

(a, b, k, n) -VERSENYEK

Iványi Antal
(2011. április 24.)

Bevezetés

Legyenek $a \geq 0$, $b \geq a$, $n \geq 1$ és $k \geq 2$ nemnegatív egész számok. A $\mathcal{H}(a, b, k, n)$ **hiperverseny** olyan hipergráf, amelynek n csúcsa van, és bármely k különböző csúcsa között összesen legalább a és legfeljebb b hiperél van. Ez a verseny megadható olyan $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{c \times (n+1)}$ mátrixszal, amelynek $c = \binom{n}{k}$ sora és n oszlopa van, sorai a csúcsokból képezett k -asokhoz tartoznak (lexikografikus sorrendben) és minden sor elemei azt mutatják, hogy a k -asban szereplő csúcsokból hány hiperél meg az oszlopnak megfelelő csúcshoz.

A $k = 2$ esetben a $\mathcal{T}_n(a, b)$ jelölést használjuk. A $\mathcal{T}_n(a, b)$ **verseny** olyan irányított gráf, amelynek n csúcsa van, és bármely két különböző csúcsa között összesen legalább a és legfeljebb b él van. Ez a verseny megadható olyan $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{n \times n}$ mátrixszal, amelyben $m_{ii} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) és $a \leq m_{ij} + m_{ji} \leq b$ ($1 \leq i < j \leq n$).

A $\mathcal{H}_n(a, b, k)$ **hiperverseny** olyan hipergráf, amelynek n csúcsa van, és bármely k különböző csúcsa között összesen legalább a és legfeljebb b hiperél van. Ez a verseny megadható olyan $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{c \times (n+1)}$ mátrixszal, amelynek $c = \binom{n}{k}$ sora és n oszlopa van, sorai a csúcsokból képezett k -asokhoz tartoznak (lexikografikus sorrendben) és minden sor elemei azt mutatják, hogy a k -asban szereplő csúcsokból hány hiperél meg az oszlopnak megfelelő csúcshoz.

Egy $\mathcal{T}_n(a, b)$ verseny kifokainak nemcsökkenően rendezett $\mathbf{s} = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ sorozatát **pontsorozatnak**, befokainak nemcsökkenően rendezett $\mathbf{t} = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ sorozatát **vesztősorozatnak**, az (\mathbf{s}, \mathbf{t}) sorozatpárt **kettős sorozatnak**, a különböző kifokainak $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ halmazát pedig **pont-halmaznak** nevezzük.

A **sport** azon szabályok összessége, amelyek rögzítik a lehetséges eredményeket. Például a **tenisz** egyetlen lehetséges eredménye $S_{tenisz} = \{1 : 0\}$, a **sakk** eredményei $S_{sakk} = \{2 : 0, 1 : 1\}$, a focié $S_{foci} = \{3 : 0, 1 : 1\}$. A tenisz és a sakk **teljes sportok**, míg a foci **hiányos sport**.

1. Focimátrix előállítás, amelyben a sorösszegek különbözőek és minimális számú hármás van a mátrixban [22]

Ezt a feladatot Bege Antal kolozsvári kolléga adta Blázsik Zolinak és nekem az 1999-es visegrádi MACS konferencián, és a 2001-es félixfürdői MACS-on mondtam el a megoldást.

Egy körmérkőzéses focibajnokságban biztosítanunk kell, hogy a csapatok pontszámai különbözzenek úgy, hogy ehhez a lehető legkevesebb győzelemre legyen szükség. Először nézzük a feladatot sakkverseny esetén. Legyen $n = 2k + 1$ résztvevő. Először írjunk az eredménymátrixba mindenhová egyest. Az első k versenyzőt nevezzük erősnek, a $(k + 1)$ -ediket közepesnek, az utolsó k -t pedig gyengének. Az első erős versenyző győzzön minden gyenge ellen, így neki $k + 2k = 3k$ pontja lesz. A második erős versenyző csak a $(k - 1)$ leggyengébb ellen győzzön, \dots , a k -adik erős versenyző pedig csak a $(k + 2)$. versenyző ellen. Így a pontszámok $3k, 3k - 1, \dots, k$ lesznek. Ez az optimális megoldás $n^2/8 + O(n)$ győzelmet igényel.

