STUDIA UNIV. BABEŞ–BOLYAI, INFORMATICA, Volume ?, Number ?, ????

# DENSITY OF 2-SAFE MATRICES

ANTAL IVÁNYI AND PÉTER SIMON

ABSTRACT. Egy $m \times n$ méretű bináris mátrix *r-jó,* ha minden oszlopában legfeljebb $r$ egyes van; *r-ütemezhető,* ha nulla elemek törlésével jó mátrixszá alakítható; *r-biztos,* ha tetszőleges $k$-ra igaz, hogy a mátrix első $k$ oszlopában legfeljebb $kr$ darab egyes van.

Legyen $\mathbf{Z} = [z_{ij}]_{m\times n}$ olyan mátrix, melynek elemei egymástól független valószínűségi változók, és mindegyik valószínűségi változó $p$ valószínűséggel az 1 és $1-p$ valószínűséggel a 0 értéket veszi fel. Az $m \geq 1$ esetben a jó mátrixok segítségével alsó, a biztos mátrixok segítségével felső korlátokat adunk annak aszimptotikus valószínűségére, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációja 2-ütemezhető, és megadjuk azt a kritikus valószínűséget, amelynél kisebb $p$-re a $\mathbf{Z}$ mátrix pozitív valószínűséggel 2-biztos.

## 1. Introduction

A kombinatorikusok [3, ?, 6, 7, 16, 17] és a fizikusok [1, 4, 12, 14] egyik népszerű kutatási témája a különböző gráfokon való bolyongás.

Ebben a cikkben egy olyan – a perkoláció [6, 7, 12, 14] vizsgálatából származó feladatot elemzünk, amely a kölcsönös kizárást igénylő erőforrásokat használó párhuzamos folyamatok ütemezésénél is érdekes.

A folyamatok ütemezhetőségi valószínűségének becslését egyenes mentén történő aszimmetrikus bolyongás vizsgálatára vezetjük vissza.

## 2. Formulation of the problem

Let $m$ and $n$ be positive integers, let $r$ $(0 \leq r \leq m)$ be a real number and let

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & & & \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Received by the editors: 2005. July 25.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 05A16, 60C05, 68Q25, 82B41.

1998 *CR Categories and Descriptors.* G.3 [**Probability and statistics**]: Queueing theory; F2.2 [**Analysis of algorithms and problem complexity**]: Nonnumerical algorithms and problems – *Computations on discrete structures*.

be a matrix of independent random variables with the common distribution

$$P(z_{ij} = k) = \begin{cases} p, & \text{if } k = 1 \text{ and } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n, \\ q = 1 - p, & \text{if } k = 0 \text{ and } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Let

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

be a concrete realization of $\mathbf{Z}$.

The good, safe and schedulable matrices are defined as follows.

Matrix $A$ is called ***r*-good,** if the number of the 1's is at most $r/2$ in all columns. The number of different $r$-good matrices of size $m \times n$ is denoted by $G(m, n, r)$ and the probability that $\mathbf{Z}$ is good is denoted by $g(m, n, p, r)$.

Matrix $A$ is called ***r*-safe** $(0 \le b \le 2m)$, if

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \le kr \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

The number of different $r$-safe matrices of size $m \times n$ is denoted by $S_r(m, n)$ and the probability that $\mathbf{Z}$ is safe, is denoted by $s_r(m, n, p)$.

If $a_{ij} = 0$, then it can be deleted from $A$. Deletion of $a_{ij}$ means that we decrease the second indices of $a_{i,j+1}, \dots, a_{im}$ and add $a_{im} = 0$ to the $i$-th row of $A$.

Matrix $A$ is called **Winkler *r*-schedulable** (shortly ***r*-schedulable** or $r$-compatible) if it can be transformed into a $r$-good matrix $B$ using deletions. The number of different $r$-schedulable matrices of size $m \times n$ is denoted by $W(m, n, r)$ and the probability that $\mathbf{Z}$ is $r$-schedulable is denoted by $w(m, n, p, r)$. The function $w(m, n, p, r)$ is called ***r*-schedulability function.**

The functions $g_b(m, n, r),\ w_b(m, n, r)$ and $s_b(m, n, r)$ are called the density functions of the corresponding matrices. The **asymptotic density** of the good, safe and schedulable matrices are defined as

$$g_r(m, p) = \lim_{n \to \infty} g_r(m, n, p), \tag{5}$$

$$s_r(m, p) = \lim_{n \to \infty} s_r(m, n, p), \tag{6}$$

$$w_r(m, p) = \lim_{n \to \infty} w_r(m, n, p). \tag{7}$$

**The critical probabilities** defined as

$$w_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid w_r(m, p) > 0\}, \tag{8}$$

$$g_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid g_r(m, p) > 0\}, \tag{9}$$

and

$$s_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid s_r(m,p) > 0\} \tag{10}$$

represent special interest for some applications.

The aim of this paper is to characterize the density, asymptotic density and critical probability of good, schedulable and safe matrices.

Starting point of our research is due to Péter Gács [7] proving that $w_1(2,p)$ is positive for $p$ small enough. His proof implies that $w_{crit,1}(2) \geq 10^{-400}$.

We remark that some recent papers are closely connected with our efforts: [**?**] enumerates some $r$-safe matrices, [**?**] presents density of 2- and $((m/2)$-safe matrices and [9] investigates algorithms generating all schedulable matrices.

