ÜTEMEZŐ ALGORITMUSOK HIBAFÜGGVÉNYEI

(Processzorszámot minimalizáló algoritmusok)

Iványi Antal, 2011. április 12.

(Ez a kézirat letölthető a következő címről:
http://compalg.inf.elte.hu/∼ tony/Kutatas/TAMOP/Papers-in-journals/)

1. Bevezetés

Tegyük fel, hogy egymástól független programokat kell futtatnunk, és minden számítógép csak egységnyi ideig működik (az egység lehet például egy 8 órás műszak). Célunk a programok olyan szétosztása a gépek között, hogy minél kevesebb gépet használjunk.

A feladat formális megfogalmazása a következő. Legyen $n \geq 1$ egész szám, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ pedig valós számokat tartalmazó vektor, ahol $t_i \in (0, 1]$ minden $i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ indexre. Osszuk fel a sorozatot minél kevesebb olyan részsorozatra, melyekben az elemek összege legfeljebb 1.

A feladat egydimenziós ládapakolási feladatként is ismert [19, 20, 30, 40]. A feladat NP-teljes [19, 30] (például visszavezethető az összegzési feladatra [19, 30]), ezért a gyakorlati megoldásra közelítő algoritmusokat [20, 26, 28] alkalmaznak.

Az A és B algoritmus relatív hatékonyságát gyakran jellemzik a kiválasztott hatékonysági mérték értékeinek hányadosával, jelen esetben az A((t)/B(t) relatív ládaszámmal. Ennek a hányadosnak a felhasználásával különböző jellemzők definiálhatók, például a relatív ládaszám legrosszabb, várható és legjobb esete.

Ebben a cikkben a legismertebb közelítő (NF, FF, BF, NFD, BFD, FFD) [17, 32, 33, 34, 39] és becslő (MAX, SUM, BIG, UPP) [2, 3, 39] algoritmusok legrosszabb esetére vonatkozó eredményeket foglaljuk össze

Az átlagos eset vizsgálata rendszerint lényegesen nehezebb, míg a legjobb eset vizsgálata rendszerint könnyű.

Legyen $\mathcal{D}_n$ azon valós listák halmaza, amelyek n elemet tartalmaznak, és legyen $\mathcal{D}$ az összes valós lista halmaza, azaz

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i\,. \tag{1}$$

Legyen $\mathcal{A}_{pak}$ a minden $\mathbf{t} \in \mathcal{D}$ listához egy nemnegatív valós számot hozzárendelő, és így a $\mathcal{D} \to \mathbb{R}_0^+$ leképezést megvalósító algoritmusok halmaza. Ezeket az algoritmusokat ***ládapakoló*** algoritmusoknak nevezzük annak ellenére, hogy nem állítanak elő konkrét pakolást, legfeljebb az optimális ládaszám valamilyen becslését adják.

Legyen $\mathcal{A}_{opt}$ a minden listához az optimális ládaszámot rendelő algoritmusok halmaza, és OPT ennek a halmaznak egy eleme (azaz egy olyan algoritmus, amely minden $\mathbf{t} \in D$ listához megadja a listához tartozó tárgyak elhelyezéséhez szükséges és elégséges ládák számát).

Legyen $\mathcal{A}_{köz}$ azon $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_{pak}$ algoritmusok halmaza, amelyekre $\mathrm{A}(\mathbf{t}) \geq \mathrm{OPT}(\mathbf{t})$ minden $\mathbf{t} \in D$ listára, és van olyan $\mathbf{t} \in D$ lista, amelyre $\mathrm{A}(\mathbf{t}) > \mathrm{OPT}(\mathbf{t})$. Legyen A_{becs} azon $\mathrm{E} \in \mathcal{A}_{pak}$ algoritmusok halmaza, amelyekre $0 \leq \mathrm{E}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{OPT}(\mathbf{t})$ minden $\mathbf{t} \in D$ listára, és van olyan $\mathbf{t} \in D$ lista, amelyre $\mathrm{E}(\mathbf{t}) < \mathrm{OPT}(\mathbf{t})$.