A foci optimális megoldását négy csapaton mutatom meg. Először itt is döntetlenekkel töltjük ki az eredménymátrixot, majd az első csapat nyer a második ellen és a második nyer a negyedik ellen. Így a pontszámok 5, 4, 3 és 2 lesznek, összesen két győzelem árán. Az ilyen módon kapott optimális megoldás $(3/2 - \sqrt{2})n^2 + O(n) \sim 0.0858n^2 + O(n)$ győzelmet igényel.

2. Focisorozatok ellenőrzése [3, 23, 24, 25, 33, 40]

Kérdéses annak bonyolultsága, hogy nemnegatív egészek növekvő sorozata lehet-e egy focibajnokság pontsorozata.

2003-ban arról beszéltem, hogyan próbáltuk adott sorozatról gyorsan eldönteni, hogy lehet-e focisorozat.

Azóta megjelent Ingo Wegener és társai cikke [3], amelyben megmutatják, hogy a hasonló „Meisterschaft-Problem” NP-teljes. Ezt a feladatot Imreh Csanád úgy fogalmazta át [21], hogy döntsük el, berajzolhatóak-e a foci játékszabályai szerint a lejátszatlan meccseknek megfelelő élek, hogy a kiválasztott csapat minden meccsét megnyeri, a többiek kifoka pedig legfeljebb annyi legyen, mint a kiválasztott csapaté.

3. (a, b) -sorozatok ellenőrzése [1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 20, 26, 31, 32, 36, 37, 39, 43, 50, 55, 58, 60]

A témakör klasszikus eredménye Landau 1953-as tétele [36].

1.1. tétel. (Landau, 1953) *A nemnegatív egészeket tartalmazó $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ monoton nemcsökkenő sorozat akkor és csak akkor pontsorozata egy $(1, 1, n)$ -versenynek, ha*

$$\sum_{i=1}^k s_i \geq \binom{m}{2} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1)$$

és

$$\sum_{i=1}^n s_i \geq \binom{n}{2}. \quad (2)$$

Ezt a tételt Moon 1963-ban [38] kiterjesztette (a, a, n) -versenyekre, majd Kemnitz és Dolff 1997-ben [32] adtak egy egyszerű bizonyítást a kiterjesztésre. Számos helyreállító algoritmus ismert, például Gervacio és Ryser [11, 12, 39] javasoltak négyzetes futási idejű algoritmust.

(a, b) -sorozatok gyors ellenőrzését teszi lehetővé a következő tétel [26].

1.2. tétel. (Iványi, 2009) *Nemnegatív egészek $D = \langle d_1, d_2, \dots, d_n \rangle$ nemcsökkenő sorozata (ahol $n \geq 2$) akkor és csak akkor pontsorozata egy $T_n(a, b)$ versenynek, ha*

$$aB_k \leq \sum_{i=1}^k d_i \leq bB_n - L_k - (n-k)d_k \quad (1 \leq k \leq n), \quad (3)$$

ahol

$$L_0 = 0, \text{ és } L_k = \max \left(L_{k-1}, bB_k - \sum_{i=1}^k d_i \right) \quad (1 \leq k \leq n). \quad (4)$$

Ha létezik megfelelő verseny, akkor a [26] cikkben és a [19] TDK-dolgozatban leírt algoritmus $O(n^2 d_n)$ idő alatt előállít egyet.

Csirik János kérdezte 2003-ban [6], hogy mit mondhatunk egy sorozatról akkor, ha csak a mérkőzések egy része van lejátszva. Ha nem írjuk elő, mely meccsek vannak lejátszva, akkor a feladat értelmezhető $(0, 1)$ -versenyként, és akkor az 1.2 tétellel megoldható.

