} \cdot 2t\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\int \frac{(t^2 - 1) - (t + 1) + 2}{t + 1}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\int \Big[(t - 1) - 1 + \frac{2}{t + 1}\Big]\,dt\Big|_{t=\sqrt{x}} =$$

$$= 2\Big[\frac{t^2}{2} - 2t + 2\ln(t + 1)\Big] + c\Big|_{t=\sqrt{x}} =$$

$$= x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x} + 1) + c, \qquad (x > 0) \ ■$$

(c) Tudjuk, hogy a

$$t = \sqrt{\frac{2x - 3}{x}} = \sqrt{2 - \frac{3}{x}}$$

helyettesítés racionális törtfüggvény integrálására vezet. Ha $x > \frac{3}{2}$, akkor nyilván $0 < t < \sqrt{2}$, ami azt jelenti, hogy az

$$x = \frac{3}{2 - t^2} =: g(t) \qquad (t \in (0, \sqrt{2}))$$

helyettesítő függvényt alkalmazzuk. Mivel

$$g'(t) = \frac{6t}{(2 - t^2)^2} > 0 \qquad \big(t \in (0, \sqrt{2})\big),$$

ezért g szigorúan monoton növekedő, így a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályunk valóban alkalmazható:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x - 3}{x}}\,dx = \int \frac{2 - t^2}{3} \cdot t \cdot \frac{6t}{(2 - t^2)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}.$$

Mivel

$$\int \frac{2 - t^2}{3} \cdot t \cdot \frac{6t}{(2 - t^2)^2}\,dt = \int \frac{2t^2}{2 - t^2}\,dt = \int \left(-2 + \frac{4}{(\sqrt{2} - t)(\sqrt{2} + t)}\right)dt =$$

$$= -2t + \frac{4}{2\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2} - t} + \frac{1}{\sqrt{2} + t}\right)dt = -2t + \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} + c,$$

ezért

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx = -2\sqrt{\frac{2x-3}{x}} + \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x}-\sqrt{2x-3}} + c \quad (x > \frac{3}{2}).$$

M23. **(a)**

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = (\ln t + c)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c, \quad \text{ha} \;\; 0 < x < \pi. \;\blacksquare$$

(b) ... ■

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =\\ &= \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =\\ &= \int \frac{1}{1+t}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = (\ln(t+1)+c)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =\\ &= \ln\big(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\big)+c, \qquad \text{ha } x \in \big(-\tfrac{\pi}{2},\pi\big). \;\blacksquare\end{aligned}$$

(d) ... ■

(e)

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \int \frac{t^2+1+2t}{t^2(1+t^2)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{t^2}\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + 2\int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = (*)$$

Most az $\frac{1}{t(1+t^2)}$ törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} = \frac{(A+B)t+Ct+A}{t(1+t^2)}$$

alapján $C=0,\ A=1,\ B=-1$, tehát

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(-\frac{1}{t} + 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)\right)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \\
&= \left(-\frac{1}{t} + 2\ln t - \ln(1+t^2) + c\right)\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \\
&= -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) + x \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

M24. (a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{e^{2x}-4}\,dx &= \int \frac{4}{t^2-4}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = 4\int\frac{1}{t(t-2)(t+2)}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= 4\int\left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{t+2}\right)dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \cdots = \\
&= 4\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{t} + \frac{\frac{1}{8}}{t-2} + \frac{\frac{1}{8}}{t+2}\right)dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \left(-\ln t + \frac{1}{2}\ln(t-2) + \frac{1}{2}\ln(t+2) + c\right)\Big|_{t=e^x} = \\
&= -x + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}-4\right) + c, \quad \text{ha} \quad x > \ln 2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

(b)

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}\,dx = -2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + 4\ln(e^x+2) + c \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx &= \int \frac{t+4}{t^2+4t+3}\cdot\frac{1}{t}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \int \frac{(t+4)}{t(t+1)(t+3)}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \cdots \\
&= \int \frac{\frac{4}{3}}{t} + \frac{-\frac{3}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{6}}{t+3}\,dt\Big|_{t=e^x} = \\
&= \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}\ln\big(e^x+1\big)\frac{1}{6}\ln\big(e^x+3\big) + c \qquad (x \in \mathbb{R}) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2. A határozott integrál

