Paraméteres algoritmusok az F-kizáró párosítás problémára

Szakdolgozat

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Komputeralgebra Tanszék

készítette:
Vári Erika
matematika-informatika szak

Konzulensek:
Dr. Hannes Moser (Friedrich-Schiller-Universität Jena)
Dr. Marx Dániel (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem)
Schlotter Ildikó (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem)
Dr. Iványi Antal (Eötvös Loránd Tudományegyetem)

Hatvan, 2010. 05. 11.

Kivonat

Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS jól ismert NP-teljes probléma, már a Garey-Johnson könyvben is szerepel: adott egy $G = (V, E)$ páros gráf, valamint egy konfliktuspárokból álló $F \subseteq E \times E$ halmaz. Egy olyan legnagyobb párosítást keresünk, amely minden párból legfeljebb az egyik élt tartalmazza.

Irena Rusu cikkében találhatunk egy bizonyítást arra, hogy az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma diszjunkt párok esetén már legfeljebb 3 fokú páros gráfokban is NP-teljes, mi pedig hasonlóképpen megmutatjuk, hogy a probléma erősen diszjunkt párok esetén már fákon is NP-teljes.

A problémának különböző paraméterezései lehetségesek. Az egyik paraméter legyen a konfliktuspárok száma, amelyet a továbbiakban f-fel jelölünk. Ebben az esetben az a kérdés, hogy milyen nagy lehet egy maximális F-kizáró párosítás az adott gráfban. Adunk egy $O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$ futási idejű keresőfa-algoritmust páros gráfok esetén, ahol m a gráf élszámát, n pedig a csúcsszámát jelenti, ezzel megmutatva, hogy a probléma FPT-ben van az f paraméter esetén.

Kézenfekvő és általános paraméterezése a párosításokkal foglalkozó problémáknak a párosítás mérete, ezt a paramétert mi k-val fogjuk jelölni. Ebben az esetben az a kérdés, hogy létezik-e egy legalább k méretű F-kizáró párosítás a gráfban. Megmutatjuk, hogy ekkor a probléma W[1]-nehéz, de ha a konfliktuspárok diszjunktak, tehát egy él csak egy párban fordul elő, akkor a 3-HALMAZ PAKOLÁS problémára vezethetjük vissza lineáris időben. Mivel a 3-HALMAZ PAKOLÁS problémára létezik FPT algoritmus, ezáltal az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS problémára is kapunk egy FPT-algoritmust (diszjunkt konfliktuspárok esetén). Ezen kívül adható egy f-ben és k-ban lineáris kernel.

Az utolsó vizsgált paraméter pedig az ω favastagság, amely mellett a probléma már $\omega = 1$ esetén is NP-teljes.

Végül megmutatjuk, hogy a LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA probléma $W[1]$-nehéz ℓ és k^* paraméterek esetén, ahol ℓ a keresés sugara, és k^* a megváltoztatott konfliktuspárok száma.

Tartalomjegyzék

I. rész

Bevezetés

1. Párosítások

Hogyan találhatunk lehetőleg sok független élt egy adott gráfban? Minden csúcs lefedhető független élekkel? Ezekre a kérdésekre a gráfelméletből kaphatunk válaszokat. Abban, hogy ezeket a válaszokat megtaláljuk, néhány tétel és algoritmus lesz segítségünkre. Először néhány fogalmat definiálunk.

Egy M *párosítás* egy $G = (V, E)$ gráfban egy olyan $E' \subseteq E$ élhalmaz, amelyben az éleknek nincs közös végpontja. Egy legnagyobb méretű párosítást a G gráfban *maximális párosításnak* hívunk.

1.1. Motiváció

Mindenekelőtt szeretnék egy egyszerű példát bemutatni, amelyet könnyű gráfokkal modellezni úgy, hogy a feladatot egy párosítás keresésére vezetjük vissza. Tekintsünk egy olyan ügynökséget, amely párokat próbál közvetíteni. A cél az, hogy a férfiak és a nők halmazából a lehető legtöbb párt állítsuk össze. Feltesszük, hogy két személy akkor alkothat egy párt, ha szimpatikusak egymás számára. Egy pár egy férfiből és egy nőből áll, és minden személy csak egy párban szerepelhet.

Ebben az esetben egy olyan gráfot konstruálhatunk, melynek csúcsai a személyeket reprezentálják, és két csúcs össze van kötve, ha az azok által képviselt személyek szimpatikusak egymásnak. Ha találunk egy maximális párosítást ebben a gráfban, akkor a lehető legtöbb párt választottuk ki a jelentkezők közül.

1.2. Irena Rusu eredményei

A MAXIMÁLIS SÚLYÚ F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma Irena Rusu cikkében [29] van megemlítve ez a speciális maximális párosítási probléma. Először a problémát és néhány új fogalmat fogok bemutatni, majd az eredményeket ismertetem.

Adott egy $G = (V, E)$ gráf és egy $w : E \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény. A G gráf feszített párosítása (induced matching) egy olyan párosítás, amely egy feszített részgráfot formál. Egy legnagyobb súlyú párosítás G-ben olyan M párosítás, amely éleinek összsúlya maximális. Ezt a problémát MAXIMÁLIS SÚLYÚ PÁROSÍTÁS-nak (MWM-nek) nevezzük.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $F \subseteq E \times E$ konfliktuspárok egy halmaza. Egy *F-kizáró párosítás* (*odd-matching*) (G, F)-ben G-nek olyan párosítása, amely minden párból legfeljebb csak egy élt tartalmaz. Ha adott egy súlyfüggvény, a legnagyobb súlyozott F-kizáró párosítás egy legnagyobb összsúllyal rendelkező F-kizáró párosítás. Ez a probléma a MAXIMÁLIS SÚLYÚ F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS.

MAXIMÁLIS SÚLYÚ F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS:

Bemenet: $G = (V, E)$ gráf, $w : E \to \mathbb{R}^+$ súlyfüggvény, a konfliktuspárok $F \subseteq E \times E$ halmaza és egy pozitív egész K szám.

Kérdés: Létezik (G, F)-ben legalább K súlyú F-kizáró párosítás?

Diszjunkt pároknak nevezzük az olyan konfliktuspárokat, ha az egyes konfliktuspároknak nincs közös élük. Azt az esetet kritikus esetnek nevezzük, amikor a konfliktuspárok diszjunktak és w egy konstans függvény. Ez az eset NP-teljes[12], páros gráfok esetén is. Ez az eredmény a [13, 14] cikkeken alapszik. Ezen kívül egy $K_{n,n}, n \geq 3$ teljes páros gráfban egy $n/2$ méretű F-kizáró párosítás $O(n^2)$ idő alatt található meg [3].

Irena Rusu [29] a következő eredményeket fogalmazza meg a cikkében:

- A MAXIMÁLIS SÚLYÚ F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS NP-teljes legfeljebb 3 fokú páros gráfok esetén, ha a konfliktuspárok diszjunktak és a súlyfüggvény konstans.
- Erre a problémára létezik egy $(\Delta(T(F)) + 1)$-közelítő algoritmus általános gráfokban.

2. Alkalmazások

Ebben a fejezetben az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS két alkalmazását mutatjuk be. Az egyik biológiai alkalmazás, amely a [29] cikkben van megemlítve, a második a vezeték nélküli hálózatokkal kapcsolatos. Az utóbbi témához több információt találhatunk a [1] cikkben.

2.1. Biológiai alkalmazás

Az olajrepce növényfajta (neve: Colza) két különböző osztályba sorolható. A „robusztus" változat, amely sok alpha-linolenic-savat tartalmaz (ez a sav az emberi szervezet számára egészséges, de a test ezt nem termeli), és a „törékeny" változat, amely kevés alpha-linolenic-savat tartalmaz.

A biológusok a két osztályból szeretnének párokat kiválasztani, és őket úgy keresztezni, hogy kevés savval rendelkező „robusztus” változatot kapjanak. A keresztezés által tehát csak „törékeny” változatú növényeket kapunk.

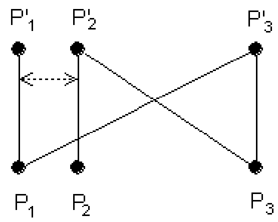
A feltételek a következők:

- Minél nagyobb a genetikai távolság két növény között, annál ígéretesebb a párok keresztezése;

- Egy változat csak egy párban szerepelhet;

- Néhány párt nem lehet egy időben keresztezni. Tekintsük a $\{P_1, P_1'\}$, $\{P_2, P_2'\}$ és $\{P_3, P_3'\}$ párokat. A P_i csúcsok a „robusztus” változatot jelölik, a P_i' csúcsok pedig a „törékenyt”. (lásd az 1. ábrát). Mivel a $\{P_1, P_1'\}$ és $\{P_2, P_2'\}$ párok genetikailag túl közel vannak egymáshoz, ezért ha a két párt egyszerre keresztezzük, akkor az előállított növények hasonló genetikai tulajdonságokkal fognak rendelkezni. Ezért az ilyen párokat konfliktuspároknak nevezzük, így ezek közül a párok közül legfeljebb csak az egyiket keresztezzük.

Mivel ilyen párok nem fordulnak elő gyakran, érdemes a problémát a párok számával paraméterezni.



1. ábra. A közel levő párok nem keresztezhetők egyszerre.

2.2. Vezeték nélküli ad-hoc hálózatok

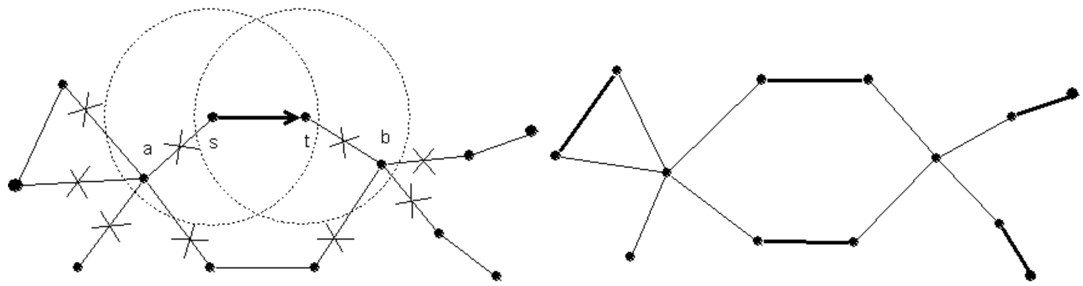
A probléma vizsgálata során meg kell határoznunk a maximális konkurens átvitelek számát, mely a MAC-rétegben (Media Access Control) ad-hoc vezeték nélküli hálózatok esetén létrejöhet. Megmutatjuk, hogy a virtuális hordozó érzékelésen alapuló MAC-protokollok egy nagy osztálya RTS/CTS üzeneteket használ, amely tartalmazza a népszerű IEEE 802.11-es (Wireless LAN) szabványt. Az IEEE 802.11 egy vezeték nélküli adatátviteli protokoll, az OSI modell két legalsó rétegét, a fizikai és az adatkapcsolati réteget definiálja. A kommunikáció két résztvevő között ad-hoc-módban (közvetlenül) vagy infrastruktúra-módban egy hozzáférési pont (access point) segítségével következhet be.

Minden átvitel olyan csomópontok között zajlik, melyek egy rádió hatókörén belül esnek, és itt mérhető a legnagyobb lehetséges hálózati kapacitás a MAC-rétegen belül, mivel ebben az esetben minden kommunikáció helyi jellegű. Ekkor, amennyiben két különálló eszköz ugyanarra az állomásra küld jeleket, azok megzavarhatják egymást.

Hogy ezt a problémát elkerüljük, és több állomásnak ugyanahhoz a kommunikációs eszközhöz való közös hozzáférését lehetővé tegyük, a 802.11-es szabványon belül leírt CSMA/CA-mechanizmust (Carrier Sense Multiple Access with Collision Avoidance) alkalmazzuk. A CSMA/CA egy elvet jelöl, mely az összeütközés elkerülését teszi lehetővé több hálózati állomásnak ugyanahhoz az átviteli kommunikációs eszközhöz való hozzáférésénél.

Ha egy s küldő a t szomszédjával akar kommunikálni, akkor s küld egy „request-to-send" (RTS) üzenetet t-nek. Ha a fogadó állomás nem hallja más állomás jelét, akkor egy „clear-to-send" (CTS) broadcast üzenetet küld. Ezek az üzenetek hallhatók minden olyan állomás számára, mely s vagy t (vagy mindkettőjük) rádiókörzetén belül található, és ezek az üzenetek informálják az állomásokat az elkövetkező adatátvitel hosszáról. Amennyiben az s állomás egy CTS-t hall, küldheti az adatokat is. Ha az adatok eredményesen megérkeznek, t visszaküld egy „link-layer acknowledgment" (ACK) üzenetet azért, hogy az s küldő értesüljön az eredményes adatátvitelről.

A 2. ábra egy példahálózatot mutat, ahol az s állomás a t állomásnak küld. Először s küld egy RTS üzenetet, s szomszédai ez idő alatt nem küldenek üzenetet. Ha t elfogadja, akkor visszaküld egy CTS üzenetet. Ezen időben t szomszédai nem küldenek. Az s állomás elküldi az adatokat a t állomásnak, és t megerősíti ezt egy ACK-val. Ez idő alatt s és t szomszédai nem küldenek.