4. (a, b) -sorozatok optimális helyreállítása [27, 31, 35]

Ha egy (s) sorozat nem pontsorozatra nem teljeseznek annak szükséges feltételei, hogy (a, b) -verseny pontsorozata lehessen, találhatunk alkalmas a' és b' számokat úgy, hogy s pontsorozata legyen valamely (a', b') -versenynek. Ha például a P_i versenyző az összes pontját a P_{i+1} versenyző ellen szerzi (modulo n), akkor máris van megoldásunk.

Egy tavaly megjelent cikkben [27] sikerült a lehető legnagyobb a és a legkisebb b értéket meghatározni, amelyekkel adott s helyreállítható, és gyors helyreállító algoritmus is sikerült találni, amely a PONT-SZELETELÉS javított változata.

5. $(1,1)$ -halmazok és $(2,2)$ -halmazok karakterizálása [16, 29, 30, 47, 54, 57, 66]

Reid 1978-ban fogalmazta meg [54] híres sejtését, amely szerint a teniszezők mindenre képesek. Ez matematikai formában a következő.

1.3. sejtés. (Reid, 1978) *Nemnegatív egész számok bármely H halmazához létezik olyan T_n $(1, 1)$ -verseny, amelynek H a ponthalmaza.*

Probléma felvető cikkében Reid bizonyította a sejtést 1-, 2- és 3-elemű halmazokra, majd Hager 1986-ban [16] 4- és 5-elemű halmazokra. Yao 1989-ben – Landau tételét felhasználva – átfogalmazta a következő aritmetikai állítássá, és számelméleti eszközökkel be is bizonyította [66], Konstruktív bizonyítás azonban mindmáig nem ismert.

1.4. tétel. (Yao, 1988) *Ha $0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_m$, akkor léteznek olyan x_1, x_2, \dots, x_m pozitív egészek, amelyekre*

$$\sum_{i=1}^j x_i h_i \geq \frac{(\sum_{i=1}^j x_i)(\sum_{i=1}^j x_i - 1)}{2}, \quad j \in [1 : m - 1]$$

és

$$\sum_{i=1}^m x_i h_i = \frac{(\sum_{i=1}^m x_i)(\sum_{i=1}^m x_i - 1)}{2}.$$

A sakkozók is sok ponthalmazt elő tudnak állítani, de nem mindet [29].

1.5. lemma. (Iványi, Phong, 2004) *Ha $k \geq 1$, és az s pontsorozathoz a h ponthalmaz tartozik, akkor az $m = 1$ esetben*

$$n = 2h_1 + 1 \tag{5}$$

és az $m \geq 2$ esetben

$$\frac{2h_1}{k} + 1 < n < \frac{2h_m}{k} + 1 \quad (6)$$

és

$$n \geq h_m + 1. \quad (7)$$

Ez a lemma az $m = 1$ esetben pontos választ ad [29].

1.6. következmény. Ha $\mathbf{h} = \langle h_1 \rangle$, akkor pontosan a $\mathbf{s} = \langle h_1^{2h_1+1} \rangle$ pontsorozathoz tartozik a \mathbf{h} pontthalmaz.

Másik érdekes következmény az, hogy nincs olyan sakkverseny, amelyen az első és az utolsó között egy pont különbség van. Sakkban ugyanis $k = 2$, és ekkor (6) szerint $h_1 + 1 < n < h_m + 1$, ami nem lehetséges, ha h_m és h_1 különbsége 1.

A 2004-es debreceni MACS konferencián konstruktív eredményeket is elmondtunk.

6. Kettős (a, b) -sorozatok optimális helyreállítása [18, 31, 42]

Hakimi a következő, kettős sorozatokra vonatkozó tételt bizonyította 1965-ben [18], amelynek $a = b = 1$ speciális esetét a közelmúltban újra bizonyították H. Kim, Z. Toroczka, Miklós István, Erdős L. Péter és Székely László [34].

