



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
INFORMATIKAI KAR  
KOMPUTERALGEBRA TANSZÉK

---

## Sorozatok átlagolásának dinamikai rendszerei

TDK dolgozat

*Témavezető:*  
Burcsi Péter  
adjunktus

*Készítette:*  
Lucz Loránd, Sótér Péter  
nappali tagozat  
programtervező informatikus

Budapest, 2011.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Dinamikai rendszerek</b>	<b>3</b>
2.1. Logisztikus leképezés . . . . .	3
2.2. Átlag-medián sorozatok . . . . .	5
<b>3. Megfigyelések</b>	<b>8</b>
3.1. $(0, x, 1)$ -ből induló sorozatok . . . . .	8
3.2. $(-1, 0, x, 1, 2)$ -ből induló sorozatok . . . . .	11
3.3. Az átlag-medián sorozat általánosítása tercilissel . . . . .	12
3.4. A átlag-medián sorozat általánosítása intervallum- aritmetikával . . . . .	14
<b>4. Fontosabb függvények</b>	<b>16</b>
<b>5. Összefoglalás</b>	<b>18</b>

# 1. Bevezetés

Néhány századdal ezelőtt az emberiség még élhetett azzal a feltételezéssel, hogy a minket körülvevő világ működése valamilyen komplex logika alapján valósul meg és amennyiben elegendő tudással rendelkezünk erről a működésről, úgy minden előre megjósolható. Ez, a tudomány akkori állása szerint logikusnak tűnő feltételezés. Henri Poincaré<sup>1</sup> kutatásai alapján azonban – aki három égitest kölcsönös mozgását próbálta megjósolni newtoni mozgásegyenletekkel – az ismert mechanikai törvények ellenére hosszabb távon egyáltalán nem jósolható meg.

A Poincaré által vizsgált problémát a legegyszerűbben a következő módon képzelhetjük el: egy bolygó két csillag kölcsönös vonzásában mozog úgy, hogy elsőként az egyik, majd a másik csillagot kerüli meg. Poincaré kutatásai alapján tudjuk, hogy ennek a háromtest-problémának, valamint az ennél általánosabb esetnek – amikor háromnál több égitest viselkedését vizsgáljuk – nincs analitikus megoldása. Ma már rendelkezésünkre állnak olyan szoftverek, amelyekkel lehetséges az égitestek mozgását leíró differenciálegyenlet-rendszerek numerikus integrálása. Az ilyen módon számolt eredmények is alátámasztják Poincaré megfigyeléseit, azaz hogy minél nagyobb időintervallumon próbáljuk meg előrejelezni a bolygók későbbi helyzetét, annál bizonytalanabb eredményeket kapunk. Nagy valószínűséggel azt sem fogjuk tudni megmondani, hogy épp melyik csillag körül keringenek. Ez a jelenség azonban nem módszereink pontatlanságából fakad, hanem a szakirodalomban káosz-ként nevezett jelenség okozza.

Magát a "káosz" kifejezést azonban sok helyen félre értelmezik, mivel a szó köznapiságát "zűrzavar", ellentétben a szó eredeti görög jelentésével ami "üresség". A dolgozat későbbi részeiben "káoszra" mint a dinamikus rendszerekben előforduló nehezen megjósolható, de sztochasztikus törvényeknek engedelmeskedő jelenségre gondolunk.

A káosz tehát egy szabályok által irányított szabálytalan viselkedés. Lényege, hogy az ismert törvényekkel nem tudjuk egy kaotikus rendszer viselkedését hosszú távon előre jelezni. A rendszer mozgása önmagát sohasem ismétli és nem periodikus. Arra a kérdésre, hogy mi a káosz és mi nem az, a [4] cikkben található választ az olvasó.

---

<sup>1</sup>Henri Poincaré: (1854–1912) francia matematikus és elméleti csillagász.

Az egyszerű dinamikus rendszerek is mutathatnak bonyolult viselkedést. Vegyük az alábbi példát:

1. Megadjuk a kezdeti feltételeket a számítógépen. Az előzőekben ismertetett probléma alapján ez lehet például az égitestek helyzete és sebessége.
2. Az ismert mozgásegyenletekből felírt közelítő formulákkal teszünk egy – lehetőleg nagyon kicsi – lépést egy későbbi időpontra.
3. A kapott eredményekből kiindulva újabb és újabb lépéseket teszünk, ezzel közelítve a várható értéket.

Az ilyen jellegű feladatok megvalósításához komoly szakértelem szükséges. A kaósszal kapcsolatos fogalmak lényege ellenben jóval egyszerűbb számításokat elvégezve is megérthető [2].

## 2. Dinamikai rendszerek

### 2.1. Logisztikus leképezés

A logisztikus leképezést elsőként Pierre Verhulst írta le a [6, 7] cikkekben, de népszerűségét valójában Robert May [2] cikkének köszönheti. A leképezést eredetileg időszakosan szaporodó kártevők populációinak vizsgálatára írták fel, feltételezve az alábbiakat:

- nincs átfedés a kártevők egyes generációi között,
- az új generáció nagysága növekszik, ha az azt megelőző populáció száma kicsi, és csökken, ha nagy.

Ezek alapján a logisztikus leképezés felírható a következő alakban:

