PONTHALMAZOK

(Előadás 2004. május hatodikán a *Komputeralgebra Tanszék* szemináriumán)

VÁZLAT

- Kapcsolat elmélettel, gyakorlattal (rangsorolás, P = NP)?
- Mire képesek a teniszezők (mennyiség, minőség)?
- Mire képesek a sakkozók?
- Mire képesek a magyar, német, japán és amerikai focisták, bridzsezők, ultizók?

1. DEFINÍCIÓK

Rangsorolási feladat: n objektumot (például számítógépet, programot, mosóport, képviselőjelöltet, biológiai faj egyedét, sportolót) sorba kell rakni.

k-verseny: n játékost páronként összehasonlítunk és minden összehasonlítás *(*meccs) során k pontot osztunk ki a két játékos között.

Példák:

- A *tenisz* teljes 1-sport (meccsenként a győztes 1, a vesztes 0 pontot kap).
- A *sakk* teljes 2-sport (győzelemért 2, vereségért 0, döntetlenért 1 pontot kapnak a játékosok).

Pontszám: A $\mathcal{P}_i$ játékos által összesen szerzett pontok száma, melyet p_i-vel jelölünk.

Pontsorozat: A játékosok pontszámait tartalmazó $\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle$ sorozat. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a pontsorozat nemcsökkenően rendezve van.

Ponthalmaz: a pontsorozat különböző elemeit tartalmazó $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ halmaz. Az egyszerűség kedvéért a ponthalmaz elemeit növekvő sorrendben adjuk meg.

Reguláris verseny: a pontszámok azonosak.

Gyakorisághalmaz: a pontsorozat elemeinek különböző gyakoriságait tartalmazó $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \ldots, r_q\}$ halmaz. Az egyszerűség kedvéért a gyakorisághalmaz elemeit növekvő sorrendben adjuk meg.

Versenyek mátrixos ábrázolása: $M = [m_{ij}]_{n\times n}$ mátrixokkal, melyek elemei nemnegatív egészek, $m_{ii} = 0$ és ha $i \neq j$, akkor $m_{ij} + m_{ji} = k$. A $\mathcal{P}_\rangle$ játékos pontszáma a mátrix i-edik sorában lévő elemek összege.

Versenyek gráfos ábrázolása: $G = (V, E)$ irányított gráffal, amelyben $V = \{\mathcal{P}_\infty, \mathcal{P}_\in, \ldots, \mathcal{P}_\backslash\}$ és minden csúcspárt k irányított él köt össze úgy, hogy a kimenő élek a kapott pontoknak felelnek meg. Ezért egy játékos pontszáma a neki megfelelő csúcs kifoka.

Példaként tekintsük az 1. táblázatban látható *tranzitív* versenyt:

	A	B	C	D	E	Pontszám
A	X	1	1	1	1	4
B	0	X	1	1	1	3
C	0	0	X	1	1	2
D	0	0	0	X	1	1
E	0	0	0	0	X	0

1. táblázat. A tranzitív teniszverseny $n = 5$ játékossal.

	A	B	C	D	E	Pontszám
A	X	1	1	1	0	3
B	0	X	1	1	1	3
C	0	0	X	1	1	2
D	0	0	0	X	1	1
E	1	0	0	0	X	1

2. táblázat. Egy teniszverseny $n = 5$ játékossal.

Ebben az esetben a pontsorozat $\langle 0, 1, 2, 3, 4\rangle$, a ponthalmaz $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ és a gyakoriságbalmaz $\{1\}$.

Ha az A és E játékos közti eredményt megfordítjuk, a 2. táblázatban látható versenyt kapjuk.

Most a pontsorozat $\langle 1, 1, 2, 3, 3\rangle$, a ponthalmaz $\{1, 2, 3\}$ és a gyakoriságbalmaz $\{1, 2\}$.

2. KÉRDÉSEK

Néhány, a témakörben eddig vizsgált kérdés a következő:

- *Ellenőrzés:*
  - adott sorozat pontsorozata-e adott sportnak?
  - adott halmaz ponthalmaza, gyakoriságbalmaza-e adott sportnak?
- *Helyreállítás:* adott sport pontsorozatához, ponthalmazához, gyakoriságbalmazához adjunk meg versenyt.
- *Leszámlálás:* adott sport és adott játékosszám mellett hány pontsorozat, ponthalmaz és gyakoriságbalmaz van?
- *Listázás:* adott sport és adott játékosszám mellett az összes megfelelő sorozat, halmaz, verseny előállítása.