2. ábra. Az s állomás t-nek küld. Mialatt t küld egy ACK-t, s és t egyik szomszédja sem küld. Ha s és t egymással kommunikálnak, egyik $\times$-tel jelölt összeköttetés sem használható. A vastag élek egy feszített párosítást képeznek.

Az egyszerre történő átvitelek számának maximalizálása a FESZÍTETT PÁROSÍTÁS (lásd 8.2. fejezet) problémával modellezhető. Konstruálunk egy $G = (V, E)$ gráfot, ahol a csúcsok a küldőknek felelnek meg, és minden küldőnek van egy hatótávolsága. Két csúcs össze van kötve egymással, ha hatótávolságaik fedésben vannak.

Ha két állomás adatokat küld egymásnak, akkor azon szomszédaik is hallják a CTS üzenetet, amelyek a hatótávolságaikon belül vannnak, és ezért nem tudnak egymással egy időben kommunikálni. Ez azt jelenti a gráfban, hogy a kiválasztott élek nincsenek közvetlenül, egy éllel összekötve egymással.

A FESZÍTETT PÁROSÍTÁS probléma megoldható F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-sal úgy, hogy az adott G gráfhoz konfliktuspároknak a következő halmazát definiáljuk: $F = \{\{e, e'\} | e, e' \in E$ és van egy e-vel és e'-vel is szomszédos f él E-ben$\}$.

3. Bonyolultságelmélet

1965-ben J. Edmonds [7] amellett érvelt, hogy a polinomiális időben megoldhatóság egy jó megfogalmazás a hatékony kiszámíthatóságra. Azt írta, hogy sok probléma polinomiális időben megoldható egy determinisztikus algoritmussal, de néhányuk a bemenet méretének nem lineáris, hanem négyzetes vagy köbös idejében oldható meg. A munkája a P és NP bonyolultsági osztályok definícióján alapul. Ezen osztályok olyan problémákat tartalmaznak, amelyek polinomiális időben egy determinisztikus, illetve egy nemdeterminisztikus eljárással megoldhatóak[8]. Emellett a tanulmány alapkérdése, amely a kiszámítható problémáknál fordul elő az, hogy az adott problémát meg tudjuk-e oldani egy olyan algoritmussal, amelynek legrosszabb futási ideje a bemenet méretének polinomja.

1971-ben és 1973-ban S. A. Cook [4] és L. A. Levin [20] önállóan dolgoztak ki egy koncepciót az NP-nehézségre, és megmutatták NP-nehéz problémák létezését. Munkájuk nagy segítséget jelent ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy néhány probléma számítógépekkel kezelhetetlen. R. M. Karp után [16] M. R. Garey és D. S. Johnson az 1970-es években definiálták az NP-nehéz problémákat [12]. Azóta ezek a problémák újra és újra előkerülnek, és a kutatók számos módszert fejlesztenek azért, hogy ezekkel könnyebb legyen bánni. Az utóbbi két évtizedben a paraméteres bonyolultságelmélet bebizonyította, hogy találhatók hatékony algoritmusok az NP-nehéz problémákra is.

II. rész

Definíciók és jelölések

4. Gráfelmélet

Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf a $V(G)$ csúcsok halmazából és az $E(G)$ élek halmazából áll. Mint szokásos, $|V(G)|$-t n-nel és $|E(G)|$-t m-mel jelöljük.

4.1. Definíció (Konfliktuspárok)**.** *Konfliktuspároknak* nevezzük azokat az $F \subseteq E \times E$ élpárokat, melyekre igaz, hogy egy F-kizáró párosításban a konfliktuspárokból legfeljebb csak az egyik él szerepelhet.

4.2. Definíció (Diszjunkt konfliktuspárok)**.** *Diszjunktnak* nevezzük a konfliktuspárokat, ha az egyes konfliktuspároknak nincs közös élük.

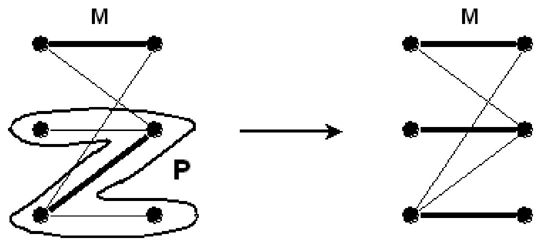
4.3. Definíció (Erősen diszjunkt konfliktuspárok)**.** *Erősen diszjunktnak* nevezzük a konfliktuspárokat, ha az egyes konfliktuspároknak nincs közös élük, és az éleiknek nincs közös végpontjuk.

4.4. Definíció (Páros gráf)**.** Egy $G = (V, E)$ gráfot *páros gráfnak* nevezünk, ha a G pontjainak $V(G)$ halmaza két részre, A és B halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja A-ban, másik végpontja B-ben van.

4.5. Definíció (Szomszédság, fokszám, maximális fokszám)**.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy v csúcs *szomszédjainak* halmazát $N(v)$-vel jelöljük. Egy pontra illeszkedő élek száma a pont *fokszáma.* A v pont fokszámát $d(v)$-vel jelöljük. A $\Delta(G) = max\{d(v)|v \in V\}$ fokszám a G gráf *maximális fokszáma.*

5. Párosítások páros gráfokban

Ahhoz, hogy megtaláljunk egy maximális párosítást, néhány fogalomra lesz szükségünk. Legyen $G = (V, E)$ egy páros gráf és M egy tetszőleges párosítás G-ben. Egy $P = v_1, v_2, \ldots, v_t$ utat *alternáló útnak* nevezünk M-re nézve, ha P felváltva tartalmaz M-beli illetve $E \setminus M$-beli éleket. *Fedetlen csúcsoknak* hívjuk az olyan csúcsokat, amelyekre nem illeszkednek M-beli élek. Az olyan P alternáló utat, amely az egyik csúcshalmaz egy fedetlen csúcsában kezdődik, és a másik halmaz egy fedetlen csúcsában végződik, *javító* *útnak* nevezünk M-re nézve. Látható, hogy egy párosítás egy javító út mentén úgy javítható, hogy a P úton található M-beli éleket kivesszük M-ből, a nem M-belieket pedig bevesszük M-be. Ezt az eljárást a következő tételekben javítóút-módszernek hívjuk. Ezt a folyamatot a következő ábra mutatja be egy példán keresztül.



3. ábra. Az M párosítás javítása egy javító út mentén.

Ezen definíciók segítségével bizonyítható Berge következő tétele (1957):

5.1. Tétel. *(Berge, 1957) Legyen M egy párosítás a G gráfban. Az M párosítás akkor és csak akkor maximális párosítás, ha G-ben nincs alternáló út M-hez.*

A következő állításhoz bevezetjük még a lefogó ponthalmaz fogalmát. Ez a gráf csúcsainak egy olyan részhalmaza, amely G minden élének legalább egyik végpontját tartalmazza.

A maximális párosítás és minimális lefogás feladatok primál-duál kapcsolatát[1] a Kőnig-tétel fogalmazza meg. Ez azt jelenti, hogy egy minimális lefogó ponthalmaz található egy maximális párosítás segítségével.

5.2. Tétel. *(Kőnig, 1931) Egy G páros gráfban a maximális párosítás elemszáma megegyeik az éleket lefogó pontok minimális elemszámával.*

A javítóút-módszer segítségével megfogalmazhatunk egy algoritmust, egy maximális párosítás megtalálására. Ez az algoritmus a lineáris optimalizálás egy speciális esete, a hatékony ($O(n^3)$ nagyságrendű) algoritmusok közé tartozik. A módszert Kőnig Dénes és Egerváry Jenő magyar matematikusok dolgozták ki, és H. W. Kuhn [19] nevezte először „magyar módszernek”.

Az algoritmus a következőképpen fut:

[1] Minden lineáris programozási problémához létezik egy második, duális probléma. A maximalizációs probléma egy megengedett megoldás célfüggvényértéke kisebb vagy egyenlő a hozzá tartozó minimalizációs probléma egy megengedett megoldásának célfüggvényértékével.

procedure Párosítás
begin
  FedetlenA:= A [Fedetlen csúcsok A-ban]
  FedetlenB:= B [Fedetlen csúcsok B-ben]
  while létezik egy javító út FedetlenA-ból FedetlenB-be a G gráfban **do**
    Keressünk egy P javító utat G-ben egy fedetlen $s \in A$ csúcsból
        egy fedetlen $t \in B$ csúcsba
    Javítás P mentén
    Kivesz s-t FedetlenA-ból;
    Kivesz t-t FedetlenB-ből;
  wend
end.

Javító utat kereshetünk szélességi kereséssel, amelyben minden FedetlenA-beli pontot kezdőcsúcsnak tekintünk. Minden javító út mentén történő javítás eggyel növeli a párosítás méretét (amely kezdetben 0). Tehát legfeljebb $min\{|A|, |B|\} = O(n)$ javítás lehet, és egy javítás megvalósítható $O(n + m)$ időben. Így az algoritmus teljes műveletigénye $O(n(n + m))$.

Egy gyorsabb algoritmust 1971-ben J. E. Hopcroft és R. M. Karp amerikai kutatók dolgoztak ki [22]. Ezzel az eljárással elérhető egy $O(m\sqrt{n})$ futásidő.

Ezzel befejeztük a párosítások elméleti bevezetését. A következő részben a paraméteres bonyolultságelmélettel fogunk foglalkozni.

6. Paraméteres problémák

Ebben a fejezetben rövid bevezetést adunk a paraméteres bonyolultságelméletbe, amely ennek a munkának a kutatási módszere. Részletes információkat R. G. Downey és M. R. Fellows [6] könyvében találhatunk ezzel kapcsolatban.

6.1. Definíció. Legyen Σ egy véges ábécé. Egy *paraméteres probléma* egy $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ nyelv. A probléma második komponensét paraméternek nevezzük.

Ebben a dolgozatban általában egy pozitív egész számot választunk paraméterként. Ezért írhatunk legtöbbször $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$-t $L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ helyett.

6.2. Definíció. Egy paraméteres probléma *rögzített paraméterrel kezelhető* (angolul fixed - parameter tractable), ha létezik egy olyan algoritmus, amely minden $I = (x, k)$ problémapéldányra $f(k) \cdot n^c$ futási időben eldönti, $n := |(x, k)|$-ra, hogy $(x, k) \in L$ teljesül-e. Itt c egy konstans, és f egy kiszámítható függvény, amely csak k-tól függ. A rögzített paraméterrel kezelhető problémákat és azok halmazát FPT-nek nevezzük.

Egy FPT algoritmus előnye az, hogy a futási idő a bemenet méretétől csak polinomiálisan függ, és a probléma nehézsége lényegében az $f(k)$ faktorban jelenik meg, amely pedig csak a k paramétertől függ. Ezt a paramétert úgy definiáljuk, hogy várhatóan kicsi legyen.

A paraméteres bonyolultságelmélet általános célja az, hogy valamely paraméteres problémához találjunk FPT algoritmust. Ezen algoritmusok utáni kutatás céljából sok módszert vezettek be, amelyek paraméteres és klasszikus algoritmusokat is használnak. Például korlátos keresőfa-módszerek, kernelizáció, gráfminor-módszer, favastagságon alapuló technikák és még mások. Másrészt a paraméteres bonyolultságelmélet egy nehézségelméletet is alkalmaz, amely azt mutatja meg, hogy egyes paraméteres problémák valószínűleg nem FPT-ben vannak. A klasszikus bonyolultságelméletbeli NP-nehézséghez hasonlóan vannak $W[1]$-nehéz problémák, melyeket a paraméterezéssel együtt is nehéznek tartunk. A következő szakaszban ezeket a módszereket tárgyaljuk részletesebben.

Egy másik lehetőség egy FPT-beli probléma megoldására az, hogy az adott példányhoz kiszámítunk egy problémakernelt. Ez egy kisebb ekvivalens problémapéldányt jelent, amelynek mérete csak a paramétertől függ.

6.3. Definíció. Egy X paraméteres eldöntési problémának van *problémakernelje*, ha létezik egy olyan polinomiális idejű algoritmus, amely az (I, k) bemenetre, ahol k a paraméter, kiszámít egy (I', k') kimenetet úgy, hogy a következők teljesüljenek:

- $(I, k) \in X \leftrightarrow (I', k') \in X$
- $|I'| \leq f(k)$, ahol f egy függvény, amely csak k-tól függ, és
- $k' \leq k$.

Az algoritmust, amely egy adott problémapéldányra kiszámít egy problémakernelt, *kernelizációnak* nevezzük.

Ismert állítás, hogy pontosan akkor létezik problémakernel az X problémára a k paraméter mellett, ha létezik k-val paraméterezett FPT-algoritmus X-re.

6.1. Paraméteres bonyolultságelmélet

Ebben a fejezetben a paraméteres bonyolultságelmélet nehézségelméletét mutatjuk be. R. G. Downey és M. R. Fellows [6] megmutatták a könyvükben, hogy sok problémára nincs FPT-algoritmus. A rögzített paraméterrel kezelhetetlenség elmélete (angolul fixed - parameter intractability) hasonlít a klasszikus bonyolultságelméletben már megismert NP-nehézségre. Egy fontos fogalom a paraméteres visszavezetés, amely hasonló, mint az ismert polinomiális (many-one) visszavezetés az NP-nehézség definíciójában.