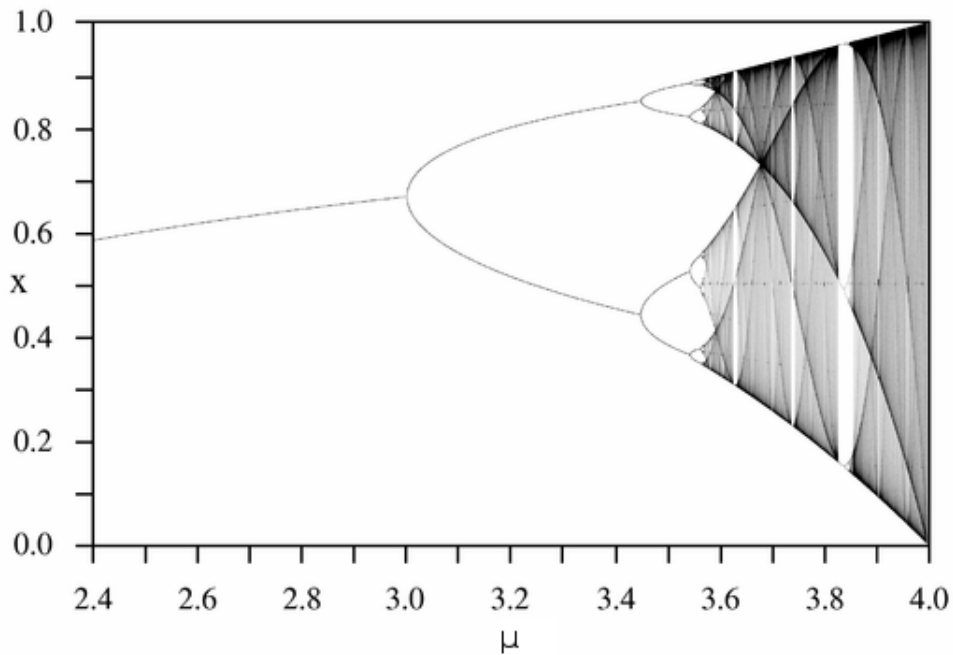
$$F_{\mu}(x) = \mu x(1 - x)$$

ahol  $x \in [0, 1]$  és a jelenlegi populációnak a maximális populációhoz viszonyított arányát adja meg,  $\mu$  pedig a kártevők szaporodásának és elpusztulásának aránya.

A logisztikus leképezés egyik sajátossága, hogy az  $1 < \mu < 4$  esetben a megoldás mindig a  $0 < x < 1$  intervallumban marad. A  $\mu < 1$  esetben az összes megoldás 0-hoz tart, azaz a populáció kihal. A leképezés vizsgálatára elérhető egy Gáspár Vilmos által készített excel makró az interneten<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>[http://www.kfki.hu/chemonet/hun/eloado/gaspar/logistic\\_map\\_movie.xls](http://www.kfki.hu/chemonet/hun/eloado/gaspar/logistic_map_movie.xls)

A leképezés bifurkációját<sup>3</sup> szemlélteti az 1. ábra<sup>4</sup>. Ahogy az ábrán is látható a leképezés működése a  $\mu$  érték függvényében különböző tartományokra osztható.



1. ábra. A logisztikus leképezés bifurkációja

A 2. ábrán lévő táblázatból leolvasható, hogy bizonyos tartományokban teljesen kaotikussá válnak az eredmények, ezen kívül megfigyelhető az is, hogy a nem kaotikus részekben az értékek önhasonlóságot mutatnak. Ez a két tulajdonság megfigyelhető a legtöbb dinamikus rendszer esetén, ahogy a dolgozatunk témájául szolgáló átlag-medián sorozatok esetében is.

k	megfigyelt viselkedés
3,0000	a fixpont instabilissá válik, megjelenik az oszcilláció
3,4500	a perióduskettőződés kezdete
3,5700	a $2n$ periódusú oszcillációk torlódási pontja, a kaotikus tartomány kezdete
3,6786	az első páratlan periódusú oszcilláció megjelenése
3,8284	a háromperiódusú oszcilláció megjelenése
4,0000	a kaotikus tartomány vége

2. ábra. A logisztikus leképezés tartományai

<sup>3</sup>szétválás, kettéágazás, kettéválasztás

<sup>4</sup>[http://www.wikinfo.org/upload/7/7d/LogisticMap\\_BifurcationDiagram.png](http://www.wikinfo.org/upload/7/7d/LogisticMap_BifurcationDiagram.png)

## 2.2. Átlag-medián sorozatok

Az átlag-medián sorozatokkal a szakirodalomban elsőként Shultz és Shiflett 2005-ös cikkében [5] találkozhatunk. Ők az alábbi módon írták le az alapvető problémát; induljunk ki a  $(6, 78, 46)$  számhármassból. Ezek mediánja 46. Válasszunk egy negyedik számot úgy, hogy az így kapott sorozat számtani közepe 46 legyen. Ez a szám az 54 lesz. Ismételjük meg a folyamatot. 15 lépést követően az alábbi sorozatnál járunk:

$$6, 78, 46, 54, 66, 74, 96, 108, 102, 110, 96, 100, 195, 213, 96, 96, 96, 96$$

A kapott sorozatot folytatva mindig ugyanazt a konstans értéket kapjuk. Vegyünk egy újabb példát. Ezúttal indítsuk a sorozatot a  $(25, -7, 29)$  értékekből. 14 iterációt elvégezve az alábbi sorozatot kapjuk:

$$25, -7, 29, 53, 35, 39, 50, 56, 53, 57, 99.5, 110.5, 69.5, 72.5, 53, 53, 53$$

Erről a sorozatról is látható, hogy a 14. lépés után bármennyi lépést teszünk ugyanazt a konstans értéket kapjuk. Más értékekkel indítva a folyamatot szintén erre az eredményre jutunk.

*Definíció:* Egy átlag-medián sorozatot stabilnak mondunk, ha létezik olyan  $n$  lépésszám, amelytől kezdve bármely  $k > n$  lépésben ugyanazt a konstans értéket kell hogy hozzávegyük a sorozathoz.

*Definíció:* Egy sorozat hosszának azt az  $n$  értéket tekintjük, amelytől a sorozat stabil.

**Sejtés:** Minden átlag-medián sorozat stabil.

*Jelölések:* Jelölje  $m_k$  egy  $k$  tagú sorozat mediánját,  $M_k$  pedig a sorozat várható értékét.

Három tetszőleges véletlenszerű értékből indított átlag-medián sorozatot az alábbi tétel alapján generálhatunk.

**Tétel [5]:** Ha  $x_1 < x_2 < x_3$  adott, akkor a sorozat többi tagja az alábbi módon adható meg

$$x_4 = 3x_2 - (x_1 + x_3),$$

$n \geq 5$  esetén pedig

$$x_n = nm_{n-1} - (n-1)m_{n-2}.$$

**Bizonyítás:** Legyen

$$M_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = x_2 = m_3,$$

ez alapján  $x_4 = 3x_2 - (x_1 + x_3)$ .

Legyen  $n \geq 5$ . A várható érték definíciója szerint  $x_n = nM_n - (n-1)M_{n-1}$ , és a sorozat konstrukciója alapján  $M_k = m_{k-1}$  úgy, hogy  $x_n = nm_{n-1} - (n-1)m_{n-2}$ .