3. KORÁBBI EREDMÉNYEK

Landau 1953-ban [1] megadta annak – gyorsan ellenőrizhető – szükséges és elégséges feltételét, hogy egy nemnegatív számokból álló, nemcsökkenő sorozat egy 1-verseny pontsorozata legyen.

Reid 1978-ban [2] fogalmazta meg azt a sejtését, hogy minden, nemnegatív egészekből álló halmaz ponthalmaz. Egyúttal megmutatta, hogy ha egy halmaz 1, 2 vagy 3 nemnegatív egész számból áll, akkor megadható hozzá megfelelő verseny. Azt is megmutatta, hogy ha egy halmaz elemei számtani és mértani sorozatot alkotnak, akkor is megadhatók. **Hager** 1986-ban [3] konstruktív bizonyítást adott 4 és 5 elemet tartalmazó halmazokra, majd **Yao** 1989-ben [4] minden pozitív n-re bizonyította a megfelelő pontsorozat létezését – anélkül, hogy megadta volna, hogyan lehet előállítani a megfelelő pontsorozatokat.

Yao bizonyítása nem ad választ arra a kérdésre, hogy egy konkrét halmaz **egyértelmű** (egyetlen pontsorozathoz tartozik), vagy többértelmű (több, neki megfelelő pontsorozat is létezik).

Elemzésünk célja:

- Reid sejtésének konstruktív bizonyítása;
- a többértelmű halmazok konstruktív meghatározása (legalább két elemük előállítása).

4. JELÖLÉSEK, GRÁFOS ÉS ARITMETIKAI MEGFOGALMAZÁS

Legyenek n és m pozitív egészek, $\mathbf{s} = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n\rangle$ nemnegatív egészeket tartalmazó vektor és $\mathcal{R} = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ nemnegatív egészeket tartalmazó halmaz, ahol $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$ és $0 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_m$.

Legyen T egy teljes irányított gráf, melynek csúcshalmaza $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, kifokainak nemcsökkenően rendezett sorozata $\mathbf{s}$ és különböző kifokainak halmaza (melyben az elemeket mindig növekedő sorrendben adjuk meg) pedig $\mathcal{R}$.

Landau tétele [1] a következő.

1.1. tétel. *Az* $\mathbf{s}$ *sorozat akkor és csak akkor pontsorozata egy* T *versenynek, ha*

$$\sum_{i=1}^{j} s_i \ge \binom{j}{2} \quad (j \in [1:n]) \tag{1.1}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}. \tag{1.2}$$

Az (1.1) egyenlőtlenségeket első, második, ..., (n)-edik **Landau-egyenlőtlenségnek,** míg az (1.2) egyenlőséget **Landau-egyenlőségnek** fogjuk nevezni.

Bizonyítás. Mivel j játékos $\binom{j}{2}$ meccset játszik egymással, ezért a megadott feltételek szükségesek.

Az elégségesség belátható például Ryser helyreállító algoritmusa segítségével. Ennek lényege, hogy rendre meghatározzuk a legnagyobb pontszámú játékos eredményeit úgy, hogy feltesszük: az utána következők ellen veszített, és a kis pontszámúak ellen nyert (amikor egy játékosnak egy győzelmet adunk, egyúttal eggyel csökkentjük a még megszerzendő pontjainak a számát.) ■

Ryser algoritmusa a 3. ábrán látható versenyt rendeli a 2. ábra pontsorozatához.

Reid sejtése azt mondta ki, hogy minden $\mathcal{R}$ halmazhoz megadható olyan $\mathbf{s}$ vektor, hogy

	A	B	C	D	E	Pontszám
A	X	0	1	1	1	3
B	1	X	0	1	1	3
C	0	1	X	0	1	2
D	0	0	1	X	0	1
E	0	0	0	1	X	1

3. táblázat. Ryser algoritmusának alkalmazása $n = 5$ játékossal.

a halmaz pontosan a vektor különböző elemeit tartalmazza.

Reid problémafelvető cikkében [2] – Landau tételét felhasználva – a következő, az eredetivel ekvivalens – formában is megfogalmazta sejtését.

