STUDIA UNIV. BABEŞ–BOLYAI, INFORMATICA, Volume ?, Number ?, ????

GENERALIZED CATALAN NUMBERS

ANTAL IVÁNYI AND CSABÁNÉ LÁNG

Abstract. Azt vizsgáljuk, hány olyan $m \times n$ méretű bináris mátrix van, amelyekben: a) minden oszlopban legfeljebb egy egyes van (*jó mátrixok*); b) amelyek nulla elemek törlésével jó mátrixszá alakíthatók (*ütemezhető mátrixok*); c) tetszőleges k-ra igaz, hogy a mátrix első k oszlopában legfeljebb k darab egyes van (*biztos mátrixok*); d) mennyi az aszimptotikus sűrűsége a jó, ütemezhető és biztos mátrixoknak.

A jó mátrixok segítségével alsó, a biztos mátrixok segítségével felső korlátokat adunk az ütemezhető mátrixok számára és aszimptotikus sűrűségére.

A biztos mátrixok száma Catalan-számok összegzésével adódik, ezért a feladat kapcsán természetes módon általánosíthatók a Catalan-számok.

1. Introduction

A kombinatorikával (is) foglalkozó tankönyvek egyik népszerű témája a Catalan-számok elemzése [1, 3, 11, 12, 14, 15, 20]. Például Stanley könyve [18] 66 olyan leszámlálási feladatot említ, melyek Catalan-számokra vezetnek – és a könyvnek a Stanley honlapján [19] elérhető folytatása 64 újabb feladatot tartalmaz.

Ebben a cikkben egy olyan – a perkoláció [5, 6, 7, 13, 16] vizsgálatából származó feladatot elemzünk, amelynek speciális esetben ugyancsak Catalan-számok adják a megoldását, és amely természetes módon vezet a Catalan-számok általánosítására.

2. Formulation of the problems

Let m and n be positive integers and let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

be a binary matrix, that is let $a_{ij} \in \{0,1\}$ for $i = 1, 2, \dots, m$ and $j = 1, 2, \dots, n$.

Received by the editors: 2005. July 25.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05A16, 60C05, 68Q25.

1998 *CR Categories and Descriptors.* G2.1 [**Discrete mathematics**]: Combinatorics – *Counting problems*; F2.2 [**Analysis of algorithms and problem complexity**]: Nonnumerical algorithms and problems – *Computations on discrete structures*.

The columns containing only 0's are called *white*, the columns containing different elements and exactly one 1 are called *grey* and the columns containing at least two 1's or more are called *black*.

If $m \geq 2$, then the good, safe and schedulable matrices are defined as follows.

Matrix A is called *good,* if the number of its black columns equals to zero. The number of different good matrices of size $m \times n$ is denoted by $G(m,n)$.

Matrix A is called *safe,* if its prefixes contain at least so many 0's as 1's, that is if

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_{ij} \leq k \quad (k = 1, 2, \cdots n). \tag{2}$$

The number of different safe matrices of size $m \times n$ is denoted by $S(m,n)$. Az $S(m,n)$ számokat – a Catalan-számokkal való szoros kapcsolat miatt – *kumulált Catalan-számoknak* nevezzük.

If $a_{ij} = 0$, then it can be deleted from A. Deletion of a_{ij} means that we decrease the second indices of $a_{i,j+1}, \ldots, a_{im}$ and add $a_{im} = 0$ to the i-th row of A.

Matrix A is called *Winkler schedulable* (shortly schedulable or compatible) if it can be transformed into a good matrix B using deletions. The number of different schedulable matrices of size $m \times n$ is denoted by $W(m,n)$. A $W(m,n)$ számokat *Winkler-számoknak* nevezzük.

Our aim is the characterization of the number and asymptotic density of the good, safe and schedulable matrices, that is estimations of the functions $G(m,n)$, $S(m,n), W(m,n)$ and their asymptotic density

$$G(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{G(m,n)}{T(m,n)}, \quad S(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{S(m,n)}{T(m,n)}, \quad W(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{W(m,n)}{T(m,n)}, \tag{3}$$

where $T(m,n) = 2^{mn}$ is the total number of $m \times n$ binary matrices.

