1. A KRITIKUS VALÓSZÍNŰSÉG ALSÓ KORLÁTJA

A kölcsönös kizárást igénylő erőforrások használata az informatikában [9, 10], a perkoláció [2, 7, 8, 11] pedig a fizikában vezet az alábbi (és ehhez hasonló) problémák vizsgálatára.

1.1. Leszámlálás

Legyen

$$0 \le p \le 1, \qquad n \ge 1, \qquad C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

és legyen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

olyan valószínűségi változókat tartalmazó mátrix, melyek – egymástól függetlenül – p valószínűséggel az egy és $q = 1 - p$ valószínűséggel a nulla értéket veszik fel.

Legyen

$$R(p, n)$$

annak a valószínűsége, hogy $\mathbf{Z}$ egy realizációjának van olyan prefixe, amelyben több egyes van, mint nulla, azaz van olyan k $(1 \le k \le n)$, amelyre teljesül

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i + y_i) \le k.$$

Legyen $R(p)$ annak a valószínűsége, hogy ugyanez a hasonló végtelen mátrixra teljesül, azaz legyen

$$R(p) = \lim_{n\to\infty} R(p, n).$$

Ekkor

$$R(p) = a\sum_{i=0}^{\infty} C_i(ab)^i, \tag{1.1}$$

ahol

$$a = \frac{p^2}{p^2+q^2} \quad \text{és} \quad b = \frac{q^2}{p^2+q^2}.$$

Mivel $R(p)$ valószínűségek monoton nemcsökkenő sorozatának határértéke, ezért $0 \le$

$R(p) \leq 1$ minden p-re. Az is természetes, hogy az $R(p)$ monoton nemcsökkenő függvénye p-nek.

A várt viselkedés: $R(p)$ a $[0, 1/2)$ intervallumban folytonos, szigorúan monoton nő (nullától egyig), az $[1/2, 1]$ intervallumban pedig konstans (az értéke 1).

A hasonló vizsgálatok [2, 5, 6, 7, 8, 11] egyik központi kérdése az 1 és az 1-nél kisebb $R(p)$ értékeket elválasztó ***kritikus valószínűség:***

$$p_{crit} = \inf_{0 \leq p \leq 1} \{p \mid R(p) = 1\}.$$

A (1.1) összegben a C_i tényezők a Catalan-számok [1, 3, 12, 13, 14], melyekre a C_{i+1}/C_i hányadosok szigorúan monoton növekedve négyhez tartanak.

A (1.1) összeget a hányados kritérium segítségével alulról és felülről is megbecsülhetjük. A használható felső becslés érdekében célszerű az első néhány tagot pontosan kiszámolni.

Ha például $p = 0,4$, akkor

$$a = \frac{0,4^2}{0,4^2 + 0,6^2} = \frac{4}{13} \text{ és } b = \frac{9}{13},$$

az első 4 tag összege pedig

$$a \sum_{i=0}^{3} C_0 (ab)^i = \frac{4}{13}\left(1 + \frac{4}{13} + 2\frac{4^2}{13^2} + 5\frac{4^3}{13^3}\right) = \frac{4}{13}\frac{3509}{2197} \sim 0,62.$$

A további tagokra

$$a \sum_{i=4}^{\infty} C_i (ab)^i < \frac{4}{13} C_4 \frac{4^4}{13^4} \sum_{i=4}^{\infty} \frac{C_i}{C_4}\left(\frac{144}{169}\right)^{i-4} < 5,6 \cdot 9,216 \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{13}\right)^i = 5,4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{169}{25}\right) \sim 0,36.$$

Ezek szerint

$$R(p) < 0,62 + 0,36 = 0,98.$$

Ha $i \geq 3$, akkor $C_{i+1}/C_i \geq 3$, így

$$R(p) \sim 0,62 + a \sum_{i=4}^{\infty} C_i (ab)^i < 0,62 + \frac{4}{13} C_4 \frac{4^4}{13^4} \sum_{i=4}^{\infty}\left(\frac{108}{169}\right) \sim 0,62 + 5,6 \cdot 9,216 \cdot 10^{-3} \frac{169}{61} \sim 0,14.$$

Ezek szerint

$$R(0,4) > 0,62 + 0,14 = 0,76$$

és

$$0,76 < R(0,4) < 0,98.$$

1.2. Szimuláció

A következő táblázatban a MATLABKA segítségével végzett konkrét számítások eredményeit foglaljuk össze.