2.1. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

M25. **(a)** $$\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,dx = \arcsin\frac{x-2}{3} + c,$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx = \left[\arcsin\frac{x-2}{3}\right]_2^5 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

(b) $$\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = -\cos(\ln x) + c, \qquad \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = 1 - \cos 1. \quad \blacksquare$$

(c) Mivel

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx =$$
$$= \ln\frac{x-2}{x-1} + c, \quad \text{ha} \quad x > 2,$$

ezért

$$\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx = \left[\ln\frac{x-2}{x-1}\right]_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}. \quad \blacksquare$$

(d) Mivel

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+2) + c, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R},$$

ezért

$$\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \Big[\operatorname{arctg}(x+2)\Big]_{-2}^{\sqrt{3}-2} =$$
$$= \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{3}. \quad \blacksquare$$

(e) Parciális integrálással

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

adódik, ezért

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = \left[\frac{\sin x - \cos x}{2}e^x\right]_0^\pi = \frac{\sin\pi - \cos\pi}{2}e^\pi - \frac{\sin 0 - \cos 0}{2}e^0 = $$
$$= \frac{e^\pi + 1}{2}. \quad \blacksquare$$

(f) Parciális integrálással

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c \qquad (x > 0)$$

adódik, ezért

$$\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = \big(e\ln e - e\big) - \big(1\ln 1 - 1\big) = 1. \quad \blacksquare$$

(g) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt{3x+1}, \quad 0 \le x \le 5, \quad 1 \le t \le 4$$

helyettesítést, azaz tekintsük az

$$x = \frac{t^2-1}{3} =: g(t) \quad (1 \le t \le 4)$$

helyettesítő függvényt. A g függvény szigorúan monoton növekedő az $[1,4]$ intervallumon, deriválható és $g'(t) = \frac{2}{3}t$ $(t \in [1,4])$, ezért a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt alkalmazhatjuk:

$$\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}} = \int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2-1)+t}\cdot\frac{2}{3}t\,dt\Big|_{t=\sqrt{3x+1}}.$$

Mivel

$$\int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2-1)+t}\cdot\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{2t^2+3t-2}\,dt = \int \frac{2t}{(2t-1)(t+2)}\,dt =$$
$$= \int \left[\frac{A}{2t-1} + \frac{B}{t+2}\right] dt = \cdots =$$
$$= \frac{2}{5}\int \frac{1}{2t-1}\,dt + \frac{4}{5}\int \frac{1}{t+2}\,dt = \frac{1}{5}\ln(2t-1) + \frac{4}{5}\ln(t+2) + C,$$

ezért

$$\int \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{5}\ln\bigl(2\sqrt{3x+1}-1\bigr) + \frac{4}{5}\ln\bigl(\sqrt{3x+1}+2\bigr) + C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}\,dx = \frac{1}{5}\Bigl[\ln\bigl(2\sqrt{3x+1}-1\bigr) + 4\ln\bigl(\sqrt{3x+1}+2\bigr)\Bigr]_0^5 = \frac{\ln 112}{5}.$$

(h) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Most a

$$t = \sqrt{e^x-1}, \quad 0 \le x \le \ln 2, \quad 0 \le t \le 1$$

helyettesítéssel *próbálkozunk*, azaz vesszük az

$$x = \ln(1+t^2) =: g(t) \quad (0 \le t \le 1)$$

helyettesítő függvényt. A g függvény deriválható és $g'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ $(t \in [0,1])$, g tehát szigorúan monoton növekedő. A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály tehát alkalmazható:

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\int\Bigl(1-\frac{1}{1+t^2}\Bigr)\,dt\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} =$$

$$= \Bigl(2t - 2\operatorname{arctg} t\Bigr)\Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1} + C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \Bigl[2\sqrt{e^x-1} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\Bigr]_0^{\ln 2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$