(a, b)-VERSENYEK

Iványi Antal, Pong Bui Minh
(*Szeged, 2011. március 29.*)

Bevezetés

Legyenek $a \geq 0$, $b \geq a$, $n \geq 1$ és $k \geq 2$ nemnegatív egész számok. A $\mathcal{T}_n(a, b)$ **verseny** olyan irányított gráf, amelynek n csúcsa van, és bármely két különböző csúcsa között összesen legalább a és legfeljebb b él van. Ez a verseny megadható olyan $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{n \times n}$ mátrixszal, amelyben $m_{ii} = 0$ $(1 \leq i \leq n)$ és $a \leq m_{ij} + m_{ji} \leq b$ $(1 \leq i < j \leq n)$.

A $\mathcal{H}_n(a, b, k)$ **hiperverseny** olyan hipergráf, amelynek n csúcsa van, és bármely k különböző csúcsa között összesen legalább a és legfeljebb b hiperél van. Ez a verseny megadható olyan $\mathcal{M} = [m_{ij}]_{c \times (n+1)}$ mátrixszal, amelynek $c = \binom{n}{k}$ sora és n oszlopa van, sorai a csúcsokból képezett k-asokhoz tartoznak (lexikografikus sorrendben) és minden sor elemei azt mutatják, hogy a k-asban szereplő csúcsokból hány hiperél meg az oszlopnak megfelelő csúcshoz.

Egy $\mathcal{T}_n(a, b)$ verseny kifokainak nemcsökkenően rendezett $\mathbf{s} = \langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ sorozatát **pontsorozatnak**, befokainak nemcsökkenően rendezett $\mathbf{t} = \langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$ sorozatát **vesztősorozatnak**, az $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ sorozatpárt **kettős sorozatnak**, a különböző kifokainak $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ halmazát pedig **ponthalmaznak** nevezzük.

A **sport** azon szabályok összessége, amelyek rögzítik a lehetséges eredményeket. Például a **tenisz** egyetlen lehetséges eredménye $S_{tenisz} = \{1 : 0\}$, a **sakk** eredményei $S_{sakk} = \{2 : 0,\ 1 : 1\}$, a focié $S_{foci} = \{3 : 0,\ 1 : 1\}$. A tenisz és a sakk **teljes sportok,** míg a foci **hiányos sport.**

1. Focimátrix előállítása, amelyben a sorösszegek különbözőek és minimális számú hármas van a mátrixban [17]

Ezt a feladatot Bege Antal kolozsvári kolléga adta Blázsik Zolinak és nekem az 1999-es visegrádi MACS konferencián, és a 2001-es félixfürdői MACS-on mondtam el a megoldást.

Egy körmérkőzéses focibajnokságban biztosítanunk kell, hogy a csapatok pontszámai különbözzenek úgy, hogy ehhez a lehető legkevesebb győzelemre legyen szükség. Először nézzük a feladatot sakkverseny esetén. Legyen $n = 2k+1$ résztvevő. Először írjunk az eredménymátrixba mindenhová egyest. Az első k versenyzőt nevezzük erősnek, a $(k+1)$-ediket közepesnek, az utolsó k-t pedig gyengének. Az első erős versenyző győzzön minden gyenge ellen, így neki $k + 2k = 3k$ pontja lesz. A második erős versenyző csak a $(k-1)$ leggyengébb ellen győzzön, $\ldots$, a k-adik erős versenyző pedig csak a $(k+2)$. versenyző ellen. Így a pontszámok $3k,\ 3k-1,\ \ldots k$ lesznek. Ez az optimális megoldás $n^2/8 + O(n)$ győzelmet igényel.

A foci optimális megoldását négy csapaton mutatom meg. Először itt is döntetlenekkel töltjük ki az eredménymátrixot, majd az első csapat nyer a második ellen és a második nyer a negyedik ellen. Így a pontszámok 5, 4, 3 és 2 lesznek, összesen két győzelem árán. Az ilyen módon kapott optimális megoldás $(3/2-\sqrt{2})n^2 + O(n) \sim 0.0858n^2 + O(n)$ győzelmet igényel.

2. Focisorozatok ellenőrzése [18, 19, 20, 34]

Kérdéses annak bonyolultsága, hogy nemnegatív egészek növekvő sorozata lehet-e egy focibajnokság pontsorozata.

2003-ban arról beszéltem, hogyan próbáltuk adott sorozatról gyorsan eldönteni, hogy lehet-e focisorozat.

3. (a,b)-sorozatok ellenőrzése [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 16, 21, 26, 27, 30, 31, 33, 36, 39, 42, 45, 47]

A témakör klasszikus eredménye Landau 1953-as tétele [30].

