1. PÁRHUZAMOS ÜTEMEZÉS

A kölcsönös kizárást igénylő erőforrások [6, 23, 26] és az adatáramok [6] az informatikában, a perkoláció [1, 2, 4, 7, 12, 13, 28] pedig a fizikában vezet az alábbi probléma különböző speciális eseteinek vizsgálatára.

Legyen n, m és s pozitív egész szám ($s \geq 2$, n és m lehet végtelen is).

m folyamat s olyan erőforrást használ fel, amelyeket egyidejűleg legfeljebb egy folyamat használhat.

1.1. Az általános feladat megfogalmazása

A folyamatok erőforrásigényét egy

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

mátrixszal adjuk meg, melynek elemei egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek közös eloszlása

$$P[x_{ij} = k] = \begin{cases} p, & \text{ha } k = 0, \\ \frac{1-p}{m-1}, & \text{ha } 1 \leq k \leq m-1 \end{cases} \tag{1.2}$$

minden $i = 1, 2, \dots, m$ és $j = 1, 2, \dots, n$ indexre, valamint minden $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ értékre.

Az első erőforrás tulajdonságai különbözhetnek a többi erőforrás tulajdonságaitól. Ez a különbség megnyilvánulhat a többiekétől eltérő előfordulási valószínűségben és/vagy abban, hogy erre az erőforrásra nem vonatkozik a kölcsönös kizárás és igénylése azt jelzi, hogy az igénylő feladat az adott intervallumban nem igényel erőforrást (például hasznos háttérmunkát végez az adott intervallumban). Utóbbi esetben az ütemezés során ez az elem törölhető a folyamat igényeit leíró sorozatból (a törlés során a sorozat további elemeinek második indexét eggyel csökkentjük – és véges sorozat esetén a sorozat n-edik eleme m lesz).

A folyamatokat különböző feltételek mellett ütemezhetjük.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációjának ütemezése ***biztosítja a kölcsönös b-kizárást,*** (röviden: b-kizárt), ha minden időpontra teljesül, hogy minden erőforrást legfeljebb b-szer használunk fel (ez a követelmény esetleg az m-edik erőforrásra nem vonatkozik).

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációja ***b*-kizárttá tehető,** ha nullák törlésével b-kizárttá tehető (a törölt elemek száma nulla is lehet). Annak valószínűségét, hogy egy adott $\mathbf{Z}$ mátrix b-kizárttá tehető, $E(\mathbf{Z}, p, m, b, n)$-nel jelöljük.

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációja ***ütemezhetővé tehető,*** ha m elemek törlésével (a törölt elemek száma nulla is lehet) olyan mátrixszá alakítható, amely ütemezhető.

Végtelen mátrixokra a valószínűséget úgy definiáljuk, mint a megfelelő véges mátrixokra vonatkozó valószínűségek sorozatának határértékét (limesz inferiorját). Ha több paraméter is végtelen, akkor a pontos definíciót a konkrét feladatnál adjuk meg.

A folyamatokat különböző feltételek mellett ütemezhetjük.

Az ***oszlopos ütemezésnél*** az i-edik időpontban a $\mathbf{Z}$ mátrix i-edik oszlopában lévő elemeket dolgozzuk fel – ebben az esetben a feldolgozhatóság feltétele, hogy a mátrix b-kizárt legyen.

Az oszlopos ütemezésnél különös jelentősége van azoknak a paraméterértékeknek, amelyek mellett a $\mathbf{Z}$ mátrix pozitív valószínűséggel feldolgozható. Legyen

$$p_{crit}(p, m, b) = \lim_{0 \le p \le 1} \inf\{p \mid Z(\mathbf{Z}, p, m, b, n) > 0\} \tag{1.3}$$

A ***prioritásos ütemezésnél*** feltesszük, hogy a folyamatoknak az indexük növekedésével csökkenő prioritásuk van és minden időegységben először az első, majd a további sorozat elejéről vesszük a lehető legtöbb feldolgozandó elemet (a b-kizártságot figyelembe véve).

A ***prioritás nélküli ütemezésnél*** minden időpontban tetszés szerint választhatjuk meg a feldolgozandó elemeket (a sorozatok elejéről, és a b-kizártságot biztosítva).

Néhány tipikus feladat:

1. annak eldöntése, hogy a véges $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációja b-kizárt-e és b-kizárttá tehető-e;
2. annak jellemzése, hogyan függ a véges vagy végtelen $\mathbf{Z}$ mátrixban a paraméterektől (p, m, n, s) annak valószínűsége, hogy a mátrix b-kizárttá alakítható;
3. prioritásos és prioritás nélküli ütemezési algoritmusok futási idejének és feldolgozási sebességének jellemzése;
4. anomália (kedvezőbb paraméterekhez rosszabb hatékonyság tartozik) vizsgálata.

