

# MEDIÁNOK SOROZATA

Iványi Antal

(2011. május 2.)

## Bevezetés

Legyen  $n$  pozitív egész és legyen  $\mathbf{a} = a_1, a_2, \dots, a_n$  valós számokból álló sorozat. A sorozat  $m(\mathbf{a})$  mediánját úgy definiáljuk [2], hogy

$$m(\mathbf{a}) = \frac{a_c + a_d}{2}, \quad (1)$$

ahol  $c = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  és  $d = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ . Azaz páratlan számú elem esetén a medián a középső elem, páros számú elem esetén pedig a két középső elem számtani közepe.

Az  $\mathbf{a}$  sorozat  $\mathbf{h}(\mathbf{a})$  feje legyen a mediánban szereplő elemek előtti részsorozat,  $\mathbf{t}(\mathbf{a})$  farka pedig a mediánban szereplő és azokat követő elemekből álló sorozat.

Adott  $\mathbf{a}$  sorozat esetén legyen a sorozat folytatása az  $\mathbf{f} = (\mathbf{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n, m(\mathbf{a}))$ , lezártja pedig az

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \mathbf{f}(\mathbf{a}), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})), \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{a})))) \quad (2)$$

végtelen sorozat.

A csütörtöki (április 30.) órán Lutz Loránd Attila azt kérdezte, hogy vajon igaz-e az a sejtés, hogy a lezárt sorozatokban egy – a bemenettől függő – küszöbszámtól kezdve ugyanaz az elem ismétlődik.

Először nézzünk egy egyszerű példát. Legyen  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ . Ekkor az  $A(\mathbf{a})$  lezárt sorozat első 17 eleme a következő:

$$A(\mathbf{a}) = (1, 2, 3, 2, 5/2, 3, 5/2, 2, 9/4, 5/2, 11/4, 3, 11/4, 5/2, 9/4, 2, 9/4). \quad (3)$$

Mivel a sorozat új elemeit meglévő elemek kiválasztásával vagy két meglévő elem számtani közepeként kapjuk, ezért a lezárt sorozatnak a bemenet minimális eleme alsó, maximális eleme felső korlátja lesz.

A példában azt látjuk, hogy például a sorozat második eleme (a 2) a negyedik, nyolcadik és tizenhatodik helyen is előfordul.

Nem nehéz belátni a sorozatok következő tulajdonságait.

1. tulajdonság. Adott  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozat  $A$  lezártjának a sorozat farkában szereplő elemek mindegyike torlódási pontja.  $\square$

2. tulajdonság. Adott  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozat  $A$  lezártjának limesz inferiorja farkának minimális eleme, limesz superiorja pedig a farkában lévő elemek maximuma.  $\square$

3. tulajdonság. Ha  $n = 1$ , akkor adott  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozat  $A$  lezártjának minden eleme azonos, ha viszont  $n \geq 2$ , akkor az  $A$  lezártnak végtelen sok torlódási pontja van.  $\square$

Adott  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozathoz rendeljük hozzá a prefixei számtani közepeiből képezett

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}) = \left( \frac{\sum_{i=1}^1 a_i}{1}, \frac{\sum_{i=1}^2 a_i}{2}, \frac{\sum_{i=1}^3 a_i}{3}, \dots \right) \quad (4)$$

sorozatot.

4. tulajdonság. Tetszőleges  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  sorozat esetén az  $\mathcal{M}(\mathbf{a})$  sorozat konvergens, és a határértéke az  $t(\mathbf{a})$  farkában lévő elemek számtani közepe, azaz

$$H = \frac{\sum_{i=e}^n a_i}{f}, \quad (5)$$

ahol  $e = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  és  $f = n - e + 1$ .  $\square$

Hasonló témával foglalkoznak a [1, 3, 4, 6] cikk. Érdeemes megnézni a [5] honlapot is.

## Irodalomjegyzék

- [1] Marc [Chamberland](#) and Mario Martelli, The mean-median map. *Journal of Difference Equations and Applications* **13**, 577–583. [2](#)
- [2] T. H. [Cormen](#), C. E. [Leiserson](#), R. L. [Rivest](#), C. [Stein](#), *Introduction to Algorithms*. Third edition. The [MIT](#) Press, 2009. [1](#)
- [3] Harris S. Shultz and Ray C. Shiffett, M&m sequences. *The College Mathematics Journal*, **36** 3 (May, 2005) 191–198. [2](#)
- [4] Marc [Walter](#), Neither Chocolate Candy Nor Rap Music: The Real M&m's. Manuscript, 2005. [2](#)
- [5] Wikipedia, Cesáro summation. 2011. [http://en.wikipedia.org/wiki/Ces%C3%A0ro\\_summation](http://en.wikipedia.org/wiki/Ces%C3%A0ro_summation) [2](#)
- [6] W. Ye, L. Wang, L. Xu, Properties of locally convergent sequences with respect to median filter. *Discrete Mathematics* **309** (9) (2009) 2775–2781. [2](#)

Iványi Antal: [tony@compalg.inf.elte.hu](mailto:tony@compalg.inf.elte.hu)