2.1. **Interpretation of the problem.** Bár a Winkler-modellt a perkoláció leírására javasolták, a problémák egy-egy lehetséges informatikai értelmezését mutatjuk be. $m$ folyamatnak időnként ugyanarra az erőforrásra van szüksége, amelyből $r/2$ egység van. Az $i$-edik folyamat erőforrásigényét az $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ sorozattal adjuk meg. Ha ennek a sorozatnak az $a_{ij}$ eleme egyes, akkor az $i$-edik folyamat a $[j-1, j)$ intervallumban igényli az erőforrást. Ha $a_{ij} = 0$, akkor ugyanabban az intervallumban a folyamat nem igényli az erőforrást, mert későbbre halasztható háttérmunkát végez – ez magyarázza, hogy az ütemezhetőség érdekében a nullák törölhetők.

Az $m = 1,\ r = 1$ speciális eset az ismert jegyváltási probléma [13, 16] és szavazási probléma [5], az $m = 2,\ r = 2$ speciális eset pedig a Winkler-féle perkolációs modell [7, 17].

A jó mátrixok törlés nélkül ütemezhetők. A nem jó mátrixok egy része törlés(ek) segítségével jóvá alakítható, azaz ütemezhető. A biztosság az ütemezhetőség szükséges feltétele. Ezért a jó mátrixok száma alsó korlát, a biztos mátrixok száma pedig felső korlát az ütemezhető mátrixok számára.

Mivel a problémát informatikai problémaként kezeljük, ezért a továbbiakban elsősorban Feller [5] informatikai (tömegkiszolgálási) terminológiáját használjuk.

## 3. Analysis

Ebben a részben elsősorban azt vizsgáljuk – különböző módszerekkel – hogyan függ a biztos mátrixok aszimptotikus sűrűsége az egyesek előfordulásának $p$ valószínűségétől és a sorok $m$ számától.

A vizsgált $g_r(m,n,p),\ w_r(m,n,p)$ és $s_r(m,n,p)$ függvények tulajdonságai:

- $n \in \mathbb{N}^+,\ n \in \mathbb{N}^+,\ r \in \mathbb{R}^a ndr \in [0,m],\ p \in \mathbb{R}^a ndp \in [0,1]$;
- $n$ szerint monoton csökkenők;
- $p$ szerint monoton növekvők;
- $m$ szerint monoton csökkenők;
- $r$ szerint monoton növekvők.

A továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy $r = 2$, azaz a jó mátrixok oszlopaiban legfeljebb egy egyes, a biztos mátrixok $k$ hosszúságú prefixeiben pedig legfeljebb $k$ egyes lehet. Mivel $r$ értéke mindenütt ugyanaz, a továbbiakban elhagyjuk az $r$ indexet.

3.1. **Preliminary results.** A későbbiekben felhasználjuk az alábbi állításokat.

Jelöljük $C_n$-nel ($n \in \mathbb{N}^+$ azon $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ bináris sorozatok számát, amelyekben $n$ darab egyes és $n$ darab nulla van úgy, hogy minden $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($1 \leq k \leq 2n$) kezdősorozatban legfeljebb annyi egyes van, mint nulla.

**Lemma 1.** *Ha* $n \geq 0$, *akkor*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy $C_n$ az $n$-edik Catalan-szám, melynek explicit alakja számos tankönyvben és cikkben [2, 11, 13, 16] megtalálható.

Ismert [2, 15], hogy egy Descartes-féle koordinátarendszer origójából $C_n$ különböző úton juthatunk el az $(n, n)$ pontba úgy, hogy közben összesen $n$-szer lépünk jobbra és $n$-szer lépünk felfelé úgy, hogy közben soha nem kerülünk az $y = x$ egyenes fölé. Ennek analógiájára $S(2, n)$ azt adja meg, hány olyan $n$-lépéses út van, amelyben minden lépésben jobbra vagy felfelé léphetünk vagy helyben maradhatunk, és az útnak nincs pontja az $y = x$ egyenes felett. Az $s(2, p)$, illetve $1 - s(2, p)$ valószínűségértékek a szögfelező alatt maradó és a szögfelezőt átlépő utak valószínűségét jellemzik.

**Lemma 2.** *Ha* $0 \leq x \leq 1$, *akkor*

$$f(x) = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(x(1-x))^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{11}$$

*Proof.* □

Ismert [2, 15], hogy egy Descartes-féle koordinátarendszer origójából $C_n$ különböző úton juthatunk el az $(n, n)$ pontba úgy, hogy közben összesen $n$-szer lépünk jobbra és $n$-szer lépünk felfelé, és közben soha nem kerülünk az $y = x$ egyenes fölé.

Ennek analógiájára az $s(1, n, p)$ valószínűség az olyan – az origóból induló – $n$ lépéses utak valószínűségét adja meg, amelyekben jobbra vagy felfelé léphetünk és az útnak nincs pontja az $y = x$ egyenes felett. $s(1, p, 1)$ annak a valószínűségét adja meg, hogy van tetszőleges hosszúságú út a $y = x$ tengely alatt.

3.2. **Two rows in the matrix.** If $m \geq 2$, then the columns containing less 0's than 1's are called **white** (W), the columns containing more 1's than 0's are called **black** (B) and the columns containing the same number of 0's and 1's are called **grey** (G).

