1. WINKLER-PERKOLÁCIÓ

A matematika, informatika és a fizika egyik intenzíven vizsgált kutatási területe a perkoláció.

A perkolációs vizsgálatok [5, 6, 7, 10] nagy része azzal foglalkozik, hogy milyen módszerekkel és milyen valószínűséggel hatolhatunk át valószínűségi paraméterekkel adott térrészen – például négyzetrácson.

Az ismert modellek egyike a kétdimenziós Winkler-modell [7].

Ez abban (is) különbözik a szokásos modellektől, hogy nem csak az áthatolás „passzív" lehetőségeit vizsgálja, hanem megengedi a térrész bizonyos átalakítását is.

A szakirodalom eddig elsősorban a kétdimenziós esettel, azaz a sík egy bizonyos részén való áthatolással foglalkozott. Mi kísérletet teszünk az eredmények egy részének a 3 és 4 dimenziós térre való kiterjesztésére.

1.1. A feladat megfogalmazása

Legyen $m \geq 2$, $n \geq 2$ (n lehet végtelen is) és legyen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

olyan mátrix, melynek elemei egymástól független, bináris valószínűségi változók, melyek közös eloszlása

$$P[x_{ij} = k] = \begin{cases} p, & \text{ha } k = 0, \\ q = 1 - p, & \text{ha } k = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

A legalább két egyest tartalmazó oszlopot ***fekete,*** az egy egyest tartalmazó oszlopot ***szürke*** és a csupa nullát tartalmazó oszlopot ***fehérnek*** nevezzük.

A mátrixot ***ütemezhetőnek*** nevezzük, ha nincsen fekete oszlopa.

A ***végtelen mátrixra vonatkozó valószínűséget*** úgy értelmezzük, mint a növekvő oszlopszámú mátrixokra vonatkozó valószínűségek sorozatának határértékét.

Az első oszlop $(1-p)^m$ valószínűséggel lesz fehér és $mp(1-p)^{m-1}$ valószínűséggel lesz szürke, ezért a $\mathbf{Z}$ mátrix $[1-(1-p)^m - mp(1-p)^{m-1}]^n$ valószínűséggel nem lesz ütemezhető – ez az érték pedig n növekedtével nullához tart.

Megpróbálhatjuk a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációját olyan $\mathbf{Z}'$ mátrixszá alakítani, amelyik már ütemezhető. Az egyetlen megengedett művelet a ***törlés:*** tetszőleges számú nullát törölhetünk a mátrixból. A törölt nulla utáni elemek indexét eggyel csökkentjük (ha a mátrix véges, akkor a sor végére beírunk egy nullát).

Például a fekete harmadik oszlop miatt nem ütemezhető

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

mátrixot az első sor első elemének törlésével ütemezhetővé tehetjük. A

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

mátrixot azonban nem tudjuk ütemezhetővé tenni.

A feladat az $R(p, m, n)$ ***ütemezhetőségi*** (perkolációs) függvény meghatározása, amely megadja annak valószínűségét, hogy a megfelelő mátrix ütemezhetővé tehető. Ha például a mátrixnak két sora és egy oszlopa van, és $p = 1/2$, akkor mind a 4 lehetséges oszlop valószínűsége 1/4 és $R(1/2, 2, 1) = 3/4$.

A perkolációs kutatások tipikus célja az $R(p, m, n)$ függvény végtelen mátrixokra vonatkozó $R(p, m)$ határértékének meghatározása, továbbá annak az $R_{crit}(m)$ kritikus valószínűségnek a megadása, amely megakadályozza az ütemezhetőséget, de a nála kisebb valószínűségek már megengedik.

1.2. Ismert eredmények

A különböző perkolációs modellekkel kapcsolatban számos eredmény van. A legismertebb a Harris–Kesten-tétel [**?**, **?**, **?**, 2], amely szerint a ???-modell kritikus valószínűsége 1/2.