1.1. tétel. (Landau, 1953) *A nemnegatív egészeket tartalmazó* $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *monoton nemcsökkenő sorozat akkor és csak akkor pontsorozata egy* $(1,1,n)$*-versenynek, ha*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \ge \binom{m}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots n-1) \tag{1}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \ge \binom{n}{2}. \tag{2}$$

Ezt a tételt Moon 1963-ban [32] kiterjesztette (a,a,n)-versenyekre, majd Kemnitz és Dolff 1997-ben [27] adtak egy egyszerű bizonyítást a kiterjesztésre. Számos helyreállító algoritmus ismert, például Gervacio és Ryser [8, 9, 33] javasoltak négyzetes futási idejű algoritmust.

(a,b)-sorozatok gyors ellenőrzését teszi lehetővé a következő tétel [21].

1.2. tétel. (Iványi, 2009) *Nemnegatív egészek $D = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$ nemcsökkenő sorozata (ahol $n \geq 2$) akkor és csak akkor pontsorozata egy $T_n(a, b)$ versenynek, ha*

$$aB_k \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq bB_n - L_k - (n-k)d_k \quad (1 \leq k \leq n), \tag{3}$$

ahol

$$L_0 = 0, \text{ és } L_k = \max\left(L_{k-1},\ bB_k - \sum_{i=1}^{k} d_i\right) \quad (1 \leq k \leq n). \tag{4}$$

Ha létezik megfelelő verseny, akkor a [21] cikkben és a [15] TDK-dolgozatban leírt algoritmus $O(n^2 d_n)$ idő alatt előállít egyet.

Csirik János kérdezte 2003-ban [5], hogy mit mondhatunk egy sorozatról akkor, ha csak a mérkőzések egy része van lejátszva. Ha nem írjuk elő, mely meccsek vannak lejátszva, akkor a feladat értelmezhető $(0, 1)$-versenyként, és akkor az 1.2 tétellel megoldható.

4. (a, b)-sorozatok optimális helyreállítása [22, 26, 29]

Ha egy (s) sorozat nem pontsorozatra nem teljesednek annak szükséges feltételei, hogy (a, b)-verseny pontsorozata lehessen, találhatunk alkalmas a' és b' számokat úgy, hogy $\mathbf{s}$ pontsorozata legyen valamely (a', b')-versenynek. Ha például a P_i versenyző az összes pontját a P_{i+1} versenyző ellen szerzi (modulo n), akkor máris van megoldásunk.

Egy tavaly megjelent cikkben [22] sikerült a lehető legnagyobb a és a legkisebb b értéket meghatározni, amelyekkel adott $\mathbf{s}$ helyreállítható, és gyors helyreállító algoritmus is sikerült találni, amely a Pont-szeletelés javított változata.

5. (1,1)-halmazok és (2,2)-halmazok karakterizálása [12, 24, 25, 38, 41, 44, 49]

Reid 1978-ban fogalmazta meg [41] híres sejtését, amely szerint a teniszezők mindenre képesek. Ez matematikai formában a következő.

1.3. sejtés. (Reid, 1978) *Nemnegatív egész számok bármely H halmazához létezik olyan T_n $(1, 1)$-verseny, amelynek H a ponthalmaza.*

Probléma felvető cikkében Reid bizonyította a sejtést 1-, 2- és 3-elemű halmazokra, majd Hager 1986-ban [12] 4- és 5-elemű halmazokra. Yao 1989-ben –

Landau tételét felhasználva – átfogalmazta a következő aritmetikai állítássá, és számelméleti eszközökkel be is bizonyította [49], Konstruktív bizonyítás azonban mindmáig nem ismert.

1.4. tétel. (Yao, 1988) *Ha* $0 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_m$*, akkor léteznek olyan* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *pozitív egészek, amelyekre*

$$\sum_{i=1}^{j} x_i h_i \geq \frac{(\sum_{i=1}^{j} x_i)(\sum_{i=1}^{j} x_i - 1)}{2}, \; j \in [1 : m-1]$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} x_i h_i = \frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i)(\sum_{i=1}^{m} x_i - 1)}{2} \; .$$

A sakkozók is sok ponthalmazt elő tudnak állítani, de nem mindet [24].