□

A sejtést teljes egészében még nem sikerült bizonyítani. Arra a speciális esetre azonban, amikor a sorozatot a  $(0, x, x+1)$  értékekből indítjuk úgy, hogy  $x \geq 21.3125$ , a sejtést igazolja az alábbi tétel.

**Tétel [5]:** Ha  $x$  tetszőlegesen kiválasztott 21.3125-nél nagyobb vagy egyenlő valós szám, akkor a  $(0, x, x+1)$  kezdetű sorozat hossza pontosan 73, stabil értéke pedig  $x + 20.3125$ .

**Bizonyítás:** Legyen  $q = x - 21.3125$  és  $\langle q_n \rangle$  a  $(0, 21.3125 + q, 22.3125 + q)$ -ből indított sorozat.

Ha  $q > 0$ , akkor

$$m(q_{k-1}) = m(x_{k-1} + q)$$

és

$$(q_1, \dots, q_r) = (x_1, \dots, x_r) + q$$

ha  $5 \leq k \leq 72$ .

Ez alapján

$$q_{72} = 46.0625 + q \neq 41.625 + q = x + 20.3125.$$

Ha  $q > 0$ , akkor

$$m(q_{n-1}) = 41.625 + q$$

és

$$q_n = 41.625 + q$$

bármely  $n \geq 73$  esetén.

Ez alapján

$$q_n = 41.625 + q = x + 20.3125, \forall n \geq 73.$$

□

A fentiek felhasználásával Walters [8] tovább vizsgálta a sorozatokat.

**Állítás [8]:** Ha egy átlag-medián sorozat stabil, akkor a sorozat mediánjainak sorozata szigorúan monoton növekszik és a sorozat  $n$ -edik tagja nagyobb, mint a sorozat  $n - 1$ -edik mediánja, amíg el nem érjük a stabil állapotot. Egyébként a mediánok sorozata szigorúan monoton csökkenő és a sorozat  $n$ -edik eleme kisebb, mint a sorozat  $n - 1$ -edik mediánja, minden  $n \in \mathbb{N}$ -re.

**Bizonyítás:** Megmutatható, hogy  $m_n \neq m_{n-1}$  és  $x_n \neq m_{n-1}$  amíg el nem értük a stabil állapotot. Elegendő megmutatnunk, hogy  $x_n \neq m_{n-1}$  amíg el nem érjük a stabil állapotot. Tegyük fel, hogy sorozat nem stabil az  $n$ -edik lépést követően, azaz  $x_n \neq x_{n-1}$ . Megmutatható, hogy  $m_{n-1} \neq m_{n-2}$ , ezért

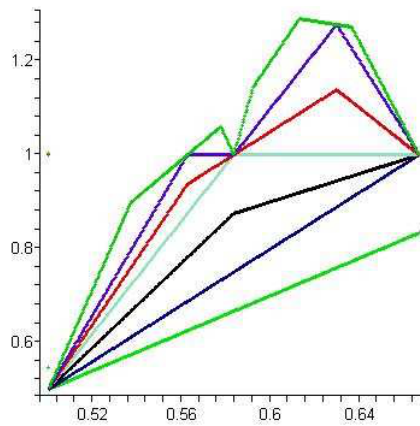
$$x_n = nm_{n-1} - (n-1)m_{n-2} \neq nm_{n-1} - (n-1)m_{n-1} = m_{n-1}.$$

Tegyük fel, hogy a sorozat eléri a stabil állapotot az  $n$ -edik lépésben, azaz  $x_n = x_{n+1}$ . Megmutatható, hogy  $m_{n-1} = m_{n-2}$ . Ebből következik, hogy

$$x_n = nm_{n-1} - (n-1)m_{n-2} = nm_{n-1} - (n-1)m_{n-1} = m_{n-1}.$$

□

Később 2007-ben, Chamberland és Martinelli [1] szintén Shultzék munkájából kiindulva tovább vizsgálták ezeket a sorozatokat – legfőképp a mediánok konvergenciáját tekintve – valamint megfogalmaztak a problémához egy leképezést (mint a logisztikus leképezés esetében).



3. ábra.  $(0, x, 1)$  kezdetű sorozatok mediánjai, [1]-ből.

A szakirodalomban nem találtunk más, a átlag-medián sorozatokkal foglalkozó cikket.



### 3. Megfigyelések

A átlag-medián sorozatok vizsgálata során az eredeti problémát felhasználva végeztünk szimulációkat MATLAB-ban. Továbbá megvizsgáltuk, hogy a probléma általánosítható-e a medián helyett tercilist felhasználva, valamint a várhatóérték függvényt ennek megfelelően módosítva.

Az alábbi rész szerkezete a következő; elsőként megvizsgálunk kettő, az alapvető problémára épülő sorozattípust és a logisztikus leképezés osztályozásához hasonlóan osztályozzuk azokat, majd ismertetjük a velük elvégzett szimulációk eredményét:

- $(0, x, 1)$ -ből induló sorozatok, ahol  $x \in [0, 1]$
- $(-1, 0, x, 1, 2)$ -ből induló sorozatok, ahol  $x \in [0, 1]$

Ezeket követően ismertetjük, hogy milyen módon próbáltuk általánosítani a problémát és milyen eredményekre jutottunk ezen általánosításból.

