Donald Ervin KNUTH

A SZÁMÍTÓGÉP-PROGRAMOZÁS

MŰVÉSZETE

4. kötet 0. rész

Bevezetés a kombinatorikai algoritmusokhoz és
a Boole-függvényekhez

Budapest, 2009

TARTALOMJEGYZÉK

A szerző különösen hálás az Addison-Wesley Kiadónak
a türelméért, amiért a szerződés aláírásától egy teljes évtizedet várt
a kéziratra.
– FRANK HARARY, *Graph Theory* (1968) [14]

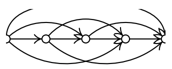
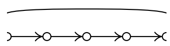
Bitte ein Bit!
A Bitburger Sörfőzde jelszava (1951)

Irányított gráfok. A 2.3.4.2. alpontban definiáltuk az *irányított gráfok* fogalmát, amelyek nagyon hasonlítanak a gráfokhoz azt leszámítva, hogy élek helyett *irányított élekkel* rendelkeznek. Az $u \to v$ irányított él az u csúcsból a v csúcsba fut, míg egy u—v él azok megkülönböztetése nélkül köti össze az u és v csúcsot. Az irányított gráfok rendelkezhetnek még a csúcsokból önmagukba futó $v \to v$ hurkokkal, továbbá ugyanazon u és v csúcs között több $u \to v$ irányított él is futhat.

Egy n-ed rendű m méretű $D = (V, A)$ irányított gráf formálisan egy n csúcsot tartalmazó V halmazból és egy m rendezett (u, v) párt tartalmazó A multihalmazból áll, ahol $u \in V$ és $v \in V$. A rendezett párokat irányított éleknek nevezzük, és $u \to v$ módon jelöljük, ha $(u, v) \in A$. Az irányított gráfot *egyszerűnek* nevezzük, ha A közönséges és nem multihalmaz, azaz ha minden u és v esetén legfeljebb egy $u \to v$ irányított él létezik. Minden (u, v) irányított élnek u a kezdőcsúcsa, v pedig a végcsúcsa, amit az él „hegyének” is nevezünk. Egy v csúcs $d^+(v)$ *kifoka* a csúcsból induló irányított élek száma, míg annak $d^-(v)$ *befoka* az oda beérkező, v hegyű irányított élek száma. Egy 0 befokú csúcsot „forrásnak” nevezünk; egy 0 kifokú csúcsot pedig „nyelőnek”. Vegyük észre, hogy $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$, mivel mindkét összeg m-mel, az irányított élek teljes számával egyenlő.

A gráfokhoz definiált fogalmak természetes módon átültethetők irányított gráfokra az „irányított” jelző kitételével, amennyiben szükséges különbséget tenni az élek és irányított élek között. Így például az irányított gráfok irányított részgráfjai lehetnek feszítőek, indukáltak vagy ezek egyike sem. Egy $D = (V, A)$ és $D' = (V', A')$ irányított gráf közötti izomorfizmus egy V-ről V'-re ható kölcsönösen egyértelmű φ leképezés, amelyre a D-beli $u \to v$ irányított élek száma megegyezik a D'-beli $\varphi(u) \to \varphi(v)$ irányított élek számával minden $u, v \in V$ esetén.

Az irányított gráf ábrája egyszerű vonalak helyett nyilakat használ a csúcsok között. A legegyszerűbb és legfontosabb n-ed rendű irányított gráfok a K_n, P_n és C_n gráfok irányított variánsai, vagyis a $K_n^{\to}$ *tranzitív versenygráf*, a $P_n^{\to}$ *irányított út* és a $C_n^{\to}$ *irányított kör*. Ezek a gráfok vázlatosan a következő ábrákkal rajzolhatók meg az $n = 5$ esetben:

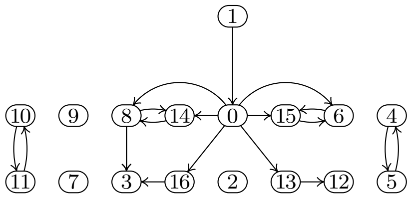
 ; ;  . (24)

$K_5^{\to}$ $P_5^{\to}$ $C_5^{\to}$

A J_n *teljes irányított gráf* a legnagyobb n-ed rendű egyszerű irányított gráf. Ennek n^2 számú $u \to v$ éle van, u és v minden lehetséges kiválasztásához egy.