Ha $m \geq 2$, akkor az $A$ mátrix minden oszlopa $q^m + mq$ valószínűséggel lehet fehér vagy szürke, ezért $g(m, n, p) = ((q^m + mq))^n$ . Ha $p > 0$, akkor

$$g(m, p) = \lim_{n \to \infty} (q^m + mq)^n = 0, \tag{12}$$

tehát az oszlopok számának növekedtével a jó mátrixok sűrűsége tart a nullához.

Ha az $m = 2$ esetben egy jó mátrixból töröljük a fehér oszlopokat, akkor csak szürke oszlopok maradnak, azaz a mátrix két sora egymásnak a *komplementere.*

Vizsgálataink szempontjából fontos szerepet játszik a következő egyszerű állítás.

**Lemma 3.** *Ha $m \geq 2$, akkor a jó mátrixok ütemezhetők, az ütemezhető mátrixok pedig biztosak.*

*Proof.* Ha az $\mathbf{A}$ mátrix minden oszlopában legfeljebb egy egyes van, akkor a mátrix első $k$ oszlopában összesen legfeljebb $k$ egyes van.

Ha van olyan $k$ $(1 \leq k \leq n)$, amelyre az $\mathbf{A}$ mátrix első $k$ oszlopában több egyes van, mint $k$, akkor a skatulyaelv szerint az első $k$ oszlop között van olyan, amelyikben legalább két egyes van. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixból törlünk egy nullát, ezzel az első $k$ oszlopban lévő nullák száma nem csökken – tehát $\mathbf{A}$ nem ütemezhető. □

Ennek az állításnak hasznos következménye az alábbi.

**Corollary 4.** *Ha $m \geq 2$, akkor*

$$g(m, n, p) \leq w(m, n, p) \leq s(m, n, p), \tag{13}$$

$$g(m, p) \leq w(m, p) \leq s(m, p), \tag{14}$$

$$g_{crit}(m) \leq w_{crit}(m) \leq s_{crit}(m). \tag{15}$$

3.3. **Two rows in the matrix.** Az egyszerűség kedvéért az $s(2, n, p)$ függvény helyett az $u(2, n, p) = 1 - s(2, n, p)$ függvényt elemezzük. Először megadunk egy zárt képletet $u(2, n, p)$ meghatározására.

**Lemma 5.** *If $n \geq 1$, then*

$$u(2, n, p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor} 2^{i-1-2j} C_j \binom{i-1}{2j} 4^{n-i}. \tag{16}$$

*Proof.* A lehetséges $2 \times n$ méretű, nem biztos mátrixokat osztályozzuk azon oszlopuk szerint, amelyben az egyesek száma először haladta meg a nullák számát (ezt az oszlopot *döntő oszlopnak* nevezzük).

A két egyest tartalmazó oszlopokat feketének nevezzük és B-vel jelöljük, a két nullát tartalmazó oszlopokat fehérnek nevezzük és W-vel jelöljük, az 1-1 nullát és egyest tartalmazó oszlopokat pedig szürkének nevezzük és G-vel jelöljük.

A döntő oszlop indexe $0, 1, \ldots, n-1$ vagy $n$. Az egy osztályba került mátrixokat pedig osztályozzuk aszerint, hogy a döntő oszlop előtt hány fekete oszlopuk volt: ez a szám $0,\ 1, \ldots,\ \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ lehet.

A külső összegzés a döntő oszlopokat veszi figyelembe, a belső pedig a döntő oszlop előtti fekete oszlopokat. Az összegben a binomiális együttható azt veszi számba, hányféleképpen helyezhető el a döntő oszlop előtti $i-1$ oszlopban az összesen $2j$ fekete és fehér oszlop. A $C_j$ Catalán-szám azt adja meg, hány megfelelő sorrendje van a fekete és fehér oszlopoknak. A 2 alapú hatvány azt mondja meg, hogy hányféleképpen választhatók meg a szürke oszlopok. Végül a 4 alapú hatványtényező azt veszi figyelembe, hogy a döntő oszlop utáni oszlopok tetszés szerint kitölthetők – a mátrix mindenképpen bizonytalan lesz. □

Az $u(2,n,p)$-re kapott (16) képlet nehezen kezelhetőnek látszik. Ezért bemutatunk egy kombinatorikus és két bolyongásos módszert $s(2,p)$ explicit alakjának levezetésére.

**Theorem 6.** *If* $0 \le p \le 1$, *then*

$$u(2,p) = \begin{cases} \frac{p^2}{q^2}, & \text{if } 0 \le p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{if } \frac{1}{2} \le p \le 1. \end{cases} \tag{17}$$

*Proof.* A bizonytalan mátrixok egy részét az első fekete oszlop teszi bizonytalanná. Ezek általános alakja $G^aBA^b$, ahol $a+b+1=n$, továbbá $G$ szürke, $B$ fekete és $A$ tetszőleges oszlopot jelent. Az ilyen oszlopok aszimptotikus részaránya

$$\sum_{a=0}^{\infty} C_0(2pq)^a p^2 = \frac{p^2}{1-2pq} C_0 \ .$$

A bizonytalan mátrixok következő csoportjának általános alakja $G^aBG^bWG^cBA^d$, ahol $a+b+c+d+3=n$. Az ilyen mátrixok aszimptotikus részaránya

$$\sum_{a=0}^{\infty}(2pq)^a p^2 \sum_{b=0}^{\infty}(2pq)^b q^2 \sum_{c=0}^{\infty}(2pq)^c p^2 = \frac{p^2}{1-2pq} C_1 \frac{p^2}{1-2pq}\frac{q^2}{1-2pq} \ .$$