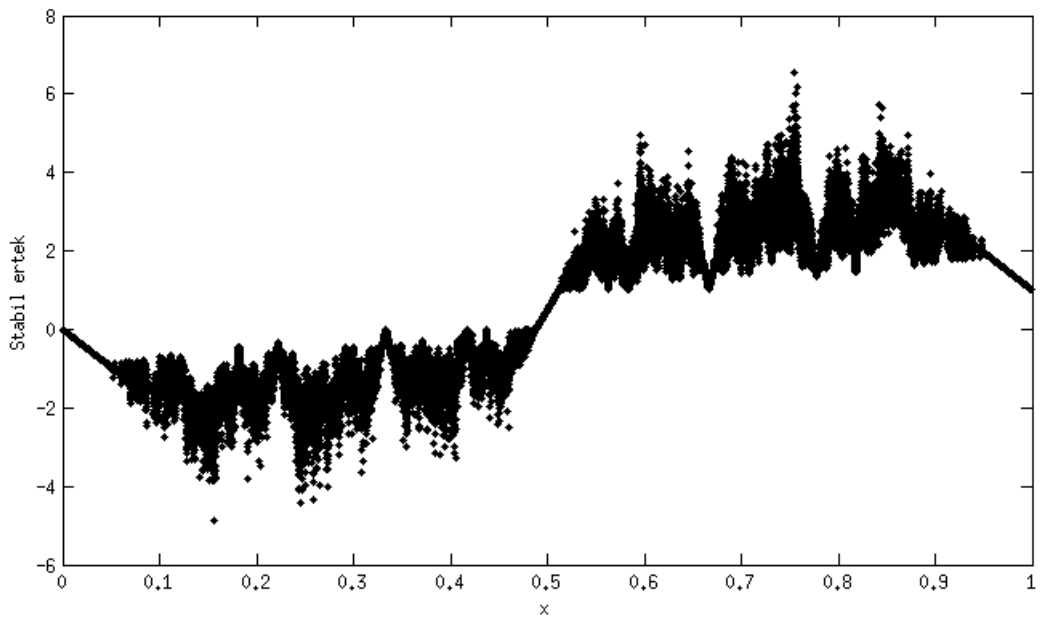
#### 3.1. $(0, x, 1)$ -ből induló sorozatok

Ebben az esetben az alapvető problémát úgy módosítottuk, hogy a sorozatokat nem három véletlenül megválasztott egész számból, hanem a  $(0, x, 1)$  értékekből indítottuk ( $x \in [0, 1]$ ). Választásunk azért erre a sorozatra esett, mivel a három véletlenszámból álló sorozatok ekvivalens módon transzformálhatóak ebbe a kiindulási helyzetbe.

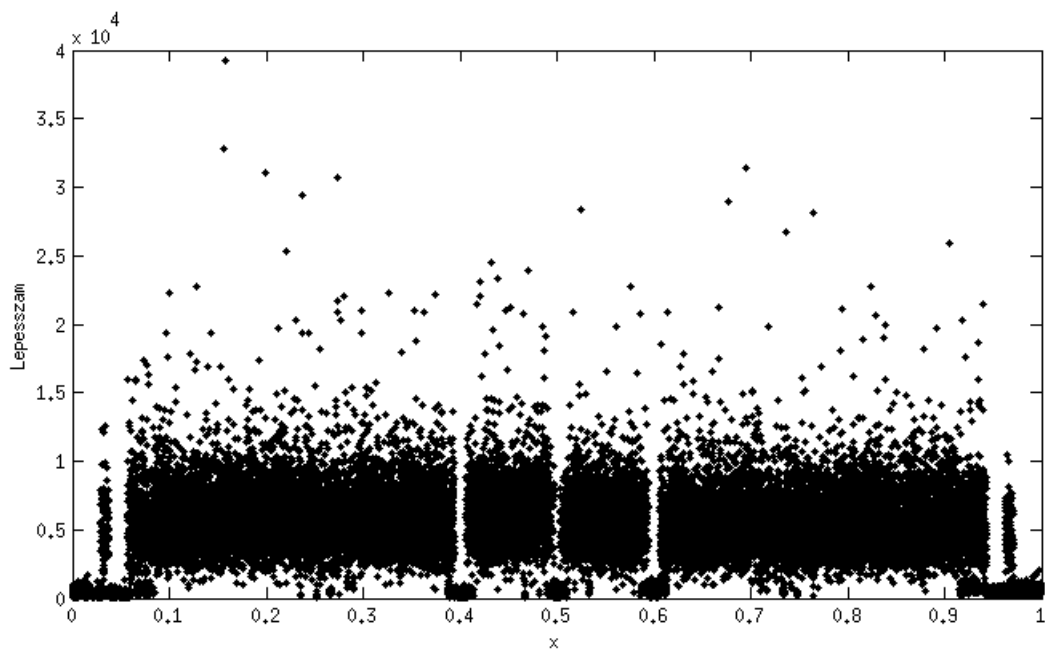
Szimulációink során megpróbáltuk azonosítani, hogy az  $x$  értékek mely intervallumaiban viselkednek kaotikusan a sorozatok és melyekben nem. Ilyen osztályozásokat végeztek a logisztikus leképezéssel kapcsolatban is, az átlag-medián sorozatok esetében ilyenekkel azonban seholy sem találkoztunk. Minden egyes szimuláció esetén három érték került eltárolásra, hogy aztán az a későbbiekben újra felhasználható és megjeleníthető legyen. A felhasznált  $x$  érték a stabil érték, ahova a sorozat konvergál, valamint az érték eléréséhez szükséges lépések száma.

A 4. ábrán a sorozatok stabil értékeit szemléltettük az  $x$  függvényében. Az eredményekből néhol nehezen látható, de nem csak az intervallum elején, közepén és végén viselkedik a sorozat determinisztikusan, hanem ezek között az intervallumok között is. Ilyen intervallumokat szemléltetünk a későbbiekben.

A 5. ábra a sorozatok lépésszámát mutatja, szintén a kezdőpont függvényében. Látható, hogy a sorozatok lépésszámai néhány száztól több ezerig terjednek (néhol több mint 20.000 lépés).

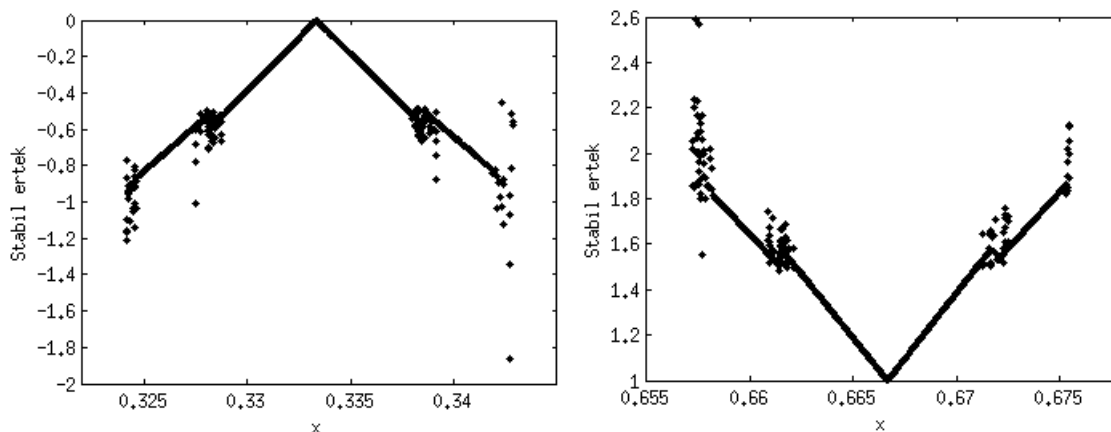


4. ábra. Szimulációs eredmények (több mint 32.000 szimuláció)



5. ábra. Szimulációs eredmények (több mint 8600 szimuláció)

Azokban a tartományokban, ahol a sorozat kaotikusan viselkedik, ott a lépésszám is magasabb. A nem kaotikus részekben általában nagyon kevés lépés szükséges a stabil állapot eléréséhez.