2.1. **Interpretation of the problem.** Bár a Winkler-modellt a perkoláció [5, 6, 7, 13, 16] leírására javasolták, a probléma egy lehetséges informatikai értelmezését mutatjuk be. m folyamatnak időnként ugyanarra az erőforrásra van szüksége. Az i-edik folyamat erőforrásigényét az $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ sorozattal adjuk meg. Ha ennek a sorozatnak az a_{ij} eleme egyes, akkor az i-edik folyamat a $[j-1, j]$ intervallumban igényli az erőforrást. Ha $a_{ij} = 0$, akkor ugyanabban az intervallumban a folyamat nem igényli az erőforrást, mert későbbre halasztható háttérmunkát végez – ez magyarázza, hogy az ütemezhetőség érdekében a nullák törölhetők.

A jó mátrixok törlés nélkül ütemezhetők. A nem jó mátrixok egy része törlés(ek) segítségével jóvá alakítható, azaz ütemezhető. A biztosság az ütemezhetőség szükséges feltétele. Ezért a jó mátrixok szám alsó korlát, a biztos mátrixok száma pedig felső korlát az ütemezhető mátrixok számára.

Mivel a problémát informatikai problémaként kezeljük, ezért a továbbiakban elsősorban Feller [4] informatikai (tömegkiszolgálási) terminológiáját használjuk.

n	$G(2,n)$	$\frac{G(2,n)}{T(2,n)}$	$W(2,n)$	$\frac{W(2,n)}{T(2,n)}$	$S(2,n)$	$\frac{S(2,n)}{T(2,n)}$	$\frac{W(2,n)}{S(2,n)}$
1	3	0.750	3	0.750	3	0.750	1
2	9	0.562	10	0.625	10	0.625	1
3	27	0.452	35	0.547	35	0.547	1
4	81	0.316	124	0.484	126	0.492	0.984
5	243	0.237	444	0.434	462	0.451	0.961
6	729	0.178	1592	0.389	1716	0.419	0.927
7	2187	0.133	5731	0.350	6435	0.393	0.890
8	6561	0.100	20671	0.315	24310	0.371	0.850
9	19683	0.075	74722	0.285	92378	0.352	0.808
10	59049	0.056	270521	0.258	352716	0.336	0.767
11	177147	0.042	980751	0.234	1352078	0.322	0.725
12	531441	0.032	3559538	0.212	5200300	0.310	0.684
13	1594323	0.022	12931155	0.193	20058300	0.299	0.646
14	4782969	0.018	47013033	0.175	77558760	0.289	0.606
15	14348907	0.013	171036244	0.159	300540195	0.280	0.568

FIGURE 1. A jó, ütemezhető és biztos mátrixok száma és részaránya.

3. Examples

A következő táblázatban a jó, ütemezhető és biztos mátrixok számát és részarányát, valamint az ütemezhető és biztos mátrixok számának arányát foglaljuk össze [10] alapján.

Ha $n = 1$, akkor 4 különböző $\mathbf{A}$ mátrix lehetséges:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezek közül az első három biztos, ütemezhető és jó is, míg a negyedik nem jó, nem ütemezhető és nem is biztos.

Ha $n = 2$, akkor már 16 különböző mátrix van. Ezek közül 9 jó (a 3 jó oszlop bármelyike lehet első és második oszlop is) és 7 a nem jó.

A 7 nem jó mátrix közül 6 nem biztos (4 fekete oszloppal kezdődik, további kettőben pedig 3 egyes van), 1 viszont (amelyiknek első oszlopában nullák, második oszlopában egyesek vannak) biztos – ez a mátrix az a_{11} vagy az a_{21} elem törlésével javítható.

Ha $n = 3$, akkor 64 különböző mátrix van, közülük 27 jó. A fekete harmadik oszlop miatt nem jó

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mátrixot az első sor első elemének törlésével ütemezhetővé tehetjük.