6.4. Definíció. Legyen $L, L' \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ két paraméteres probléma. Egy *paraméteres visszavezetés* L-ről L'-re egy olyan függvény, amely az (x, k) példányból $f(k) \cdot n^c$ időben egy (x', k') példányt számít ki úgy, hogy

1. k' csak k-tól függ, és
2. $(x, k) \in L \leftrightarrow (x', k') \in L'$.

Itt c konstans és f kiszámítható függvény, amely csak k-tól függ.

Ezen fogalmak segítségével definiálhatjuk a $W[1]$-nehéz problémák osztályát. Azt mondjuk, hogy egy paraméteres L nyelv $W[1]$-nehéz, ha létezik egy paraméteres visszavezetés a RÖVID TURING-GÉP ELFOGADÁS problémáról, ahol az a kérdés, hogy egy adott nemdeterminisztikus Turing-gép az adott szót k lépésben elfogadja-e, ahol k a paraméter. A sejtés, hogy $FPT \neq W[1]$, analóg azzal a sejtéssel, hogy $P \neq NP$. Ez egy erős érv amellett, hogy miért nem létezik olyan algoritmus a $W[1]$-nehéz problémákra a k paraméter mellett, amely $f(k) \cdot n^c$ időben kiszámít egy megoldást [6].

Ha meg akarjuk mutatni, hogy egy Q probléma $W[1]$-nehéz a k paraméterrel, akkor elég egy paraméteres visszavezetést adni egy $W[1]$-nehéz problémáról a (Q, k)-ra. A FÜGGETLEN PONTHALMAZ probléma példa egy $W[1]$-nehéz problémára (amely $W[1]$-teljes is).

6.5. Definíció (FÜGGETLEN PONTHALMAZ)**.**

> **Bemenet:** Egy $G = (V, E)$ gráf, és egy k pozitív egész szám.
>
> **Kérdés:** Van olyan k méretű $I \subseteq V(G)$ halmaz úgy, hogy az I-beli csúcsok között nincs él G-ben?

Később mutatunk egy paraméteres visszavezetést a FÜGGETLEN PONTHALMAZ-ról az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-ra, ahol a paraméter a párosítás mérete lesz.

A KLIKK és FÜGGETLEN PONTHALMAZ közötti kapcsolat miatt a KLIKK probléma $W[1]$-nehézsége is belátható [27].

6.6. Definíció (KLIKK).

Bemenet: Egy $G = (V, E)$ gráf, és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: Keressünk egy $C \subseteq V(G)$ részhalmazt k pontból úgy, hogy C egy klikket (teljes részgráfot) képez G-ben.

6.2. Paraméterválasztás

Több lehetőségünk is van egy probléma paraméterezésére. A paraméter lehet például a bemenet egy olyan tulajdonsága, amelynek fontos hatása van a problémánk nehézségére. Ebben a dolgozatban a paraméterezés néhány típusát fogjuk prezentálni.

Az egyik leggyakrabban használt paraméterezés az optimalizálási probléma úgynevezett standard paraméterezése. Adott egy Q optimalizálási probléma egy T célfüggvénnyel. Ha ezt a függvényt maximalizálnunk kell, Q-t egy eldöntési problémává alakíthatjuk át, amelyben Q egy I bemenete és egy k pozitív egész szám mellett azt kérdezzük, hogy van-e egy S lehetséges megoldás I-re úgy, hogy $T(S) \geq k$. Ebben az esetben k-t tekintjük paraméternek. Ezt a paraméterezést akkor használjuk, amikor egy k méretű F-kizáró párosítást keresünk az adott gráfban.

Egy másik példa a paraméter választására, ha a probléma azon tulajdonságait vizsgáljuk meg, amelyeknek fontos hatásuk van a probléma nehézségére, mint például az adott gráf favastagsága. Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma esetén már az NP-nehézségi bizonyításunkból következik, hogy nem létezhet FPT algoritmus ezzel a paraméterrel. Ezt a paramétert ω-val jelöljük.

Egy további lehetséges paraméterezés egy olyan paraméter definiálása az adott példányhoz, amely egy triviálisan megoldható esettől vett távolságot fejez ki. Ez a paraméterezés megfelel azoknak a várakozásoknak, hogy a kezelhető példányoknak közelnek kell lennie a probléma néhány egyszerű esetéhez. A párosítás probléma lineáris időben megoldható, de az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma, amelyben már konfliktuspárokat is definiálunk, NP-nehéz. Az tehát fontos, hogy hány konfliktuspár van a gráfban, ezért paraméterezhető a probléma a konfliktuspárok számával, amelyet f-fel jelölünk.

6.3. Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS paraméteres bonyolultságelméleti eredményei

Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS problémát az f, k és ω paraméterekkel vizsgáltuk, ahol f a konfliktuspárok száma, k a párosítás mérete és ω a favastagság.

A probléma egy keresőfa-algoritmussal $O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$ időben megoldható az f paraméter mellett. Amennyiben a paraméter a párosítás mérete, a probléma $W[1]$-nehéz, de ha a gráf csak diszjunkt konfliktuspárokat tartalmaz, a probléma már FPT lesz ugyanezzel a k paraméterrel. Adható egy lineáris problémakernel is, amelynek mérete csak az f és k paraméterektől függ. Ezen kívül megjegyezzük, hogy a probléma NP-teljes már fákon is, és ebből következik, hogy a bemeneti gráf favastagságával paraméterezve már nem lehet rögzített paraméterrel kezelhető.

7. Algoritmikus módszerek

7.1. Keresőfa

Gyakran használunk keresőfa-algoritmusokat, melyek exponenciális időben találnak egy optimális megoldást. A módszer lényege, hogy minden megoldást szisztematikusan megvizsgálunk. A megoldások vizsgálatát egy faformába lehet szervezni. Az FPT algoritmusokkal való összefüggés az, hogy ennek a keresőfának a szélessége és mélysége egy olyan függvénnyel korlátozható, amely a paraméter értékétől függ.

A paraméteres algoritmusoknál az alapötlet az, hogy polinomiális időben a bemeneti példány egy „kis részhalmazát" úgy találjuk meg, hogy ennek a halmaznak legalább az egyik eleme az optimális megoldás részét képezi.

Például a LEFOGÓ PONTHALMAZ-nál – ahol egy legkisebb olyan csúcshalmazt keressük, amely a gráf minden élét lefedi – ezt a „kis részhalmazt" úgy választjuk ki, mint egy kételemű részhalmaz, amely egy él két végpontjából áll. Mivel az él egyik végpontjának mindenképpen szerepelnie kell a megoldásban, egy $O(2^k)$ méretű keresőfát kapunk, ahol a k paraméter az optimális megoldás méretét jelöli.

7.2. Fafelbontás

Néhány nehéz probléma egyszerűen megoldható lesz, ha bemenetként egy fa adott. Például a már említett LEFOGÓ PONTHALMAZ probléma polinomiális időben megoldható fákon: a leveleknél kezdjük, és egy egyszerű „bottom-up" módszert alkalmazva a gyökér felé tartunk a fában, és a szükséges csúcsokat belevesszük a megoldásba. A központi kérdés tehát: hogyan lehet „fához hasonló" egy adott gráf?

A gráfok fafelbontásának fogalmát N. Robertson és P. D. Seymour vezette be húsz éve. A fafelbontás manapság fontos szerepet játszik az algoritmikus gráfelméletben.

Először definiáljuk a fafelbontást, azután egy példán keresztül szemléltetjük a definíciót.

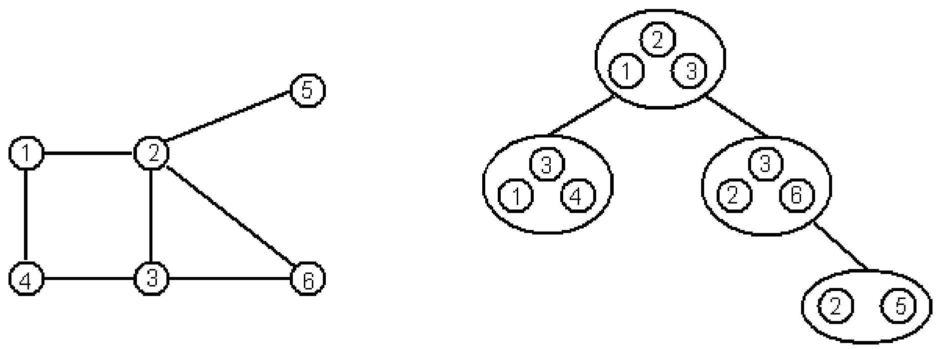
7.1. Definíció. Legyen G egy gráf, legyen T egy fa, melynek csúcsai az I elemei, ahol I egy $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz, és $\nu = (X_i)_{i \in I}$ az $X_i \subseteq V(G)$ csúcshalmazok egy családja, amelyeket zsákoknak nevezünk. A (T, ν) párt egy G egy *fafelbontásának* nevezzük, ha a következő három feltétel teljesül:

(T1) $V(G) = \cup_{i \in I} X_i$;

(T2) G minden e éléhez létezik egy $i \in I$ úgy, hogy X_i az e él mindkét végpontját tartalmazza;

(T3) minden $i, j, k \in I$-re, ha j az i és k között található úton van T-ben, akkor $X_i \cap X_k \subseteq X_j$ mindig teljesül.

A (T, ν) szélessége $max\{|X_i||i \in I\} - 1$. A G gráf favastagsága a legkisebb k szám, melyre G-nek van k szélességű fafelbontása.



4. ábra. Az ábrán egy adott gráf fafelbontása látható. A favastagság ebben az esetben kettő.

7.3. Lokális keresés

Legyen Q egy maximalizálási probléma a T célfüggvénnyel. Tegyük fel, hogy a $d(S_1, S_2)$ távolságok definiáltak minden (S_1, S_2) párra, amelyek Q valamely I példányának megoldásai. A távolságfüggvényt felhasználva azt mondhatjuk, hogy egy S_1 megoldás ℓ-közel van az S_2 megoldáshoz, ha $d(S_1, S_2) \leq \ell$. Ebben a dolgozatban egy lokális keresési algoritmus feladatát definiáljuk, amelyet [23]-ban vezettek be.
A lokális keresési algoritmus definíciója Q-ra a következő:

7.2. Definíció (LOKÁLIS KERESÉS).

Bemenet: (I, S_0, ℓ), ahol I a Q probléma egy példánya, S_0 egy megoldás I-re és $\ell \in \mathbb{N}$.

Feladat: Találjunk egy S megoldást I-re úgy, hogy $d(S, S_0) \leq \ell$ és $T(S) > T(S_0)$.

8. Általánosított párosítási problémák

Ebben a fejezetben néhány párosítási problémát fogunk bemutatni. Ha a párosítás feladatához hozzáveszünk néhány kiegészítő feltételt, speciális párosítási problémákat kapunk, amelyek többnyire NP-teljesek.

8.1. F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS

Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS a párosítási probléma egyik variációja. Az már régóta ismert, hogy a probléma NP-teljes [12].

Több paraméterrel paraméterezhető. Ebben a dolgozatban a konfliktuspárok számával, a párosítás méretével és a favastagsággal paraméterezve vizsgáljuk meg.

8.1. Definíció (F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS).

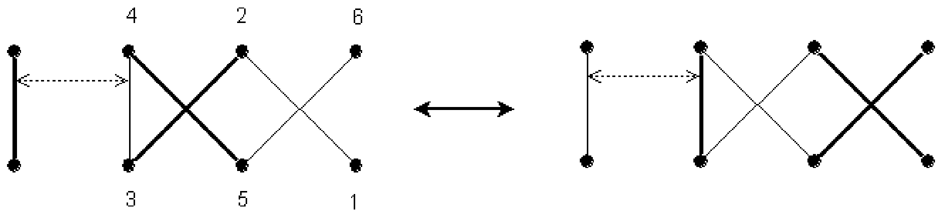
Bemenet: Egy $G = (V, E)$ gráf, $F \subseteq E \times E$ konfliktuspárok halmaza, és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: Létezik-e olyan k méretű $E' \subseteq E$ párosítás, amely legfeljebb egy élt tartalmaz minden F-beli konfliktuspárból, azaz $|E' \cap \{e_i, e_j\}| \leq 1$ minden $\{e_i, e_j\} \in F$-re?

8.1.1. Klasszikus párosítással való összehasonlítás

Egy maximális párosítás egy páros gráfban meghatározható a magyar módszerrel (lásd 5. fejezet). Ezen módszer során addig veszünk a párosításba független éleket, ameddig lehetséges, majd javító utak mentén addig javítjuk a párosítást, amíg el nem érjük a maximális méretet.

Ha a 5. ábrán vastagítással megjelölt élek szerepelnek a párosításban, egy javító utat lehetne találni az 1,2,3,4,5,6 csúcsok mentén, de a konfliktuspárok miatt ezen út mentén nem lehet javítani. Ha a párosítást ezen út mentén javítanánk, az adott konfliktuspár mindkét éle szerepelne a megoldásban, ami itt nem megengedett. Az algoritmus után kapunk egy 3 méretű megoldást, de a maximális F-kizáró párosítás mérete 4 lenne.



5. ábra. Egy tetszőleges F-kizáró párosítás egy konfliktuspár élén áthaladó javító út mentén nem javítható.

8.1.2. TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS

A TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS egy speciális változata, ahol a gráf minden csúcsa szerepel a párosításban.

8.2. Definíció (TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS)**.**

Bemenet: Egy $G = (V, E)$ páros gráf és $F \subseteq E \times E$ élpárok halmaza.