Könnyen belátható, hogy ha $m \geq 2$, akkor $R_{crit}(m) \leq 1/m$.

Gács Péter [7] a következő alsó becslést adta $R(2) = R(p, 2, \infty)$ értékére.

1.1. tétel. *Ha* $p < 10^{-400}$, *akkor*

$$R(p, 2, \infty) > 0.$$

Ennek az elemzésnek alapja a skatulyaelv: ha a $\mathbf{Z}$ mátrix első k $(1 \leq k \leq n)$ oszlopában több az egyes, mint a nulla, akkor biztosan nem tehető ütemezhetővé.

Jelölje $Q(p, m, n)$ annak valószínűségét, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrixhoz található olyan k $(1 \leq k \leq n)$, hogy a mátrix első k oszlopában több az egyes, mint a nulla. Ekkor $R(p, m, n) \leq 1 - Q(p, m, n)$.

1.2. tétel. *Ha* $0 \leq p \leq 1$ *akkor*

$$Q(p, 2, \infty) = \begin{cases} 1, & ha\ \frac{1}{2} \leq p \leq 1, \\ \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{p^2}{p^2 + (1-p)^2}\right)\frac{1-p^2}{p^2+(1-p)^2}}}{2\left(1 - \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}\right)}, & ha\ 0 \leq p < \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.5}$$

Megjegyezzük, hogy ha p elég kicsi, akkor az (**??**) egyenlőtlenség szerint $Q(p, 2, \infty \sim p^2$, és a 1.5 képlet szerint $Q(1/2, 2, \infty = 1$.

A (1.1) és a (1.5) egyenlőtlenségekből adódik, hogy

$$10^{-}400 \leq R(2) \leq \frac{1}{2}.$$

1.3. Leszámlálás két dimenzióban

Legyen

$$0 \leq p \leq 1, \qquad n \geq 1, \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

és legyen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

olyan valószínűségi változókat tartalmazó mátrix, melyek – egymástól függetlenül – p valószínűséggel az egy és $q = 1 - p$ valószínűséggel a nulla értéket veszik fel.

Legyen

$$R(p, n)$$

annak a valószínűsége, hogy $\mathbf{Z}$ egy realizációjának van olyan prefixe, amelyben több egyes van, mint nulla, azaz van olyan k $(1 \leq k \leq n)$, amelyre teljesül

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) \leq k.$$

Legyen $R(p)$ annak a valószínűsége, hogy ugyanez a hasonló végtelen mátrixra teljesül, azaz legyen

$$R(p) = \lim_{n\to\infty} R(p, n).$$

1.3. tétel. *Ha* $0 \leq p \leq p \leq 1$, *akkor*

$$Q(p) = a\sum_{i=0}^{\infty} C_i(ab)^i, \tag{1.6}$$

ahol

$$a = \frac{p^2}{p^2 + q^2} \quad \textit{és} \quad b = \frac{q^2}{p^2 + q^2}.$$

Bizonyítás. Jelölje B a fekete, W a fehér és C a színes oszlopokat.

A nem biztos mátrixok nagy része a $C^k B$ alakú mátrixokból származik, melyek $(2p(1 - p))^k p^2$ valószínűséggel fordulnak elő, ezért $p = 1/2$ esetén a $\mathbf{Z}$ mátrix

$$\sum_{k=0}^{\infty}(p(1-p))^k p^2 = \frac{1}{16}\frac{1}{5/8} = 0,1.$$

A következő típus fő része a WBB oszlopsorozat. Itt az általános alak $C^a W C^b B C^c B$. Az előzőekhez hasonlóan itt is egy mértani sor összegét kell meghatározni. Az előző esethez képest a W és B oszlop miatt megjelenik egy (9/16)-os és egy (1/16)-os szorzótényező, a két új C-sorozat miatt pedig két (8/5)-ös tényező, ami összesen (9/100)-os szorzást jelent, tehát az ilyen mátrixok valószínűsége 0,009.