A 7.3. ábra egy valamivel bonyolultabb, 17-ed rendű irányított gráf ábráját mutatja, amelyet „expressz-irányítottnak” is nevezhetünk: ezt az irányított gráfot írja le Hercule Poirot Agatha Christie *Gyilkosság az Orient expresszen* című regényében [5]. A csúcsok az Isztambul–Calais útvonalon közlekedő kocsi fülkéit jelzik a történetben, egy $u \to v$ irányított él pedig azt, hogy az u fülke lakója megerősíti a v fülke lakójának alibijét. Ebben a példában hat összefüggő komponenst találunk, nevezetesen: $\{0, 1, 3, 6, 8, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $\{2\}$, $\{4, 5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$ és $\{10, 11\}$, mivel az irányított gráfbeli összefüggőség az irányított élek egyszerű élnek való tekintésével adódik.

Két irányított él *egymást követő*, ha az első hegye a második kezdőcsúcsa. Egymást követő irányított élek $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sorozatát k hosszúságú *sétának* nevezzük; a séta jelölése



JELMAGYARÁZAT: 0 Pierre Michel, a francia kalauz; 1 Hercule Poirot, a belga detektív; 2 Samuel Edward Ratchett, a halott amerikai; 3 Caroline Martha Hubbard, az amerikai matróna; 4 Edward Henry Masterman, a brit komornyik; 5 Antonio Foscarelli, az olasz autókereskedő; 6 Hector MacQueen, az amerikai titkárnő; 7 Harvey Harris, a rejtőzködő angol; 8 Hildegarde Schmidt, a német hölgy szobalánya; 9 (üres); 10 Greta Ohlsson, a svéd ápolónő; 11 Mary Hermione Debenham, az angol nevelőnő; 12 Helena Maria Andrenyi, a gyönyörű grófnő; 13 Rudolph Andrenyi, a magyar gróf; 14 Natalia Dragomiroff, az orosz özvegy hercegnő; 15 Colonel Arbuthnot, a brit hivatalnok Indiából; 16 Cyrus Bettman Hardman, az amerikai detektív

7.3. ábra. Az Agatha Christie által megrajzolt 17-ed rendű és 18 méretű irányítot gráf.

a csúcsok, valamint az irányított élek feltüntetésével történik:

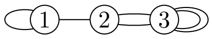
$$v_0 \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} v_2 \cdots v_{k-1} \xrightarrow{a_k} v_k. \tag{25}$$

Egy egyszerű irányított gráfban elég csupán a csúcsokat megadni; például $1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 8 \longrightarrow 14 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3$ séta a 7.3. ábrán. A (25)-ben szereplő séta egy irányított út, ha a $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ csúcsok különbözőek; a séta egy irányított kör, ha a csúcsok a $v_k = v_0$ esettől eltekintve különbözőek.

Egy irányított gráfban a $d(u, v)$ irányított távolság az u-ból v-be vezető legrövidebb *irányított* út irányított éleinek a száma, ami megegyezik az u-ból v-be vezető legrövidebb séta hosszával. Ez eltérhet a $d(v, u)$ értékétől, de a (**??**)-beli háromszög-egyenlőtlenség érvényben marad.

Minden gráf felfogható irányított gráfként, mivel egy $u — v$ él lényegében ekvivalens az $u \to v$ és $v \to u$ irányított élpárral. Az így előálló irányított gráf rendelkezik az eredeti gráf minden tulajdonságával; például a gráf minden csúcsának foka az irányított gráf csúcsának kifoka és egyben befoka is lesz. Megmaradnak továbbá a távolságértékek is.