Kérdés: Létezik-e olyan M párosítás, amely minden F-beli párból legfeljebb egy élt tartalmaz úgy, hogy a gráf minden csúcsa pontosan egy M-beli él által van lefedve, azaz $|M| = |V|/2$?

8.2. FESZÍTETT PÁROSÍTÁS

8.3. Definíció (FESZÍTETT PÁROSÍTÁS)**.**

Bemenet: Egy $G = (V, E)$ gráf és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: Létezik-e legalább k méretű $E' \subseteq E$ élhalmaz úgy, hogy E' párosítás és E' semelyik két éle nincs összekötve E-beli éllel?

A FESZÍTETT PÁROSÍTÁS problémát a maximális párosítási feladat egy változataként vezették be, amelyet Stockmeyer és Vazirani [30] munkája is motivált. A problémát a utóbbi években intenzíven kutatták. Az ismert, hogy már legfeljebb 4 fokú síkbarajzolható gráfokon [18] és páros gráfokon [2] is NP-teljes, de például fákon lineáris időben megoldható [31].

Ismertetünk még néhány paraméteres eredményt a FESZÍTETT PÁROSÍTÁS problémával kapcsolatosan. A probléma $W[1]$-nehéz (ahol a párosítás mérete a paraméter) általános gráfokon [26], ezért valószínűtlen, hogy FPT-ben lenne. Emiatt ésszerű a probléma paraméteres bonyolultságát olyan korlátozott gráfosztályokon megvizsgálni, amelyeken NP-teljes. Nemrég Moser és Sidkar [26] megmutatták, hogy a paraméteres FESZÍTETT PÁROSÍTÁS-nak síkgráfokon lineáris kernel adható, de egy, a kernelméretben előforduló konstans tényező határozatlan marad. Az ő eredményükből következik, hogy a probléma FPT-ben van síkgráfok esetén.

8.3. 3-HALMAZ PAKOLÁS, M-HALMAZ PAKOLÁS

A HALMAZ PAKOLÁS klasszikus NP-teljes probléma [12], amelyben diszjunkt halmazokat szeretnénk kiválasztani több halmaz közül. Ez a probléma is fontos szerepet játszik a dolgozatban, hiszen a párosítási problémákkal való hasonlóság könnyen látható. Számunkra az M-HALMAZ PAKOLÁS probléma és a 3-HALMAZ PAKOLÁS probléma érdekes.

8.4. Definíció (M-HALMAZ PAKOLÁS)**.**

Bemenet: Egy C halmaz m-elemű részhalmazai egy S alaphalmazon, valamint egy k pozitív egész szám.

Kérdés: Létezik-e olyan legalább k méretű $C' \subseteq C$ részhalmaz, amelynek elemei páronként diszjunktak?

A 3-HALMAZ PAKOLÁS probléma abban különbözik csak az M-HALMAZ PAKOLÁS-től, hogy a bementként kapott C halmaz háromelemű halmazokból áll. A bonyolultságelméletben a pakolási problémák az NP-nehéz problémák egy fontos osztályát alkotják, amelyeket az ütemezésnél (scheduling) és a kódoptimalizálásnál használnak.

R. G. Downey és M. R. Fellows [6] bizonyították, hogy a 3-HALMAZ PAKOLÁS FPT-ben van. A futási időt folyamatosan javították, és így Y. Liu, S. Lu, J. Chen és S. Sze [21] egy $O(4,61^{3k}n^{O(1)})$ futási idejű determinisztikus algoritmust adott a problémára, amely a mohó algoritmuson és a color-codingon alapszik.

Valamint a [15] cikkben megmutatták, hogy m-mel paraméterezve az M-HALMAZ PAKOLÁS probléma is FPT-ben van.

8.4. FELELETVÁLASZTÓS PÁROSÍTÁS

A párosítási probléma egy érdekes esete a FELELETVÁLASZTÓS VÁLASZTÓ PÁROSÍTÁS vagy MULTIPLE CHOICE MATCHING (MCM) [12]:

8.5. Definíció (FELELETVÁLASZTÓS VÁLASZTÓ PÁROSÍTÁS).

Bemenet: Egy $G = (V, E)$ gráf, $E_1, E_2, \ldots, E_J \subseteq E$ diszjunkt halmazok és egy k pozitív egész szám.

Kérdés: Létezik-e egy legalább k méretű $E' \subseteq E$ halmaz úgy, hogy E' a G gráfban egy párosítás és minden E_i, $1 \leq i \leq J$ halmazból legfeljebb csak egy élt tartalmaz?

Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-ben definiált kritikus eset, azaz ha a konfliktuspárok diszjunktak és w egy konstans függvény, a FELELETVÁLASZTÓS VÁLASZTÓ PÁROSÍTÁS egyik speciális esete, amikor is $|E_i| = 2$ minden $1 \leq i \leq J$-re. A kritikus esetben egy $|V|/2$ méretű párosítás választható ki a $K_{n,n}(n \geq 3)$ teljes páros gráfokban. Ezen kívül a FELELETVÁLASZTÓS VÁLASZTÓ PÁROSÍTÁS NP-teljes teljes páros gráfokon, ha $k = |V|/2$ és az E_i $(i = 1, 2, \ldots, J)$-re halmazoknak korlátlan méretűek [3].

8.5. Általánosított párosítási problémák

Problémák	**Bonyolultság**	**Paraméteres bonyolultság**
Párosítás	Polinomiális [22]	-
F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS	NP-teljes [12]	FPT f esetén, W[1]-nehéz k esetén, ahol f a konfliktuspárok száma, k a párosítás mérete (10.1. és 10.2. tétel)
FESZÍTETT PÁROSÍTÁS	NP-teljes [12]	W[1]-nehéz általános gráfokban, FPT síkgráfokban [26]
3-HALMAZ PAKOLÁS	NP-teljes [12]	FPT k esetén, ahol k a keresendő diszjunkt halmazok száma [6]
M-HALMAZ PAKOLÁS	NP-teljes [12]	FPT (m, k) esetén, ahol m egy halmaz számossága, k pedig a keresendő diszjunkt halmazok száma [15]
MCM	NP-teljes [12]	?

1. táblázat. A klasszikus párosítás összehasonlítása az említett általánosított párosítási problémákkal.

III. rész

Bonyolultságelméleti eredmények

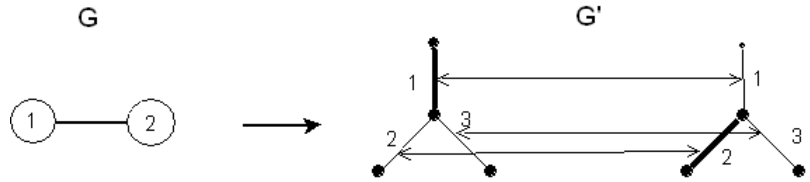
9. Klasszikus bonyolultságelméleti eredmények

Az F-kizáró párosítás jól ismert NP-teljes probléma, már a Garey-Johnson könyvben is szerepel [12]. A 9.1. fejezetben megmutatjuk, hogy az F-kizáró párosítás és a teljes F-kizáró párosítás már diszjunkt konfliktuspárok esetén és konstans favastagságú gráfokon is NP-teljes. Ezután a 9.2. fejezetben láthatjuk azt is, hogy az F-kizáró párosítás probléma erősen diszjunkt konfliktuspárok esetén már fákon is NP-teljes.

9.1. F-kizáró párosítás NP-teljes konstans favastagságú gráfokon

A 3-színezés problémát vezetjük vissza az F-kizáró párosítás problémára, ahol a 3-színezés probléma azt vizsgálja, hogy egy gráf csúcsai kiszínezhetők-e úgy három színnel, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek. Adott tehát egy G gráf mint egy 3-színezés példány, és konstruáljunk a következőképpen egy (G, F, k) F-kizáró párosítás példányt.

Minden csúcshoz konstruálunk egy komponenst. Egy komponens négy csúcsból és három élből áll. A három él az $(\{1, 2, 3\})$ színeknek felelnek meg. Ha az eredeti gráfban két csúcs össze van kötve, akkor az $\{1, 1\}$, $\{2, 2\}$ és $\{3, 3\}$ konfliktuspárokat definiáljuk a megfelelő komponensek között (lásd 6. ábra). Ezen kívül legyen $k := |V(G)|$.



6. ábra. 3-színezés visszavezetése az F-kizáró párosítás-ra

9.1. Lemma. Odd Matching *NP-teljes konstans favastagságú gráfokon.*

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy a G gráf akkor és csak akkor 3-színezhető, ha (G', F, k) egy igen-példány.

⇒ Ha egy csúcshoz az 1-es szín van rendelve az eredeti G gráfban, akkor G'-ben a megfelelő komponens 1-es éle kerül a párosításba. Mivel a szomszéd csúcsok a G gráfban különböző színűek, a G' gráfnak azon éleit választjuk ki, amelyek nem állnak konfliktusban egymással, így minden komponensből csak egy élt választunk ki. Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott élek egy k méretű F-kizáró párosítást alkotnak.

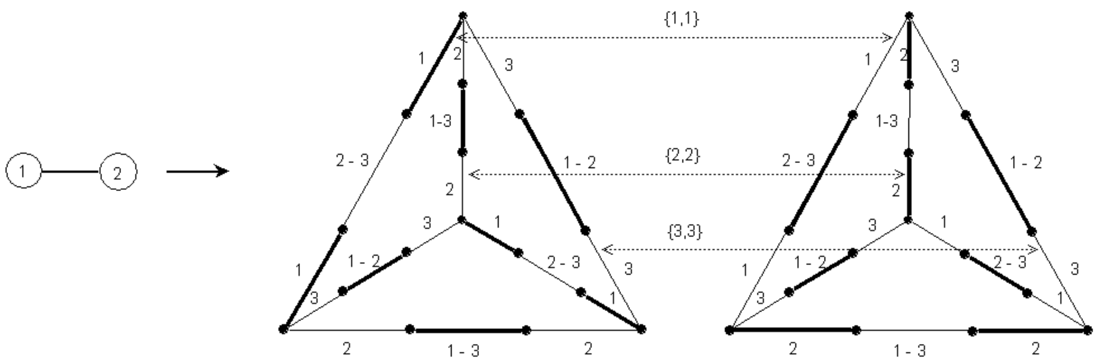
⇐ Egy legnagyobb F-kizáró párosítás a G' gráfban minden komponensből legfeljebb csak egy élt tartalmazhat. Ezek az élek nem állnak konfliktusban egymással, tehát a megfelelő szomszéd csúcsoknak különböző színei vannak az eredeti G gráfban. □

Megjegyzések:

- A konfliktuspárok nem diszjunktak.
- A komponensek favastagsága egy.

Most pedig azt mutatjuk meg, hogy a TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma (lásd 8.1.2. fejezet) is NP-teljes konstans favastágságú gráfokon.

A már korábban leírt konstrukciót úgy módosítjuk, hogy a komponenseket a következő gráffal helyettesítjük: vegyünk egy 4 csúcsú teljes gráfot úgy, hogy a gráf minden élét 2 csúccsal még felosztjuk (lásd a 7. ábrát). Ebben a gráfban 3 teljes párosítás található, és ezen párosítások éleit jelöljük rendre 1-gyel, 2-vel és 3-mal. (Egy élhez két szám is lehet rendelve.) Ha két csúcs össze van kötve az eredeti gráfban, akkor három kofliktuspárt definiálunk. Olyan konfliktuspárokat definiálunk, hogy minden pár mindkét éle vagy 1-es, vagy 2-es vagy 3-as (de csak egy címkével). Ha az eredeti gráf maximális fokszáma ≤ 4, akkor ez megtehető úgy, hogy a párok diszjunktak legyenek.



7. ábra. 3-SZÍNEZÉS visszavezetése az TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-re. A vastag élek egy teljes F-kizáró párosítást alkotnak.

A 9.1. lemmához hasonlóan belátható, hogy a TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS NP-teljes konstans favastágságú gráfokon. (Ebben az esetben minden komponensnek három a favastagsága.) A bizonyításhoz a következő állítást használjuk, amely a 9.1. lemmával analóg módon igazolható.

9.2. Állítás. *Az eredeti gráf akkor és csak akkor 3-színezhető, ha a fenti konstrukció gráfjában van egy $8n$ méretű F-kizáró párosítás, ahol n az eredeti gráf csúcsszáma.*

Ezzel az eljárással akkor tudunk diszjunkt konfliktuspárokat definiálni, amíg az eredeti gráf maximális fokszám 4. Mivel a 3-SZÍNEZÉS olyan gráfokra is NP-teljes, amelyeknek maximális fokszám 4 [11], ebből az következik, hogy az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS és a TELJES F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS NP-teljes diszjunkt konfliktuspárok esetén a favastagsággal paraméterezve.

9.2. F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS NP-teljes erősen diszjunkt párok esetén fákon

Megmutatjuk, hogy az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS erősen diszjunkt párok esetén is NP-teljes, még abban a speciális esetben is, ha a gráf egy erdő. Az NP-teljes 3SAT problémát [12] vezetjük vissza az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS problémára.

A 9.2.1 fejezetben egy G páros gráf konstrukcióját írjuk le egy adott $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ 3SAT példányhoz (minden $i = 1, 2, \ldots, k$-ra C_i egy klóz), majd a 9.2.2. fejezetben megmutatjuk ennek helyességét.