1.2. sejtés. *Ha* $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_m$*, akkor megadhatók olyan* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ *pozitív egész együtthatók, hogy*

$$\sum_{i=1}^{j} x_i r_i \geq \binom{\sum_{i=1}^{j} x_i}{2} \quad (j \in [1:m]) \tag{1.3}$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} x_i r_i = \binom{\sum_{i=1}^{m} x_i}{2}. \tag{1.4}$$

Az (1.3) egyenlőtlenségeket **Reid-egyenlőtlenségeknek,** az (1.4) egyenlőséget pedig **Reid-egyenlőségnek** fogjuk nevezni. A $\sum_{j=1}^{m} x_i$ összeget – az eredeti megfogalmazással összhangban – n-nel fogjuk jelölni.

A sejtésben szereplő $\mathcal{R}$ halmaz és x_j gyakoriságok által meghatározott **s** vektor megadására használni fogjuk a $\langle r_1^{x_1}, r_2^{x_2}, \ldots, r_m^{x_m} \rangle$ jelölést. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az **s** vektor **megvalósítja** a $\mathcal{R}$ halmazt, vagy a vektor **megoldása** a halmaznak.

A T' és T'' versenyek **összege** az a $T = T' \to T''$ verseny, melyben a csúcshalmaz az eredeti csúcshalmazok uniója, az élhalmazt pedig úgy kapjuk, hogy a régi élek irányítása megmarad, az új élek pedig T' csúcsaiból T'' csúcsaiba vezetnek. Ennek megfelelően az $\sqcap = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$ és $\langle v_1, v_2, \ldots, v_b \rangle$ **sorozatok összege** $\mathbf{u} \to \mathbf{v} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_b, u_1 + a, u_2 + a, \ldots, u_b + a \rangle$.

5. ÁLTALÁNOS TULAJDONSÁGOK, SPECIÁLIS ESETEK

Először egy hasznos becslést látunk be, amely szükséges feltételt tartalmaz adott halmazt megvalósító sorozat hosszára nézve.

1.3. lemma. *Ha az* **s** *vektor megoldása az* $\mathcal{R}$ *halmaznak, akkor az* $m = 1$ *esetben*

$$n = 2r_1 + 1, \tag{1.5}$$

az $m \geq 2$ *esetben pedig*

$$2r_1 + 2 \leq n \leq 2r_m \tag{1.6}$$

és

$$n \geq r_m + 1. \tag{1.7}$$

Bizonyítás. Ha $m = 1$, akkor a (1.4) egyenlőség szerint $x_1 r_1 = x_1(x_1 - 1)/2$, ahonnan $x_1 = 2r_1 + 1$.

Ha $m \geq 2$, akkor a (1.4) egyenlőség baloldalát r_i helyett mindenütt r_1-et írva csökkentjük, és mindenütt r_m-et írva növeljük, így a $(x_1 + \cdots + x_m)r_1 < n(n-1)/2 < (x_1 + \cdots + x_m)r_m$, ahonnan (1.6) már következik. A (1.7) egyenlőtlenség abból adódik, hogy az r_m fokszámú csúcsból r_m másik csúcsba megy él. ■

Reid klasszikus cikkében azt írta, hogy a reguláris versenyek példaként szolgálnak arra, hogy egy verseny ponthalmaza állhat egy elemből. Ennel több is igaz.

1.4. következmény. *Ha $\mathcal{R} = \{r_1\}$, akkor az $\mathbf{s} = \langle r_1^{2r_1+1} \rangle$ sorozat megvalósítja az $\mathcal{R}$ halmazt, más sorozat viszont nem.*

Bizonyítás. A (1.3) lemmából adódik, hogy csak ez a sorozat jön szóba. Mivel mind a Reid-egyenlőtlenség, mind a Reid-egyenlőség teljesül, így ez valóban megoldás.

A sorozatnak megfelelő verseny előállítható például úgy, hogy a V_i csúcsból a V_j ($j = i+1, i+2, \ldots, i+r_1 \pmod{n}$) csúcsokba vezet él. ■

Ezután a két elemű halmazokra vonatkozó állítást és annak C. Waldroptól [2] származó bizonyítását adjuk meg.