Egy (V, E) *multigráf* hasonló egy gráfhoz attól eltekintve, hogy az E élhalmaz $\{u, v\}$ párok tetszőleges *multihalmaza* lehet; meg vannak engedve csúcsokból önmagukba futó $v — v$ hurokélek is, amelyek $\{v, v\}$ „multipároknak” felelnek meg. Például



(26)

egy 3-ad rendű, 6 éllel rendelkező multigráf, melynek élei: $\{1, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 3\}$ és $\{3, 3\}$. A példában szereplő csúcsok fokai $d(1) = d(2) = 3$ és $d(3) = 6$, mivel minden hurok 2-vel járul az adott csúcs fokához. Egy $v — v$ hurokél *két* irányított $v \to v$ hurokélre bomlik, ha egy multigráfot irányított gráfnak tekintünk.

Gráfok és irányított gráfok ábrázolása. Minden irányított gráf, így a gráf és multigráf is teljes mértékben leírható az $A = (a_{uv})$ *szomszédsági mátrixszal*, melynek n sora és n oszlopa van n csúcs esetén. A mátrix a_{uv} eleme az u-ból v-be vezető irányított élek számát adja meg. Így például a $\vec{K_3}$, $\vec{P_3}$, $\vec{C_3}$, J_3 és (26) szomszédsági mátrixai rendre

$$\vec{K_3} = \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}, \quad \vec{P_3} = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}, \quad \vec{C_3} = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 210 \\ 102 \\ 024 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

A mátrixelmélet hatékony matematikai eszközei lehetővé teszik számos nem triviális gráfelméleti eredmény bizonyítását a szomszédsági mátrixok vizsgálatának segítségével; a **??**. gyakorlat egy különösen frappáns példát mutat erre. Ennek egyik fő magyarázata, hogy a mátrixszorzásnak egy egyszerű interpretációja létezik az irányított gráfok elméletében. Tekintsük az A mátrix második hatványát, melynek u-adik sorában és v-edik oszlopában álló eleme definíció szerint

$$(A^2)_{uv} \;=\; \sum_{w\in V} a_{uw}a_{wv}\,. \tag{28}$$

Mivel a_{uw} az u-ból v-be futó élek száma, látható, hogy $a_{uw}a_{wv}$ az $u \to w \to v$ alakú séták száma. Vagyis $(A^2)_{uv}$ az u-ból v-be vezető, 2 hosszúságú összes séta száma. Hasonlóan, A^k elemei megadják az összes k hosszúságú séta számát csúcsok bármely rendezett párjai között minden $k \geq 0$ esetén. Például a (27)-ben szereplő A mátrixra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 20 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 12 \\ 9 & 18 & 42 \\ 12 & 42 & 96 \end{pmatrix}; \tag{29}$$

12 darab 3 hosszúságú séta vezet a 26 multigráf 1. csúcsából a 3. csúcsába, valamint 18 séta a 2. csúcsból önmagába.

A csúcsok átrendezése az A szomszédsági mátrixot $P^{-}AP$-re módosítja, ahol P egy permutációs mátrix (egy olyan 0–1 mátrix, melynek minden sorában és oszlopában pontosan egy 1-es áll), $P^{-} = P^{T}$ pedig az inverz permutáció mátrixa. Azaz

$$\begin{pmatrix} 210 \\ 102 \\ 024 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 201 \\ 042 \\ 120 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 012 \\ 120 \\ 204 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 021 \\ 240 \\ 102 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 402 \\ 021 \\ 210 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 420 \\ 201 \\ 012 \end{pmatrix} \tag{30}$$

mindegyike a (26) szomszédsági mátrixai, továbbiak pedig nincsenek.

Több, mint $2^{n(n-1)/2}/n!$ darab n-ed rendű gráf létezik, ha $n > 1$, és ezek majdnem mindegyike esetén $\Omega(n^2)$ adatbitre van szükség a leggazdaságosabb kódoláshoz. Ennek értelmében – a memóriaigényt tekintve – az összes lehetséges gráf döntő többségénél a számítógépen való reprezentációjukhoz azok szomszédsági mátrixait célszerű használni.