Ezután a bizonytalanságot előidéző fekete oszlop előtt 2–2, 3–3, ... fehér és fekete oszlopot tartalmazó mátrixok szábavétele következik. Eközben felhasználjuk a ballot-tételt [4], valamint azt, hogy az n-edik Catalan-szam [11] megadja, hány olyan $2n$ hosszúságú sorozat van, amely n fehér és n fekete oszlopot tartalmaz úgy, hogy a fekete oszlopok száma egyik prefixben sem haladja meg a fehér oszlopok számát:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

■

1.4. lemma. *Ha* $0 \le x \le 1$, *akkor*

$$S(x) = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(x(1-x))^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } 0 < x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Bizonyítás. ■

Mivel $R(p)$ valószínűségek monoton nemcsökkenő sorozatának határértéke, ezért $0 \le R(p) \le 1$ minden p-re. Az is természetes, hogy az $R(p)$ monoton nemcsökkenő függvénye p-nek.

A várt viselkedés: $R(p)$ a $[0, 1/2)$ intervallumban folytonos, szigorúan monoton nő (nullától egyig), az $[1/2, 1]$ intervallumban pedig konstans (az értéke 1).

A hasonló vizsgálatok [2, 5, 6, 7, 8, 9] egyik központi kérdése az 1 és az 1-nél kisebb $R(p)$ értékeket elválasztó ***kritikus valószínűség:***

$$p_{crit} = \inf_{0 \le p \le 1} \{p \mid R(p) = 1\}.$$

A (1.6) összegben a C_i tényezők a Catalan-számok [1, 3, 11, 12, 14], melyekre a C_{i+1}/C_i hányadosok szigorúan monoton növekedve négyhez tartanak.

A (1.6) összeget a hányados kritérium segítségével alulról és felülről is megbecsülhetjük. A használható felső becslés érdekében célszerű az első néhány tagot pontosan kiszámolni.

Ha például $p = 0,4$, akkor

$$a = \frac{0,4^2}{0,4^2 + 0,6^2} = \frac{4}{13} \text{ és } b = \frac{9}{13},$$

az első 4 tag összege pedig

$$a\sum_{i=0}^{3} C_0(ab)^i = \frac{4}{13}\left(1 + \frac{4}{13} + 2\frac{4^2}{13^2} + 5\frac{4^3}{13^3}\right) = \frac{4}{13}\frac{3509}{2197} \sim 0,62.$$

A további tagokra

$$a\sum_{i=4}^{\infty}C_i(ab)^i < \frac{4}{13}C_4\frac{4^4}{13^4}\sum_{i=4}^{\infty}\frac{C_i}{C_4}\left(\frac{144}{169}\right)^{i-4} < 5,6\cdot 9,216\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{13}\right)^i = 5,4\cdot 10^{-3}\cdot\left(\frac{169}{25}\right) \sim 0,36.$$

Ezek szerint

$$R(p) < 0,62 + 0,36 = 0,98.$$

Ha $i \geq 3$, akkor $C_{i+1}/C_i \geq 3$, így

$$R(p) \sim 0,62 + a\sum_{i=4}^{\infty}C_i(ab)^i < 0,62 + \frac{4}{13}C_4\frac{4^4}{13^4}\sum_{i=4}^{\infty}\left(\frac{108}{169}\right) \sim 0,62 + 5,6\cdot 9,216\cdot 10^{-3}\frac{169}{61} \sim 0,14.$$

Ezek szerint

$$R(0,4) > 0,62 + 0,14 = 0,76$$

és

$$0,76 < R(0,4) < 0,98.$$

1.4. A kétdimenziós konvergencia sebessége

A következő táblázatban a [**?**, **?**] MATLAB segítségével végzett konkrét számítások eredményeit foglaljuk össze.