1.5. lemma. *Ha $0 \leq a < b$, akkor vannak olyan x és y pozitív egészek, melyekre*

$$ax \geq \binom{x}{2} \tag{1.8}$$

és

$$ax + by = \binom{x+y}{2}. \tag{1.9}$$

Bizonyítás. Legyen $d = b - a$ és $b = qd + r$ ($0 \leq r < d$). Könnyen ellenőrizhető, hogy a $x = q(2r+1)$ és $y = q(2d - 2r - 1)$ együtthatók kielégítik mind az (1.16) egyenlőtlenséget, mind pedig az (1.17) egyenlőséget. ■

Ha egy halmaz vagy sorozat tartalmazza a nulla elemet, **redukálhatónak** nevezzük. Redukálható halmaz **redukálása** a nulla elem elhagyását és a többi elem eggyel való csökkentését jelenti.

1.6. lemma. *Ha a legalább két elemet tartalmazó $\mathcal{R}$ halmaz redukálható, akkor annyi megvalósítása van, mint az $\mathcal{R}' = \{r_2 - 1, r_3 - 1, \ldots, r_m - 1\}$ halmaznak és ezek a megvalósítások előállíthatók úgy, hogy az $\mathcal{R}'$ halmaz minden $\mathbf{s}$ előállításából $\langle 0, s_1 + 1, s_2 + 1, \ldots, s_n + 1 \rangle$ sorozatot készítünk.*

Bizonyítás. Landau második egyenlőtlensége miatt a pontsorozatokban legfeljebb egy darab nulla lehet. Ha a halmazban van nulla, akkor a megvalósításban is lesz – pontosan egy – nulla. Ezért a redukált halmazok és sorozatok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. ■

A két elemet tartalmazó halmazok egy része egyértelmű.

1.7. lemma. *Ha $k \geq 1$, akkor a $\{0, k\}$, $\{k, k+1\}$ és $\{k, k+2\}$ halmazok egyértelműek.*

Bizonyítás. A $\{0, k\}$ eset a 1.6 lemmából adódik.

A $\{k, k+1\}$ esetben a (1.6) egyenlőtlenség csak az $n = 2k+2$ értéket engedi meg, amiből egyértelműen adódik a feltételeket kielégítő egyetlen megoldás: $\mathbf{r} = \langle k^{k+1}, (k+1)^{k+1}\rangle$.

$\{k, k+2\}$ esetben az (1.6) egyenlőtlenség az $n = 2k+2$, $n = 2k+3$ és $n = 2k+4$ értékeket engedi meg. A Reid-egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$x_2 = \frac{n(n-2k-1)}{4}\,. \tag{1.10}$$

Két esetet vizsgálunk: $k = 2q+1$ vagy $k = 2q$. Ha k páros, akkor az (1.10) feltétel csak x_2 csak $n = 2k+4$ esetén lesz egész szám, amiből az egyetlen $\mathbf{r} = \langle k^{(k+2)/2}, (k+2)^{(3k+6)/2}\rangle$ megoldást kapjuk.

Ha viszont k páratlan, akkor az (1.10) feltétel szerint x_2 csak az $n = 2k+2$ esetben lesz egész, ahonnan az egyetlen megoldás $\mathbf{r} = \langle k^{(3k+3)/2}, (k+2)^{(k+1)/2}\rangle$. ■

Az $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ halmazt ***sűrűnek*** nevezzük, ha $r_2 \le 2r_1$ és $r_j < 2r_{j-1}$ ($j = 2, 3, \ldots, m-1$). Ha ez a feltétel nem teljesedik, akkor a halmazt ***ritkának*** nevezzük.

Most egy módszert mutatunk be – két elem példáján – mellyel jól vizsgálható a halmazok egyértelműsége.

A 1.5 lemma jelöléseit használva a (1.4) egyenlőségből

$$2ax + 2(a+d)y = n(n-1), \tag{1.11}$$

ahonnan

$$y = \frac{n(n-2a-1)}{2d}\,. \tag{1.12}$$

Az (1.6) feltétel szerint csak az $n = 2a+1+i$ ($i \in [1, 2d-1]$) értékek jöhetnek szóba, és az (1.7) egyenlőtlensége miatt az

$$i \ge d+1-a \tag{1.13}$$

feltételnek is teljesednie kell. Az (1.12) egyenlőtlenségből az $a = (q-1)d$ helyettesítéssel

$$y = \frac{(2qd - 2d + 2r + 1 + i)i}{2d}\,. \tag{1.14}$$

Itt y-nak egésznek kell lennie, amit majd az (1.14) képlet helyett az

$$y = i(q-d) + \frac{(2r+1+i)i}{2d} \tag{1.15}$$

alak segítségével vizsgálunk.