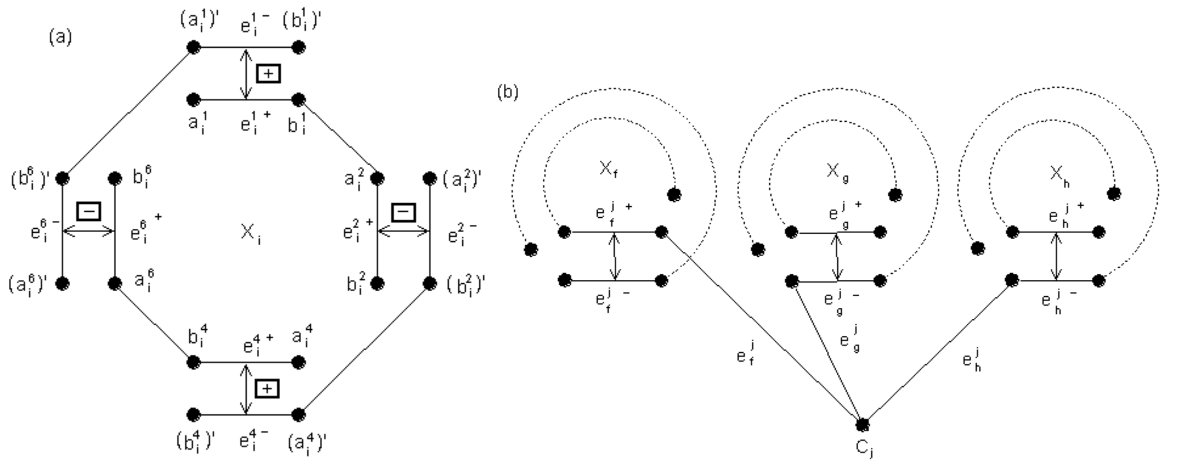
A 3SAT probléma a következőképpen definiált:

Bemenet: Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bool-változók, és $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ egy konjuktiv normálforma, amelyben minden $i = 1, \ldots, m$-re C_i egy 3 literált tartalmazó klóz, ahol egy literál egy változót vagy annak negáltját jelenti.

Kérdés: Létezik-e olyan értékadás, amely kielégíti a C formulát?

9.2.1. Konstrukció

Legyenek $C_j = (q_j^1 \vee q_j^2 \vee q_j^3)$, $j = 1, \ldots, m$ a klózok az $x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, \ldots, x_n, \overline{x_n}$ literálokkal. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az x_i és $\overline{x_i}$ literálok száma egyenlő. Ha nem ez az eset áll fenn, akkor annyi $(x_l \vee x_l \vee \overline{x_l})$ vagy $(x_l \vee \overline{x_l} \vee \overline{x_l})$ klózt veszünk a formulához, amennyi szükséges. Legyen m' az így kapott klózok (összes) száma. Mivel klózonként legfeljebb három kiegészítő klózra van szükség, ezért $m' \leq 4m$. Konstruáljunk



8. ábra. Az (a) ábrán egy X_i csúcskomponenst szemléltetünk. Látható, hogy az x_i literál a C_1 és C_4 klózokban, az $\overline{x_i}$ literál pedig a C_2 és C_6 klózokban fordul elő. A (b) ábrán a $C_j = (\overline{x_f} \vee x_g \vee x_h)$ klóz literáljaihoz tartozó modulok láthatóak, valamint a klózcsúcs a modulokhoz húzott élekkel.

egy $G = (V, E)$ gráfot a következőképpen: minden x_i változóhoz egy X_i csúcskomponens tartozik, amely annyi konfliktuspárból áll, ahányszor x_i előfordul a formulában. Ha egy x_i változó a C_j klózban előfordul, konstruálunk egy konfliktuspárt, úgynevezett $M_i^j = \{a_i^j b_i^j, (a_i^j)'(b_i^j)'\}$ modult. A modulokat, amelyek ugyanahhoz a változóhoz tartoznak, egy körbe rendezzük úgy, hogy egy x_i literálhoz és egy $\overline{x_i}$ literálhoz tartozó modul felváltva következzen egymás után. Legyen $\nu_i(j)$ az az index, amely a j indexet követi az X_i-ben, azaz legyen M_i^j modult X_i-ben az óra járásának szerinti irányban követő modul $M_i^{\nu_i(j)}$. Ha M_i^j egy pozitív literálhoz tartozik, akkor M_i^{j+}-szal is jelöljük, ha pedig negatív literálhoz tartozik, akkor M_i^{j-}-szal jelöljük. M_i^{j+} az $M_i^{\nu_i(j)-}$-szal a $b_i^j a_i^{\nu_i(j)}$ élen keresztül, M_i^{j-} pedig $M_i^{\nu_i(j)+}$-szal a $(b_i^j)'(a_i^{\nu_i(j)})'$ élen keresztül van összekötve (lásd a 8 ábrát). Ezen éleknek definiálunk két halmazt: legyen $A_i = \bigcup_j b_i^j a_i^{\nu_i(j)}$ és $B_i = \bigcup_j (b_i^j)'(a_i^{\nu_i(j)})'$.

Definiálunk egy „belső kört”, amelyet a $\bigcup_j \{a_i^j b_i^j\}$ élek és az A_i élhalmaz képezi, és egy „külső kört”, amely $\bigcup_j \{(a_i^j)'(b_i^j)'\}$ élekből és a B_i élhalmazból áll. A külső (belső) körön levő x_i változóhoz tartozó konfliktuspárok éleit e_i^{j+} (e_i^{j-}) pozitív (negatív) éleknek nevezzük. Az olyan 3-hosszú utakat, amelyek az $a_i^j b_i^j a_i^{\nu(j)}_i b_i^{\nu(j)}_i$ vagy a $(a_i^j)'(b_i^j)'(a_i^{\nu(j)}_i)'(b_i^{\nu(j)}_i)'$ csúcsokon haladnak keresztül, *rövid utaknak* nevezzük.

Minden C_j klózhoz vegyünk fel egy c_j csúcsot, ezeket a csúcsokat nevezzük klózcsúcsoknak. Például egy $C_j = (\overline{x_f}, x_g, x_h)$ klózhoz tartozó c_j klózcsúcs az M_f^j, M_g^j és M_h^j modulokhoz az e_f^j, e_g^j és e_h^j éleken keresztül csatlakozik (8. ábra). Ha egy x_i literál a C_j klózban pozitívan (negatívan) fordul elő, a c_j klózcsúcs az $e_i^{j-} \in M_i^{j+}$ ($e_i^{j+} \in M_i^{j-}$) él egy fokú csúcsával lesz összekötve. Egy modul tehát csak egy klózcsúccsal van összekötve.

A konstrukció végén egy $n = 13m'$ csúcsú és $3m'$ konfliktuspárral rendelkező gráfot kapunk, amelyben a keresendő F-kizáró párosítás mérete $k = \frac{11}{2}m'$ lesz.

9.2.2. Eredmények

Ebben a fejezetben a következő tételt bizonyítjuk:

9.3. Tétel. *Az* F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS *probléma NP-teljes erősen diszjunkt párok esetén fákon.*

9.4. Lemma. *Az* F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS *példánynak a következő tulajdonságai vannak.*

(a) *A $G = (V, E)$ gráf egy $13m'$ csúcsú erdő, melyben a csúcsok maximális fokszáma három.*

(b) *A konfliktuspárok diszjunktak, számuk $3m'$.*

Bizonyítás. A gráf csak úgy tartalmazhatna kört, ha a csúcskomponensekben levő rövid utak egy klózcsúcs által össze lennének kötve. Mivel a modulok úgy vannak rendezve, hogy az M_i^{j+} modul és az M_i^{j-} modul felváltva vannak összekötve egymással, az e_i^{j-} él az M_i^{j+} modulból és az e_i^{j+} él az M_i^{j-} modulból egy klózcsúccsal vannak összekötve, tehát egy rövid út csak egy klózcsúccsal van összekötve. Ebből következik, hogy a gráf egy erdő.
Nyilvánvaló, hogy a konfliktuspárok diszjunktak, és a számuk $3m'$.

□

9.5. Lemma. *A* 3SAT*-formula akkor és csak akkor elégíthető ki, ha G tartalmaz egy $k = \frac{11}{2}m'$ méretű F-kizáró párosítást.*

Bizonyítás. $\Rightarrow$ Adott az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók egy értékadása, amely kielégíti a 3SAT-formulát. Egy k méretű M F-kizáró párosítás G-ben a következőképpen képezhető:

Minden igaz értékű x_i változóra vegyük az $\bigcup_j \{e_i^{j+}\} \cup B_i$ éleket M-be, és minden hamis értékű x_i változóra vegyük az $\bigcup_j \{e_i^{j-}\} \cup A_i$ éleket M-be, és minden C_j klózra vegyük bele még e_i^j-t is M-be, ahol i egy tetszőlegesen választott olyan x_i vagy $\overline{x_i}$ literál indexe, amely C_j-t igazzá teszi.

Mivel a kifejezés akkor elégíthető ki, ha minden C_j klóz legalább egy igaz literált tartalmaz, ezért minden c_j klózcsúcsra illeszkedik egy M-beli él, legyen H ezen élek halmaza. Az M párosítás mérete:

$$|M| = \sum_{i \text{ ha } x_i \text{ igaz}} |\bigcup_j \{e_i^{j+}\} \cup B_i| + \sum_{i \text{ ha } x_i \text{ hamis}} |\bigcup_j \{e_i^{j-}\} \cup A_i| + |H| =$$

($|A_i| = |B_i|$ minden i-re)

$$= 3m' + \sum_i |B_i| + m' = 3m' + \tfrac{3}{2}m' + m' = \tfrac{11}{2}m' = k.$$

Világos, hogy az így definiált M egy párosítás, amely egyik konfliktuspárból sem tartalmaz két élt.

$\Leftarrow$ *Állítás:* Egy tetszőleges F-kizáró párosítás X_i-ből legfeljebb $\frac{3}{2}p$ élt tartalmaz, ahol p az X_i-beli modulok száma, és egyenlőség csak úgy lehet, ha az $\bigcup_j \{e_i^{j-}\} \cup A_i$ élhalmaz vagy az $\bigcup_j \{e_i^{j+}\} \cup B_i$ élhalmaz szerepel az F-kizáró párosításban.

Bizonyítás: Ha egy F-kizáró párosítás egy rövid útból két élt is tartalmaz, akkor a konfliktuspárok miatt a „mellette" levő rövid útból csak egy él vehető az F-kizáró párosításba. Ez az egy él csak az A_i vagy B_i halmazokból választható, mert ha ezen az úton levő e_i^{j+} vagy e_i^{j-} élek egyike szerepelne a párosításban, akkor a következő rövid útból is csak egy élt tudnánk kiválasztani. A maximális párosítás mérete viszont csak akkor érhető el, ha ebből a rövid útból újra két él kerülhet a párosításba. Ha ezt az eljárást hasonlóan folytatjuk, hogy a rövid utakból felváltva egy és két élt veszünk a párosításba, akkor egy X_i csúcskomponensből $\frac{3}{2}p$ darab él szerepel az F-kizáró párosításban.

Ha egy X_i csúcskomponensből az $\bigcup_j \{e_i^{j-}\} \cup A_i$ (ill. $\bigcup_j \{e_i^{j+}\} \cup B_i$) élhalmaz van az M párosításban, akkor legyen x_i hamis (igaz). $|M| = \frac{11}{2}m'$ csak úgy lehetséges, ha M minden klózcsúcsot lefed, mivel a csúcskomponensekből legfeljebb $\frac{9}{2}m'$ él választható ki, tehát még az m' klózcsúcsnak is lefedettnek kell lenniük. Ezek kívül még azt kell megmutatnunk, hogy ha minden c_j klózcsúcsból egy kimenő él szerepel a párosításban, akkor a kifejezés kielégíthető ezzel az értékadással.

Ha például azt az e_g^j élt tartalmazza a párosítás, amely a $C_j = (\overline{x_f}, x_g, x_h)$ klózhoz tartozó c_j klózcsúccsal van összekötve, akkor a C_j klóz azáltal lesz kielégítve, hogy a megfelelő x_g literál igaz. Mivel $|M| = \frac{11}{2}m'$, minden klózcsúcsra illeszkedik M-beli él, tehát minden klóz tartalmaz igaz literált, így a kifejezés kielégíthető. □

10. Paraméteres bonyolultságelméleti eredmények

A következő táblázat az F-kizáró párosítás problémához kötődő paraméteres eredményeimet mutatja. A problémát az f, k és ω paraméterekkel vizsgáltam, ahol f a konfliktuspárok számát, k a párosítás méretét, ω pedig a favastagságot jelöli.

A probléma megoldható $O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$ időben egy keresőfa-algoritmus segítségével az f paraméterezéssel. Abban az esetben, ha a paraméter a párosítás mérete, akkor a probléma $W[1]$-nehéz, de ha a gráfban diszjunkt konfliktuspárok szerepelnek, akkor a probléma FPT lesz a k paraméterrel. Adható egy olyan lineáris problémakernel is, amelynek mérete csak f-től és k-tól függ. Ezen kívül megjegyezzük, hogy a probléma már fák esetén is NP-teljes, és ezáltal a bemeneti gráf favastagságával már nem lehet rögzített paraméterrel kezelhető (lásd 2. táblázat).