1.5. lemma. (Iványi, Phong,2004) *Ha* $k \geq 1$*, és az* $\mathbf{s}$ *pontsorozathoz a* $\mathbf{h}$ *ponthalmaz tartozik, akkor az* $m = 1$ *esetben*

$$n = 2h_1 + 1 \tag{5}$$

és az $m \geq 2$ *esetben*

$$\frac{2h_1}{k} + 1 < n < \frac{2h_m}{k} + 1 \tag{6}$$

és

$$n \geq h_m + 1 \; . \tag{7}$$

Ez a lemma az $m = 1$ esetben pontos választ ad [24].

1.6. következmény. *Ha* $\mathbf{h} = \langle h_1 \rangle$*, akkor pontosan a* $\mathbf{s} = \langle h_1^{2h_1+1} \rangle$ *pontsorozathoz tartozik a* $\mathbf{h}$ *ponthalmaz.*

Másik érdekes következmény az, hogy nincs olyan sakkverseny, amelyen az első és az utolsó között egy pont különbség van. . Sakkban ugyanis $k = 2$, és ekkor (6) szerint $h_1 + 1 < n < h_m + 1$, ami nem lehetséges, ha h_m és h_1 különbsége 1.

A 2004-es debreceni MACS konferencián konstruktív eredményeket is elmondtunk.

6. Kettős (a, b)-sorozatok optimális helyreállítása [14, 26, 35]

Hakimi a következő, kettős sorozatokra vonatkozó tételt bizonyította 1965-ben [14], amelynek $a = b = 1$ speciális esetét a közelmúltban újra bizonyították H. Kim, Z. Toroczkai, Miklós István, Erdős L. Péter és Székely László [28].

1.7. tétel. (Hakimi1965) *Legyen $n \geq 2$ egy pozitív $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ and $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ két, nemnegatív egészeket tartalmazó vektor, amelyek úgy vannak rendezve, hogy $d_i + l_i \leq d_{i+1} + l_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1$, és $d_1 + l_1 > 0$. Akkor és csak akkor van olyan $(0, \infty)$-verseny, amelynek D a pontvektora és L a vesztővektora, ha*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} l_i \tag{8}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} (d_i + l_i) \geq d_n + l_n. \tag{9}$$

Ezt a tételt felhasználva lineáris idő alatt eldönthető, hogy adott (D, L) vektorpár kettős vektora-e egy $(0, \infty)$ versenynek. Célunk:

a) ha L és D kielégítik az 1.7 tétel feltételeit, hogyan konstruálhatunk a lehető legkiegyensúlyozottabb versenyt?

b) ha L és D nem elégítik ki az 1.7 tétel feltételeit, hogyan definiáljuk a legjobb közelítő megoldást és azt hogyan állítsuk elő.

7. (a, b)-sorozatok közelítő helyreállítása [23, 26]

Ha nem léteznek az előírt foksorozatokkal rendelkező versenyek, akkor természetes feladat közelítő megoldás keresése. Tegyük fel, hogy a 2012-es magyar focibajnokságban minden csapat megmondhatja, hány gólt akar rúgni, és hányat kapni. Valószínű, hogy több gólt akarnak majd rúgni, mint kapni, ezért minden kívánság nem teljesíthető.

Az n csapathoz hozzávéve **még egyet,** és mindenki annak rúgja a góljait, és attól kapja, könnyen teljesíthetők a többiek kívánságai. Ekkor optimalizációs cél lehet, hogy a többlet csapat szerepe minél kisebb legyen. Egy másik lehetőség, hogy több csapatnál is megengedjük a kívánságoktól való eltérést, de az eltérések összegét akarjuk minimalizálni.

8. Hiperversenyek [15, 12, 40, 48]

Korábban a tanszéken rendszeresen rendeztünk ultibajnokságot. Hármas csoporokban játszottunk. Mi időre játszottunk, de lehetne úgy, hogy például 1000 pontot teszünk az asztal közepére, és azon osztozunk.

Szoktunk hárman úgy teniszezni, hogy felváltva vagyunk egyedül, és 5 gémet játszunk. Így mindig van győztes. A győzelem két pontot ér (ha ketten győznek, feleznek). Így egy „körben” hat pont osztódik ki, és a lehetséges kiosztások halmaze $S = (4, 1, 1), (3, 3, 0), (2, 2, 2)$. Ez így egy hiányos (6,6,3) hipersport. Ha valahogy definiálunk egy győztest, aki egy pontot kap, akkor egy teljes (1,1,3) hipersportot kapunk. Utóbbira átvihető a Landau-tétel lényege, előbbi nehéz.

Négyen szoktunk úgy játszani, hogy minden párosításban játszunk egy szettet. Ha egy szet két pontot ér, amelyet a győztesek osztanak el egymás között, akkor $S = (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 0)$ és egy hiányos $(6, 6, 4)$ hipersportot kapunk. Ha csak egy győztest definiálunk, akkor egy teljes $S = (1, 1, 4)$ hipersportot kapunk.