Most már előkészítettük a két elemre vonatkozó egyértelműségi állítást.

1.8. tétel. *Ha $0 \le a < b$, akkor vannak olyan x és y pozitív egészek, melyekre*

$$ax \ge \binom{x}{2} \tag{1.16}$$

és

$$ax + by = \binom{x+y}{2}\,. \tag{1.17}$$

A következő esetekben csak egyetlen megfelelő (x, y) pár van:

- $a = 0$;

- $d = 1$;
- $d = 2$.

A következő esetben több megoldás van:

- *d páratlan és* $3 \le d \le a$.

Bizonyítás. Legyen $i = 2d-2r-1$. Ekkor az $n = 2(b-r)$, $y = q(2d-2r-1)$ és $x = q(2r+1)$ választással minden feltételt teljesítünk.

Ha $a = 0$, akkor $d = b$, $q = 1$ és y csak az $i = 2b-1$ esetben lesz egész szám. Így megkapjuk az egyetlen $\langle 0^1, b^{2b-1}\rangle$ megoldást.

Ha $d = 1$, akkor csak az $i = 1$ érték választható, amiből egyetlen megoldásként $\langle a^b, b^b\rangle$.

Ha $d = 2$, akkor a (1.15) képletben lévő tört számlálójában i páros vagy páratlan: ha páros, akkor első tényező páratlan, a második pedig kisebb a nevezőnél – ha viszont páratlan, akkor csak már korábban megtalált $i = 2d-2r-1$ érték felel meg.

Ha d páratlan, akkor az $i = d$ esetben (1.15) alapján $y = (q-1)d+r+(d+1)/2, n = b+1$ és $x = (d+1)/2$. Ha $d \le 2a$, akkor ezek megfelelő értékek és megadják a keresett második megoldást. ■

A tétel nyitva hagyta azt az esetet, amikor a d különbség páratlan, és a halmazunk ritka, valamint azt, amikor a d különbség kettőnél nagyobb páros szám.. A módszerrel ezek az esetek is kezelhetők, de több munkát igényelnek.

A ritka halmazok megvalósítása visszavezethető kisebb méretű sűrű halmazok megvalósítására. Ha például az $\mathcal{R}$ halmazhoz van olyan $j \ge 3$ index, hogy $r_j \ge 2r_{j-1}$, akkor az $\mathcal{R}' = \{r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}\}$ halmaz egy – n_1 elemű (ahol az 1.3 lemma szerint $n_1 \le 2r_{j-1}$) – megvalósításának és az $\mathcal{R}'' = \{r_j - n_1, r_{j+1} - n_1, \ldots, r_m - n_1\}$ tetszőleges megvalósításának összege $\mathcal{R}$ megvalósítása lesz.

Ha egy halmaz valamelyik eleme lényegesen nagyobb, mint az őt megelőző, akkor ugró elemnek hívjuk. Az ugró elemet tartalmazó halmazok vizsgálata visszavezethető 2 kisebb halmaz vizsgálatára.

1.9. lemma (ugró elem). *Ha* $m \ge 3$ *és az* $\mathcal{R}$ *halmaznak van olyan* r_j $(j \ge 3)$ *eleme, amelyre*

- $r_j \ge 2r_{j-1}$;
- $\mathcal{R}' = \{r_1, r_2, \ldots, r_i - 1\}$ *ponthalmaz és* $\sqcap = \langle u_1, u_2, \ldots, u_a\rangle$ *ennek a halmaznak egy megvalósítása;*
- $\mathcal{R}'' = \{r_j - a, r_{j+1} - a, \ldots r_m - a\}$ *ponthalmaz és* $\sqsubseteq$ *ennek a halmaznak egy megvalósítása,*

akkor az $\mathcal{R}$ *halmaz is ponthalmaz és* $\mathbf{v} \to \mathbf{u}$ *ennek halmaznak egy megvalósítása.*

Bizonyítás. A 1.3 lemmában szereplő (1.6) felső korlát miatt $\mathcal{R}''$ elemei nemnegatívak, és a $\mathbf{v} \to \mathbf{u}$ összeg valóban az $\mathcal{R}$ halmaz egy megvalósítása. ■

ÚJ ALGORITMUS

Tegyük fel, hogy a vizsgált halmazban $m \ge 3$ elem van, az elemekre teljesül $0 \le r_1 < r_2 \ldots < r_m$ és a vizsgált sorozat sűrű.