1.7. tétel. (Hakimi1965) Legyen $n \geq 2$ egy pozitív $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ and $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ két, nemnegatív egészeket tartalmazó vektor, amelyek úgy vannak rendezve, hogy $d_i + l_i \leq d_{i+1} + l_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$, és $d_1 + l_1 > 0$). Akkor és csak akkor van olyan $(0, \infty)$ -verseny, amelynek D a pontvektora és L a veszítővektora, ha

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n l_i \quad (8)$$

és

$$\sum_{i=1}^n (d_i + l_i) \geq d_n + l_n. \quad (9)$$

Ezt a tételt felhasználva lineáris idő alatt eldönthető, hogy adott (D, L) vektorpár kettős vektora-e egy $(0, \infty)$ versenynek. Célunk:

a) ha L és D kielégítik az 1.7 tétel feltételeit, hogyan konstruálhatunk a

lehető legkiegyensúlyozottabb versenyt?

b) ha L és D nem elégítik ki az 1.7 tétel feltételeit, hogyan definiáljuk a legjobb közelítő megoldást és azt hogyan állítsuk elő.

7. (a, b) -sorozatok közelítő helyreállítása [28, 31]

Ha nem léteznek az előírt foksorozatokkal rendelkező versenyek, akkor természetes feladat közelítő megoldás keresése. Tegyük fel, hogy a 2012-es magyar focibajnokságban minden csapat megmondhatja, hány gólt akar rúgni, és hányat kapni. Valószínű, hogy több gólt akarnak majd rúgni, mint kapni, ezért minden kívánság nem teljesíthető.

Az n csapathoz hozzávéve **még egyet**, és mindenki annak rúgja a góljait, és attól kapja, könnyen teljesíthetők a többiek kívánságai. Ekkor optimalizációs cél lehet, hogy a többlet csapat szerepe minél kisebb legyen. Egy másik lehetőség, hogy több csapatnál is megengedjük a kívánságoktól való eltérést, de az eltérések összegét akarjuk minimalizálni.

8. Hiperversenyek [15, 19, 16, 46, 52, 53, 61, 62, 65, 63, 64]

Korábban a tanszéken rendszeresen rendeztünk ultibajnokságot. Hármass csoportokban játszottunk. Mi időre játszottunk, de lehetne úgy, hogy például 1000 pontot teszünk az asztal közepére, és azon osztozunk.

Szoktunk hárman úgy teniszezni, hogy felváltva vagyunk egyedül, és 5 gómet játszunk. Így mindig van győztes. A győzelem két pontot ér (ha ketten győznek, feleznek). Így egy „körben” hat pont osztódik ki, és a lehetséges kiosztások halmaza $S = (4, 1, 1), (3, 3, 0), (2, 2, 2)$. Ez így egy hiányos $(6, 6, 3)$ hipersport. Ha valahogy definiálunk egy győztest, aki egy pontot kap, akkor egy teljes $(1, 1, 3)$ hipersportot kapunk. Utóbbira átvihető a Landau-tétel lényege, előbbi nehéz.

Négyen szoktunk úgy játszani, hogy minden párosításban játszunk egy szettet. Ha egy szet két pontot ér, amelyet a győztesek osztanak el egymás között, akkor $S = (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 0)$ és egy hiányos $(6, 6, 4)$ hipersportot kapunk. Ha csak egy győztest definiálunk, akkor egy teljes $S = (1, 1, 4)$ hipersportot kapunk.

Nem nehéz megmutatni, hogy például az $(1, 1, 3)$ hiperversenyekkel csak bizonyos egyelemű halmazok állíthatók elő.

Csirik János kérdezte az előadáson, mire képesek a hipersportolók, ha megengedjük, hogy csak a meccsek egy részét játsszák le. Vagy milyen pont-

sorozatokat tudnak előállítani, ha például ismert sorsolás mellett adott számú fordulót (vagy mindannyian adott számú meccset) játszottak le [7].