Ha $n = 4$, akkor 256 mátrix van. Ezek egyike a biztos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

mátrix. Ebben az első sorozatban két egyes van egymás mellett, és nem tudjuk elérni, hogy az első sorozatban ugyanannyi nulla legyen egymás mellett – és azt sem tudjuk elérni, hogy a második sorozat minden egyesét eléggé előre toljuk – tehát ez a mátrix nem ütemezhető.

4. Combinatorial analysis

Az $m \times n$ méretű bináris mátrixok száma $T(m, n) = 2^{m \times n}$.

4.1. One row in the matrix. Az egysoros mátrixok közül is azokat nevezzük *biztosnak,* amelyeknek nincs fekete oszlopa.

A biztos mátrixok $S(1, n)$ számát úgy határozzuk meg, hogy a nem biztos mátrixokat osztályozzuk azon oszlopuk szerint, amelyben az egyesek száma először haladta meg a nullák számát ezt az oszlopot *döntő oszlopnak* nevezzük. Ez az első, harmadik, ötödik, ... oszlopokban következhet be.

Jelöljük $C_{i,j}$-vel $(i, j \geq 0)$ azon $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$ bináris sorozatok számát, amelyekben j darab nulla és i darab egyes van úgy, hogy minden $a_1, a_2, \ldots, a_j$ kezdősorozatban legfeljebb annyi egyes van, mint nulla.

Lemma 1. *Ha $j \geq i \geq 0$, akkor*

$$C_{i,j} = \frac{j - i - 1}{i + 1} \binom{i + j}{i}. \tag{5}$$

Proof. **BIZONYÍTÁS @@@** □

Corollary 2. *Ha $n \geq 0$, akkor*

$$C_{i,i} = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy $C_{n,n}$ az n-edik Catalan-szám, melynek explicit alakja számos tankönyvben [1, 3, 12, 14, 20] megtalálható. Rendszerint rekurzív összefüggés és generátorfüggvények segítségével jutnak el a fenti képlethez. Mi itt az érdekesség kedvéért a [15, 18] tankönyvekben is megtalálható elemi megoldást adtuk közre.

Az $S(1, 1)$, $S(1, 2)$, ... sorozatra a következő rekurzív egyenletet írhatjuk fel. Az egyszerűség kedvéért a bizonytalan mátrixot számát adjuk meg.

Lemma 3. *Legyen $U(1, n) = 2^n - S(1, n)$. Ekkor*

$$U(1, n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1, \\ 2U(1, n - 1), & \text{ha } n = 2i, \\ 2U(1, n - 1) + C_i, & \text{ha } n = 2i + 1. \end{cases} \tag{6}$$

Az $S(1,n)$ függvényt több alakban is megadjuk.

Theorem 4. *Ha* $n \geq 1$, *akkor*

$$S(1,n) \begin{cases} = & 2^n - 2^{n-1} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_i \left(\frac{1}{4}\right)^i = \\ = & 2^n - \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} C \\ = & 2^n - \binom{n}{n - \lfloor (n/2) \rfloor - 1}. \end{cases} \tag{7}$$

Proof. A nem biztos mátrixban a k-adik oszlopot *döntőnek* nevezzük, ha k a legkisebb olyan index, amelyre igaz, hogy a mátrix első k oszlopában több az egyes, mint a nulla.

Az egysoros mátrixokban csak a páratlan indexű oszlopok lehetnek döntőek. Jelöljük D_i-vel azoknak a bizonytalan mátrixoknak a számát, amelyekben a $(2i+1)$-edik oszlop a döntő. Ekkor az első $2i$ oszlopban C_i-féleképpen helyezkedhet el az i darab nulla és az i darab egyes – a döntő oszlop utáni elemek pedig tetszőlegesek lehetnek. Ezért

$$D_i = C_i 2^{n-2i-1} \quad \left(i = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor\right). \tag{8}$$

Így $S(1,n)$ a megfelelő D_i számok összegével kifejezhető, azaz

$$S(1,n) = 2^n - \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_i 2^{n-2i-1}, \tag{9}$$

ahonnan kiemeléssel megkaphatjuk (7) első sorát.

A második sorban a 1. lemma képlete alapján összegezzük azon mátrixok számát, amelyekben a nullák száma több, mint az egyeseké.