n	$a = 0,49$	$a = 0,50$	$a = 0,51$
0	$Q = 0,490000$ $u = 0,490000$	$Q = 0,500000$ $u = 0,500000$	$Q = 0,510000$ $u = 0,510000$
1	$Q = 0,612451$ $u = 0,122451$	$Q = 0,625000$ $u = 0,125000$	$Q = 0,637449$ $u = 0,127449$
2	$Q = 0,673652$ $u = 0,061201$	$Q = 0,687500$ $u = 0,062500$	$Q = 0,701148$ $u = 0,063699$
3	$Q = 0,711887$ $u = 0,031538$	$Q = 0,726562$ $u = 0,039062$	$Q = 0,740943$ $u = 0,039795$
4	$Q = 0,73864$	$Q = 0,753906$ $u = 0,027343$	$Q = 0,768789$ $u = 0,027846$
5	$Q = 0,75869$	$Q = 0,774414$ $u = 0,020507$	$Q = 0,789666$ $u = 0,020876$
10	$Q = 0,81477$	$Q = 0,831811$ $u = 0,008895$	$Q = 0,848033$ $u = 0,008136$
100	$Q = 0,92372$	$Q = 0,943930$ $u = 0,000278$	$Q = 0,960898$ $u = 0,000273$
1000	$Q = 0,95634$	$Q = 0,982169$ $u = 0,000008$	$Q = 0,995378$ $u = 0,000006$
10000	$Q = 0,96077$	$Q = 0,994358$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999990$ $u = 0,000000$
100000	$Q = 0,960784$	$Q = 0,998215$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999999$ $u = 0,000000$
200000	$Q = 0,960784$	$Q = 0,998738$ $u = 0,000000$	$Q = 0,999999$ $u = 0,000000$

1.3. Bolyongás

A feladat a $p = 1/2$ esetben egy elnyelő falat tartalmazó bolyongásként [4] is vizsgálható.

Az eredmény $R(1/2) = 1$.

1.4. Markov-láncok

A feladat egy megszámlálhatóan végtelen állapotú, homogén Markov-lánccal [4] is leírható. Mivel elsősorban a kritikus valószínűséget szeretnénk meghatározni, eltekintünk a színes oszlopoktól, és ennek megfelelően megnöveljük a fekete és fehér oszlopok valószínűségét.

Az állapotok indexe a fehér és fekete oszlopok számának különbsége, azaz $-1, 0, 1, 2, \ldots$ lehet.

A lánc kezdeti eloszlása $(0, 1, 0, 0, \ldots)$, az átmenetvalószínűségek pedig

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0 \text{ és } j = 0, \\ p^2, & \text{ha } i \neq 0 \text{ és} j = i - 1, \\ q^2, & \text{ha } i \neq 0 \text{ és} j = i + 1, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

vagy mátrix alakjában

Állapot	s_{-1}	s_0	s_1	s_2	s_3	$\ldots$
s_{-1}	1	0	0	0	0	$\ldots$
s_0	a	0	b	0	0	$\ldots$
s_1	0	a	0	b	0	$\ldots$
s_2	0	0	a	0	b	$\ldots$
$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Ha $p \geq 1/2$, akkor az s_{-1} állapot mindent elnyel és a határeloszlás $(1, 0, 0, 0, \ldots)$. Ha viszont $p < 1/2$, akkor az elnyelő állapot határvalószínűsége egynél kisebb, a többi állapoté pedig nulla, bár a többiek együttes valószínűsége pozitív.

Az s_0 elnyelő állapot határvalószínűségét x-szel jelölve a következő egyenlet írható fel:

$$x = a + (1-a)x^2,$$

melynek megoldása

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4(1-a)a}}{2(1-a)} \quad \text{és} \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{1-4(1-a)a}}{2(1-a)}.$$

Ha az eredeti mátrixban az egyesek valószínűsége például 1/4, 1/3, illetve 2/5, akkor az egyesek valószínűsége akkor a „sűrített mátrixban” az egyesek valószínűsége a sűrített mátrixban 1/10, 1/5, illetve 4/13 lesz.