Általában, ha az $(i+1)$-edik fekete oszlop a döntő, akkor az ilyen mátrixok aszimptotikus hozzájárulása a bizonytalan mátrixok valószínűségéhez

$$\frac{p^2}{1-2pq} C_i \left(\frac{p^2}{1-2pq}\frac{q^2}{1-2pq}\right)^2,$$

és így

$$u(2,p) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^2}{1-2pq} C_i \left(\frac{p^2}{1-2pq}\frac{q^2}{1-2pq}\right)^2.$$

A $p^2/(p^2+q^2) = x$ és $q^2/(p^2+q^2) = 1-x$ helyettesítéssel alkalmazva a 2. lemmát megkapjuk a kívánt képletet. □

Mátrixaink vizsgálatának hasznos módszere, ha minden mátrixhoz hozzárendelünk egy – az $x$-tengelyen való – bolyongást.

A bolyongó pont a $k$-adik időpontban a $P_k(x_k, 0)$ pontban van, ahol $x_k$ a mátrix első $k$ oszlopában előfordult nullák és egyesek számának különbségét jellemzi.

Ha a bolyongás az origóból indul, akkor

$$x_k = \begin{cases} -1, & \text{if } \exists k \text{ with } k < \sum_{i=1}^{k}(a_{i1}+a_{i2}), \\ k - \sum_{i=1}^{k}(a_{i1}+a_{i2}) & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Ebben az esetben is alkalmazható a feladat bolyongásos megoldása.

**Theorem 7.** *Ha* $0 \le p \le 1$, *akkor*

$$s(2,p) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^2, & \textit{ha } 0 \le p < \frac{1}{2}, \\ 0, & \textit{ha } \frac{1}{2} \le p \le 1. \end{cases} \tag{18}$$

*Proof.* Azt akarjuk meghatározni, hogy az origóból induló pont milyen valószínűséggel nyelődik el a $-1$ pontban lévő nyelőben. Bár a fehér, illetve fekete oszlop után kettővel változik az addig előfordult nullák és egyesek számának különbsége, az egyszerűség kedvéért azt tételezzük fel, hogy fekete oszlop után $p^2$ valószínűséggel lépünk egyet balra, fehér oszlop után $q^2$ valószínűséggel lépünk egyet jobbra, és szürke oszlop után $2pq$ valószínűséggel helyben maradunk.

Az $u(2,p) = x$ jelöléssel a teljes valószínűség tétele alapján azt kapjuk, hogy

$$x = p^2 + 2pqx + q^2x^2. \tag{19}$$

Ennek az egyenletnek a gyökei

$$x_{1,2} = \frac{1-2pq \pm \sqrt{(1-2pq)^2 - 4p^2q^2}}{2q^2} = \frac{p^2+q^2 \pm \sqrt{(p^2-q^2)^2}}{2q^2}\ , \tag{20}$$

ahonnan

$$x_1 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ and } x_2 = 1. \tag{21}$$

Innen $s(2,p) = 1 - u(2,p)$ alapján megkapjuk a bizonyítandó képletet.

Mivel bennünket elsősorban az elnyelődés valószínűsége érdekel, egy másik bolyongást is hozzárendelhetünk az $\mathbf{Z}$ mátrixhoz úgy, hogy a szürke oszlopoktól eltekintünk – azok ugyanis az elnyelődés határvalószínűségét nem befolyásolják, csak lassítják a konvergenciát. A szürke oszlopok valószínűségét a fekete és fehér oszlopok között a megfelelő arányban elosztva a balra lépés $a$ és a jobbra lépés $b$ valószínűségére azt kapjuk, hogy

$$a = \frac{p^2}{p^2+q^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{q^2}{p^2+q^2}. \tag{22}$$

Ezekkel a valószínűségekkel a (**??**) egyenletet kapjuk. A (**??**) egyenlet megoldásaiba (22) szerint visszahelyettesítve $a$ és $b$ helyére a $p$ és $q$ valószínűségeket, itt is megkapjuk a (21) képlet szerinti gyököket.

Végül egy olyan módszert is bemutatunk, amelyet a későbbiekben tetszőleges $m \ge 2$ értékre alkalmazni tudunk.

Jelöljük $x_k$-val ($k = -1, 0, 1, 2, \ldots$) annak valószínűségét, hogy a $k$ pontból induló bolyongó pont elnyelődik az $x = -1$ helyen. A két egyest tartalmazó, $p^2$ valószínűséggel előforduló oszlopnak feleltessünk meg balra lépést, a $2pq$ valószínűséggel előforduló vegyes oszlopkhoz tartozzon helybenmaradás és a két nullát tartalmazó, $q^2$ valószínűséggel előforduló oszlopoknak feleljen meg jobbra lépés.

Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel.

$$\begin{array}{lcccccc} x_0 & = & q^2x_1 & + & 2qpx_0 & + & p^2, \\ x_1 & = & q^2x_2 & + & 2qpx_1 & + & p^2x_0, \\ x_2 & = & q^2x_3 & + & 2qpx_2 & + & p^2x_1, \\ x_3 & = & q^2x_4 & + & 2qpx_3 & + & p^2x_2, \\ \ldots & & & & & & \end{array} \tag{23}$$

Legyen

$$G(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i \tag{24}$$

az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozat generárorfüggvénye. A 32. egyenlet $x_i$-vel kezdődő egyenleteket rendre $z^i$-vel beszorozva és az egyenleteket összeadva a

$$G(z) = q^{\frac{G(z)-x_0}{z}} + 2pqG(z) + p^2(1 + zG(z)). \tag{25}$$

Innen $G(z)$ kifejezhető

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{26}$$

alakban, ahol

$$P(z) = q^2 - p^2z \tag{27}$$

és

$$Q(z) = p^2z^2 + 2pq + p^3 - z. \tag{28}$$

A $Q(z)$ polinom legfeljebb egy abszolut értékű zérushelyein a $P(z)$ polinomnak a nulla értéket kell felvennie. A $Q(z) = 0$ egyenletet

$$(pz + q)^2 = 1 \tag{29}$$

alakban felírva közvetlenül adódik, hogy $z = 1$ gyöke a $Q(z)$ polinomnak. A $P(1) = 0$ egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x_0 = \frac{p^2}{q^2}. \tag{30}$$

□

A 1. ábra mutatja a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett $S(2, p)$ függvény görbéjének a $[0, 1/2]$ intervallumhoz tartozó részét.

Összefoglalhatjuk a kritikus valószínűségekre vonatkozó ismereteinket.

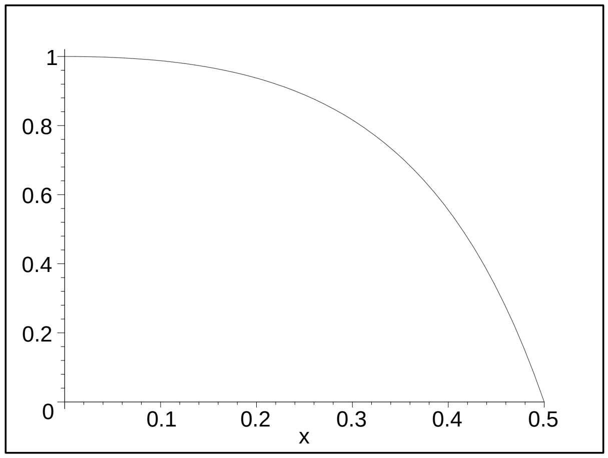


FIGURE 1. Az $s(2, p, 1)$ ütemezhetőségi függvény görbéje.

**Corollary 8.**

$$0 = g_{crit}(2) \leq w_{crit}(2) \leq s_{crit}(2) = \frac{1}{2} \ . \tag{31}$$

Emlékeztetünk Gács eredményére, amely szerint $w_{crit}(2, 1) \geq 10^{-400}$.

A 2. táblázatban megadjuk a jó, ütemezhető és biztos mátrixok számát és részarányát – ami megfelel a $p = 0.5$ értéknek. Az oszlopok száma a táblázatban 1, 2, …, 15 vagy 16.

Jelöljük a $m \times n$ méretű bináris mátrixok számát $T(m, n)$-nel. Ekkot $T(m, n) = 2^{mn}$.

Az eddigi eredmények alapján mind a $G(m, n)/T(m, n)$, mind pedig a $W(m, n)/T(m, n)$ és $S(m, n)/T(m, n)$ értékeknek nullához kell tartani $n$ növekedtével.

Nyitott kérdés a $W(2, n)/S(2, n)$ hányados viselkedése.

A 3. táblázat $s(2, n, 0.4)$ oszlopában a számoknak az 5/9 határértékhez kell tartaniuk – ami még messze van.

A 6. táblázatban a $s(2, n, 0.35)$ oszlop számainak a $120/169 \sim 0.7101$ határértékhez kell tartaniuk.

3.4. **Three rows in the matrix.** Az $m = 3$ esetben 3:0, 2:1, 1:2 és 0:3 lehet a nullák és egyesek aránya. A vizsgált mátrixhoz olyan bolyongást rendelünk, amelyikben a csupa egyes oszlop $p^3$ valószínűségével ugrunk balra kettővel, a két egyest

| $n$ | $T(2,n)$ | $G(2,n)$ | $\frac{G(2,n)}{T(2,n)}$ | $W(2,n)$ | $\frac{W(2,n)}{T(2,n)}$ | $S(2,n)$ | $\frac{S(2,n)}{T(2,n)}$ | $\frac{W(2,n)}{S(2,n)}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 0.750 | 3 | 0.750 | 3 | 0.750 | 1 |
| 2 | 16 | 9 | 0.562 | 10 | 0.625 | 10 | 0.625 | 1 |
| 3 | 64 | 27 | 0.452 | 35 | 0.547 | 35 | 0.547 | 1 |
| 4 | 256 | 81 | 0.316 | 124 | 0.484 | 126 | 0.492 | 0.984 |
| 5 | 1024 | 243 | 0.237 | 444 | 0.434 | 462 | 0.451 | 0.961 |
| 6 | 4096 | 729 | 0.178 | 1592 | 0.389 | 1716 | 0.419 | 0.927 |
| 7 | 16384 | 2187 | 0.133 | 5731 | 0.350 | 6435 | 0.393 | 0.890 |
| 8 | 65536 | 6561 | 0.100 | 20671 | 0.315 | 24310 | 0.371 | 0.850 |
| 9 | 262144 | 19683 | 0.075 | 74722 | 0.285 | 92378 | 0.352 | 0.808 |
| 10 | 1048576 | 59049 | 0.056 | 270521 | 0.258 | 352716 | 0.336 | 0.767 |
| 11 | 4194304 | 177147 | 0.042 | 980751 | 0.234 | 1352078 | 0.322 | 0.725 |
| 12 | 16777216 | 531441 | 0.032 | 3559538 | 0.212 | 5200300 | 0.310 | 0.684 |
| 13 | 67108864 | 1594323 | 0.022 | 12931155 | 0.193 | 20058300 | 0.299 | 0.646 |
| 14 | 268435456 | 4782969 | 0.018 | 47013033 | 0.175 | 77558760 | 0.289 | 0.606 |
| 15 | 1073741824 | 14348907 | 0.013 | 171036244 | 0.159 | 300540195 | 0.280 | 0.568 |