Végül a harmadik alakot indukcióval bizonyíthatjuk a második sorból kiindulva. ∎

A továbbiakban a Catalan-számokat tartalmazó végtelen sorok összegének meghatározására felhasználjuk a következő, Kása Zoltántól [12] származó állítást.

Lemma 5. *Ha* $0 \leq z \leq 1/4$, *akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_i z^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2}. \tag{10}$$

A 4. tétel alapján meghatározhatjuk az egysoros biztos mátrixok aszimptotikus sűrűségét.

Corollary 6.

$$S(1) = 0. \tag{11}$$

Proof. A 5 lemma szerint a 4. tételben lévő összeg értéke 2. Ezt $S(1,n)$ explicit alakjába helyettesítve, majd a kapott kifejezést beírva $S(1)$ definíciójába a kívánt eredményt kapjuk. ∎

Ismert [1, 18], hogy egy Descartes-féle koordinátarendszer origójából C_n különböző úton juthatunk el az (n, n) pontba úgy, hogy közben összesen n-szer lépünk jobbra és n-szer lépünk felfelé úgy, hogy közben soha nem kerülünk az $y = x$ egyenes fölé.

Ennek analógiájára az $S(1, n)$ kumulált Catalan-szám azt adja meg, hány olyan n-lépéses út van, amelyben jobbra vagy felfelé léphetünk és az útnak nincs pontja az $y = x$ egyenes felett.

4.2. **Two rows in the matrix.** Ha $m \geq 2$, akkor az A mátrix minden oszlopa $(2^m - m - 1)$-féleképpen lehet fehér vagy szürke, ezért $G(m, n) = (m + 1)^n$. Mivel

$$G(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{G(m, n)}{T(m, n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{m + 1}{2^m}\right)^n = 0, \tag{12}$$

az oszlopok számának növekedtével a jó mátrixok részaránya tart a nullához.

Ha $m = 2$ és egy jó mátrixból töröljük a fehér oszlopokat, akkor csak szürke oszlopok maradnak, azaz a mátrix két sora egymásnak a *komplementere.*

Vizsgálataink szempontjából fontos szerepet játszik a következő egyszerű állítás.

Lemma 7. *Ha $m \geq 2$, akkor a jó mátrixok ütemezhetők, az ütemezhető mátrixok pedig biztosak.*

Proof. Ha van olyan j $(1 \leq j \leq n)$, amelyre az $\mathbf{A}$ mátrix első j oszlopában több egyes van, mint nulla, akkor a skatulyaelv szerint az első j oszlop között van fekete oszlop. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixból törlünk egy nullát, ezzel az első j oszlopban lévő nullák száma nem csökken – tehát $\mathbf{A}$ nem ütemezhető. □

Ennek az állításnak hasznos következménye az alábbi.

Corollary 8. *Ha $m \geq 2$, akkor*

$$G(m, n) \leq W(m, n) \leq S(m, n). \tag{13}$$

Osztályozzuk a lehetséges $2 \times n$ méretű mátrixokat a döntő oszlopuk indexe szerint – ez lehet $0, 1, \ldots, n$. Az egy osztályba került mátrixokat pedig osztályozzuk aszerint, hogy a döntő oszlop előtt hány fekete oszlopuk volt: ez a szám $0,\ 1, \ldots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ lehet. A biztos mátrixokat úgy számláljuk meg, hogy az összes mátrix számából levonjuk a bizonytalanok számát.

Theorem 9. *If $n \geq 1$, then*

$$S(2, n) = 2^{mn} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor} 2^{i-1-2j} C_j \binom{i-1}{2j} 4^{n-i}. \tag{14}$$

Proof. A külső összegzés a döntő oszlopokat veszi figyelembe, a belső pedig a döntő oszlop előtti fekete oszlopokat. Az összegben a binomiális együttható azt veszi számba, hányféleképpen helyezhető el a döntő oszlop előtti $i - 1$ oszlopban az összesen $2j$ fekete és fehér oszlop. A C_j Catalan-szám azt adja meg, hány megfelelő sorrendje van a fekete és fehér oszlopoknak. A 2 alapú hatvány azt mondja meg, hogy hányféleképpen választhatók meg a szürke oszlopok. Végül a 4 alapú hatványtényező azt veszi figyelembe, hogy a döntő oszlop utáni oszlopok tetszés szerint kitölthetők – a mátrix mindenképpen bizonytalan lesz. □