1.2. Eredmények

A továbbiakban néhány speciális esetet és hozzájuk tartozó eredményeket mutatunk be.

1.2.1. Winkler perkoláció két dimenzióban

Legyen $m = 2$, $s = 2$, $n = \infty$ és $b = 1$. Az első erőforrásra nem vonatkozik a kölcsönös kizárás követelménye, és az ütemezés során a 0 típusú elemek törölhetők.

Gács Péter polinomiális algoritmust javasolt annak eldöntésére, hogy adott mátrix 1-kizárttá tehető-e és bebizonyította [12], hogy ha $p < 10^{-400}$, akkor $R(p) > 0$.

Iványi Antal bebizonyította [17], hogy ha $0 \leq p \leq 1$, akkor

$$R(p, 2, 1) \leq 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2} \frac{1-p^2}{1-p^2+(1-p)^2}\right)}}{2\left(1 - \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}\right)}. \tag{1.4}$$

Megjegyezzük, hogy ha p elég kicsi, akkor a (1.4) egyenlőtlenség jobb oldala körülbelül $1 - p^2$.

A bizonyításban fontos szerepet játszanak a Catalan-számok [3, 5, 29, 30, 31, 32].

Így a két eredmény következménye, hogy ha $p < 10^{-400}$, akkor

$$0 < R(p) < 1 - p^2. \tag{1.5}$$

A szimulációs eredmények arra utalnak, hogy ebben az esetben $R(p)$ pontos értéke közel van a ***felső*** korláthoz.

1.2.2. Winkler perkoláció több dimenzióban

Legyen $m \geq 2$, $s = 2$, $n = \infty$ és $1 \leq b \leq m - 1$.

A szimulációs eredmények arra utalnak, hogy ekkor

$$0 < p_{crit} \leq \frac{b}{m}. \tag{1.6}$$

1.2.3. Átfedéses memória két prioritás nélküli folyamattal

Ismét legyen $m = 2$, $s = 2$ és $n = \infty$. Az erőforrások mindegyikét mindkét folyamat 1/2 valószínűséggel igényli. A prioritás nélküli ütemező algoritmus minden időpontban 5 művelet közül választhat: az első sorozat első elemét ütemezi, a második sorozat első elemét ütemezi, az első sorozat első két elemét ütemezi, a második sorozat első két elemét ütemezi, a sorozatok első elemét ütemezi. A kölcsönös kizárás követelmény, ezért két elem csak akkor dolgozható fel egyszerre, ha azok különböznek egymástól.

Legyen OPT olyan algoritmus, amely minden konkrét mátrixot a lehető legrövidebb idő alatt dolgoz fel. Jelöljük $S(n)$-nel annak várható értékét, hogy az n hosszúságú mátrixok feldolgozása során OPT időegységenként hány elemet dolgoz fel.

Iványi és Kátai megmutatták [23], hogy OPT polinomiális idő alatt megvalósítható, továbbá $S(n)$ szigorúan monoton nő és

$$\frac{7}{4} \leq \lim_{n\to\infty} S(n) = L \leq 2. \tag{1.7}$$

A szimulációs eredmények szerint L kettő, vagy ahhoz közeli érték.

Iványi megmutatta [15], hogy

$$S(n) \leq 2 - \frac{(n+1)\binom{2n}{n-1}}{2n2^{2n}}, \tag{1.8}$$

azonban a jobb oldalon lévő kifejezés n növelésével kettőhöz tart, így nem bizonyítja, hogy $L < 2$.

1.2.4. Átfedéses memória m prioritásos folyamattal

Ismét legyen $m = 2$, $s = 2$ és $n = \infty$. A feldolgozás legyen prioritásos, ami azt jelenti, hogy minden időegységben végrehajtjuk az első sorozat első elemét – továbbá az az első sorozat második eleme, a második sorozat első eleme, $\ldots$, az utolsó sorozat első eleme közül a legelső olyat (ha van ilyen), amelyik különbözik az első sorozat első elemétől.

Jelöljük $S(p, m)$-mel a sorozatok feldolgozási sebességét.

Iványi és Pergel megmutatták [26], hogy akkor

$$S(p, m) = 2 - \frac{pt^m(t-1)}{t^{m+1}-1} - \frac{(1-p)(t-1)}{t^{m+1}-1},$$

ahol

$$t = \frac{p^2}{(1-p)^2} .$$

Innen adódik például, hogy $p = 1/2$ esetén az összsebesség a sorozatok számának növelésével kettőhöz tart, míg ha $p \neq 1/2$, akkor

$$\lim_{m\to\infty} S(p, m) = \frac{1}{\max(p, q)}, \tag{1.9}$$

azaz az összsebesség a sorozatok számának növelésével $p = q$ esetén a természetes kettő értékhez tart, míg $p \neq q$ esetén – némiképp meglelpő módon – a határsebesség kettőnél kisebb.

