A változó sebességek algoritmus átlagos üzenetszáma

Kasza Péter

2010. november 29.

Tartalomjegyzék

1. Elméleti eredmények **2**

2. Szimulációs eredmények **4**

A jelen tanulmány célja a "változó sebességek" algoritmus pontos átlagos üzenetszámának meghatározása; az $[1 \dots K]$ intervallumból, egyenletes eloszlás szerint választott azonosítók esetén. Korábbi eredmények alapján az átlagos üzenetszám nagyságrendje lineáris [1], [2], azonban a pontos érték nem ismert. A továbbiakban az algoritmus azon változatát tekintjük, amely azonnal terminál, ha a vezető folyamatnak sikerült a saját azonosítóját visszakapnia.

1. Elméleti eredmények

1.1. Definíció. $\Omega_S^N := \{\omega \,|\, \omega \in \mathcal{P}(S),\ |\omega| = N\}$

1.2. Definíció. $C_K^N := \Omega_{\{1,2\dots K\}}^N$

1.3. Definíció. $S_K^N(m) := \{\omega \,|\, \omega \in C_K^N,\ \min \omega = m\}$

Megjegyzés. A definiált halmazok elemszámai

$$|\Omega_S^N| = \binom{|S|}{N},\ |C_K^N| = \binom{K}{N},\ |S_K^N(m)| = \binom{K-m}{N-1}$$

1.4. Definíció. Az $\mathcal{M} : \omega \to \mathbb{N}_0$ az ω azonosítóhalmaz üzenetszám-függvényének nevezzük.

1.5. Definíció. A C_K^N halmazcsalád átlagos üzenetszámán az M_K^N számot értjük, ahol

$$M_K^N := \frac{1}{|C_K^N|} \sum_{\omega \in C_K^N} \mathcal{M}(\omega)$$

1.1. Lemma. *Az üzenetszám egy adott $\omega \in C_K^N$ halmaz esetén*

$$\mathcal{M}(\omega) = \sum_{u \in \omega} \left\lfloor \frac{N}{2^{u - \min \omega}} \right\rfloor \tag{1}$$

Bizonyítás. Legyen $u^\star = \min \omega$ a legkisebb azonosítójú folyamat. Az algoritmus $u^\star$-ot választja meg vezetőnek, így körbe kell küldeni az azonosítóját minden folyamat között. Ehhez N darab üzenetre van szükség. Mivel az üzeneteket csak addig továbbítjuk amíg $u^\star$ vissza nem kapta a saját azonosítóját, az u_i folyamat által elküldött üzenetek száma egyenesen arányos a sebességek hányadával. Tehát egy tetszőleges $u_i = u^\star + k_i$ azonosítójú folyamat üzenetei $2^{u^\star + k_i}$ sebeséggel haladnak és így az általa elküldött üzenetek száma

$$\left\lfloor N \frac{2^{u^\star}}{2^{u^\star + k_i}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{2^{u_i - u_\star}} \right\rfloor$$

$\square$

1.2. Tétel.

$$\sum_{\omega \in S_K^N(m)} \mathcal{M}(\omega) = |S_K^N(m)|N + |S_{K-1}^{N-1}(m)| \sum_{k=1}^{K-m} \left\lfloor \frac{N}{2^k} \right\rfloor \tag{2}$$

Bizonyítás. Az 1.1 lemmából tudjuk, hogy

$$\sum_{\omega \in S_K^N(m)} \mathcal{M}(\omega) = \sum_{\omega \in S_K^N(m)} \sum_{u \in \omega} \left\lfloor \frac{N}{2^{u-m}} \right\rfloor \tag{3}$$

Legyen

$$c_k(\omega) = \begin{cases} 1 & : k \in \omega \\ 0 & : k \notin \omega \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{\omega \in S_K^N(m)} \sum_{u \in \omega} \left\lfloor \frac{N}{2^{u-m}} \right\rfloor = \sum_{\omega \in S_K^N(m)} \sum_{k=m}^{K} c_k(\omega) \left\lfloor \frac{N}{2^{k-m}} \right\rfloor \tag{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{K-m} \left\lfloor \frac{N}{2^k} \right\rfloor \sum_{\omega \in S_K^N(m)} c_{k+m}(\omega) \tag{5}$$