n	$a = 0,49$	$a = 0,50$	$a = 0,51$
0	$Q = 0,490000$ $u = 0,490000$	$Q = 0,500000$ $u = 0,500000$	$Q = 0,510000$ $u = 0,510000$
1	$Q = 0,612451$ $u = 0,122451$	$Q = 0,625000$ $u = 0,125000$	$Q = 0,637449$ $u = 0,127449$
2	$Q = 0,673652$ $u = 0,061201$	$Q = 0,687500$ $u = 0,062500$	$Q = 0,701148$ $u = 0,063699$
3	$Q = 0,711887$ $u = 0,031538$	$Q = 0,726562$ $u = 0,039062$	$Q = 0,740943$ $u = 0,039795$
4	$Q = 0,73864$	$Q = 0,753906$ $u = 0,027343$	$Q = 0,768789$ $u = 0,027846$
5	$Q = 0,75869$	$Q = 0,774414$ $u = 0,020507$	$Q = 0,789666$ $u = 0,020876$
10	$Q = 0,81477$	$Q = 0,831811$ $u = 0,008895$	$Q = 0,848033$ $u = 0,008136$
100	$Q = 0,92372$	$Q = 0,943930$ $u = 0,000278$	$Q = 0,960898$ $u = 0,000273$
1000	$Q = 0,95634$	$Q = 0,982169$ $u = 0,000008$	$Q = 0,995378$ $u = 0,000006$
10000	$Q = 0,96077$	$Q = 0,994358$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999990$ $u = 0,000000$
100000	$Q = 0,960784$	$Q = 0,998215$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999999$ $u = 0,000000$
200000	$Q = 0,960784$	$Q = 0,998738$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999999$ $u = 0,000000$

Az $a = 0,50$ és az $a = 0,51$ esetben a sor összege 1, míg az $a = 0,49$ esetben

Ha az eredeti mátrixban az egyesek valószínűsége például 1/4, 1/3, illetve 2/5, akkor az egyesek valószínűsége akkor a „sűrített mátrixban” az egyesek valószínűsége a sűrített mátrixban 1/10, 1/5, illetve 4/13 lesz.

n	$a = 1/10$	$a = 1/3$	$a = 4/13$
0	$Q = 0,100000$ $u = 0,100000$	$Q = 0,200000$ $u = 0,200000$	$Q = 0,307692$ $u = 0,307692$
1	$Q = 0,109000$ $u = 0,009000$	$Q = 0,232000$ $u = 0,003200$	$Q = 0,373236$ $u = 0,065543$
2	$Q = 0,110600$ $u = 0,001600$	$Q = 0,242240$ $u = 0,001024$	$Q = 0,401160$ $u = 0,027924$
3	$Q = 0,110984$ $u = 0,000364$	$Q = 0,246336$ $u = 0,000409$	$Q = 0,416031$ $u = 0,014870$
4	$Q = 0,111076$ $u = 0,000009$	$Q = 0,248171$ $u = 0,0001.83$	$Q = 0,424900$ $u = 0,008.869$
5	$Q = 0,111101$ $u = 0,000002$	$Q = 0,249051$ $u = 0,000088$	$Q = 0,430568$ $u = 0,0005.66$
10	$Q = 0,111111$ $u = 0,000000$	$Q = 0,249951$ $u = 0,000004$	$Q = 0,441201$ $u = 0,000099$
100	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000273$
1000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
10000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
100000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
200000	$Q = 0,11111111111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$

A képlet szerint a $p = 1/4$ valószínűséghez

$$x = \frac{1 - 0,8}{1,8} = \frac{1}{9}$$

határvalószínűség tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

A képlet szerint az $a = 1/5$ valószínűséghez

$$x = \frac{2/5}{8/5} = \frac{1}{4}$$

határvalószínűség tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

A képlet szerint az $a = 4/13$ valószínűséghez

$$x = \frac{8/13}{18/13} = \frac{4}{9}$$

határvalószínűsg tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

1.5. Leszámlálás három dimenzióban

Először az egyszerűség kedvéért csak három dimenzióban számolunk. Legyen

$$0 \le p \le 1, \qquad n \ge 1, \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

és legyen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3n} \end{pmatrix}$$

olyan valószínűségi változókat tartalmazó mátrix, melyek – egymástól függetlenül – p valószínűséggel az egy és $q = 1 - p$ valószínűséggel a nulla értéket veszik fel.