Ezzel kapcsolatos Pálvölgyi Dömötör eredménye [40]: ha előírjuk, hogy milyen meccsek legyenek lejátszva, akkor már a teniszversenyek esetén is NP-nehéz a sorozatok ellenőrzése.

9. Hiperversenyek egyelemű pontthalmazai [?, 47, 48, 49, 66]

Foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy a különböző hiperversenyek esetén milyen egyelemű pontthalmazok vannak, és azok hányféle pontsorozattal állíthatók elő.

Mivel $k = 2$ esetén Yao tétele szerint nemnegatív számok bármely halmaza lehet pontthalmaz, ezért az első kérdésre az a válasz, hogy tetszőleges $p \geq 0$ egész számhoz van olyan $H \in \mathcal{H}(1, 1, 2, n)$ verseny, amelynek a pontthalmaza éppen $\{p\}$. Azt is könnyű belátni, hogy minden p -hez egyetlen pontsorozat tartozik. Ugyanis ebben az esetben a játékosnak összesen egyrészt np , másrészt pedig $\binom{n}{2}$ pontja van. Az

$$\binom{n}{2} = np$$

egyenletből egyértelműen adódik, hogy csak $n = 2p + 1$ játékos esetén lehet minden játékosnak p pontja. Ha feltesszük, hogy a P_i játékos pontosan a P_j ($j = i + 1, i + 2, \dots, i + p$) (mod n) játékosok ellen győzött, akkor beláttuk, hogy $k = 2$ esetén minden $p \geq 0$ szám esetén az $s = (p)^{2p+1}$ pontsorozat állítja elő a megfelelő pontthalmazt.

Érdekesebb a $k = 3$ eset. Most a

$$\binom{n}{3} = np$$

szükséges feltételt kapjuk, ahonnan

$$(n - 1)(n - 2) = p3!. \quad (10)$$

a eset) Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, akkor nincs meccs, ezért a játékosok pontszáma $p = 0$.

b eset) Ha $n = 3m$ ($m = 1, 2, \dots$), akkor (10) jobb oldala osztható hárommal, a bal oldala viszont nem, ezért nincs megoldás.

c eset) Legyen $n > 3$ és $n = 3m + 1$. Ekkor az (10) egyenlőségéből

$$3m(3m - 1) = 6p$$

adódik. A bal oldalon páros m m -re a zárójel előtti, páratlan m -re pedig a zárójelben lévő tényező páros, tehát a bal oldal osztható 3-mal, így p -re a

$$p = \frac{3m(3m - 1)}{6}$$

kifejezést kapjuk.

d eset) Legyen $n > 3$ és $n = 3m + 2$. Ekkor az (10) egyenlőségből

$$(3m + 1)3m = 6p.$$

feltétel adódik. A bal oldal most is mindig osztható hattal, és így p -re a

$$p = \frac{(3m + 1)3m}{6}$$

kifejezést kapjuk, ahonnan

$$p = \frac{(3m + 1)3m}{6}.$$

A HIPER-SZELETELÉS algoritmussal helyreállíthatjuk a megfelelő pontsorozatot.

Ezzel a módszerrel tetszőleges $k \geq 3$ eset kezelhető.

@@

Az irodalomjegyzékben **letölthető** megjegyzéssel szereplő művek letölthetők a megadott honlapról, a **digitálisan** megjegyzéssel szereplő művek pedig a <http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Oktatas/Algoritmusok-hatekonysaga> honlapról.