6. ábra. Nem kaotikus szakaszok

A 6. ábrán látható eredmények a  $[0, 1]$  intervallum két oldalából valók. Az intervallum 0.5-re szimmetrikus, így ha az ábra bal oldalán található egy ilyen szakasz, akkor az ugyanígy fellelhető a jobb oldalon is. A  $[0, 1]$  intervallumon több ilyen szakasz is található, ezeket tartalmazza az alábbi táblázat.

Kezdőpont	Végpont	Kezdőpont	Végpont
0	0.06505	0.93495	1
0.0875	0.0941	0.9059	0.9125
0.1792	0.1839	0.8161	0.8208
0.2184	0.2240	0.7776	0.7816
0.3241	0.3430	0.6570	0.6759

7. ábra. Nem kaotikus intervallumok

A táblázatban megadott intervallumokon kívül a sorozatok kaotikusan viselkednek.

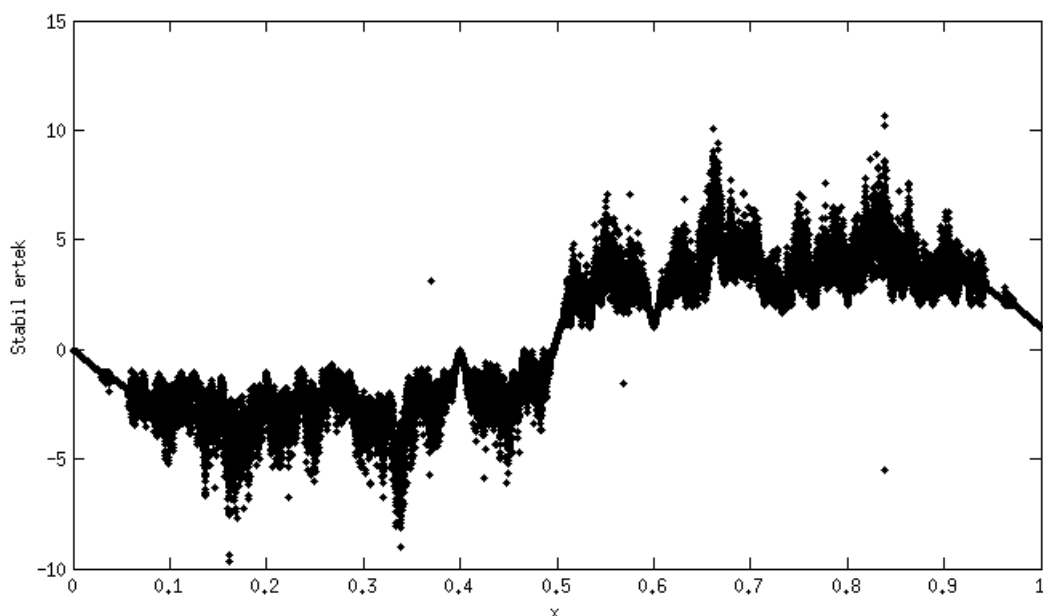
A  $(0, x, 1)$ -ből induló sorozatokkal kapcsolatos vizsgálatokat összefoglalva; készítettünk egy szimulációs algoritmust a különböző kezdőpontokhoz tartozó stabil értékek és lépésszámok generálására, majd szimulációkat végeztünk, hogy minél több adat álljon rendelkezésre a sorozatok viselkedésének megfigyelésére. A kapott eredményeket átvizsgálva megadtuk azokat az intervallumokat, amelyekből a sorozat  $x$  értékét választva a sorozat viselkedése nem kaotikus.

### 3.2. $(-1, 0, x, 1, 2)$ -ből induló sorozatok

Ebben az esetben a sorozatot 3 érték helyett 5-tel indítottuk és azt próbáltuk megfigyelni, hogy ez hogyan befolyásolja a kapott sorozatok hosszát, valamint a stabil állapot eléréséhez szükséges lépések számát.

A szimulációs eredmények felhasználásával ebben az esetben is azt vizsgáltuk, hogy a különböző  $x$  értékek esetén a sorozatok hol viselkednek kaotikusan, és hol előre kiszámíthatóan. A szimulációs program ebben az esetben is három adatot tárolt el minden elvégzett szimulációról. A felhasznált  $x$  értéket, a stabil értéket, ahova a sorozat konvergál, valamint az érték eléréséhez szükséges lépések számát.

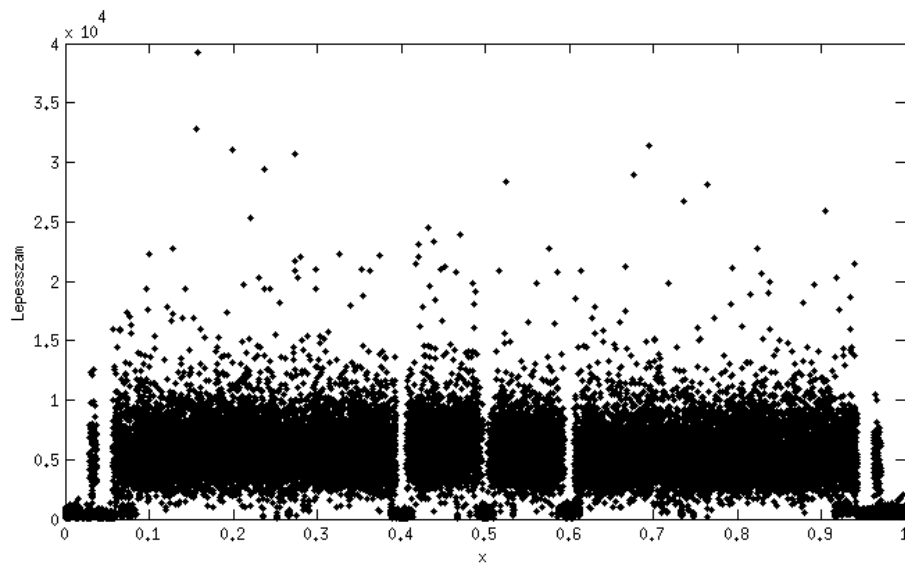
Az alábbi ábrán olyan eredmények láthatóak, amiket úgy kaptunk, hogy egyszerre három számítógépen futtattunk szimulációkat. Az ábrák több mint 25.000 szimuláció eredményét tartalmazzák.