A gyakorlati problémák során felmerülő gráfok azonban merőben eltérhetnek az összes lehetséges gráf közül véletlenszerűen kiválasztottaktól. Egy valós probléma gráfja általában „ritka”, vagyis $\Omega(n^2)$helyett csak $O(n \lg n)$ élt tartalmaz, kivéve ha n kicsi, mivel $\Omega(n^2)$ bitnyi adatot nehéz generálni. Tegyük fel például, hogy a csúcsok embereket, míg az élek barátságokat jelölnek. 5 milliárd embert tekintve keveseknek lesz 10000-nél több barátja. De még ha mindenkinek átlagosan 10000 barátja lenne is, a gráfnak csak 2.5×10^{13} éle lenne, miközben majdnem minden 5 milliárd csúcsú gráfnak körülbelül 6.25×10^{18} éle van.

Vagyis egy gráf számítógépen való reprezentációjának legjobb módja általában eltér az n^2 darab a_{uv} érték szomszédsági mátrixelemként való tárolásától. Helyette, a Stanford GraphBase algoritmusok olyan adatstruktúrákat használnak, amelyek a 2.2.6. pontban tárgyalt ritka mátrixok láncolt reprezentációjával rokonok, bár azoknál valamivel egyszerűbbek. Ez a megközelítés nem csak sokoldalúnak és hatékonynak, hanem könnyen felhasználhatónak is bizonyult.

Egy irányított gráf SGB reprezentációja egy soros és egy láncolt helyfoglalás kombinálása csomópontok két alaposztályának felhasználásával. Egyes csomópontok csúcsokat, mások éleket reprezentálnak. (Létezik egy harmadik típusú csomópont is, amely az egész gráfot reprezentálja olyan algoritmusok számára, amelyek egyszerre több gráffal dolgoznak. Minden gráfhoz azonban csak egy gráfcsomópontra van szükség, így a csúcs- és élcsomópontok vannak túlsúlyban.)

A működési elv a következő: minden n-ed rendű és m méretű SGB irányított gráf n csúcscsomópont egy soros tömbjére épül, egyszerűvé téve így a k-adik csúcs elérését, ahol $0 \leq k < n$. Ezzel szemben, az m irányított élcsomópont egy általános, alapvetően strukturálatlan memóriaterületen keresztül kapcsolódik egymáshoz. Minden csúcscsomópont tipikusan 32 bájtot foglal és minden irányított élcsomópont 20 bájtot (a gráfcsomópont pedig 220 bájtot); de a csomópontok mérete egyszerűen módosítható. A csomópontok néhány mezőjének rögzített, egyértelmű jelentése van minden esetben; a kimaradó mezők különböző célokra használhatóak a különböző algoritmusokban vagy egy adott algoritmus különböző fázisaiban. Egy csomópont rögzített célú részeit „szabványos mezőknek", a többcélú mezőit pedig „segédmezőknek" nevezzük.

Minden csúcscsomópontnak van egy `NÉV` és egy `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK` nevű szabványos mezője. Ha v egy csúcscsomópontra mutató változó, *csúcsváltozónak* nevezzük. Ekkor a NÉV(v) egy olyan karakterfüzérre mutat, amely a megfelelő csúcsokat emberi szemlélet szerint azonosítja; például a (**??**) gráf 49 csúcsa a CA, WA, OR, ..., RI nevekkel van ellátva. A másik szabványos mező, az `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK`, sokkal fontosabb az algoritmusokban: egy irányított élcsomópontra mutat, amely egy olyan $d^+(v)$ hosszúságú egyszeresen láncolt lista első eleme, ahol a v csúcsból kiinduló minden irányított élhez egy csomópont tartozik.

Minden irányított élcsomópontnak van egy `HEGY` és egy `KÖVETKEZŐ` nevű szabványos mezője; egy irányított élcsomópontra mutató a változót *irányítottél-változónak* nevezünk. A `HEGY`(a) az a irányított él hegyét reprezentáló csúcscsomópontra mutat; a `KÖVETKEZŐ`(a) arra az irányított élcsomópontra mutat, amely a következő irányított élcsomópontot reprezentálja, melynek kezdőcsúcsa az a-éval megegyezik.