FIGURE 2. A $p = 1/2$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

| $n$ | $T(2,n)$ | g(2,n,0.4) | $w(2,n,0.4)$ | $s(2,n,0.4)$ | $\frac{w(2,n,0.4)}{s(2,n,0.4)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0.8400 | 0.8400 | 0.8400 | 1 |
| 2 | 16 | 0.7056 | 0.7632 | 0.7632 | 1 |
| 3 | 64 | 0.5927 | 0.7171 | 0.7171 | 1 |
| 4 | 256 | 0.4979 | 0.6795 | 0.6862 | 0.9902 |
| 5 | 1024 | 0.4182 | 0.6487 | 0.6639 | 0.9771 |
| 6 | 4096 | 0.3513 | 0.6206 | 0.6470 | 0.9592 |
| 7 | 16384 | 0.2951 | 0.5957 | 0.6339 | 0.9397 |
| 8 | 65536 | 0.2479 | 0.5731 | 0.6234 | 0.9193 |
| 9 | 262144 | 0.2082 | 0.5524 | 0.6149 | 0.8984 |
| 10 | 1048576 | 0.1749 | 0.5332 | 0.6078 | 0.8773 |
| 11 | 4194304 | 0.1469 | 0.5155 | 0.6019 | 0.8565 |
| 12 | 16777216 | 0.1234 | 0.4988 | 0.5967 | 0.8359 |
| 13 | 67108864 | 0.1037 | 0.4832 | 0.5924 | 0.8157 |
| 14 | 268435456 | 0.0871 | 0.4685 | 0.5886 | 0.7960 |
| 15 | 1073741824 | 0.0731 | 0.4545 | 0.5854 | 0.7764 |
| 16 | 4294967296 | 0.0644 | 0.4412 | 0.5825 | 0.???? |

FIGURE 3. A $p = 0.4$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

| $n$ | Mátrixok száma | Jó mátrixok valószínűsége | Ütemezhető mátrixok valószínűsége | $s(2, n, 0.35)$ mátrixok valószínűsége | Ütemezhető/ biztos hányados |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0.8775 | 0.8775 | 0.8775 | 1 |
| 2 | 16 | 0.7700 | 0.8218 | 0.8218 | 1 |
| 3 | 64 | 0.6757 | 0.7901 | 0.7901 | 1 |
| 4 | 256 | 0.5929 | 0.7645 | 0.7699 | 0.9930 |
| 5 | 1024 | 0.5203 | 0.7441 | 0.7561 | 0.9841 |
| 6 | 4096 | 0.4565 | 0.7255 | 0.7462 | 0.9723 |
| 7 | 16384 | 0.4006 | 0.7094 | 0.7389 | 0.9601 |
| 8 | 65536 | 0.3515 | 0.6949 | 0.7334 | 0.9475 |
| 9 | 262144 | 0.3085 | 0.6817 | 0.7291 | 0.9350 |
| 10 | 1048576 | 0.2707 | 0.6696 | 0.7258 | 0.9226 |
| 11 | 4194304 | 0.2375 | 0.6585 | 0.7231 | 0.9107 |
| 12 | 16777216 | 0.2084 | 0.6481 | 0.7210 | 0.8989 |
| 13 | 67108864 | 0.1839 | 0.6383 | 0.7192 | 0.8875 |
| 14 | 268435456 | 0.1605 | 0.6291 | 0.7178 | 0.8764 |
| 15 | 1073741824 | 0.1401 | 0.6204 | 0.7166 | 0.8658 |
| 16 | 4294967296 | 0.1236 | 0.6122 | 0.7156 | 0.???? |

FIGURE 4. A $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

tartalmazó oszlop $3p^2q$ valószínűségével lépünk balra, az egy egyest tartalmazó oszlopok $3p^2$ valószínűségével maradunk helyben és a három nullát tartalmazó oszlop $q^3$ valószínűségével lépünk jobbra.

A korábban is használt $x_k$ jelölést bevezetve a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_0 & = & q^3x_1 & + & 3q^2px_0 & + & 3qp^2 & + & p^3, \\
x_1 & = & q^3x_2 & + & 3q^2px_1 & + & 3qp^2x_0 & + & p^3, \\
x_2 & = & q^3x_3 & + & 3q^2px_2 & + & 3qp^2x_1 & + & p^3x_0, \\
x_3 & = & q^3x_4 & + & 3q^2px_3 & + & 3qp^2x_2 & + & p^3x_1, \\
\dots
\end{array} \tag{32}
$$