A legnagyobb elemet (ez r_m) ***nagy elemnek,*** a következő legnagyobb elemet ***középső***

elemnek, a többi elemet pedig kis elemnek fogjuk nevezni. Az egyszerűség kedvéért a középső elemet s-sel, a nagy és a középső elem különbségét pedig d-vel jelöljül.

Olyan sorozatot tervezünk, melynek elemszáma $2s + 1$. Ekkor a sorozatban az átlagos pontszám pontosan s lesz. Amennyi pontot az x_m nagy elem szerez az átlagon felül (ez $x_m d$ lesz), annyi ponttal kevesebbje lesz a kis elemeknek $(x_1(s - s_1) + (x_2(s - s_2) + \ldots + x_{m-2}(s - s_{m-2})$.

A játékosokat egy mérleg két serpenyőjébe tesszük. A kicsiket balra, a nagyokat jobbra – az s pontszámúak maradnak az asztalon (középen). Először minden kicsiből teszünk egyet balra, és jobbra is teszünk egy nagyot.

Ha például a halmazunk $8, 10, 16$, akkor 21 elemű megoldást keresünk. A hiány 2 pont, a többlet 6 pont. Még két kicsit választunk, ezzel 4 elemet kiválasztottunk. Ezeket 10 pontos elemekkel 21-re egészítjük ki és így a $8^3, 10^{17}, 16^1$ megoldást kapjuk.

Ha a $4, 7, 10, 11$ halmazból indulunk ki, akkor a hiány (10 - 4) + (10 - 7) = 9 pont, a többlet pedig a jobb oldalon 11 - 10 = 1 pont. Ezért a jobb oldalra még odateszünk 8 játékost, és így már 11 játékosunk van. Marad 10 hely a 10 pontosaknak, a kapott megoldás $4^1, 7^1, 10^10, 11^9$.

Nézzünk egy nehezebb példát, legyen a halmaz $12, 15, 18, 20, 29$. Most $s = 20$, ezért 41 résztvevős teniszversenyt keresünk. A hiány (20 - 12) + (20 - 15) + (20 - 18) = 15 pont. A többlet pedig (29 - 20) = 9 pont. Jobb oldalra hiába teszünk még egy játékost, de 2 játékos már jó lesz. Ekkor a hiány 27 pont lesz. Ha például még 6 darab 18 pontos játékost teszünk jobbra, akkor készen vagyunk: 9 kicsi, 3 nagy az 12 játékos, így kell még 30 közepes, azaz a megoldás $12^1, 15^1, 18^7, 20^{30}, 29^3$.

Ezt a módszert úgy általánosítjuk, hogy ha van a kicsik között olyan szám, amelyik a d számhoz relatív prím, akkor annak a többszörösei d-vel elosztva bármilyen maradékot adhatnak. Ezért a kicsik közül választunk egy ilyen relatív prímet (ha van), és azt addig rakjuk, amíg a veszteség d többszöröse nem lesz. Ekkor a jobb oldalra odatesszük a megfelelő számú nagyot, és a sorozatot a kívánt számú közepes elemmel tesszük teljessé.

Ha a kicsik között nincs d-hez relatív prím szám, de a kicsiknek és a nagynak a legnagyobb közös osztója egynél nagyobb, akkor ezzel a legnagyobb közös osztóval elosztunk minden számot. Ha ezután találunk a kicsik között olyat, amelyik relatív prím a csökkentett különbséghez képest, akkor az előző módon keresünk megoldást, majd minden elemet megszorzunk a legnagyobb közös osztóval.