Legyen F_n azon valós listák halmaza, amelyekre $\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) = n$, azaz $F_n = \{\mathbf{t} \mid \mathbf{t} \in D \text{ és } \mathrm{OPT}(\mathbf{t}) = n \ (n = 1, 2, \ldots)\}$. Az A és $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_{köz}$) algoritmusok $R_{\mathrm{A},\mathrm{B},n}$ hibafüggvényét, $R_{\mathrm{A},\mathrm{B}}$ abszolut hibáját (röviden: hibáját) és $R_{A,\infty}$ aszimptotikus hibáját a következőképpen definiáljuk:

$$R_{\mathrm{A},\mathrm{B},n} = \sup_{t \in F_n} \frac{\mathrm{A}(\mathbf{t})}{\mathrm{B}(\mathbf{t})}, \tag{2}$$

$$R_{\mathrm{A},\mathrm{B}} = \sup_{t \in F} \frac{\mathrm{A}(\mathbf{t})}{\mathrm{B}(\mathbf{t})}, \tag{3}$$

$$R_{\mathrm{A},\infty} = \lim_{n \to \infty} R_{\mathrm{A},\mathrm{B},n}. \tag{4}$$

A becslő algoritmusok esetén a (2), (3) és (4) képletekben a számlálót és nevezőt felcseréljük és a (4) képletben a lim sup helyett a lim inf határértéket használjuk.

Ezek a mennyiségek főleg akkor érdekesek, ha $\mathrm{B} \in \mathcal{A}_{opt}$. Ilyenkor az egyszerűség kedvéért a jelölésekből elhagyjuk a B-t, és az $\mathrm{A}_{köz} \in \mathcal{A}_{becs}$, illetve az $\mathrm{E} \in \mathcal{A}_{becs}$ algoritmusok hibafüggvényéről, hibájáról és aszimptotikus hibájáról beszélünk. Más algoritmusok esetén célszerű a lim határérték helyett a lim sup határérték alkalmazása, hogy a határérték biztosan létezzen.

2. NF algoritmus

Az NF algoritmusra vonatkozó első jellemzés 1972-ben jelent meg, D. S. Johnson PhD disszertációjának kéziratában [38]. Ma inkább D. S. Johnson megvédett értekezésére [39] hivatkoznak.

1.1. tétel. (Johnson, 1972) *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor*

$$n = \mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{NF}(\mathbf{t}) \leq 2\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) - 1 = 2n - 1\,. \tag{5}$$

Továbbá, ha $k \in \mathbb{Z}^+$, *akkor léteznek olyan* $\mathbf{u}_k$ *és* $\mathbf{v}_k$ *listák, melyekre*

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{u}_k) = \mathrm{NF}(\mathbf{u}_k) \tag{6}$$

és

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{v}_k) \text{ és } \mathrm{NF}(\mathbf{v}_k) = 2\mathrm{OPT}(v_k) - 2\,. \tag{7}$$

Bizonyítás. Johnson a felső korlátot úgy bizonyította, hogy feltette a korlát ellenkezőjét, miszerint van olyan $L = (t_1, t_2, \ldots, T_n)$ lista, amelyre $\mathrm{OPT}(L) = n$ és $\mathrm{FF}(L) \geq 2n$. Mivel NF csak akkor nyit meg új ládát, ha a soron következő tárgy nem fér be az utolsó megnyitott ládába, ezért az FF ütemezésében a szomszédos ládákban lévő tárgyak súlyösszege nagyobb egynél, így a $2n$ ládában n-nél nagyobb lenne a súlyösszeg, és OPT nem tudná a listát n ládába bepakolni.

A tétel második részét pedig olyan u_k listával bizonyította, amely k darab egyest tartalmazott, és olyan v_k listával, amely $4k - 4$ elemet tartalmazott úgy, hogy a páratlan indexű elemek súlya $1/2$ volt, míg a páros indexűeké $1/(2k - 2)$. ∎

1984-ben a [32] cikkben ennél pontosabb (éles) korlátot adtunk.

Legyen ν azon ládapakoló algoritmusok halmaza, amelyek ütemezésében a szomszédos ládákba kerülő tárgyak súlyösszege mindig nagyobb egynél.