Egy 0 kifokú v csúcs az `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK`(v)$=\Lambda$ (az üres mutató) módon reprezentálható. Más esetben, ha például a kifok 3, az adatstruktúra három irányított élcsomópontot tartalmaz, ahol `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK`(v)$=a_1$, `KÖVETKEZŐ`(a_1)$=a_2$, `KÖVETKEZŐ`(a_2)$=a_3$, és `KÖVETKEZŐ`(a_3)$=\Lambda$; és a három irányított él v-ből `HEGY`(a_1), `HEGY`(a_2), `HEGY`(a_3)-ba vezet.

Tegyük fel például, hogy ki akarjuk számolni a v csúcs kifokát, és tárolni azt egy `KIFOK` nevű segédmezőben. Ez könnyű:

$$\begin{array}{l}\text{Legyen } a \leftarrow \texttt{IRÁNYÍTOTT-ÉLEK}(v) \text{ és } d \leftarrow 0\,.\\ \text{Amíg } a \neq \Lambda, \text{ legyen } d \leftarrow d+1 \text{ és } a \leftarrow \texttt{KÖVETKEZŐ}(a)\,.\\ \text{Legyen } \texttt{KIFOK}(v) \leftarrow d\,.\end{array} \tag{31}$$

Ha egy gráfot vagy multigráfot a fent tárgyalt módon irányított gráfnak tekintünk, annak minden u—v éle két, $u \to v$ és $v \to u$ éllel ekvivalens. Ezeket az irányított éleket „társaknak" nevezzük, és két irányított élcsomópontot, például az a-t és a'-t tartalmazzák, ahol az a az u-ból induló irányított élek, míg az a' a v-ből induló irányított élek listáján szerepel. Ekkor `HEGY`(a) $= v$ és `HEGY`(a') $= u$. Használjuk a

$$\texttt{TÁRS}(a) = a' \qquad \text{és} \qquad \texttt{TÁRS}(a') = a\,, \tag{32}$$

jelölést is olyan algoritmusokban, amelyek gyorsan át akarnak lépni egyik listáról a másikra. Általában nem szükséges azonban tárolnunk egy explicit mutatót egy irányított élről annak társára, illetve egy `TÁRS` segédmezőt használnunk minden irányított élcsomóponton belül, mivel egy okosan megtervezett adatstruktúra esetén a szükséges kapcsolat *implicit* módon is levezethető.

Az implicit társ trükkje a következőképpen működik: egy nem irányított gráf vagy multigráf u—v éleinek létrehozásakor *egymást követő* irányított élcsomópontokat vezetünk be $u \to v$-re és $v \to u$-ra. Ha például minden irányított élcsomópont 20 bájton van tárolva, akkor minden új párra 40 egymást követő bájtot foglalunk le. Az első bájt memóriacímét 8 többszöröseként állítsuk be. Ha ekkor az a irányított élcsomópont az α memóriacímen található, akkor a társának a címe

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha + 20, & \text{ha } \alpha \mod 8 = 0 \\ \alpha - 20, & \text{ha } \alpha \mod 8 = 4 \end{matrix} \right\} \;=\; \alpha - 20 + \bigl(40 \;\&\; ((\alpha \;\&\; 4) - 1)\bigr)\,. \tag{33}$$

Az ilyen trükkök nagyon hasznosak olyan kombinatorikus problémákban, ahol műveletek trillióit kell végrehajtani, mivel ilyenkor a műveletenkénti 3,6 nanomásodpercnyi megtakarítással a teljes számítás egy órával korábban véget ér. A (33) összefüggés azonban közvetlenül nem „vihető át” az egyik implementációról a másikra. Ha például egy irányított gráfcsomópont mérete 20-ról 24-re változik, akkor a (33)-beli 40, 20, 8 és 4 értékeket 48, 24, 16 és 8-ra kell módosítanunk.

A könyv algoritmusai nem tételeznek fel semmit a csomópontok méretéről. Ehelyett a C programnyelv és annak leszármazottjai konvencióit tekintjük, vagyis ha a egy irányított élcsomópontra mutat, akkor '$a + 1$' a memóriában ezt követő irányított élcsomópontra vonatkozó mutatót jelöli. Általában

$$\texttt{HELY}(\texttt{CSOMÓPONT}(a + k)) \;=\; \texttt{HELY}(\texttt{CSOMÓPONT}(a)) + kc\,, \tag{34}$$

ha minden irányított élcsomópontban c bájt van. Hasonlóan, ha v egy csúcs változó, '$v + k$' jelöli a v-t követő k-adik csúcscsomópontot; a csomópont tényleges memóriacíme v plusz k-szor egy csúcscsomópont mérete lesz.