Gráftípus	paraméter f eredmény	paraméter k eredmény	paraméter (f,k) kernel	paraméter ω eredmény
Általános gráf	$O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$	$W[1]$-nehéz	?	$\omega = 1$ NP-teljes
Páros gráf	$O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$	$W[1]$-nehéz	$O(f+k)$	$\omega = 1$ NP-teljes
Gráf diszjunkt konfliktuspárokkal	$O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$	$O(4,61^{3k} n^{O(1)})$	$O(f+k)$	$\omega = 1$ NP-teljes

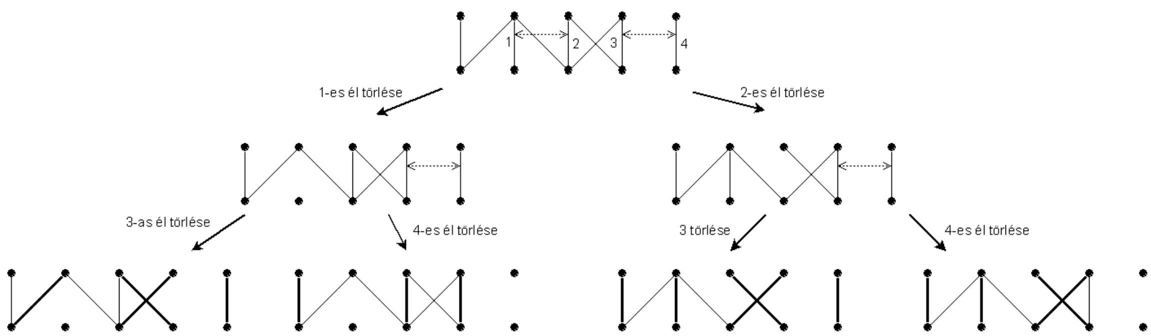
2. táblázat. Az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS paraméteres bonyolultságelméleti eredményei

10.1. F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS FPT f esetén

10.1. Tétel. *Az* F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS $O(2^f \cdot m \cdot \sqrt{n})$ *időben megoldható, ahol* f *a konfliktuspárok számát,* n *a gráf csúcsszámát,* m *pedig a gráf élszámát jelöli.*

Bizonyítás. Az F-kizáró párosítás minden konfliktuspárból legfeljebb egy élt tartalmazhat, ezért a konfliktuspár egyik élét töröljük. Egy keresőfa-algoritmust alkalmazunk, amelyben aszerint ágazunk el, hogy a konfliktuspár mely élét töröltük és a maradék gráfban egy másik konfliktuspár felbontásával folytatjuk ugyanígy. Ha már nincs több konfliktuspár a gráfban, akkor a S. Micali és V. V. Vazirani [25] algoritmusával $O(m \cdot \sqrt{n})$ időben kereshetünk egy maximális párosítást a gráfban (lásd 9. ábra). Ebben a gráfban minden konfliktuspárnak csak az egyik éle szerepel, ezért alkalmazható ez a maximális párosítást kiszámító algoritmus, mivel ebben egy párosítás biztosan F-kizáró párosítás is egyben. A következőkben megmutatjuk az ismertetett algoritmus helyességét. Azt kell tehát belátnunk, hogy a keresőfa valamelyik végrehajtási ágán az algoritmus biztosan talál egy maximális méretű F-kizáró párosítást.

Legyen M_{opt} egy maximális méretű F-kizáró párosítás, és F_{opt} azon élek halmaza M_{opt}-ban, melyek tagjai egy konfliktuspárnak. Ekkor tekintsük azt az ágat a keresőfában, amely az F_{opt}-beli élek párjait törölte a konfliktuspárakból. Ebben az ágban M_{opt} egy párosítás a kapott gráfban, így a maximális párosítás (tehát a kimenet) mérete legalább ekkora. □

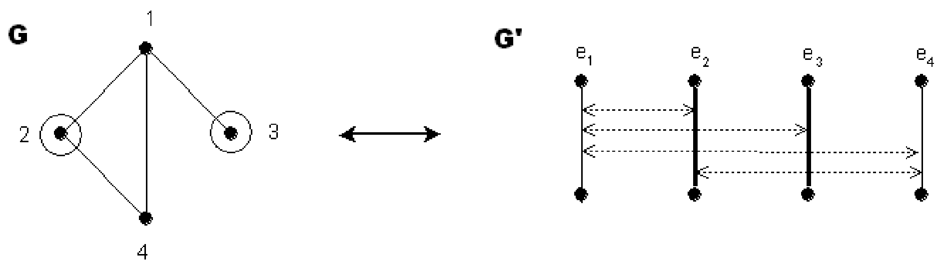


9. ábra. Az elágazás: először az 1-2 konfliktuspár egyik élét töröljük, majd a 3-4 konfliktuspárból töröljük az egyik élt.

10.2. F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS W[1]-nehéz k esetén

A $W[1]$-nehéz FÜGGETLEN PONTHALMAZ problémát [6] vezetjük vissza az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-ra. Ezzel megmutatjuk, hogy az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS páros gráfok esetén a párosítás méretével paraméterezve $W[1]$-nehéz.

10.2. Tétel. ODD MATCHING *W[1]-nehéz, ha a paraméter a párosítás mérete.*



10. ábra. Az ábra az FÜGGETLEN PONTHALMAZ-ról az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-ra való visszavezetést szemlélteti.

Bizonyítás. Legyen (G, k) egy FÜGGETLEN PONTHALMAZ példány. Konstruáljunk egy $G' = (V', E')$ páros gráfot következőképpen: G csúcsait független élek reprezentálják G'-ben, ami azt jelenti, hogy minden $v_i \in V$ csúcshoz létezik egy $e_i \in E'$ él, valamint $e_i \cap e_j = \emptyset$ minden $i, j \leq n$, $v_i \neq v_j$-re. Ha két csúcs össze van kötve az eredeti gráfban, akkor a megfelelő élek konfliktuspárokat alkotnak egymással az új G' gráfban, azaz egy $\{e_i, e_j\} \in F$ akkor és csak akkor létezik, ha $\{v_i, v_j\}$ egy él a G gráfban (lásd 10. ábra).

Megmutatjuk, hogy a konstruált gráfban akkor és csak akkor található egy k méretű F-kizáró párosítás, ha az eredeti gráfban van egy k méretű független csúcshalmaz.

$\Rightarrow$ Legyen M egy F-kizáró párosítás G'-ben, tehát M minden konfliktuspárból legfeljebb egy élt tartalmaz, ezért a megfelelő csúcsok G-ben nincsenek összekötve egymással. Ez pedig azt jelenti, hogy ezek a csúcsok egy független csúcshalmazt alkotnak G-ben.

$\Leftarrow$ Legyen I egy k méretű független csúcshalmaz G-ben. I csúcsai között nem fut él. Ez azt jelenti, hogy G' megfelelő élei nem állnak konfliktusban egymással, tehát ezek bevehetők a párosításba. $\square$

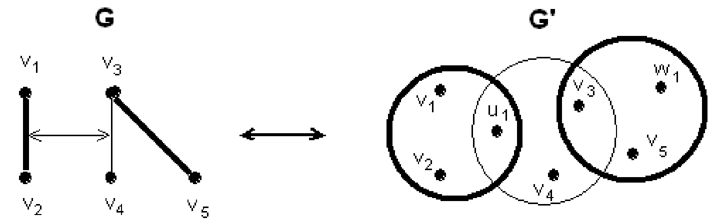
10.3. F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS FPT diszjunkt párok esetén a k paraméterrel

Ebben a fejezetben a HALMAZ PAKOLÁS problémával való összefüggésre mutatunk rá (lásd a 8.3. fejezetet).

10.3. Tétel. *Az* F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS *FPT a párosítás k méretével paraméterezve, ha a konfliktuspárok diszjunktak.*

Bizonyítás. Legyen (G, F, k) egy F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS példány. Tegyük fel, hogy a konfliktuspárok G-ben diszjunktak. A következőképpen konstruálunk egy 3-HALMAZ PAKOLÁS példányt: G minden csúcsa feleljen meg egy elemnek az alaphalmazban. A konfliktuspárokat is helyettesítsük elemekkel, őket nevezzük konfliktuselemeknek. Ha két csúcsa össze van kötve G-ben, a csúcsoknak megfelelő elemek egy közös halmazba tartoznak. (Ez azt jelenti, hogy minden halmaz egy élt jelképez.) A konfliktuselemek azokhoz a halmazokhoz lesznek hozzávéve, amely halmazok a konfliktuspár két élének felelnek meg. Ha egy él nem fordul elő egyik konfliktuspárban sem, a hozzátartozó halmazt kiegészítjük egy új elemmel, ami egyetlen másik halmazban sem fog szerepelni, ezáltal ő is három elemet tartalmaz. Ha a 3-HALMAZ PAKOLÁS példányt megoldjuk, megoldásként diszjunkt halmazokat kapunk. Minden megoldás a 3-HALMAZ PAKOLÁS problémára egy ugyanakkora méretű F-kizáró párosítást ad (G, F, k)-ra, és fordítva, minden megoldás az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS feladatra egy ugyanakkora méretű megoldást ad a 3-HALMAZ PAKOLÁS-ra.

A [27]-ben bizonyított, hogy a 3-HALMAZ PAKOLÁS FPT-ben van a halmazok számával paraméterezve. A [21]-ben található egy $O(4,61^{3k'} n'^{O(1)})$ időben futó algoritmus az 3-HALMAZ PAKOLÁS problémára, ahol k' a keresett diszjunkt halmazok száma és n' az alaphalmaz elemszáma. Ez tehát egy $O(4,61^{3k} n^{O(1)})$ lépésszámú algoritmust jelent az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS problémára. $\square$

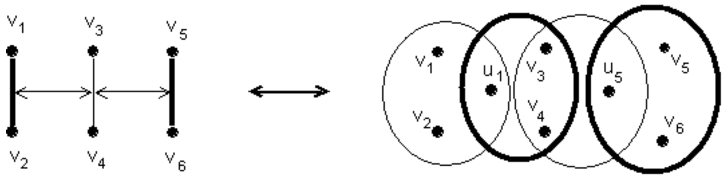


11. ábra. Egy 3-HALMAZ PAKOLÁS példány konstrukciója

Észrevételek:

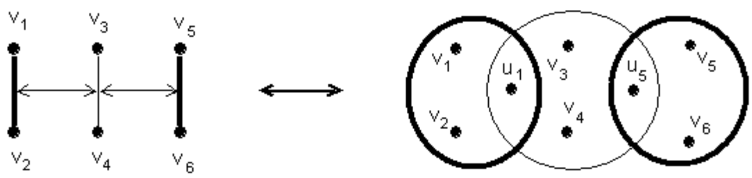
- Mivel a konfliktuspárok diszjunktak, az előző konstrukcióban minden halmaz elemszáma három.
- Bármely két halmaz metszete csak egy elemet tartalmaz.

A következő példával azt mutatjuk meg, hogy a 3-HALMAZ PAKOLÁS-ra adott algoritmus rossz megoldást ad az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS problémára, ha a konfliktuspárok nem diszjunktak. Ha hasonlóképpen konstruálunk egy 3-HALMAZ PAKOLÁS példányt, és megoldjuk ezt a feladványt, olyan halmazokat kapunk megoldásként, amelyek az eredeti gráfban konfliktusban állnak egymással.



12. ábra. Egy példa, ahol azt mutatjuk meg, hogy a konfliktuspároknak miért kell diszjunktnak lenniük. Látható, hogy az $\{u_1, v_2, v_3\}$ és az $\{u_5, v_5, v_6\}$ halmazok diszjunktak, mégsem igaz, hogy a $\{v_3, v_4\}$ és a $\{v_5, v_6\}$ élek egy F-kizáró párosítást adnának.

Tehát abban az esetben, ha F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS feladványban a konfliktuspárok nem diszjunkat, egy M-HALMAZ PAKOLÁS példányt kell konstruálnunk (lásd 13. ábra).



13. ábra. Egy M-HALMAZ PAKOLÁS példány konstrukciója.

Megjegyzés: a [15] cikkben megmutatták, hogy az M-HALMAZ PAKOLÁS probléma m-mel paraméterezve FPT-ben van. Ha a k mellé az m-et is felvesszük paraméterként, ahol m azt jelenti, hogy maximum hány konfliktuspárban szerepelhet egy él, akkor az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS probléma ugyancsak FPT-ben van. Ezt az esetet most nem tárgyaljuk részletesebben.