1.2. tétel. (Iványi, 1984) *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor minden* $A \in \nu$ *ládapakoló algoritmusra fennáll*

$$n = \mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{A}(\mathbf{t}) \leq 2\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) - 1 = 2n - 1\,. \tag{8}$$

Továbbá, ha $k \in \mathbb{Z}$, *akkor létezik olyan* $B \in \nu$ *ládapakoló algoritmus és* *léteznek olyan* $\mathbf{u}_k$ *és* $\mathbf{v}_k$ *listák, melyekre*

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{u}_k) = \mathrm{B}(\mathbf{u}_k) \tag{9}$$

és

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{v}_k) \text{ és } \mathrm{B}(\mathbf{v}_k) = 2k - 1\,. \tag{10}$$

Bizonyítás. Johnson bizonyításán csak annyit változtatunk, hogy a v_k lista $4k-2$ elemet tartalmaz úgy, hogy a páratlan indexű elemek súlya $1/2$, míg a páros indexű elemek súlya $1/(4k-2)$. ∎

Ez a tétel magyarul is megtalálható a [37] könyv 500. oldalán, mint 11.9. tétel.

A NF ládapakoló algoritmus jellemző adatai ismertek.

1.3. tétel. *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$*, akkor*

$$n = \mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \le \mathrm{NF}(\mathbf{t}) \le 2\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) - 1 = 2n - 1\,. \tag{11}$$

Továbbá, ha $k \in \mathbb{Z}$*, akkor léteznek olyan* $\mathbf{u}_k$ *és* $\mathbf{v}_k$ *listák, melyekre*

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{u}_k) = \mathrm{NF}(\mathbf{u}_k) \tag{12}$$

és

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{v}_k) \text{ és } \mathrm{NF}(\mathbf{v}_k) = 2k - 1\,. \tag{13}$$

Ebből az állításból adódik a NF fájlelhelyező algoritmus hibafüggvénye, abszolút hibája és aszimptotikus hibája.

1.4. következmény. *Ha* $n \in \mathbb{Z}$*, akkor*

$$R_{\mathrm{NF},n} = 2 - \frac{1}{n}\,, \tag{14}$$

továbbá

$$R_{\mathrm{NF}} = R_{\mathrm{NF},\infty} = 2\,. \tag{15}$$

3. FF algoritmus

R. L. Graham, 1972-ben [31] 1972-ben megmutatta, hogy az $L = (0.06^7, 0.51^5, 0.1^2, 0.16^3, (0.34^2)^5, (0.51)^{10})$ listára $\mathrm{FF}(L) = 17$, és ha a listát csökkenő sorrendbe rendezzük, akkor az így kapott $L' = (0.51^{10}, 0.34^{10}, 0.16^{10}, 0.10^{10})$ listára $\mathrm{FF} L' = \mathrm{OPT}(L') = 10$.

Graham ebben a cikkében megfogalmazta azt a sejtést, hogy ha $\mathrm{OPT}(L)$ elég nagy, akkor $R_{\mathrm{FF}}/\mathrm{OPT}(L) < 1.7$.

A [32, 33] dolgozatban megmutattuk, hogy az FF relatív hibája tetszőlegesen nagy optimális ládaszám esetén is felveszi az 1,7 értéket.

1.5. tétel. Iványi, 1984. *Ha ...*

A FF és BF ládapakoló algoritmus legrosszabb esetére vonatkozik a következő állítás [35]

1.6. tétel. (Iványi, 1986) *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor*

$$\mathrm{FF}(\mathbf{t}) < \frac{7}{4}. \tag{16}$$

1994-ben D. Simchi-Levi [42] egy valamivel gyengébb állításra publikált bonyolultabb bizonyítást (viszont az ő bizonyítása a BF algoritmusra is jó).)

[29].