1.2.5. Anomália az átfedéses memóriában két prioritásos folyamattal

Ismét legyen $m = 2$ és $n = \infty$, most azonban legyen s erőforrás. A mátrix elemei nem valószínűségi változók, hanem általunk választott értékek, amelyek megmutatják, hogy a feldolgozó algoritmus bizonyos esetekben meglepő módon viselkedik.

A G_b feldolgozó algoritmus minden időegységben feldolgozza az első sorozat lehető legnagyobb kezdősorozatát úgy, hogy a kezdősorozatban minden erőforrás legfeljebb b-szer fordulhat elő.

Iványi megmutatta [14], hogy

1.2.6. Átfedéses memória két prioritásos folyamattal, s erőforrással

Legyen $m = 2$, $n = \infty$, és legyen s erőforrás, melyek mindegyikére $p = 1/s$ valószínűséggel van szükség.

A feldolgozó algoritmus minden időegységben az egyetlen sorozat lehető leghosszabb kezdősorozatát dolgozza fel úgy, hogy a kezdősorozat elemei különbözők.

Legyen az i-edik folyamat által időegységenként feldolgozott elemek számának várható értéke $V(s, i)$.

Iványi és Kátai megmutatták [18], hogy

$$V(s, 1) = \sum_{i=1}^{s} \frac{s!}{s^s} \sum_{i=1}^{s-1} \frac{s^i}{i!} = \sqrt{\frac{\pi s}{2}} - \frac{1}{3} + \tau_s, \tag{1.10}$$

ahol $\tau_1 \sim 0,08$, $\tau_2 \sim 0,06$ és τ_i monoton csökkenve nullához tart, ha i tart a végtelenhez.

Iványi és Kátai megmutatták [20], hogy

$$V(s,2) = \frac{1}{2}V(s,1) + O(1). \tag{1.11}$$

Irodalomjegyzék

[1] Paul Balister, Bollobas Béla, Mark Walters: Continuum percolation with steps in the square or the disc. Random *Structures and Algorithms* **26/4**, (2005), 392–403. 1

[2] Balister, P., Bollobas, Béla; Quas, A.: Percolation in Voronoi tilings. *Random Structures and Algorithms* **26/3** (2005), 310–318. MR2127372 1

[3] Bege, Antal and Kása, Zoltán: Coding objects related to Catalan numbers. *Studia Univ. Babes-Bolyai, Informatica* Volume **XLVI/1** (2001), 31–39. 3

[4] Bollobas, Béla, Riordan, Oliver: A short proof of the Harris-Kesten theorem. Elektronikus kézirat. http://arxiv.org/find. 1

[5] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald E., Stein, Clifford: *Introduction to Algorithms*, The MIT Press/McGraw-Hill, 2004 (Második kiadás ötödik, javított utánnyomása. Magyarul: *Új algoritmusok.* Scolar Kiadó, 2003). 3

[6] Cormode, Graham, Muthukrishnan, Muthu S.: An improved data stream summary: the count-min sketch and its applications. *Journal of* Algorithms **55/1** (2005), 58–75. Zbl pre02165451 (68P05) 1

[7] Derényi Imre, Palla Gergely, Vicsek Tamás: Clique percolation in random networks. *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 160–202. http://arxiv.org/find 1

[8] Egorichev, G. P., Iványi, Antal, Makosij, A. I.: Analysis of two combinatorial sums characterizing the speed of computers with block memory. (Russian) *Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Comput.* **7** (1987) 19–32. **CS** 0712.05008MA (G.2.1 D.4), **MR** 90d:68062, **Zbl** 712.05008 (05A19 68R05 68N25)

[9] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1968. Magyarul: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[10] Gács, Péter: The clairvoyant demon has a hard task. *Combin. Probab. Comput.* **9/5** (2000), 421–424. MR1810149 (68R10, 05C80 60C05 60K35 68M14 82B43). Zbl 0974.60091 (60K35 60C05)

[11] Gács, Péter: Clairvoyant Scheduling of Random Walks (submitted to *Electronic Journal of Probability*). Rövid változat: Clairvoyant scheduling of random walks. In *Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. MR2121131 (05C85, 60G50).