Legyen

$$
G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_n z^n \tag{33}
$$

| $n$ | Mátrixok száma | Jó mátrixok valószínűsége | Ütemezhető mátrixok valószínűsége | $s(2, n, 0.35)$ mátrixok valószínűsége | Ütemezhető/ biztos hányados |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 1 |
| 2 | 64 | 0.2500 | 0.2969 | 0.2969 | 1 |
| 3 | 256 | 0.1250 | 0.1914 | 0.1914 | 1 |
| 4 | 4096 | 0.0625 | 0.1296 | 0.1296 | 1 |
| 5 | 32768 | 0. | 0. | 0. | 0.???? |

FIGURE 5. A $p = 0.5$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozat generátorfüggvénye. Akkor a (32) egyenleteket rendre beszorozva $z$ megfelelő hatványával és összeadva őket azt kapjuk, hogy

$$G(z) = q^3 \frac{G(z) - x_0}{z} + 3q^2 p \frac{G(z)}{z} + 3qp^2(1 + zG(z)) + p^3 \left(1 + z + z^2 G(z)\right), \tag{34}$$

ahonnan $G(z)$ kifejezhető két polinom hányadosaként:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{35}$$

ahol

$$P(z) = q^3 x_0 - 3qp^2 z - p^3(z + z^2) \tag{36}$$

és

$$Q(z) = p^3 z^3 + 3p^2 q z^2 + 3pq^2 z + q^3 - 1. \tag{37}$$

A $Q(z) = 0$ egyenletet

$$(q + pz)^3 = 1 \tag{38}$$

alakra hozhatjuk, ahonnan a $z_1 = 1$ gyököt kapjuk. A $P(1) = 0$ egyenletet $q^3$-nel osztva és a $p/q = t$ helyettesítést bevezetve az

$$x_0 = 3t^2 + 2t^3 \tag{39}$$

egyenletet kapjuk. Az $x_0 = x_0(t)$ függvény értéke a $t = 0$ helyen nulla, és pozitív $t$-re monoton nő. A $t = p/(1-p)$ értéket visszahelyettesítve és $(1-p)^3$-nel beszorozva a

$$\frac{3p^2}{1-p} + \frac{2p^3}{1-p} = 1 \tag{40}$$

egyenletet kapjuk, amelyből rendezés után a $p = 1/3$ értéket kapjuk, azaz $s_{crit}(3) = 1/3$.

| $n$ | Mátrixok száma | Jó mátrixok valószínűsége | Ütemezhető mátrixok valószínűsége | $s(2, n, 0.35)$ mátrixok valószínűsége | Ütemezhető/ biztos hányados |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 1 |
| 2 | 64 | 0.2500 | 0.2969 | 0.2969 | 1 |
| 3 | 256 | 0.1250 | 0.1914 | 0.1914 | 1 |
| 4 | 4096 | 0.0625 | 0.1296 | 0.1296 | 1 |
| 5 | 32768 | 0. | 0. | 0. | 0.???? |

FIGURE 6. A $p = 0.25$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

3.5. **Four or more rows in the matrix.** Az $m \times n$ méretű biztos mátrixok elemzését az $m \geq 4$ esetben az $m = 3$ esethez hasonló módon végezhetjük el.

A bolyongó pont a legalább $b \geq 3$ egyest tartalmazó oszlop esetén $(b-2)$-t ugrik balra, két egyest tartalmazó oszlop esetén egyet lép balra, egy egyest tartalmazó oszlop esetén helyben marad és az $m$ nullát tartalmazó oszlop esetén egyet lép jobbra.

A $(b-2)$-vel balra ugrás valószínűsége $\binom{m}{b}p^{b-2}q^{n-b+2}$, a balra lépésé $\binom{m}{2}p^{m-2}q^2$, a helyben maradásé $\binom{m}{1}pq^{m-1}$ és a jobbra lépésé $\binom{m}{0}q^m$, ezért a következő egyenleteket írhatjuk fel.

$$\begin{array}{rcccccc}
x_0 & = & \binom{m}{0}q^m x_1 & + & \binom{m}{1}pq^{m-1}x_0 & + & \binom{m}{2}p^2q^{m-2} \\
 & + & \binom{m}{3}p^3q^{m-3} & + & \dots & + & \binom{m}{m}p^m, \\
x_1 & = & \binom{m}{0}q^m x_2 & + & \binom{m}{1}pq^{m-1}x_1 & + & \binom{m}{2}p^2q^{m-2}x_0 \\
 & + & \binom{m}{3}p^3q^{m-3} & + & \dots & + & \binom{m}{m}p^m, \\
x_2 & = & \binom{m}{0}q^m x_3x_3 & + & \binom{m}{1}pq^{m-1}x_2 & + & \binom{m}{2}p^2q^{m-2}x_1 \\
 & + & \binom{m}{3}p^3q^{m-3}x_0 & + & \dots & + & \binom{m}{m}p^m, \\
\dots & & & & & &
\end{array}$$

Legyen

$$G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x_n z^n \tag{41}$$

az $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozat generátorfüggvénye. Akkor a (3.5) egyenleteket rendre beszorozva $z$ megfelelő hatványával és összeadva őket azt kapjuk, hogy

$$G(z) = \binom{m}{0}q^m\frac{G(z)-x_0}{z} + \binom{m}{1}pq^{m-1}G(z) + +\binom{m}{2}p^2q^{m-2}(1+zG(z))$$

$$+\binom{m}{3}p^3q^{m-3}(1+zG(z)+z^2G(z))+\dots+\binom{m}{m}q^m\left(1+z+\dots+z^{m-2}+z^{m-1}G(z)\right),$$

ahonnan $G(z)$ kifejezhető két polinom hányadosaként:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{42}$$

ahol

$$P(z) = \sum i = 0^m \binom{m}{i} p^i q^{m-i} z^i - z. \tag{43}$$

és

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{0} q^m x_0 - \binom{m}{2} p^2 q^{m-2} \binom{m}{i} p^i q^{m-i} - z. \tag{44}$$

Ahol a nevezőnek legfeljebb 1 abszolut értékű gyöke van, ott a számlálónak a nulla értéket kell felvennie.