10.4. Lineáris kernel f és k paraméterek esetén

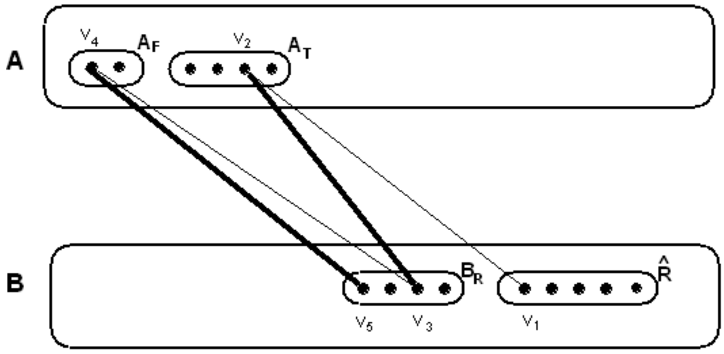
10.4. Tétel. *Az* F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS *probléma esetén egy $O(f+k)$ csúcsból álló kernel páros gráfokban $O(km)$ időben kiszámítható.*

Bizonyítás. Adott egy $G = (A \cup B, E)$ páros gráf. Jelöljük a konfliktuspárok halmazát F-fel, csúcsait pedig $V(F)$-fel. Valamint legyen $A_F := A \cap V(F)$ és $B_F := B \cap V(F)$. I_{yes} pedig legyen egy triviális konstans méretű igen-példány. (A konfliktuspárok száma f.) Keressünk egy M maximális párosítást $G - V(F)$-ben. Ha $|M| \geq k$, akkor készen vagyunk, tehát adjuk vissza I_{yes} igen-példányt kernelként. Különben létezik egy $k-1$ csúcsból álló T lefogó halmaz, mely halmazt jelöljük $A_T := A \cap T$-vel az A halmazban, és $B_T := B \cap T$-vel a B halmazban. Azt tudjuk tehát, hogy $|A_T| + |B_T| \leq k-1$. Mivel T lefogja az összes élt, így a $A \setminus (A_F \cup A_T)$ és $B \setminus (B_F \cup B_T)$ halmazok között nem fut él. Valamint definiáljuk az $R = B \setminus (B_F \cup B_T)$ halmazt. Legyen $G' = G[(A_F \cup A_T) \cup R]$, és G'-ben legyen M_B egy maximális méretű párosítás. Tehát $|M_B| \leq |A_F| + |A_T|$. Legyen $\hat{R}$ azon R-beli pontok halmaza, melyeket M_B nem fed le és G^* a G-ből $\hat{R}$ törlésével kapott gráf (lásd a 15. ábrát).

Állítás: (G, F)-ben pontosan akkor van k méretű F-kizáró párosítás, ha (G^*, F)-ben van k méretű F-kizáró párosítás.

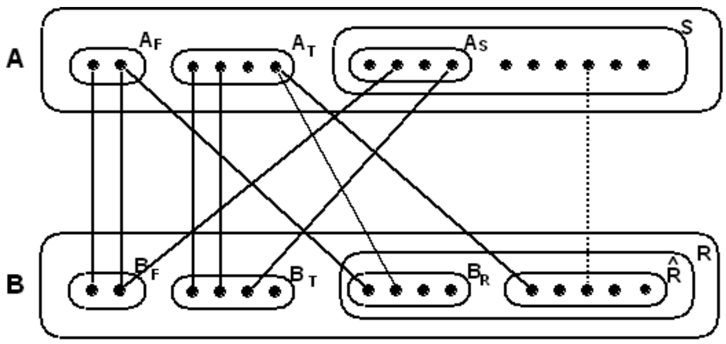
Az egyértelmű, hogy ha (G^*, F)-ben van k méretű F-kizáró párosítás, akkor van (G, F)-ben is. Így csak azt kell belátni, hogy ha M egy k méretű F-kizáró párosítás (G, F)-ben, akkor létezik k méretű F-kizáró párosítás (G^*, F)-ben is.

Tekintsük azokat az alternáló utakat, amelyek egy $\hat{R}$-beli csúcsból indulnak, egy $B_R = R \setminus \hat{R}$-beli csúcsban végződnek, és felváltva tartalmazzák M és M_B éleit. Ezen alternáló utak élei tehát csak az $(A_F \cup A_T)$ és R halmaz között futhatnak. Legyen $v_1 v_2 \in M$ első él egy ilyen P úton, amelyre $v_1 \in \hat{R}$ és $v_2 \in (A_F \cup A_T)$. Ekkor létezik egy $v_2 v_3 \in M_B$ él, különben $v_1 v_2$-t a konstrukció során hozzá lehetett volna venni M_B-hez. Ha ez a v_3 csúcs nem fedett M által, akkor a $v_1 v_2$ él helyett bevehetjük $v_2 v_3$ élt az F-kizáró párosításba. Az nem lehetséges, hogy ezen alternáló út az A halmazban véget ér, mert akkor ezen út mentén már javíthattunk volna M_B kiszámításánál, ez pedig ellentmond annak, hogy M_B maximális. Tehát P egy B_R-beli csúcsban végződik. Így az M-beli éleket kicserélve az M_B-beli élekre, egy ugyanúgy k méretű F-kizáró párosítást kapunk. Ez az F-kizáró párosítás eggyel kevesebb $\hat{R}$-beli csúcsot fed, mint M. Majd iteráljuk a hasonló alternáló utak keresését az $\hat{R}$-beli csúcsokból addig, amíg az M által lefedett éleknek van $\hat{R}$-beli végpontjuk. Az eljárás végén egy G^*-beli k méretű F-kizáró párosítást kapunk. (lásd a 14. ábrát)



14. ábra. Az ábra egy alternáló utat mutat a $v_1v_2v_3v_4v_5$ csúcsokon keresztül. A vastag élek az M_B párosításban definiált élek, a vékonyak pedig az M párosításban szereplő élek.

Azután definiáljunk hasonlóképpen egy $S = A \setminus (A_F \cup A_T)$ halmazt. Tekintsük a $G'' = G[(B_F \cup B_T) \cup S]$ páros gráfot, ebben legyen M_A egy maximális párosítás. Tehát $|M_A| \leq |B_F| + |B_T|$. Legyen $\hat{S}$ azon S-beli pontok halmaza, melyeket M_A nem fed le, és legyen G^{**} a G^*-ból $\hat{S}$ törlésével kapott gráf. A fenti állítás alapján hasonlóképpen belátható, hogy az $\hat{S}$-beli csúcsok törölhetőek a gráfból. A felesleges csúcsok kitörlése után pedig kapunk egy $|V(G^{**})| \leq 2(|A_F| + |A_T| + |B_F| + |B_T|) \leq 2(2f + k - 1) = 4f + 2k - 2 = O(f + k)$ csúcsból álló kernelt. Ezen kernel $O((k+f)m)$ lépésben számítható ki, mert legfeljebb $k + f$ méretű párosításokat keresünk, és egy javító út $O(m)$ lépésben megtalálható.



15. ábra. Az ábra a bizonyítás során definiált halmazokat mutatja. A kernel pedig $A_F \cup B_F \cup A_T \cup B_T \cup A_S \cup B_R$.

□

11. Lokális keresés

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA probléma $W[1]$-nehéz ℓ és k^* paraméterek esetén, ahol ℓ a keresés sugara, és k^* a megváltoztatott konfliktuspárok száma.

Feltehetjük, hogy az F halmazban a konfliktuspárok úgy vannak rendezve, hogy $E^1(F)$ minden konfliktuspár „első éleinek" halmazát és $E^2(F)$ a konfliktuspárok „második éleinek" halmazát jelölik.

Valamint jelölje $[n]$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemeit.

A LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA problémát a következőképpen definiáljuk:

Bemenet: Egy (G, F) F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS példány, egy M_0 párosítás $G - E^2(F)$-ben és két pozitív egész szám, k^* és ℓ.

Feladat: Keressünk egy $F^* \subseteq F$ halmazt, amelynek mérete legfeljebb k^*, és egy M párosítást $G - [E^1(F^*) \cup E^2(F \setminus F^*)]$-ben, ahol $|M| > |M_0|$ és $|M_0 \Delta M| \leq \ell$. $|M_0 \Delta M|$ azon élek számát jelenti, amelyek vagy csak M-ben, vagy csak M_0-ban szerepelnek.

M_0 a $G - E^2(F)$ gráf egy párosítása, vagyis M_0 egy olyan F-kizáró párosítás, ahol a konfliktuspárok első éleit ($E^1(F)$-et) tekintjük megengedett éleknek. A célunk, hogy M_0-nál nagyobb F-kizáró párosítást találjunk oly módon, hogy a konfliktuspárok közül kiválasztunk k^* darabot, melyekben felcseréljük a megengedett illetve nem megengedett éleket. Ha tehát F^* tartalmazza a kiválasztott k^* konfliktuspárt, akkor a $G - [E^1(F^*) \cup E^2(F \setminus F^*)]$ gráfban szeretnénk találni egy M_0-nál nagyobb párosítást. Ezen kívül még azt is megköveteljük, hogy M és M_0 egymástól legfeljebb ℓ élben különbözzön.

11.1. Tétel. *A* LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA *probléma W[1]-nehéz az ℓ és k^* paraméterek esetén.*

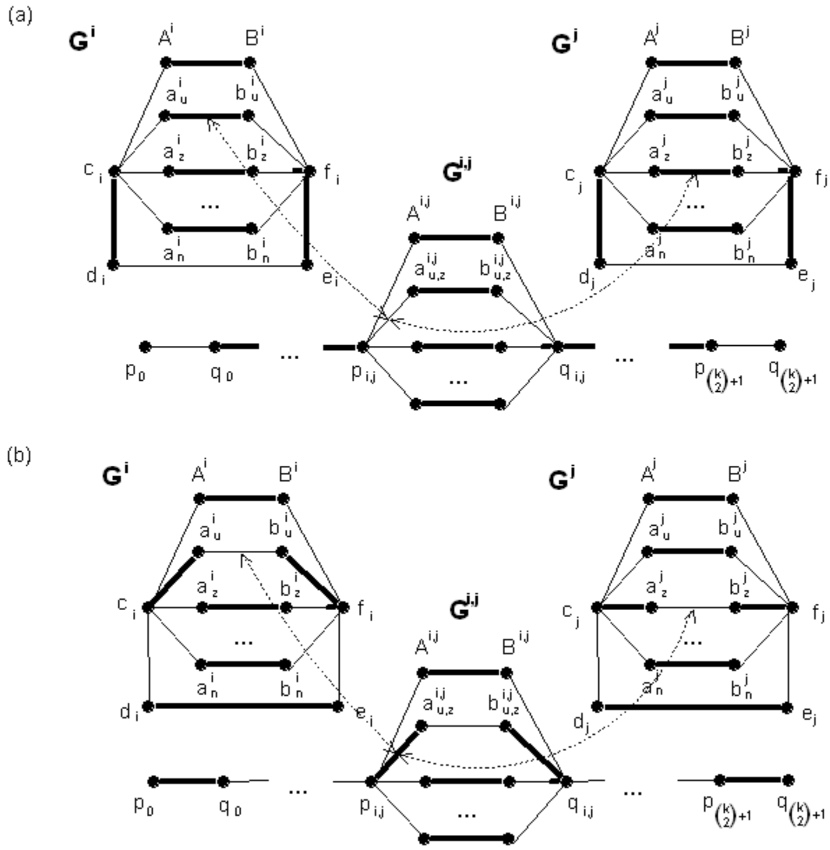
Bizonyítás. Adunk egy visszavezetést a KLIKK-ről a LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS-ra k^*-val és ℓ-lel paraméterezve. Először a konstrukciót írjuk le, aztán megmutatjuk, hogy a LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA probléma akkor és csak akkor oldható meg, ha G tartalmaz egy k méretű klikket.

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és k a paraméter a KLIKK probléma számára (lásd 6.1. fejezet). Konstruálunk egy $I = (G^*, F)$ F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS példányt, ahol $|F| = k(k-1)$, és egy M_0 párosítást $G^* - E^2(F)$-ben. Legyen $\ell = 6k + 4\binom{k}{2} + 3$ és $k^* = k(k-1)$. Az (I, M_0, k^*, ℓ) négyes tehát a LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA probléma bemenetének tekinthető. Megmutatjuk, hogy a következő kijelentések ekvivalensek egymással:

(1) Az (I, M_0, k^*, ℓ) LOKÁLIS KERESÉS F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁSRA példány megoldható, tehát létezik egy $F^* \subseteq F$ halmaz úgy, hogy létezik egy $|M_0|+1$ méretű M párosítás a $G - [E^1(F^*) \cup E^2(F \setminus F^*)]$ gráfban, ahol $|F^*| \leq k^*$ és $|M_0 \Delta M| \leq \ell$.

(2) G-ben van egy k méretű klikk.

A 16. ábrán az F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS példány konstrukciója látható. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $m = |E(G)|$. Konstruáljunk G^i csúcskomponenseket minden $i \in [k]$-ra, $G^{i,j}$ élkomponenseket minden $1 \leq i < j \leq k$-ra és egy P útkomponenst. A G^i csúcskomponensek a c_i, d_i, e_i és f_i csúcsokból állnak a $c_i d_i$, $d_i e_i$, $e_i f_i$ élekkel, valamint az A^i és B^i csúcshalmazokból, ahol $A^i = \{a^i_u | u \in [n]\}$ és $B^i = \{b^i_u | u \in [n]\}$ a $\{c_i a^i_u, a^i_u b^i_u, b^i_u f_i | u \in [n]\}$ élekkel. A $G^{i,j}$ élkomponensek a $p_{i,j}$ és $q_{i,j}$ pontokból valamint az $A^{i,j}$ és $B^{i,j}$ csúcshalmazokból állnak, ahol $A^{i,j} = \{a^{i,j}_{u,z} | v_u v_z \in E(G)\}$ és $B^{i,j} = \{b^{i,j}_{u,z} | v_u v_z \in E(G)\}$ a $p_{i,j} a^{i,j}_{u,z}$, $a^{i,j}_{u,z} b^{i,j}_{u,z}$, $b^{i,j}_{u,z}, q_{i,j}$ élekkel minden $1 \leq i < j \leq k$-re és minden $v_u v_z$ élre. Az élkomponensek tetszőleges sorrendben vannak összekötve egymással. A pontsorozatot, amely a $p_{i,j}$ és $q_{i,j}$ csúcsokból áll, egy P útkomponensnek nevezzük. Ennek az útkomponensnek még van egy „kezdete" a p_0 és q_0 pontokból, amelyek össze vannak kötve egymással, és egy „vége" a $p_{\binom{k}{2}+1}$ és $q_{\binom{k}{2}+1}$ pontokból, amelyek ugyancsak össze vannak kötve egymással. Legyen $\nu(i,j)$ egy függvény úgy, hogy $G^{\nu(i,j)}$ az az élkomponens, amely $G^{i,j}$-t követi. Legyen $G^{1,2}$ az első élkomponens, a többi élkomponens sorrendje mindegy.