Végére hagytam a kérdést: mire képesek az $(1, 1, 3)$ hipersportolók?

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

Az irodalomjegyzékben **letölthető** megjegyzéssel szereplő művek letölthetők a megadott honlapról, a **digitálisan** megjegyzéssel szereplő művek letölthetőek a http://compalg.inf.elte.hu/∼tony/Kutatas/Szeged/ honlapról, míg a **nyomtatva** megjegyzéssel szereplő műveket nyomtatott formában magammal viszem.

Irodalomjegyzék

[1] P. Avery, Score sequences of oriented graphs. *J. Graph Theory* **15** 3 (1991) 251–257. 2

[2] L. B. Beasley, D. E. Brown, K. B. Reid, Extending partial tournaments. *Math. Comput. Modelling* **50** 1 (2009) 287–291. 2

[3] A. R. Brualdi, J. Shen, Landau's inequalities for tournament scores and a short proof of a theorem on transitive sub-tournaments, *J. Graph Theory* **38** 4 (2001) 244–254. 2

[4] A. R. Brualdi, K. Kiernan, Landau's and Rado's theorems and partial tournaments. *Electron. J. Combin.* **16** #N2 (6 pp) (2009). **letölthető** 2

[5] Csirik János: Szóbeli kérdés. Szeged, 2003. április 22. 2, 3

[6] P. Erdős, T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok* **11** (1960) 264–274. 2

[7] A. Frank, A. Gyárfás, How to orient the edges of a graph? In *Combinatorics. Vol. 1* (ed. A. Hajnal and V. T. Sós), North-Holland, Amsterdam-New York, 1978. pp. 353–364. **letölthető** 2

[8] S. V. Gervacio, Score sequences: Lexicographic enumeration and tournament construction *Discrete Math.* **72** 1–3 (1988) 151–155. 2

[9] S. V. Gervacio, Construction of tournaments with a given score sequence. *Southeast Asian Bull. Math.* **17** 2 (1993) 151–155. 2

[10] J. Griggs, K. B. Reid, Landau's theorem revisited, *Australas. J. Comb.* **20** (1999) 19–24. **letölthető** 2

[11] B. Guiduli, A. Gyárfás, S. Thomassé, P. Weidl, 2-partition-transitive tournaments. *J. Combin. Theory Ser. B* **72** 2 (1998) 181–196. **digitálisan** 2

[12] M. Hager: On score sets for tournaments, *Discrete Mathematics* **58** (1) (1986) 25–34. **digitálisan** 3, 6

[13] S. L. Hakimi, On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a simple graph. *J. SIAM Appl. Math.* **10** (1962) 496–506. **digitálisan** 2

[14] S. L. Hakimi, On the degrees of the vertices of a directed graph. *J. Franklin Inst.* **279** (1965) 290–308. **digitálisan** 5

[15] Hámori Ádám: Rangsorolás csoportos összehasonlítással. TDK dolgozat kézirata. ELTE IK, Budapest, 2011. **digitálisan** 3, 6

[16] V. Havel, A remark on the existence of finite graphs (Czech). *Časopis Pěst. Mat.* **80** (1955), 477–480. **digitálisan** 2

[17] A. Iványi: Maximal tournaments, *Pure Math. Appl.* **13** (1–2) (2002), 171–183. **digitálisan** 1

[18] A. Iványi: Rangsorolási algoritmusok. Szegedi informatikai szeminárium, 2003. április 22. **digitálisan** 2

[19] A. Iványi: Pontsorozatok ellenőrzése. XXV. Operációkutatási konferencia előadáskivonatai (Debrecen, 2004. október 17–20). **digitálisan** 2

[20] A. Iványi: Deciding the validity of the score sequence of a soccer tournament. In: *Open problems of the Egerváry Research Group*. **letölthető** 2

[21] A. Iványi: Reconstruction of complete interval tournaments. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, **1** (1) (2009), 71-88. **letölthető** 2, 3

[22] A. Iványi: Reconstruction of complete interval tournaments. II. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, **2** (1) (2010), 47–71. **letölthető** 3

[23] A. Iványi: Directed graphs with prescribed score sequences. In: Proc. of the 7th Hungarian-Japanese Symposium (Kyoto, May 31 - June 3, 2011), elfogadva. **digitálisan** 5

[24] A. Iványi, B. M. Phong: On the unicity of multitournaments. In: *Fifth Conference on Mathematics and Computer Science* (Debrecen, June 9–12, 2004), 2004. **digitálisan** 3, 4