Következő példánk a $12, 16, 18, 20, 32$. Most a hiányok 2, 4 és 8 pont, a többlet pedig 12 pont. Ezek legnagyobb közös osztója a 2. Osztás után 1 és 12/2 már relatív prím lesz, ezért a 4 + 2 + 1 = 7 pont hiányhoz hozzáteszünk 5-ször 1 pontot, az már éppen kétszer 6 pont lesz. Duplázva a pontszámokat azt kapjuk, hogy lesz 6 darab 18 pontos, 1-1 darab a többi kicsiből, és lesz összesen 2 nagy. Ehhez 31 darab közepes elemet hozzávéve a $12^1, 16^1, 18^6, 20^{31}, 32^2$.

Nézzünk egy nehezebb példát: $12, 14, 20, 32$. Most a hiányok 6 és 8, a többlet 12. felezve őket 3, 4 és 6 adódik, és így egyik hiány sem relatív prím a többlethez képest. Itt például segít az, hogy a 3 pontosok (4 darab) és a 4 pontosok (3 darab) külön lesznek a 6 pont többesei. Ekkor 7 kicsit és 4 nagyot használunk fel, hozzájuk még 30 közepes kell, tehát a megoldás $(12^3, 12^4, 20^{30}, 32^4)$. Megjegyezhetjük, hogy a felezésre nem is volt szükség.

Mindezek alapján bebizonyíthatjuk Reid sejtését háromelemű halmazokra.

1.0.1. Az $m = 3$ eset vizsgálata

Mind a halmazokban, mind a sorozatokban legfeljebb egy darab nulla lehet. Ezért egy nullával kezdődő **s** sorozat pontosan akkor sorozat, ha egyetlen nullából áll, vagy az $\langle s_2 - 1, s_3 - 1, \ldots, s_n - 1\rangle$ sorozat sorozat. Továbbá, egy nullával kezdődő **r** halmaz pontosan akkor egyértelmű, ha egyetlen nullából áll, vagy pedig az $\langle r_2 - 1, r_3 - 1, \ldots, r_m - 1\rangle$ ponthalmaz egyértelmű.

Ezért mind a pontsorozatok, mind pedig a ponthalmazok vizsgálatát visszavezethetjük (egy vagy több lépésben) a pozitív számokból álló sorozatok vizsgálatára, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy $s_1 \geq 1$ és $r_1 \geq 1$.

Ha egy 3 elemű ponthalmaz legnagyobb eleme elég nagy (például nagyobb, mint a középső elem kétszerese), akkor egy neki megfelelő pontsorozat könnyen előállítható bármelyik, a két kisebb elemhez tartozó pontsorozatból: a két kisebb elemet megvalósító verseny csúcsszámát kivonjuk a ponthalmaz harmadik eleméből, és az így kapott különbséghez tartozó reguláris versenyt „felülről hozzáadjuk"" a két kisebb elemet megvalósító versenyhez (2. lemma).

Ha a 3 elemű ponthalmaz középső eleme elég nagy (például nagyobb, mint a legkisebb elem kétszerese), akkor a két nagyobb elemből kivonjuk a $2r_1 + 1$ értéket, és egy, az így kapott értékekhez tartozó sorozatot „adjuk hozzá felülről" az R_{2r+1} reguláris versenyhez.

Nehezebb az előállítás, ha sem a legnagyobb, sem a középső elem nem elég nagy ehhez.

Már láttuk, hogy az $\mathbf{r} = \langle 1, 2, 3\rangle$ ponthalmaz az $\mathbf{s} = \langle 1, 1, 2, 3, 3\rangle$, az $\mathbf{s} = \langle 1, 2, 2, 2, 3\rangle$ és az $\langle 1, 2, 3, 3, 3, 3\rangle$ sorozatból is származtatható.

Ennek a ponthalmaznak első eleme és első két eleme együtt is egyértelmű halmazt alkot – egyikük három, a másik négy hosszúságú pontsorozathoz tartozik.

1.10. tétel. *Ha $0 \leq a < b < c$, akkor vannak olyan x, y és z pozitív egészek, melyekre*

$$ax \geq \binom{x}{2}, \tag{1.18}$$

$$ax + by \geq \binom{x+y}{2} \tag{1.19}$$

és

$$ax + by + cz = \binom{x+y+z}{2}. \tag{1.20}$$

6. ÁLTALÁNOS ESET

Legyen $m \geq 4$.