Legyen $Q(p, n, 3)$ annak a valószínűsége, hogy $\mathbf{Z}$ egy realizációjának nincs olyan $\mathbf{Z}_k$

prefixe amelyre

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) \leq k \quad (1 \leq k \leq n)$$

Legyen $Q(p,3)$ annak a valószínűsége, hogy ugyanez a hasonló végtelen mátrixra teljesül, azaz legyen

$$R(p,3) = \lim_{n\to\infty} R(p,n,3).$$

A vizsgált mátrix oszlopaiban 0, 1 vagy 3 darab egyes van.

A „rossz" mátrixok egyik típusát alkotják azok a mátrixok, melyeknek $2k+1$ oszlopa van, utolsó oszlopukban két egyes van, a többi oszlopukban egy vagy két egyes van úgy, hogy a két egyest tartalmazó oszlopok száma először az utolsó oszlopban lesz nagyobb, mint az egy egyest tartalmazó oszlopoké.

Az ilyen típusú végtelen mátrixok valószínűsége

$$3p^2q\sum_{i=0}^{\infty} C_i(3p^2q)^i(3pq^2)^i. \tag{1.8}$$

Ha $p = 1/4$, akkor ennek a sornak az összege 9/64 = 0,15625. Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy a Markov-láncos megközelítésnél az elnyelő N állapot valószínűsége az első átmenet után 9/64.

A „rossz" mátrixok másik típusát alkotják azok a mátrixok, melyeknek $2k+1$ oszlopa van, utolsó oszlopukban három egyes van, a többi oszlopukban nulla vagy három egyes van úgy, hogy a három egyest tartalmazó oszlopok száma először az utolsó oszlopban lesz nagyobb, mint a nulla egyest tartalmazó oszlopoké.

Az ilyen típusú végtelen mátrixok valószínűsége

$$p^3\sum_{i=0}^{\infty} C_i(p^3)^i(q^3)^i. \tag{1.9}$$

Ha $p = 1/2$, akkor ennek a sornak az összege 1/192.

A „rossz" mátrixok további típusaiban keverednek a „tiszta" és „vegyes" oszlopok.

1.6. Bolyongás két dimenzió esetén esetén

A Winkler-modell vizsgálata (tetszőleges m dimenziószám esetén is) visszavezethető az x tengelyen való bolyongásra.

A bolyongás az origóból indul. A -1 pontba nyelőt teszünk (ez jelzi, hogy az egyesek többségbe kerültek). Ha $m = 2$, akkor általában p^2 valószínűséggel balra, q^2 valószínűséggel jobbra lépünk, és $2pq$ valószínűséggel helyben maradunk (amikor a mátrixban vegyes oszlop van).

Mivel elsősorban a -1 pontba jutás valószínűsége érdekel bennünket, a helybenjárás valószínűségét elosztjuk a balra és jobbra lépés valószínűségének arányában, és egy olyan – egyszerűbb — bolyongást vizsgálunk, amelyben a balra lépés a valószínűsége és a jobbra lépés b valószínűsége a következő:

$$a = \frac{p^2}{p^2+q^2}, \quad b = \frac{q^2}{p^2+q^2}.$$

Legyen x annak valószínűsége, hogy ebben az esetben először elérjük a -1 pontot. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint

$$x = P(\text{első lépés -1-be})P(\text{először jutunk -1-be} \mid \text{első lépés -1-be})+$$
$$P(\text{első lépés 1-be})P(\text{először jutunk -1-be} \mid \text{első lépés 1-be}) =$$
$$a \cdot 1 + P(\text{először jutunk a 0-ba} \mid \text{1-ből indultunk})P(\text{először jutunk -1-be} \mid \text{0-ból indultunk}) =$$
$$a + (1-a)x^2.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldása 6 különböző p értékre ugyanazt a megoldást adja, mint a leszámlálás.