és innen az alábbi lemmát felhasználva adódik az állítás. □

1.3. Lemma.

$$\sum_{\omega \in S_K^N(m)} c_{k+m}(\omega) = \begin{cases} |S_K^N(m)| & : k = 0 \\ |S_{K-1}^{N-1}(m)| & : k \neq 0 \end{cases}$$

Bizonyítás.

$$S := \sum_{\omega \in S_K^N(m)} c_{k+m}(\omega) = |\{\omega \,|\, \omega \in S_K^N(m),\, k+m \in \omega\}|$$

Ha $k = 0$, akkor $S = |S_K^N(m)|$, hiszen $k+m$ éppen a minimum. Egyébként pedig S, mivel a minimumon felül még egy elemet lerögzítettünk, $\binom{K-m-1}{N-2} = |S_{K-1}^{N-1}(m)|$. □

Következmény. Mivel az $S_K^N(m)$, $(m = 1, 2, \ldots K - N + 1)$ halmazok diszjunktak, igaz az alábbi

$$M_K^N = \frac{1}{|C_K^N|} \sum_{m=1}^{K-N+1} \left\{ |S_K^N(m)|N + |S_{K-1}^{N-1}(m)| \sum_{k=1}^{K-m} \left\lfloor \frac{N}{2^k} \right\rfloor \right\}$$

2. Szimulációs eredmények

Az átlagos üzenetszám meghatározására az 1.1 lemma felasználásával egy igen egyszerű Monte-Carlo algoritmus adható meg 1. A szimulációt a lassú konvergencia miatt azonban csak kis elemszámú ($K \leq 100$) intervallumokra végeztem el. A $K \leq 1000$ esetekben, a numerikus hibától eltekintve pontos átlagot, az 1 következményt felhasználva számítottam ki.

A kapott eredmények alapján, az intervallum hosszától függetlenül, az elemszám növelésével azonos szerkezetű konvex görbéket kapunk.