16. ábra. A komponensek az I F-KIZÁRÓ PÁROSÍTÁS példányban, amelyeket a 11.1. tétel bizonyításában használunk. Az (a) ábran a vastag élek M_0-t reprezentálják, a vastag élek a (b) ábrán pedig egy M F-kizáró párosítást képeznek, ahol $|M| = |M_0| + 1$.

Minden i, j-re és $v_u v_z \in E(G)$-re definiáljunk két konfliktuspárt F-ben, $\{p_{i,j}a^{i,j}_{u,z}, a^i_u b^i_u\}$ és $\{p_{i,j}a^{i,j}_{u,z}, a^j_z b^j_z\}$-t. Legyen

$$M^i_0 = \{a^i_u b^i_u, c_i d_i, e_i f_i | u \in [n]\} \text{ minden } G^i\text{-re},$$
$$M^{i,j}_0 = \bigcup_{v_u v_z \in E(G)} \{a^{i,j}_{u,z} b^{i,j}_{u,z}\} \text{ minden } G^{i,j}\text{-re},$$
$$M_0 = \{q_0 p_{1,2}\} \cup \bigcup_{i \in [k]} M^i_0 \cup \bigcup_{1 \le i < j \le k} (M^{i,j}_0 \cup \{q_{i,j} p_{\nu(i,j)}\}).$$

Ez a gráf $O(mk^2 + kn)$ időben konstruálható, tehát a konstrukció polinom idejű n-ben és m-ben. Mivel $k^* = k(k-1)$ és $\ell = 6k + 4\binom{k}{2} + 3$, egy paraméteres visszavezetést hajtottunk végre.

Az alapötlet, amiért a gráfot így konstruáltuk, a következő: egyszerű látni, hogy egy M_0-nál nagyobb M párosítás csak akkor létezik, ha a P út menti élek „felcserélhetőek”. A meghatározott konfliktuspárok biztosítják, hogy ez csak akkor léphessen fel, ha a csúcskomponensekben is „cserélünk” (lásd 16(b) ábra.) Egy csere a $G^{i,j}$ élkomponensekben m-féleképpen végezhető el, mivel M_0 az $a^{i,j}_{u,z}, b^{i,j}_{u,z}$ pontok által meghatározott út mentén minden $u < z$-re javítható, ahol $v_u v_z$ a G gráf egyik éle. De a csúcs- és élkomponensek közötti konfliktuspárok biztosítják, hogy ha egy alternáló úton keresztül egy $v_u v_z \in E(G)$ élen cserélünk $G^{i,j}$-ben, akkor a megfelelő G^i komponensben is $a^i_u b^i_u$-n keresztül és G^j-ben $a^j_z b^j_z$-n keresztül is cserélnünk kell alternáló körökön. Ezen cserék megfelelnek az $i \rightsquigarrow u$ és $j \rightsquigarrow z$ hozzárendeléseknek. Mivel minden G^i komponensben csak egy csere végezhető el, biztos, hogy a $\binom{k}{2}$ darab G-beli élnek, amelyek az élkomponensekben elvégzett cseréknek felelnek meg, összesen k végpontjuk van. Tehát akkor és csak akkor létezik egy klikk G-ben ha M_0 javítható.

(1) $\Rightarrow$ (2): Akkor létezik egy M F-kizáró párosítás (G, F)-ben, amely nagyobb mint M_0, ha tudunk találni egy javító utat p_0 és $q_{\binom{k}{2}+1}$ csúcsok között. $|M| \geq |M_0| + 1$ miatt M egy teljes párosítás. Ha $p_0 q_0 \in M$, akkor $q_0 p_{1,2} \notin M$, M-nek tehát a $G^{i,j}$-beli $p_{i,j} a^{i,j}_{u,z}$ és $b^{i,j}_{u,z} q_{i,j}$ éleket kell tartalmaznia valamilyen u, z-re. Ezt az érvelést iteratívan folytathatjuk, tehát minden $G^{i,j}$-re van olyan (u, z) pár, hogy a $p_{i,j} a^{i,j}_{u,z}$ és a $b^{i,j}_{u,z} q_{i,j}$ élek vesznek részt az M párosításban. Ha $p_{i,j} a^{i,j}_{u,z} \in E^2(F) \cap M$, akkor a $\{a^i_u b^i_u, p_{i,j} a^{i,j}_{u,z}\}$ és $\{a^j_z b^j_z, p_{i,j} a^{i,j}_{u,z}\}$ konfliktuspárokat F^* mindenképp tartalmazza, mert $M \subseteq E(G) \setminus E^2(F \setminus F^*) \setminus E^1(F^*)$. M egy teljes párosítás minden G^i és G^j csúcskomponensben, ezért $a^i_u b^i_u \notin M$ miatt az $a^i_u c_i$ és a $b^i_u f_i$ élek benne vannak M-ben, és hasonlóan $a^j_z b^j_z \notin M$ miatt az $a^j_z c_j$ és a $b^j_z f_j$ élek benne vannak M-ben.

Legyen $\sigma(i, j)$ az (u, z) pár, ha $p_{i,j} a^{i,j}_{u,z} \in M$, és legyen $\sigma(i)$ az u csúcs, ha $c_i a^i_u \in M$. A fenti gondolatmenet miatt $\sigma(i, j) = (u, z)$-ből $\sigma(i) = u$ és $\sigma(j) = z$ következik, azaz $\sigma(i, j) = (\sigma(i), \sigma(j))$ minden $1 \leq i < j \leq k$-ra. A $\{v_u v_z | (u, z) = \sigma(i, j), 1 \leq i < j \leq k\}$ élek végpontjai a $\{v_{\sigma(i)} | i \in [k]\}$ halmazban vannak, a kiválasztott $\binom{k}{2}$ élnek tehát k végpontja van. Ezzel beláttuk, hogy $v_{\sigma(i)} v_{\sigma(j)} \in E(G)$ minden $1 \leq i < j \leq k$-ra, tehát $\{v_{\sigma(i)} | i \in [k]\}$ egy klikk G-ben.

(2) $\Rightarrow$ (1) bizonyításához legyen $\{v_{\sigma(i)} | i \in [k]\}$ egy klikk G-ben. Definiálhatunk egy

F-kizáró párosítást, amely a konstruált gráfban minden csúcsot lefed:

$$M_i = \{c_i a^i_{\sigma(i)}\} \cup \{b^i_{\sigma(i)} f_i\} \cup \{a^i_u b^i_u | u \neq \sigma(i)\} \cup \{d_i e_i\} \text{ minden } i \in [k]\text{-ra}$$

$$M_{i,j} = \{p_{i,j} a^{i,j}_{\sigma(i),\sigma(j)}, b^{i,j}_{\sigma(i),\sigma(j)} q_{i,j}\} \cup \{a^{i,j}_{u,z} b^{i,j}_{u,z} | u \neq \sigma(i) \text{ vagy } z \neq \sigma(j)\}$$
$$\text{minden } 1 \leq i < j \leq k\text{-ra}$$

$$M = \{p_0 q_0\} \cup \bigcup_{i \in [k]} M_i \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} M_{i,j} \cup \{p_{\binom{k}{2}+1} q_{\binom{k}{2}+1}\}.$$

Minden konfliktuspár első éle egy élkomponensben szerepel, és minden él két konfliktuspárban szerepel. Az F^* halmaz azokból a konfliktuspárokból áll, amelyek első élei a kiválasztott úton vannak. Ezen konfliktuspárok száma $k^* = 2\binom{k}{2} = k(k-1)$.

Könnyű ellenőrizni, hogy M egy F-kizáró párosítás, amely ℓ-közel van M_0-hoz. Minden csúcskomponensben hat élt, minden élkomponensben három élt változtattunk meg, és még $\binom{k}{2} + 3$ élt P útkomponens mentén. Így tehát $|M_0 \Delta M| = 6k + 4\binom{k}{2} + 3$. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] Balakrishnan, Hari – Barrett, Christopher L. – Kumar, V. S. Anil – Marathe, Madhav V. – Thite, Shripad: The distance-2 matching problem and its relationship to the mac-layer capacity of ad hoc wireless networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 22. évf. (2004) 6. sz., 1069–1079. p.

[2] Cameron, Kathie: Induced matchings. *Discrete Applied Mathematics*, 24. évf. (1989) 1-3. sz., 97–102. p.

[3] Cameron, Kathie: Coloured matchings in bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 169. évf. (1997) 1-3. sz., 205–209. p.

[4] Cook, Stephen A.: The complexity of theorem-proving procedures. In *Proc. 3rd STOC* (konferenciaanyag). 1971, 151–158. p.

[5] Diestel, Reinhard: *Graphentheorie*. 2006, Springer Verlag.

[6] Downey, Rodney G. – Fellows, Michael R.: *Parameterized Complexity*. 1999, Springer-Verlag.

[7] Edmonds, Jack: Maximum matching and a polyhedron with $0, 1$ vertices. *J. Res. the Nat. Bureau of Standards*, 69 B. évf. (1965), 125–130. p.

[8] Edmonds, Jack: Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.*, 17. évf. (1965), 449–467. p. URL `www.cs.berkeley.edu/~christos/classics/edmonds.ps`.

[9] Frank András: A magyar módszer és általánosításai. *Szigma, XXXIII*, 1-2. évf. (2002), 13–44. p.

[10] Frank András: On Kuhn's Hungarian method - a tribute from Hungary. *Technical Report TR-2004-14, Egerváry Research Group, Budapest*, 2004.

[11] Garey, Michael R. – Johnson, David S. – Stockmeyer, Larry J.: Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comput. Sci.*, 1. évf. (1976) 3. sz., 237–267. p.

[12] Garey, Michael R. – Johnson, Davis S.: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. 1979, W. H. Freeman.

[13] Itai, Alon – Rodeh, Michael: Some matching problems. In *Proc. 4th ICALP* (konferenciaanyag). 1977, 258–268. p.

[14] Itai, Alon – Rodeh, Michael – Tanimoto, Steven L.: Some matching problems for bipartite graphs. *J. ACM*, 25. évf. (1978) 4. sz., 517–525. p.

[15] Jia, Weijia – Zhang, Chuanlin – Chen, Jianer: An efficient parameterized algorithm for m-set packing. *J. Algorithms*, 50. évf. (2004) 1. sz., 106–117. p. ISSN 0196-6774.

[16] Karp, Richard M.: Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*. 1972, Plenum Press, 85–103. p.

[17] Katona Gyula Y. – Recski András – Szabó Csaba: *A számítástudomány alapjai*. 2005, Typotex.

[18] Ko, C. W. – Shepherd, F. Bruce: Bipartite domination and simultaneous matroid covers. *SIAM J. Discrete Math.*, 16. évf. (2003) 4. sz., 517–523. p.

[19] Kuhn, Harold W.: The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2. évf. (1955), 83–97. p.

[20] Levin, Leonid A.: Universal sorting problems. *Problems of Information Transmission*, 9. évf. (1973), 115–116. p.

[21] Liu, Yang – Lu, Songjian – Chen, Jianer – Sze, Sing-Hoi: Greedy localization and color-coding: Improved matching and packing algorithms. In *Proc. 2nd IWPEC* (konferenciaanyag). 2006, 84–95. p.

[22] Lovász, László – Plummer, Michael D.: *Matching Theory*. 1986, Elsevier.

[23] Marx Dániel – Schlotter Ildikó: Stable assignment with couples: Parameterized complexity and local search. In *Proc. 4th IWPEC* (konferenciaanyag). 2009, 300–311. p.

[24] Marx Dániel – Schlotter Ildikó: Parameterized complexity and local search approaches for the stable marriage problem with ties, 2009. To appear in *Algorithmica*.

[25] Micali, Silvio – Vazirani, Vijay V.: An o(sqrt(|v|) |e|) algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *FOCS* (konferenciaanyag). 1980, 17–27. p.

[26] Moser, Hannes – Sikdar, Somnath: The parameterized complexity of the induced matching problem. *Discrete Applied Mathematics*, 157. évf. (2009) 4. sz., 715–727. p.

[27] Niedermeier, Rolf: *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. 2006, Oxford University Press.

[28] Robertson, Neil – Seymour, Paul D.: Graph minors. X. obstructions to tree-decomposition. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 52. évf. (1991) 2. sz., 153–190. p.

[29] Rusu, Irena: Maximum weight edge-constrained matchings. *Discrete Appl. Math.*, 156. évf. (2008) 5. sz., 662–672. p.

[30] Stockmeyer, Larry J. – Vazirani, Vijay V.: NP-completeness of some generalizations of the maximum matching problem. *Inf. Process. Lett.*, 15. évf. (1982) 1. sz., 14–19. p.

[31] Zito, Michele: Linear time maximum induced matching algorithm for trees. *Nordic J. of Computing*, 7. évf. (2000) 1. sz., 58–63. p.