1.7. tétel. (Garey, Graham, Ullman, 1973) *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor*

$$\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{FF}(\mathbf{t}),\ \mathrm{BF}(\mathbf{t}) \leq 1.7\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) + 2\,. \tag{17}$$

Továbbá, ha $k \in \mathbb{Z}$, *akkor léteznek olyan* $\mathbf{u}_k$ *és* $\mathbf{v}_k$ *listák, melyekre*

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{u}_k) = \mathrm{FF}(\mathbf{u}_k) = \mathrm{BF}(\mathbf{u}_k) \tag{18}$$

valamint

$$k = \mathrm{OPT}(\mathbf{v}_k) \text{ és } \mathrm{FF}(\mathbf{v}_k) = \mathrm{BF}(\mathbf{v}_k) = \lfloor 1.7k \rfloor\,. \tag{19}$$

A FF algoritmusra egy erősebb felső korlát is érvényes.

1.8. tétel. *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor*

$$\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \leq \mathrm{FF}(\mathbf{t}) < 1.7\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) + 1\,. \tag{20}$$

Ebből a két állításból adódik FF és BF aszimptotikus hibája, valamint hibafüggvényük jó becslése.

1.9. következmény. *Ha* $n \in \mathbb{Z}$, *akkor*

$$\frac{\lfloor 1.7n \rfloor}{n} \le R_{\mathrm{FF},n} \le \frac{\lceil 1.7n \rceil}{n} \tag{21}$$

és

$$\frac{\lfloor 1.7n \rfloor}{n} \le R_{\mathrm{BF},n} \le \frac{\lfloor 1.7n + 2 \rfloor}{n} \tag{22}$$

továbbá

$$R_{\mathrm{FF},\infty} = R_{\mathrm{BF},\infty} = 1.7\,. \tag{23}$$

Ha n osztható tízzel, akkor a (21) egyenlőtlenségben az alsó és felső határok megegyeznek, azaz ebben az esetben $1.7 = R_{FF,n}$.

Baker-Coffman [5], Iványi [32, 33, 34]

Korlát a legrosszabb esetre: [42].

Xia és Tan [43] 2010-ben a következő tételt bizonyították.

1.10. tétel. *Ha* $\mathbf{t} \in F_n$, *akkor*

$$\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) \le \mathrm{FF}(\mathbf{t}) \le 1.7\mathrm{OPT}(\mathbf{t}) + \frac{7}{10}\,. \tag{24}$$

4. BF algoritmus

Korlát a legrosszabb esetre: [42]

5. NFD algoritmus

6. FFD algoritmus

Korlát a legrosszabb esetre: [42]

Legjobb korlát a legrosszabb esetre: [44]

7. BFD algoritmus

Korlát a legrosszabb esetre: [42]

8. Átlagos eset

[15]

Iványi-Zolotarev: [36]

Bramel et al.: [13]

9. Érdekességek

Párhuzamos algoritmusok: Anderson et al. [1]

Duális probléma: [25]

Online ládalefedő: [21]

Korlátozott ládapakolás: [27]

Lineáris programozás: [41]

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Az irodalomjegyzékben **letölthető** megjegyzéssel szereplő művek letölthetők a megadott honlapról, a **digitálisan** megjegyzéssel szereplő művek letölthetőek a http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Kutatas/BinPacking/ honlapról, míg a **nyomtatva** megjegyzéssel szereplő műveket nyomtatott formában sikerült megszerezni.

A szerző címe: Iványi Antal: tony@compalg.inf.elte.hu

Budapest, 2011. április 12.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] R. J. Anderson, E. W. Mayr, M. K. Warmuth. Parallel approximation algorithms for bin packing. *Inf. and Comp.*, **82** (1989) 262–277. **letölthető** 7

[2] Aszalós Péter: Lower estimation of optimal number of bins. In: *Fourth Conference of program Designers* (Budapest, 1988. június 1–3, szerkesztette Iványi Antal). ELTE, Budapest, 1988. 81–91. 1

[3] Aszalós Péter, Iványi Antal, Tóth Zoltán, Zsoldos Zsolt: Optimális processzorszám homogén hálózatokban. In: *Programozási rendszerek'88* (Szekszárd, 1988. április 20–23), 77–78. 1

[4] B. S. Baker. A new proof for the first-fit decreasing bin-packing algorithm. *J. Algorithms*, **6** (1985) 49–70. **nyomtatva**

[5] B. S. Baker, E. G. Coffman, Jr. A tight asymptotic bound for next-fit-decreasing bin-packing. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, **2** (1981) 147–152. 6

[6] J. Békési, G. Galambos, H. Kellerer. A 5/4 linear time bin packing algorithm. *JCSS*, **60** (2000) 145–160.