A $Q(z) = 0$ egyenletet

$$(q + pz)^m = 1 \tag{45}$$

alakra hozhatjuk, ahonnan a $z_1 = 1$ gyököt kapjuk. A $P(1) = 0$ egyenletet $q^m$-nel osztva és a $p/q = t$ helyettesítést bevezetve az

$$x_0 = 3t^2 + 2t^3 \tag{46}$$

egyenletet kapjuk. Az $x_0 = x_0(t)$ függvény értéke a $t = 0$ helyen nulla, és pozitív $t$-re monoton nő. A $t = p/(1-p)$ értéket visszahelyettesítve a

$$\frac{3p}{1-p} + \frac{2p}{1-p} = 1 \tag{47}$$

egyenletből az $p = 1/m$ értéket kapjuk, azaz $s_{crit}(m) = 1/m$.

## 4. Summary

Az $m \geq 2$ sort tartalmazó mátrixokra megadtuk az ütemezhetőségi függvény explicit alakját és meghatároztuk az $s_{crit}(m)$ kritikus valószínűségeket. $s_{crit}(2)$ értéke a több perkolációs modellre jellemző 1/2, a további kritikus valószínűségek értéke $m$ növekedtével csökken.

A szimulációs vizsgálatok szerint a kritikus ütemezhetőségi valószínűségek közel vannak a kapott felső korlátokhoz: a 2. táblázat a $p = 0.5$, a 3. táblázat a $p = 0.4$, a 6. táblázat pedig a $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó adatokat mutatja. A táblázatok adatai azt mutatják, hogy a [7] cikkben szereplő korlátnál jobb is adható: ha $p < 0.4$, akkor $w(2, p) > 0$.

A 6 táblázat tizenötödik sorának kiszámítása 201 percig tartott.

A cikkben szereplő alsó korlátoknál nagyobbakat is meg tudunk adni, de azokból is csak a természetes nulla alsó korlát adódik.

**@@@@ ?????**

**Acknowledgement.** The authors thank Péter Gács (Boston University) for proposing the problem, further János Gonda, Lajos László, Tamás Móri (all of Eötvös Loránd University), Zoltán Kása and József Kolumbán (both Babeş-Bolyai University) for their useful remarks and Rudolf Szendrei (Eötvös Loránd University) for the computer experiments.

## References

[1] P. Balister, B. Bollobás, M. Walters (2004), *Continuum percolation with steps in an annulus. Ann. Appl. Probab.* **14/4** 1869–1879. http://arxiv.org/find.

[2] A. Bege and Z. Kása (2001), *Coding objects related to Catalan numbers*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, Volume XLVI (1), 31–39. http://www.cs.ubbcluj.ro/∼studia-i/contents.php.

[3] B. Bollobas, O. Riordan (2005), *A short proof of the Harris-Kesten theorem.* Electronic manuscript, http://arxiv.org/find.

[4] I. Derényi, G. Palla, T. Vicsek (2005), *Clique percolation in random networks. Phys. Rev. Lett* **94** 160–202. http://arxiv.org/find.

[5] W. Feller, (1968), *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York.

[6] P. Gács (2002), *Clairvoyant scheduling of random walks* (submitted to Electronic Journal of Probability). Short version: *Clairvoyant scheduling of random walks.* In: Proc. of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html.

[7] P. Gács (2004), *Compatible sequences and a slow Winkler percolation.* Combin. Probab. Comput. **13/6**, 815–856. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html.

[8] T. E. Harris (1960), *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **56** 13–20.

[9] A. Iványi, R. Szendrei (1985), *Párhuzamos folyamatok ütemezése* (Scheduling of parallel processes) (submitted).

[10] Z. Kása (2003), *Combinatorică cu aplicaţii.* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.

[11] Z. Kása (2004), *Rekurzív egyenletek (Recurrences).* In: *Informatikai algoritmusok. 1 (Algorithms of Informatics 1.)* (Ed. A. Iványi). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 14–37. http://elek.inf.elte.hu/.

[12] H. Kesten (1982), *Percolation Theory for Mathematicians.* Birkhäuser, Boston.

[13] Cs. Láng (1994), *Bevezető fejezetek a matematikába 1. (Introduction to Mathematics 1.)* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

[14] D. Schauffer (1985), *Introduction to Percolation Theory.* Taylor & and Francis, London, 1985.

[15] R. P. Stanley (1999), *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge.

[16] N. J. Vilenkin (1972), *Combinatorial Mathematics for Recreation.* Mir Publisher, Moscow.

[17] P. Winkler (2000), *Dependent percolation and colliding random walks,* Random Structures & Algorithms **16/1** 58–84. http://www.math.dartmouth.edu/∼pw/papers/pubs.html.

Budapest, 2005. július 9.

Department of Computer Algebra and Department of Numerical Analysis, Eötvös Loránd University, Faculty of Informatics, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C., Hungary

*E-mail address*: tony@compalg.inf.elte.hu and simon@ludens.elte.hu