Algoritmus 1 Monte-Carlo algoritmus az átlagos üzenetszám meghatározására

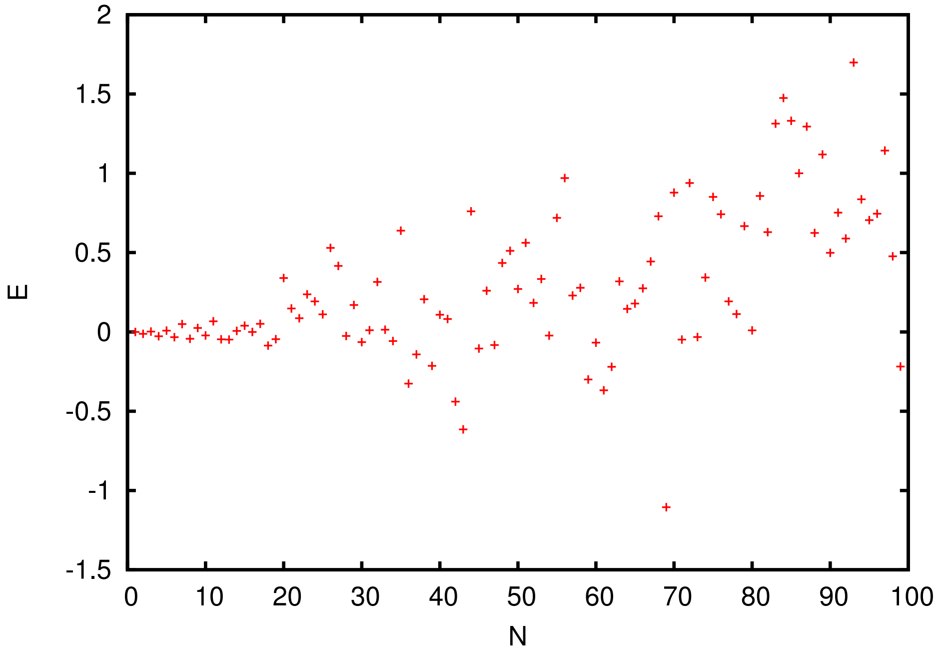
---

{N: kiválasztandó azonosítók száma}
{K: $[1 \cdots K]$ intervallum}
{n: fordulók száma}
$s \leftarrow 0$
for $i = 1$ **to** n **do**
  {N hosszú véletlen kombináció választása $[1 \ldots K]$-ból}
  $\Omega \leftarrow RandCombo(N, K)$
  $m \leftarrow \min \Omega$
  for $j = 1$ **to** N **do**
    $s \leftarrow s + \left\lfloor \frac{N}{2^{\omega_j - m}} \right\rfloor$
  end for
end for
return s/n {$\approx M_K^N$}

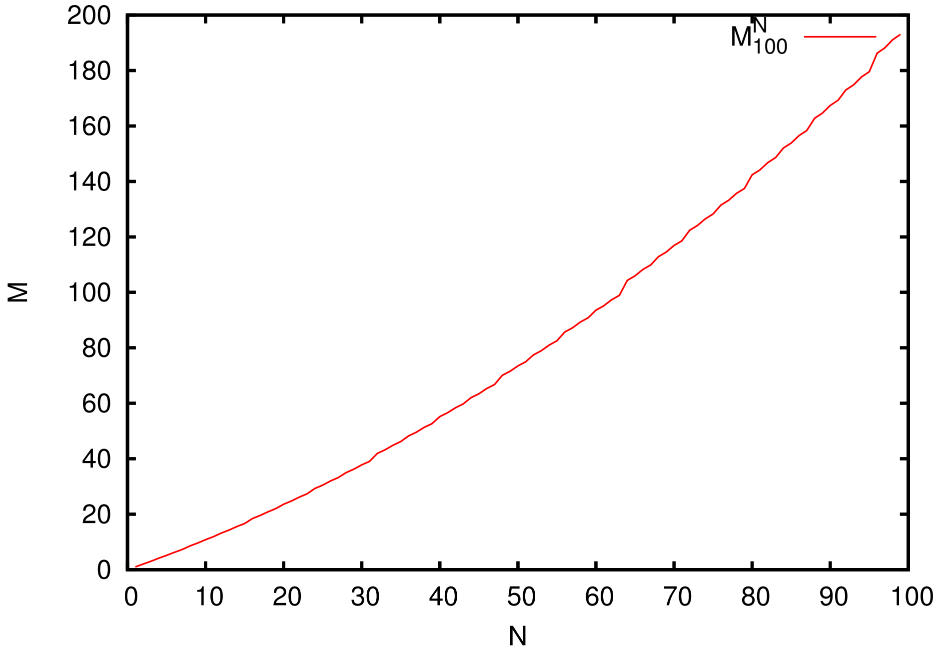
Hivatkozások

[1] Frederickson, G. N., and Lynch, N. A. Electing a leader in a synchronous ring. *J. ACM 34* (January 1987), 98–115.