1.7. Bolyongás három dimenzió esetén

Ha a vizsgált mátrixnak 3 sora van, az oszlopokban mindig különböző az egyesek és nullák száma, ezért helybenjárás nem fordulhat elő – viszont a csupa nullákat és a csupa egyeseket tartalmazó oszlopoknak a bolyongás során ugrás felel meg.

A kétsoros mátrixhoz hasonló meggondolás a következő egyenletre vezet:

$$x = (p^3 + 3p^2q) + 3pq^2(x^2 + xp^3 + p^3) + q^3(x^3 + x^2p^3 + xp^3).$$

Ennek az egyenletnek a rendezésével a

$$q^3x^3 + (p^3q^3 + 3pq^2)x^2 + (p^3q^3 + 3p^4q^2 - 1)x + (p^3 + 3p^2q + 3p^4q^2) = 0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk.

Ha ide behelyettesítjük a $p = 1/4$ értéket, az

$$1728x^3 + 1729x^2 - 4042x + 667 = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek a $(0, 1)$ intervallumban egy gyöke van. Az egyenlet bal oldalának értéke az $x = 0,181705$ helyen körülbelül 0,001, míg az $x = 0,181706$ helyen körülbelül -0,002, ezért a gyök $x_0 \sim= 0,181705$.

1.8. Markov-láncok a kétdimenziós esethez

A feladat egy megszámlálhatóan végtelen állapotú, homogén Markov-lánccal [4] is leírható. Mivel elsősorban a kritikus valószínűséget szeretnénk meghatározni, eltekintünk a színes oszlopoktól, és ennek megfelelően megnöveljük a fekete és fehér oszlopok valószínűségét.

Az állapotok indexe a fehér és fekete oszlopok számának különbsége, azaz $-1, 0, 1, 2, \ldots$ lehet.

A lánc kezdeti eloszlása $(0, 1, 0, 0, \ldots)$, az átmenetvalószínűségek pedig

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = -1 \text{ és } j = -1, \\ \frac{p^2}{p^2+q^2}, & \text{ha } i \neq 0 \text{ és} j = i - 1, \\ \frac{q^2}{p^2+q^2}, & \text{ha } i \neq 0 \text{ és} j = i + 1, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

vagy mátrix alakjában

Állapot	s_{-1}	s_0	s_1	s_2	s_3	...
s_{-1}	1	0	0	0	0	...
s_0	a	0	b	0	0	...
s_1	0	a	0	b	0	...
s_2	0	0	a	0	b	...
...	0	0	0	...	...	...

Ha $p \geq 1/2$, akkor az s_{-1} állapot mindent elnyel és a határeloszlás $(1, 0, 0, 0, \ldots)$. Ha viszont $p < 1/2$, akkor az elnyelő állapot határvalószínűsége egynél kisebb, a többi állapoté pedig nulla, bár a többiek együttes valószínűsége pozitív.

Az s_0 elnyelő állapot határvalószínűségét x-szel jelölve a következő egyenlet írható fel:

$$x = a + (1 - a)x^2,$$

melynek megoldása

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(1 - a)a}}{2(1 - a)} \quad \text{és} \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(1 - a)a}}{2(1 - a)}.$$

1.9. Markov-láncok a háromdimenziós esethez

Ebben az esetben $m = 3$.

Az átmenetvalószínűségeket úgy határozzuk meg, hogy hárombites véletlen oszlopokat generálunk, és az egyesek, valamint a nullák számának különbsége szerint megyünk át új állapotba: ha több az egyes, a kisebb index felé megyünk, ha pedig a nulla több, akkor a nagyobb index felé. A -1 pontban van az N állapot (ez egy nyelő), a 0 pontban van a Z állapot (egy valószínűséggel ebből a kezdőállapotból indulunk), a többi állapotot S_i-vel jelöljük.