Egy g gráfcsomópont szabványos mezői tartalmazzák az irányított élek $\texttt{M}(g)$ számát; a csúcsok $\texttt{N}(g)$ teljes számát; a csúcscsomópontok soros listájának első csúcscsomópontjára mutató $\texttt{CSÚCSOK}(g)$ mutatót; a gráf $\texttt{ID}(g)$ azonosítóját, ami például egy words(5757,0,0,0) alakú karakterfüzér; továbbá bizonyos egyéb mezőket a memória lefoglalásához és újrahasznosításához a gráf növekedésekor vagy zsugorodásakor, vagy egy gráf külső formátumba való exportálásához, ami lehetővé teszi a hozzáférést más felhasználók és gráfkezelő rendszerek számára. Ezekre a gráfcsomópont mezőkre azonban ritkán kell majd hivatkoznunk, és itt nem lesz szükség az SGB formátum egy teljes leírásának megadására sem, mivel a fejezet majdnem minden gráfalgoritmusát a magyar nyelv egy meglehetősen absztrakt szintjén fogjuk leírni ahelyett, hogy lehatolnánk a számítógépes programok bitszintű nyelvezetéhez.

Egy egyszerű gráfalgoritmus. Egy később megjelenő közepes-/magasszintű algoritmus szemléltetéseképpen alakítsuk át a B tétel bizonyítását egy lépésről lépésre haladó eljárássá, ami két színnel színezi egy adott gráf csúcsait, amennyiben az illető gráf páros.

B algoritmus (*párosság tesztelése*). Egy SGB alakkal reprezentált gráf esetén ez az algoritmus vagy egy 2-színezést készít, ahol $\texttt{SZÍN}(v) \in \{0, 1\}$ minden v csúcsra, vagy sikertelenül befejeződik, amennyiben nem lehetséges érvényes 2-színezés. Itt a SZÍN egy segédmező minden csúcscsomópontban. Egy másik, a $\texttt{LÁNC}(v)$ csúcssegédmező egy csúcsmutató az összes olyan színezett csúcs egy vermének kezelésére, amelyek szomszédait még nem vizsgáltuk meg. Ennek a veremnek a tetejére egy s csúcsváltozó mutat. Az algoritmus használja még az u, v, w változókat a csúcsokra, illetve az a-t az irányított élekre. A csúcscsomópontokról feltesszük, hogy $v_0 + k$ minden $0 \le k < n$ esetén.

B algoritmus (*párosság tesztelése*).

B1. (Kezdőértékek beállítása.) Legyen $\texttt{COLOR}(v_0 + k) \leftarrow -1$ minden $0 \leq k < n$-re. (Most az összes csúcs színezetlen.) Legyen $w \leftarrow v_0 + n$.
B2. (Kész?) (Ezen a ponton minden $\geq w$ csúcs már színezett, így az összes színezett csúcs szomszédja is.) Az algoritmus sikeresen befejeződik, ha $w = v_0$. Egyébként legyen $w \leftarrow w - 1$, a következő alacsonyabb indexű csúcscsomópont.
B3. (w színezése, ha szükséges.) Ha $\texttt{COLOR}(w) \geq 0$, lépjünk vissza a B2-re. Egyébként legyen $\texttt{COLOR}(w) \leftarrow 0$, $\texttt{LINK}(w) \leftarrow \Lambda$ és $s \leftarrow w$.
B4. (Verem $\Rightarrow u$.) Legyen $u \leftarrow s$, $s \leftarrow \texttt{LINK}(s)$, $a \leftarrow \texttt{ARCS}(u)$. (Megvizsgáljuk a színezett u csúcs minden szomszédját.)
B5. (u kész?) Ha $a = \Lambda$, lépjünk a B8-ra. Egyébként legyen $v \leftarrow \texttt{TIP}(a)$.
B6. (v feldolgozása.) Ha $\texttt{COLOR}(v) < 0$, legyen $\texttt{COLOR}(\mathrm{v}) \leftarrow 1 - \texttt{COLOR}(u)$, $\texttt{LINK}(v) \leftarrow s$, és $s \leftarrow v$. Egyébként, ha $\texttt{COLOR}(v) = \texttt{COLOR}(u)$, fejezzük be sikertelenül az algoritmust.
B7. (Ciklus a-ra.) Legyen $a \leftarrow \texttt{NEXT}(a)$, és lépjünk vissza B5-re.
B8. (A verem nem üres?) Ha $s \neq \Lambda$, lépjünk vissza B4-re. Egyébként lépjünk B2-re. ■