[25] A. Iványi, B. M. Phong, S. Pirzada: Score sets of (a, b)-tournaments. In: *Automata and Formal Languages* (Debrecen, August 17–22, 2011), benyújtva. **digitálisan** 3

[26] A. Iványi, S. Pirzada: Comparison based ranking. In: *Algorithms of Informatics*, Vol. 3, ed. by A. Iványi. AnTonCom, Budapest 2011, 1262–1291. Manuscript. **digitálisan** 2, 3, 5

[27] A. Kemnitz, S. Dolff, Score sequences of multitournaments. *Congr. Numer.* **127** (1997), 85–95. **nyomtatva** 2

[28] H. Kim, Z. Toroczkai, I. Miklós, P. L. Erdős, L. A. Székely, Degree-based graph construction. *J. Physics: Math. Theor. A* (2009) **42** (39) 392001 (10 pp). 5

[29] Kovács Gábor Zsolt, Pataki Norbert: Rangsorolási sorozatok elemzése. TDK doldozat. ELTE TTK Informatikai Tanszékcsoport, Budapest, 2002. **digitálisan** 3

[30] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score sequence, *Bull. Math. Biophys.* **15** (1953), 143–148. **digitálisan** 2

[31] D. Meierling, L. Volkmann, A remark on degree sequences of multigraphs. *Math. Methods Oper. Res.* **69** 2 (2009) 369–374. 2

[32] J. W. Moon, An extension of Landau's theorem on tournaments. *Pacific J. Math.* **13** (1963) 1343–1345. **letölthető** 2

[33] J. W. Moon, *Topics on Tournaments.* Holt, Rinehart and Winston. New York, 1968. **Rényi Intézet Könyvtára** 2

[34] D. Pálvölgyi, Deciding soccer scores and partial orientations of graphs. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* **1** 1 (2009) 35–42. 2

[35] A. N. Patrinos, S. L. Hakimi, Relations between graphs and integer-pair sequences. *Discrete Math.* **15** 4 (1976) 347–358. 5

[36] G. Pécsy, L. Szűcs, Parallel verification and enumeration of tournaments. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Inform.* **45,** 2 (2000) 11–26. **letölthető** 2

[37] S. Pirzada, *Graph Theory.* Orient BlackSwan, Hyderabad, 2011 (nyomdában). **digitálisan**

[38] S. Pirzada, A. Iványi, M. A. Khan: Score sets and kings in oriented graphs. In: *Algorithms of Informatics*, Vol. 3, ed. by A. Iványi. AnTonCom, Budapest 2011. Kézirat. **digitálisan** 3

[39] S. Pirzada, T. A. Naikoo, U. Samee, A. Iványi: Imbalances in directed multigraphs. *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, **2** (2) 2010, 137–145. **letölthető** 2

[40] S. Pirzada, G. Zhou, A. Iványi: Score lists in multipartite hypertournaments. *Acta Univ. Sapientiae, Informatica*, **2** (2) (2010), 184–193. **letölthető** 6

[41] K. B. Reid, Score sets for tournaments. *Congr. Numer.* **21** (1978) 607–618. 3

[42] K. B. Reid, Tournaments: Scores, kings, generalizations and special topics, *Congr. Numer.* **115** (1996) 171–211. **nyomtatva** 2

[43] K. B. Reid, C. Q. Zhang, Score sequences of semicomplete digraphs, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **24** (1998) 27–32.

[44] K. B. Reid, Tournaments. In *Handbook of Graph Theory* (ed. J. L. Gross, J. Yellen), CRC Press, Boca Raton, 2004. **ELTE TTK Könyvtára** 3

[45] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. Canad. J. Math. **9** (1957) 371–377. **letölthető** 2

[46] G. Sierksma, H. Hoogeveen, Seven criteria for integer sequences being graphic, *J. Graph Theory* **15** 2 (1991) 223–231. **digitálisan**

[47] C. Thomassen, Landau's characterization of tournament score sequences. In *The Theory and Applications of Graphs.* John Wiley & Sons, 1981, pp. 589–591. 2

[48] G. Zhou, T. Yao, K. Zhang, On score sequences of k-hypertournaments. *Eur. J. Comb.* **21** 8 (2000) 993–1000. 6

[49] X. Yao: On Reid conjecture of score sets for tournaments, *Chinese Science Bulletin,* **10** (1989), 804–808. **nyomtatva** 3, 4

A szerzők címe: Iványi Antal: tony@compalg.inf.elte.hu
Phong Bui Minh: bui@compalg.inf.elte.hu