A következő táblázat mutatja az átmenetvalószínűségeket.

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = -1 \text{ és } j = -1, \\ p^3 + 3p^2, & \text{ha } i = 0 \text{ és} j = -1, \\ p^3, & \text{ha } i = 1 \text{ és} j = -1 \\ p^3, & \text{ha } i \geq 2 \text{ és} j = i - 3 \\ 3pq^2, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i + 1, \\ 3p^2q, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i - 1, \\ q^3, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i + 3 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

vagy mátrix alakjában

Állapot	$N = S_{-1}$	$Z = S_0$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_7
$N = S_{-1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z = S_0$	$p^3 + 3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0	0	0
S_1	p^3	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0	0
S_2	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0
S_3	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0
S_4	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0
S_5	0	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3
S_5	0	0	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0

Ha $p \geq 1/3$, akkor az N állapot mindent elnyel és a határeloszlás $(1, 0, 0, 0, \ldots)$. Ha viszont $p < 1/3$, akkor az elnyelő állapot határvalószínűsége egynél kisebb, a többi állapoté pedig nulla, bár a többiek együttes valószínűsége pozitív.

Idő/Áll.	N	Z	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0,156250	0	0,421875	0	0,421875	0	0	0
2	0,162841	0,065917	0	0,237304	0	0,355957	0	0,177978
3	0,176849	0	0,066741	0	0,180759	0	0,275310	0
4	0,177892	0,012209	0	0,169722	0	0,146649	0	0,225254
5	0,180704	0	0,031309	0	0,100895	0		0,168610
10	0,181970	0,001971	0	0,033754	0	0,27992	0	0,051339
20	0,181970	0,000138	0	0,002393	0	0,001982	0	0,003685
30	0,182079	0,000010	0	0,000170	0	0,000141	0	0,000263
40	0,182079	0,000001	0	0,000012	0	0,000100	0	0,000018
50	0,182079	0,000000	0	0,000001	0	0,000001	0	0,000001
60	0,182079	0,000000	0	0,000000	0	0,000000	0	0,000000
70	0,18207925400329	0,000000	0	0,000000	0	0,000000	0	0,000000
75	0,18207925400329	0,000000	0	0,000000	0	0,000000	0	0,000000

Az itt kapott 0,182079 érték nagyon közel van a bolyongással kapott 0,181705 értékhez. Még pontosabb számolással ellenőrizzük, hogy a két módszer valóban ugyanazt az eredményt adja-e.

1.10. Markov-láncok a négydimenziós esethez

Ebben az esetben $m = 4$.

Az átmenetvalószínűségeket úgy határozzuk meg, hogy négybites véletlen oszlopokat generálunk, és az egyesek, valamint a nullák számának különbsége szerint megyünk át új állapotba: ha több az egyes, a kisebb index felé megyünk, ha pedig a nulla több, akkor a nagyobb index felé. A -1 pontban van az N állapot (ez egy nyelő), a 0 pontban van a Z állapot (egy valószínűséggel ebből a kezdőállapotból indulunk), a többi állapotot S_i-vel jelöljük. A helybenjárástól itt is megszabadulunk.

A következő táblázat mutatja az átmenetvalószínűségeket.

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = -1 \text{ és } j = -1, \\ p^3 + 3p^2, & \text{ha } i = 0 \text{ és} j = -1, \\ p^3, & \text{ha } i = 1 \text{ és} j = -1 \\ p^3, & \text{ha } i \geq 2 \text{ és} j = i - 3 \\ 3pq^2, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i + 1, \\ 3p^2q, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i - 1, \\ q^3, & \text{ha } i \geq 0 \text{ és} j = i + 3 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

vagy mátrix alakjában

Állapot	$N = S_{-1}$	$Z = S_0$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_7
$N = S_{-1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z = S_0$	$p^3 + 3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0	0	0
S_1	p^3	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0	0
S_2	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0	0
S_3	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0	0
S_4	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3	0
S_5	0	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0	q^3
S_5	0	0	0	0	p^3	0	$3p^2q$	0	$3pq^2$	0

1.11. Összefoglalás

Különböző módzsrekkel vizsgáltuk a Winkler-perkoláció ütemezhetőségi függvényének viselkedését két, három és négy dimenzióban.