Ez az algoritmus a „mélységi bejárás” nevű általános gráfbejáró algoritmus egy változata, amelyet majd a 7.4.1. pontban tárgyalunk részletesen. Ennek m irányított él és n csúcs esetén a futási ideje $O(m + n)$ (lásd a 70. gyakorlatot); vagyis jól alkalmazható a szokásos ritka gráfok esetére. Kisebb módosításokkal sikertelen befejeződés esetén egy páratlan hosszúságú kört is létrehozhatunk kimenetként, ezzel bizonyítva a 2-színezés lehetetlenségét (lásd a 72. gyakorlatot).

Példák gráfokra. A Stanford GraphBase tartalmaz egy könyvtárat, amelyben több, mint három tucat előállító eljárás van, amelynek segítségével gráfok és irányított gráfok számos változata készíthető el kísérleti céllal. A *worda* eljárásról már beszéltünk, tekintsünk át most néhány további eljárást a lehetőségek megismerésének céljából.

• *roget*$(1022, 0, 0, 0)$ egy irányított gráf 1022 csúccsal és 5075 irányított éllel. A csúcsok szavak és fogalmak kategóriáit reprezentálják, amelyeket Roget [32] vezetett be híres XIX. századbeli művében. Az irányított élek a könyvben fellelhető kategóriák közötti kereszthivatkozások. Tipikus irányított élek például: `water (víz)` → `moisture (nedvesség)`, `discovery (felfedezés)` → `truth (igazság)`, `preparation (előkészítés)` → `learning (tanulás)`, `vulgarity (közönségesség)` → `ugliness (rútság)`, `wit (szellemesség)` → `amusement (szórakozás)`.

• *book*(`"jean"`$, 80, 0, 1, 356, 0, 0, 0)$ egy gráf 80 csúccsal és 254 éllel. A csúcsok Victor Hugo [18] *Nyomorultak* című regényének szereplőit reprezentálják; az élek azokat a szereplőket kötik össze, akik találkoznak egymással. Tipikus élek: `Fantine`—`Javert`, `Cosette`—`Thénardier`.

• *bi_book*(`"jean"`$, 80, 0, 1, 356, 0, 0, 0)$ egy páros gráf $80 + 356$ csúccsal és 727 éllel. A csúcsok a *Nyomorultak* szereplőit vagy fejezeteit reprezentálják; az élek a szereplőket azokkal a fejezetekkel kötik össze, amelyekben megjelennek (például `Napoleon`—`2.1.8`, `Marius`—`4.14.4`).

• *plane_miles*$(128, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ egy síkgráf 129 csúccsal és 381 éllel. A csúcsok az Egyesült Államok és Kanada 128 városát reprezentálják, plusz egy speciális `INF` csúcsot, a „végtelen távoli pont” csúcsot. Az élek a városok ún. *Delaunay-féle háromszögelését* definiálják a síkon a szélességi és hosszúsági koordináták alapján; ez azt jelenti, hogy u—v pontosan akkor, ha az u-n és v-n áthaladó legkisebb kör belseje nem tartalmaz más csúcsot. További élek futnak az `INF` és minden olyan csúcs között, amelyek az összes város helyé-

7.4. ábra. A *Mona Lisa* egy digitális változata és annak egy kinagyított részlete (messzebbről nézve jobban látható).

nek konvex burkán helyezkednek el. Tipikus élek: `Seattle, WA`—`Vancouver, BC`—`INF`; `Toronto, ON`—`Rochester, NY`.