[7] R. Berghammer, F. Reuter. A linear approximation algorithm for bin packing with absolute approximation factor 3/2. *Science of Computer Programming*, **48** (2003) 67–80.

[8] J. O. Berkey, P. Y. Wang. A systolic-based parallel bin packing algorithm. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **5** (1994) 769–772.

[9] G. Bilchev. Evolutionary metaphors for the bin packing problem. In *Evolutionary Programming V: Proceedings of the Fifth Annual Conference on Evolutionary Programming* 1996, 333–341.

[10] J. Blazewicz, K. Ecker. A linear time algorithm for restricted bin packing and scheduling problems. *Oper. Res. Lett.*, **2** (1983) 80–83.

[11] A. Bortfeldt. A heuristic for multiple container loading problems. *OR Spektrum*, **22** (2000) 239–261.

[12] J. M. Bourjolly, V. Rebetez. An analysis of lower bound procedures for the bin packing problem. *Computers and Operations Research*, **32** (3) (2005) 395–405.

[13] J. Bramel, W. T. Rhee, Rhee, D. Simchi-Levi: qnevindexBramel, Julien Average-case analysis of the bin-packing problem with general cost structures. *Naval Res. Logist.* **44**)7) (1997) 673–686. MR1471152 (99d:90091) 7

[14] A. R. Brown. Optimum Packing and Depletion. American Elsevier, New York, 1971. **nyomtatva**

[15] E. G. Coffman, Jr., C. Courcoubetis, M. R. Garey, D. S. Johnson, P. W. Shor, R. R. Weber, M. Yannakakis. Bin packing with discrete item sizes, Part I: Perfect packing theorems and the average case behavior of optimal packings. *SIAM J. Disc. Math.*, **13** (2000) 384-402. 7

[16] E. G. Coffman, Jr., Jr., C. Courcoubetis, M. R. Garey, D. S. Johnson, P. W. Shor, R. R. Weber, M. Yannakakis. Perfect packing theorems and the average-case behavior of optimal and online bin packing. *SIAM Review*, **44** (2002) 95–108.

[17] E. G. Coffman, Jr., Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson: Approximation algorithms for bin-packing: An updated survey. In G. Ausiello, M. Lucertini, P. Serafini, editors, *Algorithm Design for Computer System Design*. Springer-Verlag, Wien, 1984. CISM Courses and Lectures Number 284, 49–106. 1

[18] E. G. Coffman, Jr., M. R. Garey, D. S. Johnson: An application of bin-packing to multiprocessor scheduling, *SIAM Journal on Computing*, **7** 1978, 1–17.

[19] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, The MIT Press/McGraw-Hill, 2009 (Harmadik kiadás). Magyarul: *Algoritmusok.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1999 (az 1991-es első angol nylvű kiadás fordítása). **Informatikai Könyvtár** 1

[20] Csirik János: Ládapakolási algoritmusok. Szeged, 1989. 123 oldal. **nyomtatva** 1

[21] J. Csirik, L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin: On the sum minimization version of the online bin covering problem. *Discrete Appl. Math.* **158** (13) (2010) 1381–1393. MR2651988 **letölthető** 7

[22] J. Csirik, G. Galambos. An $O(n)$ bin-packing algorithm for uniformly distributed data. *Computing* **36** (1986) 313–319.

[23] J. Csirik, G. Galambos. On the expected behaviour of the NF algorithm for a dual bin packing problem. *Acta Cybernetica* **8** (1987) 5–9.

[24] J. Csirik, J. B. G. Frenk, A. Frieze, G. Galambos, A. H. G. Rinnooy Kan. A probabilistic analysis of the next fit decreasing bin packing heuristic. *Oper. Res. Lett.*, **5** (1986) 233–236.