Irodalomjegyzék

- [1] P. Avery, Score sequences of oriented graphs. *J. Graph Theory* **15** 3 (1991) 251–257. **SZTAKI Könyvtár** [3](#)
- [2] L. B. Beasley, D. E. Brown, K. B. Reid, Extending partial tournaments. *Math. Comput. Modelling* **50** 1 (2009) 287–291. **letölthető** [3](#)
- [3] T. Bernholt, A. Gülich, T. Hofmeister, N. Schmitt, I. Wegener, Komplexitätstheorie, effiziente Algorithmen und die Bundesliga, *Informatik-Spektrum* **25** (2002) 488–502. **letölthető** [2](#)
- [4] A. R. Brualdi, J. Shen, Landau’s inequalities for tournament scores and a short proof of a theorem on transitive sub-tournaments, *J. Graph Theory* **38** 4 (2001) 244–254. [3](#)

- [5] A. R. Brualdi, K. Kiernan, Landau's and Rado's theorems and partial tournaments. *Electron. J. Combin.* **16** #N2 (6 pp) (2009). **letölthető** [3](#)
- [6] Csirik János: Szóbeli kérdés. Szeged, 2003. április 22. [3](#)
- [7] Csirik János: Szóbeli kérdés. Szeged, 2011. március 29. [7](#)
- [8] P.L. Erdős, I. Miklós, Z. Toroczkai: A simple Havel-Hakimi type algorithm to realize graphical degree sequences of directed graphs. *Electron. J. Combin.* **17** (1) (2010), R66 (10 pp). **letölthető**
- [9] P. Erdős, T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok* **11** (1960) 264–274. **ELTE Matematikai Könyvtár** [3](#)
- [10] A. Frank, A. Gyárfás, [How to orient](#) the edges of a graph? In *Combinatorics. Vol. 1* (ed. A. Hajnal and V. T. Sós), North-Holland, Amsterdam-New York, 1978. pp. 353–364. **letölthető** [3](#)
- [11] S. V. Gervacio, Score sequences: Lexicographic enumeration and tournament construction *Discrete Math.* **72** 1–3 (1988) 151–155. [3](#)
- [12] S. V. Gervacio, Construction of tournaments with a given score sequence. *Southeast Asian Bull. Math.* **17** 2 (1993) 151–155. [3](#)
- [13] J. Griggs, K. B. Reid, Landau's theorem revisited, *Australas. J. Comb.* **20** (1999) 19–24. **letölthető** [3](#)
- [14] B. Guiduli, A. Gyárfás, S. Thomassé, P. Weidl, 2-partition-transitive tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **72** 2 (1998) 181–196. **digitálisan** [3](#)
- [15] G. Gutin, A. Yeo, [Hamiltonian paths and cycles in hypertournaments](#), *J. Graph Theory* **25** (4) (1997) 277–286. **letölthető** [6](#)
- [16] M. Hager: On score sets for tournaments, *Discrete Mathematics* **58** (1) (1986) 25–34. **digitálisan** [4](#), [6](#)
- [17] S. L. Hakimi, On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a simple graph. *J. SIAM Appl. Math.* **10** (1962) 496–506. **digitálisan** [3](#)
- [18] S. L. Hakimi, On the degrees of the vertices of a directed graph. *J. Franklin Inst.* **279** (1965) 290–308. **digitálisan** [5](#)
- [19] Hámori Ádám: [Rangsorolás](#) csoportos összehasonlítással. TDK dolgozat kézírata. ELTE [IK](#), Budapest, 2011. **letölthető** [3](#), [6](#)
- [20] V. Havel: A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Časopis Pěst. Mat.* **80** (1955), 477–480. **digitálisan** [3](#)
- [21] [Imreh](#) Csanád: Szóbeli közlés. Szeged, 2011, március 29. [2](#)
- [22] A. Iványi: Maximal tournaments, *Pure Math. Appl.* **13** (1–2) (2002), 171–183. **digitálisan** [2](#)
- [23] A. Iványi: Rangsorolási algoritmusok. Szegedi informatikai szeminárium, 2003. április 22. **digitálisan** [2](#)