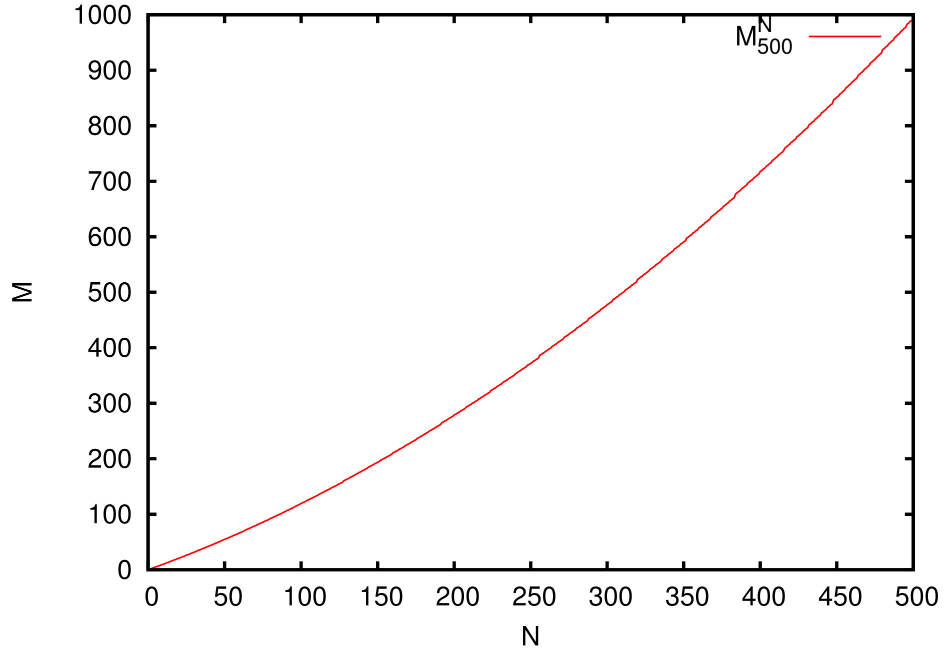
[2] Vitányi, P. M. Distributed elections in an archimedean ring of processors. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1984), STOC '84, ACM, pp. 542–547.



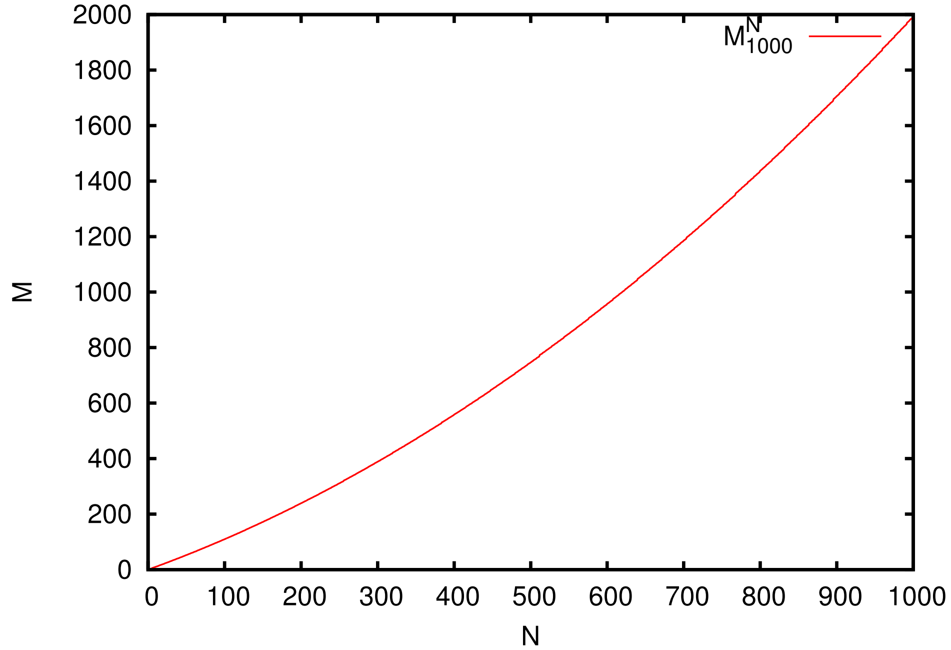
1. ábra. A szimuláció hibája a C_{100}^{N} azonosítóhalmazokra 10^3 iteráció mellett



2. ábra. Az átlagos üzenetszám a C_{100}^{N} azonosítóhalmazokra



3. ábra. Az átlagos üzenetszám a C^N_{500} azonosítóhalmazokra



4. ábra. Az átlagos üzenetszám a C^N_{1000} azonosítóhalmazokra