Az $S(n, 2)$-re kapott képlet nehezen kezelhetőnek látszik. Ezért $S(2)$-t nem ebből, hanem más úton vezetjük le. A bizonyítás alapja az az észrevétel, hogy a szürke oszlopok nem befolyásolják a bizonytalan mátrixok végső arányát, csak lassítják a konvergenciát.

Theorem 10.

$$S(2) = 0.$$

Proof. A bizonytalan mátrixok egy részét az első fekete oszlop teszi bizonytalanná. Ezek általános alakja $G_1^a B A^{a_2}$, ahol $a_1 + a_2 + 1 = n$, továbbá G szürke, B fekete és A tetszőleges oszlopot jelent. Az ilyen oszlopok aszimptotikus részaránya

$$\sum_{a_1=0}^{\infty} \sum_{a_2=0}^{\infty} C_0 \frac{2^{a_1} \cdot 1 \cdot 2^{a_2}}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{a_1=0}^{\infty} C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{4}.$$

Ha az $(i + 1)$-edik fekete oszlop a döntő, akkor az ilyen oszlopok aszimptotikus részaránya

$$\sum_{a=0}^{\infty} C_i \frac{2_1^a \cdot 1 \cdot 2^{a_2} \cdot \ldots \cdot 2^{a_{2i+1}}}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{a=0} C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{2},$$

ahonnan

$$S(2) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} C_1 \frac{1}{4} = 0.$$

□

Ismert [1, 18], hogy egy Descartes-féle koordinátarendszer origójából C_n különböző úton juthatunk el az (n, n) pontba úgy, hogy közben összesen n-szer lépünk jobbra és n-szer lépünk felfelé úgy, hogy közben soha nem kerülünk az $y = x$ egyenes fölé.

$S(n, 1)$ geometriai értelmezésének analógiájára az $S(2, n)$ kumulált Catalan-szám azt adja meg, hány olyan n-lépéses út van, amelyben minden lépésben jobbra vagy felfelé léphetünk vagy helyben maradhatunk, és az útnak nincs pontja az $y = x$ egyenes felett. Az $S(2)$, illetve $1 - S(2)$ értékek pedig azt adják meg, hogyan oszlanak meg a sorozatok a szögfelező alatt maradó és a szögfelezőt átlépő részre.

4.3. **Three rows in the matrix.** A $3 \times m$ méretű mátrixokat is osztályozhatjuk a döntő oszlopuk szerint. Az elemzés azonban lényegesen nehezebb az $m = 2$ esetnél, mert itt egyszerre 3 nulla vagy 3 egyes is lehet a soron következő oszlopban.

Mindenesetre a nem biztos mátrixok egyik típusa olyan, hogy a $(2k + 1)$-edik oszlop a döntő úgy, hogy előtte k-szor volt két nulla és k-szor volt két egyes a mátrix megfelelő oszlopában, majd a döntő oszlopban legalább két egyes volt. Az ilyen mátrixok száma legyen összesen

$$D_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_i (3)^i (3)^i 8^{n-2i-1} = \frac{2^n}{8} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\frac{9}{64} \right)^i . \tag{15}$$

Hasonló módon írhatjuk fel azon mátrixok valószínűségét, amelyekben a $(6k+1)$-edik oszlop a döntő úgy, hogy előtte k-szor volt három nulla és k-szor volt három egyes a mátrix megfelelő oszlopában, majd a döntő oszlopban legalább két egyes volt. Az ilyen mátrixok valószínűsége

$$E_n = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/6 \rfloor} C_i 8^{n-2i-1} = \frac{2^n}{8} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-1)/6 \rfloor} \left(\frac{1}{64} \right)^i . \tag{16}$$

5. Summary

A párhuzamos ütemezésben (és különösen a perkolációs elemzések során) az a jellemző, hogy a feldolgozott mátrixelemeket valószínűségi változókkal adjuk meg.