8. ábra. Szimulációs eredmények (több mint 25.000 szimuláció)

A 8. ábrán szemléltettük a sorozatok stabil értékeit az  $x$  függvényében. Az eredmények az előző részben bemutatottakhoz hasonlóak, azt azonban megjegyezzük, hogy ebben az esetben a stabil értékek egy jóval szélesebb tartományból kerülnek ki.

A 9. ábrán észrevehető, hogy a sorozatok lépésszámai néhány száztól több ezerig terjednek (néhol több mint 30.000 lépés). Ezek az előző típusnál jóval kaotikusabb viselkedést mutatnak. Sokkal kisebb tartományokon láthatóak csak nem kaotikus részek, de még ezeknél a tartományoknál is megfigyelhető néhány kiugró érték.



9. ábra. Szimulációs eredmények (több mint 30.000 szimuláció)

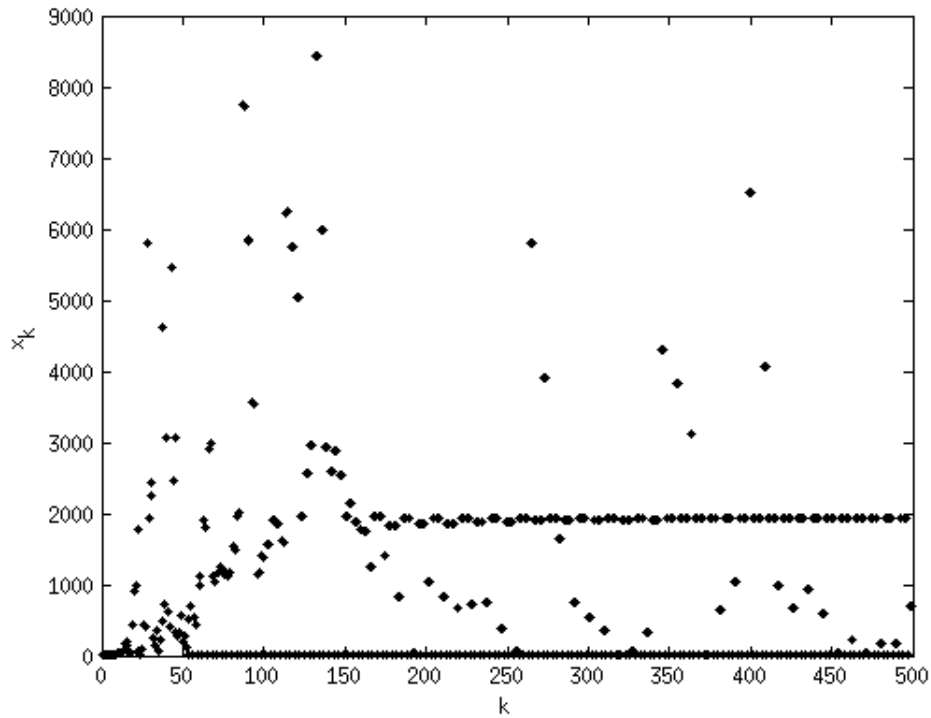
A  $(-1, 0, x, 1, 2)$  kezdeti sorozatból kiinduló sorozatokkal kapcsolatos vizsgálatainkat összefoglalva; elkészítettünk egy szimulációt, amivel aztán több ezer vizsgálatot végeztünk véletlenszerűen választott  $x$  értékeket felhasználva. A kapott eredmények alapján azt vettük észre, hogy az ilyen módon kezdődő sorozatok az előző részben vizsgáltakhoz hasonló eredményeket produkálnak, azonban stabil értékeik jóval nagyobb tartományban helyezkednek el.

### 3.3. Az átlag-medián sorozat általánosítása tercilissel

A korábban ismertett cikkekben az alapvető átlag-medián sorozatot vizsgálva próbálták bebizonyítani a sorozattal kapcsolatos sejtést. Mi ezzel szemben megkíséreltük más szemszögből megközelíteni a problémát; kicseréltük a korábbiakban használt medián függvényt tercilissre és ennek megfelelően kipróbáltunk több különböző súlyozást a számtani közép módosítására. Ezeket az elvégzett kísérleteket írjuk le az alábbiakban.

Abban az esetben, amikor a mediánt tercilissre cseréltük, az volt a cél, hogy a sorozat  $1/3$ -nál lévő értéket adjuk meg. Mivel a harmad általában valahova két érték közé esik, ezért ezt két értéket – annak megfelelően, hogy mennyire esnek távol a sorozat harmadától – súlyoztuk.

A tercilissnek megfelelően módosítottuk a átlag függvényt is úgy, hogy a sorozat első egyharmadának értékeit 2, a többi értéket egy súllyal számítottuk, majd a kapott összeget az elemek számával osztottuk.



10. ábra. Módosított átlag-medián sorozat,  $(-1, 0, 0.5, 1, 2)$ -ből indítva

A 10. ábrán egy a tercilist és az imént ismertetett súlyozást felhasználva generált sorozat értékei láthatóak. Könnyedén látható, hogy a sorozat – ellentétben a korábban vizsgáltakkal – nem konvergál rögzített értékhez, viszont néhány kiugró értéket és az első néhány lépést leszámítva két érték között ingadozik.