n	$a = 1/10$	$a = 1/3$	$a = 4/13$
0	$Q = 0,100000$ $u = 0,100000$	$Q = 0,200000$ $u = 0,200000$	$Q = 0,307692$ $u = 0,307692$
1	$Q = 0,109000$ $u = 0,009000$	$Q = 0,232000$ $u = 0,003200$	$Q = 0,373236$ $u = 0,065543$
2	$Q = 0,110600$ $u = 0,001600$	$Q = 0,242240$ $u = 0,001024$	$Q = 0,401160$ $u = 0,027924$
3	$Q = 0,110984$ $u = 0,000364$	$Q = 0,246336$ $u = 0,000409$	$Q = 0,416031$ $u = 0,014870$
4	$Q = 0,111076$ $u = 0,000009$	$Q = 0,248171$ $u = 0,0001.83$	$Q = 0,424900$ $u = 0,008.869$
5	$Q = 0,111101$ $u = 0,000002$	$Q = 0,249051$ $u = 0,000088$	$Q = 0,430568$ $u = 0,0005.66$
10	$Q = 0,111111$ $u = 0,000000$	$Q = 0,249951$ $u = 0,000004$	$Q = 0,441201$ $u = 0,000099$
100	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000273$
1000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
10000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
100000	$Q = 0,111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$
200000	$Q = 0,11111111111111$	$Q = 0,250000$ $u = 0,000000$	$Q = 0,444444$ $u = 0,000000$

A képlet szerint a $p = 1/4$ valószínűséghez

$$x = \frac{1-0,8}{1,8} = \frac{1}{9}$$

határvalószínűség tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

A képlet szerint az $a = 1/5$ valószínűséghez

$$x = \frac{2/5}{8/5} = \frac{1}{4}$$

határvalószínűség tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

A képlet szerint az $a = 4/13$ valószínűséghez

$$x = \frac{8/13}{18/13} = \frac{4}{9}$$

határvalószínűsg tartozik, ami megfelel a szimulációs értéknek.

Irodalomjegyzék

[1] Bege, Antal and Kása, Zoltán: Coding objects related to Catalan numbers. *Studia Univ. Babes-Bolyai, Informatica* Volume **XLVI/1** (2001), 31–39. 2

[2] Bollobas, Béla; Riordan, OLiver: A short proof of the Harris-Kesten theorem. Elektronikus kézirathttp://arxiv.org/find. 1, 2

[3] Cormen, Thomas H., Leiserson, Charles E., Rivest, Ronald E., Stein, Clifford: *Introduction to Algorithms*, The MIT Press/McGraw-Hill, 2004 (Második kiadás ötödik, javított utánnyomása. Magyarul: *Új algoritmusok.* Scolar Kiadó, 2003). 2

[4] Feller, William: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1968. Magyarul: *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978. 3

[5] Gács, Péter: The clairvoyant demon has a hard task. *Combin. Probab. Comput.* **9/5** (2000), 421–424. MR1810149 (68R10, 05C80 60C05 60K35 68M14 82B43). 2

[6] Gács, Péter: Clairvoyant Scheduling of Random Walks (submitted to *Electronic Journal of Probability*). Rövid változat: Clairvoyant scheduling of random walks. In *Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing,* 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. MR2121131 (05C85, 60G50). 2

[7] Gács, Péter: Compatible sequences and a slow Winkler percolation. *Combin. Probab. Comput.* **13/6** (2004), 815–856. MR2102411 (60C05, 60K35) 1, 2

[8] Harris, T. E.: A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **56** (1960), 13–20. MR0115221 (22 #6023) 1, 2

[9] Iványi, Antal; Kátai, Imre: Modeling of priorityless processing in an interleaved memory with a perfectly informed processor. *Autom. Remote Control* **46/4** (1985), 520–526. Fordítás oroszból: *Avtom. Telemekh.* **46/4** (1985), 129–136. ZB 581.68035 1

[10] A. Iványi, J. Pergel: Performance evaluation of an algorithm, processing 0-1 sequences with priority. *Annales Univ. Sci. Budap., Sectio Computatorica* **5** 1984, 37-40. ZB 613.65148 1

[11] Kesten, H.: The critical probability of bound percolation on the square lattice is 1/2. *Comm. Math. Phys.* **74** (1980), 41–59. 1, 2

[12] Kása, Zoltán: Rekurzív egyenletek. In: *Informatikai algoritmusok. 1* (szerk. Iványi Antal). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. 14–37. 2

[13] Knuth Donald Ervin: *The Art of Computer Programming. Vol. 1. Fundamental Algorithms.* Addison-Wesley, 1997 (3., javított kiadás). Magyarul: *A számítógép-programozás művészete. 1. kötet. Alapvető algoritmusok*, Műszaki Könyvkiadó, 1993, 2. kiadás.) 2

[14] Stanley, Richard P.: *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **62.** Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Stanley 2

(Budapest, 2005. június 16.)