Az ütemezhetőség egy szükséges feltételét kihasználva megmutattuk, hogy a kritikus valószínűségre tetszőleges $m \geq 2$ dimenziószám esetén fennáll $c_{crit(p,m)} \leq 1/m$.

Két dimenzióban olyan – p-től függő – felső korlátot vezettünk le a kritikus valószínűségre, amely a szimulációs vizsgálatok szerint közel van a tényleges szimulációs valószínűséghez.

Köszönöm Gács Péter, Kása Zoltán, Kiss Attila, László Lajos, Lóczi Lajos, Móri Tamás és Simon Péter segítségét.

Irodalomjegyzék

[1] Bege, Antal and Kása, Zoltán: Coding objects related to Catalan numbers. *Studia Univ. Babes-Bolyai, Informatica* Volume **XLVI/1** (2001), 31–39. 4

[2] Bollobas, Béla; Riordan, Oliver: A short proof of the Harris-Kesten theorem. Elektronikus kézirathttp://arxiv.org/find. 2, 4

[3] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald E., Stein, Clifford: *Introduction to Algorithms*, The MIT Press/McGraw-Hill, 2004 (Második kiadás ötödik, javított utánnyomása. Magyarul: *Új algoritmusok.* Scolar Kiadó, 2003). 4

[4] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1968. Magyarul: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978. 4, 8

[5] Gács, Péter: The clairvoyant demon has a hard task. *Combin. Probab. Comput.* **9/5** (2000), 421–424. MR1810149 (68R10, 05C80 60C05 60K35 68M14 82B43). 1, 4

[6] Gács, Péter: Clairvoyant Scheduling of Random Walks (submitted to *Electronic Journal of Probability*). Rövid változat: Clairvoyant scheduling of random walks. In *Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. MR2121131 (05C85, 60G50). 1, 4

[7] Gács, Péter: Compatible sequences and a slow Winkler percolation. *Combin. Probab. Comput.* **13/6** (2004), 815–856. MR2102411 (60C05, 60K35) 1, 2, 4

[8] Harris, T. E.: A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56** (1960), 13–20. MR0115221 (22 #6023) 4

[9] Kesten, Harry: The critical probability of bound percolation on the square lattice is 1/2. *Comm. Math. Phys.* **74** (1980), 41–59. 4

[10] Kesten, Harry: *Percolation Theory for Mathematicians. Progress in Probability and Statistics, 2.* Birkhäuser, Boston, 1982. **MR**0692943 (84i:60145, 60K35 (05C70 82A43) Oroszul: *Teoriya prosachivaniya dlya matematikov*. Mir, Moszkva, 1986. **MR**0848358 (87h:60193, 60K35). 1

[11] Kása, Zoltán: Rekurzív egyenletek. In: *Informatikai algoritmusok. 1* (szerk. Iványi Antal). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. 14–37. 4

[12] Knuth Donald Ervin: *The Art of Computer Programming. Vol. 1. Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, 1997 (3., javított kiadás). Magyarul: *A számítógépprogramozás művészete. 1. kötet. Alapvető algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, 1993, 2. kiadás.) 4

[13] László Lajos: *PCMATLAB*. http://numanal.inf.elte.hu/ laszlo/matek.html/.

[14] Stanley, Richard P.: *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62.** Cambridge University Press, 4

[15] Stoyan Gisbert: MATLAB – frissített kiadás. Typotex, Budapest, 2005.

[16] Vilenkin, N. J.: *Combinatorial Mathematics for Recreation*. Mir Publisher, Moscow, 1972. 207 oldal. Magyarul: Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 358 oldal, ETO 591.1.

(Budapest, 2005. június 20.)