Legyen a vizsgált sorozat sűrű, továbbá legyen $r_m = r_{m-1} + 1$.

Megmutatjuk, hogy ekkor vannak olyan $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pozitív egészek, melyek kielégítik a (1.3) egyenlőtlenséget és a (1.4) egyenlőséget.

Átmenetileg tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{m} x_i = n = r_m$, és az x_j gyakoriságok egy kivétellel az 1 értéket veszik fel. A kivétel x_{m-1}, melynek értéke $x_{m-1} = n - (m-1) = r_m - (m-1)$.

Ebben a „próbaversenyben" az összpontszám több, mint az n játékos által játszott $n(n-1)/2$ meccs. A hiányzó pontok száma legyen h, ahol

$$h = \binom{r_m}{2} - \sum_{i=1}^{m-2} x_i(r_{m-1} - r_i). \tag{1.21}$$

Ha egy (r_m+1)-edik játékost hozzáveszünk a próbaversenyhez, és ez a játékos az r_m meccsen $r_{m-1} = r_m - 1$ pontot szerez, akkor 1 pontunk lesz a hiány csökkentésére. Ha összesen m játékost veszünk hozzá a próbaverseny r_m játékosához, akkor $\binom{m}{2}$ hiánycsökkentő pontunk lesz.

Válasszuk meg úgy m-et, mint

$$\min\left\{k \middle| \binom{k}{2} > h\right\}. \tag{1.22}$$

Ezt elérhetjük úgy, hogy ha $\sqrt{4h+1}$ egész szám, akkor legyen $m = \sqrt{4h+1} + 1$, egyébként pedig legyen $m = \lceil \sqrt{4h+1} \rceil$.

A FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSAI

- (a, b)-sportok;
- hiányos sportok;
- kollektív sportok;
- hiányos adatok.

Teljes k-verseny: a meccseken a k pont akárhogyan kiosztható (de mindkét játékos kapott pontszáma egész szám).

Hiányos k-verseny: Csak bizonyos pontkiosztások vannak megengedve.

Teljes (a,b)-verseny: Minden meccsen legalább a és legfeljebb b pontot osztunk ki, és tetszőleges – egészekre való – felbontás meg van engedve.

Hiányos (a,b)-verseny: Minden meccsen legalább a és legfeljebb b pontot osztunk ki, és csak bizonyos pontkiosztások vannak megengedve.

Példák:

- A *magyar foci* hiányos (2,3)-sport (2 vagy 3 pontot osztunk ki meccsenként – a hármat csak 3:0, a kettőt pedig csak 1:1 módon lehet kiosztani).
- A *japán foci* hiányos (2,3)-sport – a magyar eredmények mellett a 2:0 is megengedett.
- Az *amerikai foci* hiányos (2,3)-sport – a magyar eredmények mellett a 2:1 is megengedett.
- A *bridzs* (a magyar csapatbajnokság) hiányos (25,30)-sport.
- A német *Meisterschaftsproblem* hiányos adatokat tartalmaz.
- A *háromszemélyes rabló ulti* kollektív sport.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Landau, H. H.: On dominance relations and the structure of animal societies. *Bull. Math. Biophys.* **15** (1953), 143–148.

[2] Reid, K. B.: Score sets for tournaments. *Proceedings of the Ninth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (Florida Atlantic Univ., Boca

Raton, Fla., 1978), pp. 607–618, *Congress. Numer.*, XXI, Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1978. (MR0527984, 81a:05059)

[3] Hager, Michael: On score sets for tournaments. *Discrete Math.* **58** (1986), no. 1, 25–34. (MR0820835, 87a:05073)

[4] Yao, Tian Xing: On Reid conjecture of score sets for tournaments. *Chinese Sci. Bull.* **34** (1989), no. 10, 804–808. (MR1022031, 90g:05094)

[5] Iványi, A.: Maximal tournaments. *Pure Math. Appl.* **13** (2002), no. 1-2, 171–183. (MR1987208, 2004d:05081)

[6] Frank, András: Elemezzük az ősi magyar sportot, az ultit! *Szóbeli javaslat.* Debrecen, 2002.

[7] Csirik János: Tegyük fel, hogy csak a meccsek egy részét játszották le! *Szóbeli közlés.* Szeged, 2003.

Budapest, 2004. május 5.

Antal Iványi