Ebben a cikkben szándékosan kerültük a valószínűség alkalmazását. Célunk a kumulált Catalan-sorozatok és a Winkler-sorozatok bemutatása és jellemzése volt.

Elég kicsi p esetén reménykedhetünk abban, hogy $\mathbf{Z}$ pozitív valószínűséggel ütemezhető.

Ismert [7], hogy ha $p < 10^{-400}$, akkor $\mathbf{Z}$ pozitív valószínűséggel ütemezhető. A szimulációs kísérletek szerint ennél nagyobb p értékre (kb. 0.3-ig) is igaz ez.

@@@@ ?????

Acknowledgement. The authors thank Péter Gács (Boston University) for proposing the problem, further János Gonda (Eötvös Loránd University), Lajos Lóczi (Eötvös Loránd University) and Zoltán Kása (Babeş-Bolyai University) for their useful remarks.

References

[1] A. Bege and Z. Kása (2001), *Coding objects related to Catalan numbers*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, Volume XLVI (1), 31–39. http://www.cs.ubbcluj.ro/∼studia-i/contents.php

[2] B. Bollobas, O. Riordan (2005), *A short proof of the Harris-Kesten theorem.* Electronic manuscript, http://arxiv.org/find.

[3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein (2001), *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill/MIT Press, New York.

[4] W. Feller, (1968), *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York.

[5] P. Gács (2000), *The clairvoyant demon has a hard task.* Combin. Probab. Comput. 9 (5), 421–424. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html

[6] P. Gács (2002), *Clairvoyant scheduling of random walks* (submitted to Electronic Journal of Probability). Short version: Clairvoyant scheduling of random walks. In: Proc. of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html

[7] P. Gács (2004), *Compatible sequences and a slow Winkler percolation*. Combin. Probab. Comput. 13 (6), 815–856. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html

[8] T. E. Harris (1960), *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 56, 13–20.

[9] A. Iványi and I. Kátai (1985), Modeling of priorityless processing in an interleaved memory with a perfectly informed processor. Autom. Remote Control 46 (4), 520–526. Translation from Russian: Avtom. Telemekh. 46 (4) (1985), 129–136.

[10] A. Iványi (2005), *Density of safe matrices.* Manuscript.

[11] Z. Kása (2003), *Combinatorică cu aplicaţii*. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.

[12] Z. Kása (2004), *Rekurzív egyenletek (Recurrences).* In: *Informatikai algoritmusok. 1 (Algorithms of Informatics 1.)* (Ed. A. Iványi). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 14–37. http://elek.inf.elte.hu/magyarkonyvek/

[13] H. Kesten, *Percolation Theory for Mathematicians.* Birkhäuser, Boston, 1882.

[14] D. E. Knuth (1997), *The Art of Computer Programming. Vol. 1. Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley (3. revised edition).

[15] Cs. Láng: *Bevezetés a matematikába 1. (Introduction to Mathematics 1.)* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1994.

[16] D. Schauffer (1985), *Introduction to Percolation Theory.* Taylor & and Francis, London, 1985.

[17] N. J. A. Sloane (2005), *Encyclopedia of Integer Sequences.* http://www.research.att.com/ njas/sequences/Seis.html.

[18] R. P. Stanley (1999), *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge.

[19] R. P. Stanley (2005), *Personal homepage.* http://www-math.mit.edu/∼rstan/.

[20] N. J. Vilenkin (1972), *Combinatorial Mathematics for Recreation.* Mir Publisher, Moscow.

[21] P. Winkler (2000), *Dependent percolation and colliding random walks,* Random Structures & Algorithms 16 (1), 58–84. http://www.math.dartmouth.edu/∼pw/papers/pubs.html

Budapest, 2005. július 1.

Department of Computer Algebra, Eötvös Loránd University, Faculty of Informatics, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C., Hungary

E-mail address: `tony@compalg.inf.elte.hu and zslang@compalg.inf.elte.hu`