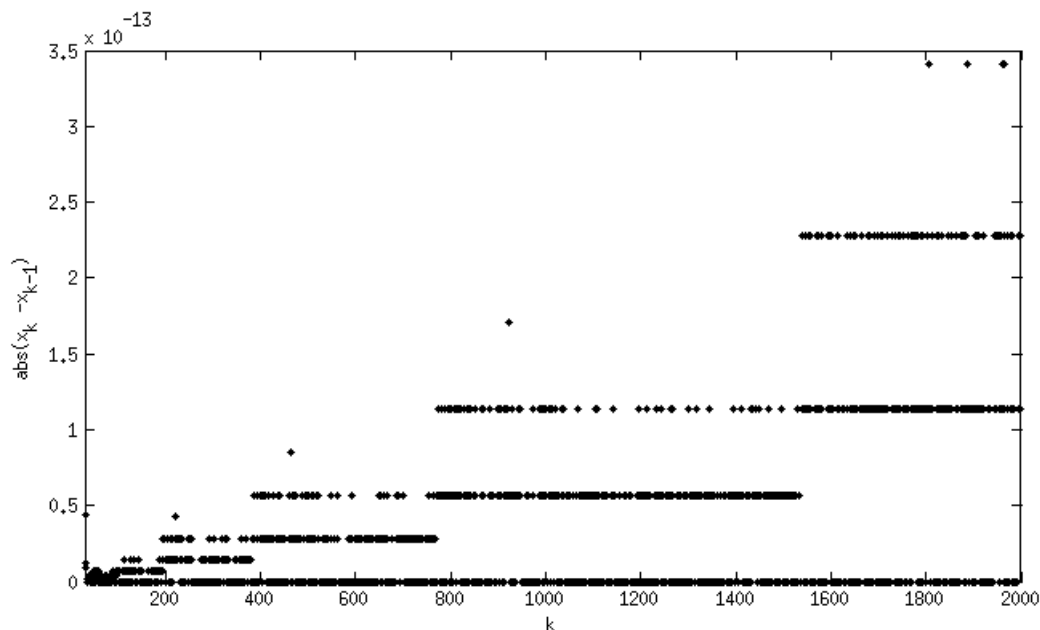
Ugyanehhez a tercilishez kipróbáltunk két másik súlyozással megvalósított átlagot is:

- rendeztük a sorozatot, majd a  $k$ -adik elemet  $k$ -val súlyoztuk,
- minden elemet saját magával súlyoztuk.

Ezekkel a súlyozásokkal a sorozat elemei egymástól egyre nagyobb eltérést mutattak.

Mivel a megadott tercilis függvénnyel nem sikerült stabil sorozatokat előállítani, kipróbáltunk egy másik módszert is: ebben a megvalósításban a rendezett sorozat első és utolsó elemének harmadával közelítettük a tercilis értékét. Ebben a megvalósításban az átlagot  $\frac{2}{3}$ -al szoroztuk.

A 11. ábra az imént ismertetett tercilis és átlag felhasználásával generált  $(-1, 0, x, 1, 2)$ -ből indított sorozat egymást követő elemeinek eltérését mutatja.



11. ábra. A sorozat egymást követő elemeinek eltérése

Leolvasható, hogy az egymást követő elemek egy bizonyos  $k$ -adik lépés után ismétlődni kezdenek.

Az eddigieket összefoglalva tehát megpróbáltuk általánosítani az átlag-medián sorozatokat a medián helyett tercilist felhasználva és ezt kipróbáltuk néhány súlyozott átlag függvénnyel. Azt tapasztaltuk, hogy az így kapott sorozatok nem állnak be semmilyen stabil állapotba.

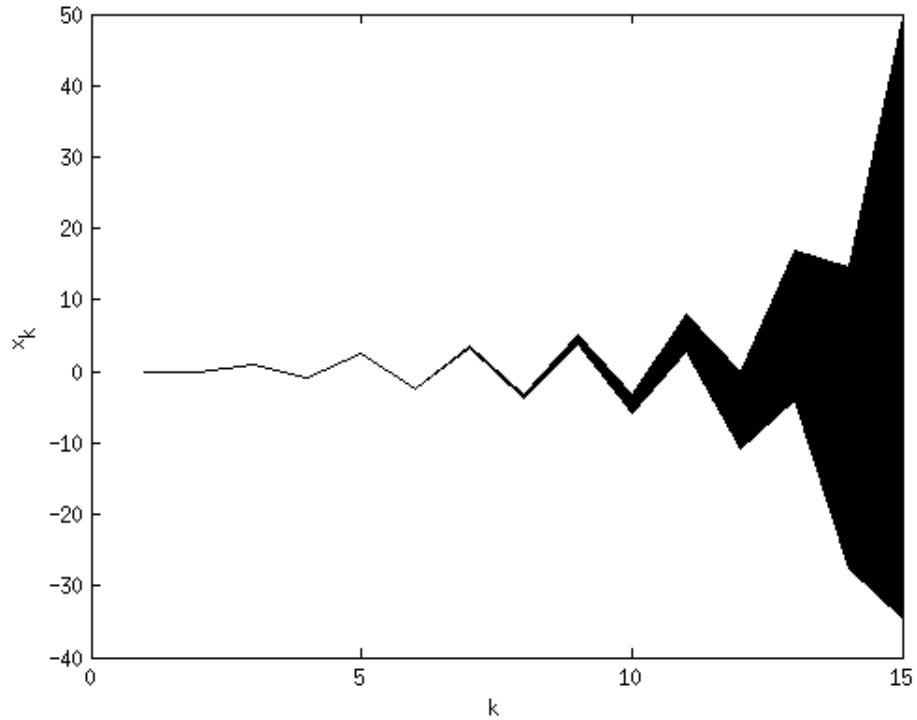
### 3.4. A átlag-medián sorozat általánosítása intervallum-aritmetikával

Vizsgálataink során az alapvető problémát megvalósítottuk intervallum-aritmetika felhasználásával is, ennek eredményeit ismertetjük az alábbiakban. A vizsgálatok elvégzéséhez az INTLAB toolboxot [3] használtuk fel. Mivel sem a MATLAB, sem az INTLAB nem tartalmazza az intervallumon értelmezett medián és átlag függvényeket, ezeket mi magunk valósítottuk meg. A kódok megtalálhatóak a dolgozat későbbi részében.

A megvalósított szimulációval többféle módon is letezteltük, hogy stabil-e az intervallumokat tartalmazó sorozat. Az elvégzett szimuláció során azt tapasztaltuk, hogy intervallumokkal helyettesítve a sorozat elemeit, a sorozat nem éri el a stabil állapotot, mivel az egymást követő lépésekben egyre nagyobb és nagyobb interval-

lombokat adunk hozzá a sorozathoz.