- [24] A. [Iványi](#): Pontsorozatok ellenőrzése. XXV. Operációkutatási konferencia előadáskivonatai (Debrecen, 2004. október 17–20). **digitálisan** [2](#)
- [25] A. [Iványi](#): Deciding the validity of the score sequence of a soccer tournament. In: *Open problems of the [Egerváry Research Group](#)*. **letölthető** [2](#)
- [26] A. [Iványi](#): Reconstruction of complete interval tournaments. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, **1** (1) (2009), 71–88. **letölthető** [3](#)
- [27] A. [Iványi](#): Reconstruction of complete interval tournaments. II. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, **2** (1) (2010), 47–71. **letölthető** [4](#)
- [28] A. [Iványi](#): Directed graphs with prescribed score sequences. In: Proc. of the 7th Hungarian-Japanese Symposium (Kyoto, May 31 - June 3, 2011), elfogadva. **digitálisan** [6](#)
- [29] A. [Iványi](#): B. M. [Phong](#): On the unicity of multitournaments. In: *Fifth Conference on Mathematics and Computer Science* (Debrecen, June 9–12, 2004), 2004. **digitálisan** [4](#), [5](#)
- [30] A. [Iványi](#): B. M. [Phong](#), S. Pirzada: Score sets of (a, b) -tournaments. In: *Automata and Formal Languages* (Debrecen, August 17–22, 2011), benyújtva. **digitálisan** [4](#)
- [31] A. [Iványi](#), S. [Pirzada](#): Comparison based ranking. In: *Algorithms of Informatics*, Vol. 3, ed. by A. Iványi. AnTonCom, Budapest 2011, 1262–1291. Manuscript. **digitálisan** [3](#), [4](#), [5](#), [6](#)
- [32] A. Kemnitz, S. Dolff: Score sequences of multitournaments. *Congr. Numer.* **127** (1997), 85–95. **nyomtatva** [3](#)
- [33] W. Kern, D. Paulusma: The new FIFA rules are hard: complexity aspects of sports competitions, *Discrete Applied Mathematics* **108** (2001) 317–323. **letölthető** [2](#)
- [34] H. Kim, Z. Toroczka, I. Miklós, P. L. [Erdős](#), L. A. [Székely](#): **Degree-based** graph construction. *J. Physics: Math. Theor. A* (2009) **42** (39) 392001 (10 pp). **letölthető** [5](#)
- [35] Kovács Gábor Zsolt, Pataki Norbert: Rangsorolási sorozatok elemzése. TDK dolgozat. ELTE TTK Informatikai Tanszékcsoport, Budapest, 2002. **digitálisan** [4](#)
- [36] H. G. Landau: On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score sequence, *Bull. Math. Biophys.* **15** (1953), 143–148. **digitálisan** [3](#)
- [37] D. Meierling, L. [Volkman](#): A remark on degree sequences of multigraphs. *Math. Methods Oper. Res.* **69** (2) (2009) 369–374. **letölthető** [3](#)