[12] Gács, Péter: Compatible sequences and a slow Winkler percolation. *Combin. Probab. Comput.* **13/6** (2004), 815–856. MR2102411 (60C05, 60K35), Zbl pre02134970 (60K35) 1, 2

[13] Harris, T. E.: A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56** (1960), 13–20. MR0115221 (22 #6023) 1

[14] Iványi, Antal: On dumpling-eating giants. In: *Finite and infinite sets*, 6th Hung. Combin. Colloq., Eger/Hung. 1981, Vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 37, 379–390 (1984). **CS** 0587.68039MA (C.4 D.4.1 G.2.m) 4

[15] Iványi, Antal: Minimizing overhead costs in parallel program execution. *Programming and Computer Software* (1984) No. 1, 39–43. Oroszul: *Programmirovanie* (1984) No. 1., 63–68. 3

[16] Iványi, Antal: Simulation of program execution using popular Markov chains. (English) *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.* **84/1** (1984), 77–85. CS 0555.68070MA (I.6 D.m), Zbl 555.68070. Oroszul: *Vestn. Mosk. Univ., Ser. XV* 1984, No.1, 59–65. CS 0529.68077MA (I.6 D.m), Zbl 529.68077

[17] Iványi, Antal: A kritikus valószínűség alsó korlátja. Elektronikus kézirat, ELTE, Informatikai Kar, 2005, 8 oldal. 3

[18] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Estimates for speed of computers with interleaved memory systems. *Annales Univ. Sci. Budapest. Rolando Eötvös, Sect. Math.* **19** (1976), 159–164 (1977). **CS** 0358.68104MA (F.4.3), **Zbl** 358.68104 4

[19] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Átfedéses memóriájú számítógépek teljesítményéről. *Alkalmazott Matematikai Lapok* **3** (1978), 1–11. **CS** 0407.68020MA (D.4, C.4, G.3), Zbl 407.68020

[20] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Processing of random sequences with priority. *Acta Cybernetica* **4**, (1978), 85-101 (1978). **CS** 0407.68019MA (D.4, C.4, G.3), **MR** 80d:68029, ZB 407.68019 5

[21] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Parallel processing of random sequences with priority. Mathematical statistics, 1st Pannonian Symp., Bad Tatzmannsdorf/ Austria 1979, *Lect. Notes Stat.* **8**, (1981), 122–139. **CS** 0471.60018MA (G.3, C.4, D.4.1), **Zbl** 471.60018

[22] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Processing of independent Markov-chains. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.* **3** (1982), 33–46 (1983). CS 0539.60092MA (G.3), MR 85k:60090 ZB 539.60092

[23] Iványi, Antal, Kátai, Imre: Modeling of priorityless processing in an interleaved memory with a perfectly informed processor. *Autom. Remote Control* **46/4** (1985), 520–526. **CS** 0581.68035MA (C.4 D.4.1) Fordítás oroszból: *Avtom. Telemekh.* **46/4** (1985), 129–136. ZB 581.68035 1, 3

[24] Iványi, Antal, László, Zoltán. On the power of an electronic computer with interleaved memory (oroszul) *Vychisl. Tekh. Vopr. Kibern.* **20** (1984), 121–135. **CS** 0581.68035MA (D.m) Zbl 585.68009

[25] Iványi, Antal, Pergel, József: Parallel processing of 0-1 sequences. *Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Comput.* **4** (1983), 85–95. ZB 541.68006

[26] Iványi, Antal, Pergel, József: Performance evaluation of an algorithm, processing 0-1 sequences with priority. *Annales Univ. Sci. Budap., Sectio Computatorica* **5** 1984, 37–40. ZB 613.65148 1, 4

[27] Iványi, Antal, Pergel, József: Bináris sorok párhuzamos feldolgozása *Alkalmaz. Mat. Lapok* **11/1-2** (1985), 191–200. MR 87g:68010b (68N25, 90B22)

[28] Kesten, H.: The critical probability of bound percolation on the square lattice is 1/2. *Comm. Math. Phys.* **74** (1980), 41–59. 1

[29] Kása, Zoltán: Rekurzív egyenletek. In: *Informatikai algoritmusok. 1* (szerk. Iványi Antal). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. 14–37. 3

[30] Knuth, Donald Ervin: *The Art of Computer Programming. Vol. 1. Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, 1997 (3., javított kiadás). Magyarul: *A számítógép-programozás művészete. 1. kötet. Alapvető algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, 1993, 2. kiadás.) Zbl 0895.68055 (68W10 68N01 68-01) 3

[31] Stanley, Richard P.: *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62.** Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Zbl 0928.05001 (05-02 05A15 05A16) 3

[32] Vilenkin, N. J.: *Combinatorial Mathematics for Recreation.* Mir Publisher, Moscow, 1972. 207 oldal. Magyarul: Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971, 358 oldal, ETO 591.1. 3

(Budapest, 2005. június 18.)