[25] J. Csirik, J. B. G. Frenk, G. Galambos, A. H. G. Rinnooy Kan. Probabilistic analysis of algorithms for dual bin packing problems. *J. Algorithms*, **12** (1991) 189–203. 7

[26] Dósa György, Imreh Csanád: *Online algoritmusok.* Elektronikus jegyzet. SZTE TTIK, Szeged, 2011 (kézirat). 1

[27] L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin: Class constrained bin packing revisited. *Theoret. Comput. Sci.* **411** (34–36) (2010) 3073–3089. MR2676854 **letölthető** 7

[28] Galambos Gábor: Ládapakolási feladatok közelítő algoritmusainak legrosszabb-eset vizsgálata. Kandidátusi értekezés tézisei. Szeged, 1991. **nyomtatva** 1

[29] M. R. Garey, R. L. Graham, J. D. Ullman: An analysis of some packing algorithms. In: *Combinatorial Algorithms*, ed. R. Rustin. Algorithmic Press, 1973, 39–48. 5

[30] M. Garey, D. S. Johnson: *Computers and Intractability.* 1979. **Informatikai Könyvtár** 1

[31] R. L. Graham: Bounds on multiprocessing anomalies and related packing algorithms. In: *Proceedings of the AFIPS Conference* **40**, AFIPS Press, Montvale, 1972, 205–217. 5

[32] A. Iványi: Performance bounds for simple bin packing algorithms. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **5** (1984) 77–82. MR0822601 (87h:68067) **letölthető** 1, 3, 5, 6

[33] A. Iványi: Estimation of the efficiency of bin-packing algorithms. (Russian) *Problemy Kibernet.* **41** (1984) 253–256. **digitálisan** 1, 5, 6

[34] A. Iványi: Tight worst-case bounds for bin packing algorithms. *Theory of Algorithms* (Pécs, 1984), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 44, North-Holland, Amsterdam, 1985, 233–240. MR0872310 (88g:68051) **nyomtatva** 1, 6

[35] Iványi A.: *Processzorütemezés.* Kézirat. ELTE, Numerikus és Gépi Matematika Tanszék, Budapest, 1986. **nyomtatva** 5

[36] A. Iványi, V. M. Zolotarev: Probabilistic analysis of the optimal bin packing algorithm. In: ed. by A. Iványi, *Fifth Conference of Program Designers* (Budapest, 1989. augusztus 28–szeptember 1, szerkesztette Iványi Antal). ELTE, Budapest, 1989, 183–198. 7

[37] Iványi A.: *Informatikai algoritmusok.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. Elektronikusan: ELTE Informatikai Kar, 1974. 4

[38] D. S. Johnson: *Near-Optimal Bin Packing Algorithms.* MAC TR-109 számú technikai riport. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1973. **nyomtatva** 3

[39] D. S. Johnson: *Near-Optimal Bin Packing Algorithms.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mathematics, Cambridge, 1973. 1, 3

[40] Lovász László, Gács Péter: *Algoritmusok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989. **ELTE Matematikai Könyvtárában** 1

[41] L. Mui Ann Chan, D. Simchi-Levi, J. Bramel: Worst-case analyses, linear programming and the bin-packing problem. *Math. Programming, Ser. A.* **83** (2) (1998) 213–227. MR1647849 (99h:90080) 7

[42] D. Simchi-Levi: New worst-case results for the bin-packing problem. *Naval Research Logistics* **41** (1994) 579–585. **digitálisan** 5, 6

[43] B. Xia, Z. Than: Tighter bounds of the First Fit algorithm for the bin-packing problem. *Discrete Applied Mathematics* **158** (2010) 1668–1675. **letölthető** 6

[44] M. Yue: A simple proof of the inequaliy $\mathrm{FFD}(L) \leq (11/9)\mathrm{OPT}(L) + 1$ *Acta Math. Applicatae Sinica* **7** (4) (1991) 322–331. **digitálisan** 6

TÁRGYMUTATÓ

MAGYAR NÉVMUTATÓ