- [38] J. W. Moon: An extension of Landau's theorem on tournaments. *Pacific J. Math.* **13** (1963) 1343–1345. **letölthető** [3](#)
- [39] J. W. Moon: *Topics on Tournaments*. Holt, Rinehart and Winston. New York, 1968. **Rényi Intézet Könyvtára** [3](#)
- [40] D. Pálvölgyi: Deciding soccer scores and partial orientations of graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* **1** (1) (2009) 35–42. **letölthető** [2](#), [7](#)
- [41] L. Pan, G. Zhou, K. Zhang: A note on hypertournaments. *Chinese Science Bulletin*, **44** (16) (1999) 1460–1463. **letölthető**
- [42] A. N. Patrinos, S. L. Hakimi: Relations between graphs and integer-pair sequences. *Discrete Math.* **15** (4) (1976) 347–358. [5](#)
- [43] G. Pécsy, L. Szúcs: Parallel verification and enumeration of tournaments. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Inform.* **45**, 2 (2000) 11–26. **letölthető** [3](#)
- [44] V. Petrovic, C. Thomassen, Edge-disjoint Hamiltonian cycles in hypertournaments. *J. Graph Theory* **51** (1) (2006) 49–52.
- [45] S. Pirzada: *Graph Theory*. Orient BlackSwan, Hyderabad, 2011 (nyomdában). **digitálisan**
- [46] S. Pirzada, T. A. Chishti, T. A. Naikoo, Score sequences in $[h-k]$ -bipartite hypertournaments. (Russian) *Diskret. Mat.* **22** (1) (2010) 150–157. [6](#)
- [47] S. Pirzada, A. Iványi, M. A. Khan: Score sets and kings in oriented graphs. In: *Algorithms of Informatics*, Vol. 3, ed. by A. Iványi. AnTonCom, Budapest 2011. Kézirat. **digitálisan** [4](#), [7](#)
- [48] S. Pirzada, T. A. Naikoo, On score sets in tournaments. *Vietnam J. Math.* **34** (2) (2006) 157–161. MR2247575 (2007h:05071) **digitálisan** [7](#)
- [49] S. Pirzada, T. A. Naikoo: Score sets in oriented graphs. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, **2** (2008), 107–113. **letölthető** [7](#)
- [50] S. Pirzada, T. A. Naikoo, U. Samee, A. Iványi: Imbalances in directed multigraphs. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, **2** (2) 2010, 137–145. **letölthető** [3](#)
- [51] S. Pirzada, T. A. Naikoo, G. Zhou: Score lists in tripartite hypertournaments. *Graphs Combin.* **23** (4) (2007) 445–454. **letölthető**
- [52] S. Pirzada, G. Zhou: Score lists in (h, k) -bipartite hypertournaments. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B* **22** (4) (2007) 485–489. **letölthető** [6](#)
- [53] S. Pirzada, G. Zhou, A. Iványi: Score lists in multipartite hypertournaments. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, **2** (2) (2010), 184–193. **letölthető** [6](#)

- [54] K. B. [Reid](#): Score sets for tournaments. *Congr. Numer.* **21** (1978) 607–618. [4](#)
- [55] K. B. [Reid](#): Tournaments: Scores, kings, generalizations and special topics. *Congr. Numer.* **115** (1996) 171–211. **nyomtatva** [3](#)
- [56] K. B. [Reid](#), C. Q. Zhang: Score sequences of semicomplete digraphs. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **24** (1998) 27–32.
- [57] K. B. [Reid](#), Tournaments. In *Handbook of Graph Theory* (ed. J. L. Gross, J. Yellen), CRC Press, Boca Raton, 2004. **ELTE TTK Könyvtára** [4](#)
- [58] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.* **9** (1957) 371–377. **letölthető** [3](#)
- [59] G. Sierksma, H. Hoogeveen: Seven criteria for integer sequences being graphic, *J. Graph Theory* **15** (2) (1991) 223–231. **digitálisan**
- [60] C. Thomassen: Landau’s characterization of tournament score sequences. In *The Theory and Applications of Graphs*. John Wiley & Sons, 1981, pp. 589–591. [3](#)
- [61] C. Thomassen: [Edge-disjoint Hamiltonian paths and cycles in tournaments](#). *Proc London Math. Soc.* **45** (2) (1982) 151–168. **letölthető** [6](#)
- [62] C. Wang, G. [Zhou](#): Note on the degree sequences of k -hypertournaments. *Discrete Mathematics* **308** (2008) 2292–2296. **letölthető** [6](#)
- [63] G. [Zhou](#), S. [Pirzada](#): Degree sequences of oriented k -hypergraphs. *J. Appl. Math. Comput* **27** (1–2) (2008) 149–158. **letölthető** [6](#)
- [64] G. [Zhou](#), T. Yao, K. Zhang: On score sequences of k -hypertournaments. *Eur. J. Comb.* **21** (8) (2000) 993–1000. **letölthető** [6](#)
- [65] J. [Yang](#): Vertex-pancyclicity of [hypertournaments](#). *J. Graph Theory* **63** (4) (2010) 338–348. **letölthető** [6](#)
- [66] X. Yao: On Reid conjecture of score sets for tournaments, *Chinese Science Bulletin*, **10** (1989), 804–808. **nyomtatva** [4](#), [7](#)

Iványi Antal: tony@compalg.inf.elte.hu