A 12. ábrán látható egy elvégzett szimuláció eredménye. Az ábra a  $([0, 0], [0, 0.01], [1, 1])$  kezdeti sorozatból indított sorozat első 15 elemét tartalmazza. Jól látható, hogy a sorozatot alkotó intervallumok nagyon gyorsan növekednek, ezért nem állnak be semmilyen stabil értékhez (a  $(-\infty, \infty)$  intervallumot nem tekintjük stabil értéknek).



12. ábra. A  $([0,0],[0,0.01],[1,1])$ -ből induló sorozat első néhány lépésének eredményei

A átlag-medián sorozatok intervallum-aritmetikával való megvalósításának eredményeiből arra a következtetésre jutottunk, hogy a probléma ilyen módon sem általánosítható.



## 4. Fontosabb függvények

Ebben a részben megtalálhatóak a szimulációk során felhasznált fontosabb függvények forráskódjai.

---

### Forráskód 1. Tercilist számító függvény

---

```
function x = tercilis( X )
%TERCILIS Tercilis value.
    X = sort(X);
    s = size(X,2);
    terc = floor(s * 1/3);
    m = mod( s * (1/3) , 1);

    x = X(terc) * (1-m) + X ( terc + 1 ) * m;
end
```

---

### Forráskód 2. Intervallumokat sorba rendező függvény

---

```
function Y = sortintvals( X )
%SORTINTVALS Sort intervall vectors.

Y=intval('[0,0]');
a = sprintf('%d,%d',realmin, realmin);
min = intval( a );

for i=1:size(X,1)
    maxind = 1;

    for j=1:size(X,1)
        if mid(X(j)) > mid(X(maxind))
            max = X(j);
            maxind = j;
        end
    end

    Y = [X(maxind);Y];
    X(maxind) = min;
end
    Y = Y(1:size(X,1));

end
```

---

---

### Forráskód 3. Az intervallumok átlagát számító függvény

---

```
function Y = meanintval( X )
%MEANINTVAL Average or mean value for intervall vectors.
Y = X(1)+X(2);

for i=3:size(X,1)
    Y = Y + X(i);
end

Y = Y / size(X,1);

end
```

---

### Forráskód 4. Intervallumok mediánját számító függvény

---

```
function [ Y ] = medianintval( X )
%MEDIANINTVAL Median value for intervall vectors.

X = sortintvals(X);

if mod(size(X,1),2) == 0
    Y = (X(size(X,1)/2) + X(size(X,1)/2+1) / 2;
else
    Y = X(ceil(size(X,1)/2));
end

end
```

---

## 5. Összefoglalás

Dolgozatunk témája az átlag-medián sorozatok vizsgálata volt, melynek során megvizsgáltunk néhány szimulációs eredményt, valamint kísérletet tettünk a probléma általánosítására.

A probléma irodalmának ismertetése után elsőként a szimulációk eredményeit írtuk le. Szimulációink során  $(0, x, 1)$ -ből, valamint  $(-1, 0, x, 1, 2)$  kezdőállapotokból indított sorozatokat vizsgáltunk. Az előbbi esetben meg is adtunk néhány intervallumot, amiből kiválasztva az  $x$  értéket a sorozatok nem mutatnak kaotikus viselkedést. A második esetben azt tapasztaltuk, hogy a sorozatok az első példához hasonló viselkedést mutatnak, azonban a hozzájuk tartozó stabil értékek nagyobb intervallumban helyezkednek el.

Az alapvető átlag-medián problémát megpróbáltuk medián helyett tercilist használva általánosítani. Ehhez kipróbáltunk többféle súlyozott átlagot is a számtani közép helyettesítésére, azonban ezek sajnos nem adtak megfelelő eredményt.

Az elkészített szimulációs programjainkat megvalósítottuk intervallum-aritmetikával is. Az ezekkel végzett kísérletek során azt tapasztaltuk, hogy a sorozat intervallumainak elemei minden iterációs lépésben egyre nagyobbak és a sorozat nem áll be stabil állapotba.

A dolgozat végén megadtuk a szimulációk során felhasznált fontosabb függvények forráskódjait.

Az eddig elvégzett munka több irányban is továbbfejleszhető. A jövőben szeretnénk tovább vizsgálni a sorozatok általánosításának lehetőségét, megvizsgálni a sorozatok önhasonlósági tulajdonságát, további vizsgálatokat végezni intervallumaritmetika felhasználásával és amennyiben lehetséges bizonyítani a sorozatok stabilitásával kapcsolatban ismertetett sejtést.

## Hivatkozások

- [1] CHAMBERLAND, M. & MARTELLI, M.: *The mean-median map*,  
Journal of Difference Equations and Applications 13, 577-583.  
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.70.2322>. (2007)
- [2] MAY, R. M.: *Simple mathematical models with very complicated dynamics*,  
Nature Vol. 261, 459-467.  
[http://abel.harvard.edu/archive/118r\\_spring\\_05/docs/may.pdf](http://abel.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/may.pdf). (1976)
- [3] RUMP, S.M.: *INTLAB - INTerval LABoratory*,  
Developments in Reliable Computing, 77-104. Szerkesztő: Tibor Csendes,  
Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/>  
(1999)
- [4] TÉL, T., GRUIZ, M.: *Mi a káosz? (És mi nem az)*,  
Természet Világa 133, 296-98.  
[http://theorphys.elte.hu/tel/magyar/pdf\\_pub/Mi%20a%20k%C3%A1osz.pdf](http://theorphys.elte.hu/tel/magyar/pdf_pub/Mi%20a%20k%C3%A1osz.pdf).  
2002.
- [5] SHULTZ, H. S. & SHIFLETT, R. C.: *M&M Sequences*,  
The College Mathematics Journal, Vol. 36, No. 3, 191-198. (2005)
- [6] VERHULST, P. -F. *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*,  
Nouv. mém. de l'Academie Royale des Sci. et Belles-Lettres de Bruxelles 18,  
1-41. (1845)
- [7] VERHULST, P. -F. *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*,  
Mém. de l'Academie Royale des Sci., des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique  
20, 1-32. (1847)
- [8] WALTERS, M.: *Neither Chocolate Candy Nor Rap Music: The Real M&M's*,  
kézirat. <http://www.math.sc.edu/~waltersm/M&m%20Paper.pdf>. (2005)