• *plane_lisa*$(360, 250, 15, 0, 360, 0, 250, 0, 0, 2295000)$ egy síkgráf 3027 csúccsal és 5967 éllel. Ez a gráf Leonardo da Vinci [24] *Mona Lisa* című festményének digitalizált képével kapható meg, amelynek 360 sora és 250 oszlopa van, továbbá a képpontok intenzitásaihoz a szürke 16 árnyalatát használjuk 0 (fekete) és 15 (fehér) között. Az eredményül kapott 3027 vízszintesen/függőlegesen összefüggő konstans intenzitású tartomány szomszédosnak tekintendő, ha van közös határpontjuk. (Lásd a 4.7. ábrát.)

• *bi_lisa*$(360, 250, 0, 360, 0, 250, 8192, 0)$ egy páros gráf $360 + 250 = 610$ csúccsal és 40923 éllel. Ez szintén Leonardo híres festményéből származtatható, ezúttal azokat a sorokat és oszlopokat összekötve, amelyekben az intenzitás legalább 1/8. Ilyen például a közvetlenül Lisa „mosolyának” közepén megjelenő `r102`—`c113` él.

• *raman*$(31, 23, 3, 1)$ egy, az előző példákban szereplő SGB gráfoktól eltérő típusú gráf. A nyelvhez, irodalomhoz vagy az emberi kultúra más eleméhez való kötődés helyett, ez egy úgy nevezett „Ramanujan expander gráf”, ami szigorú matematikai elveken alapul. Mind a $(23^3 - 23)/2 = 6072$ csúcsa 32 fokszámú; azaz 97152 éle van. A csúcsok olyan 2×2-es mátrixok ekvivalenciaosztályaira vonatkoznak, amelyek nem szingulárisak modulo 23; egy tipikus él a `(2,7;1,1)`—`(4,6;1,3)`. A Ramanujan-gráfok főleg azért fontosak, mivel szokatlanul nagy kerületük és kis átmérőjük van a méretükhöz és fokszámukhoz képest. A példagráfnak 4 a kerülete és 4 az átmérője.

• *raman*$(5, 37, 4, 1)$, hasonlóan az előzőhöz, egy 6-od fokú reguláris gráf 50616 csúccsal és 151848 éllel. A kerülete 10, az átmérője 10 és szintén páros gráf.

• *random_ graph*$(1000, 5000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, s)$ egy gráf 1000 csúccsal, 5000 éllel és s maggal. Ennek „megalkotása” élek nélkül kezdődik, miután ismétlődően pszeudo-véletlen csúcsindexeket választunk $0 \leq u, v < 1000$ szerint, és felvesszük az u—v élt, hacsak $u = v$ nem teljesül, vagy az él már jelen van. Ha $s = 0$, akkor a 908-as izolált csúcs kivételével minden csúcs egy 999-ed rendű óriás komponenshez tartozik.

• *random_ graph*$(1000, 5000, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ egy hasonló módon kialakuló irányított gráf 1000 csúccsal és 5000 irányított éllel. (Valójában minden irányított éle egyúttal a *random_ graph*$(1000, 5000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ gráfnak is része.)

• *subsets*$(5, 1, -10, 0, 0, 0, \texttt{\#1}, 0)$ egy gráf $\binom{11}{5} = 462$ csúccsal, a $\{0, 1, \ldots, 10\}$ minden öt elemű részhalmazához eggyel. Két csúcs szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak; vagyis, a gráf reguláris 6-odfokú 1386 éllel. Felfoghatjuk úgy is, mint a Petersen-gráf egy általánosítását, amelynek SGB neve *részhalmazok*$(2, 1, -4, 0, 0, 0, \texttt{\#1}, 0)$.

• *subsets*$(5, 1, -10, 0, 0, 0, \texttt{\#10}, 0)$ gráfnak ugyanaz a 462 csúcsa van, de ezek most akkor szomszédosak, ha a megfelelő részhalmazoknak négy közös eleme van. Ez egy reguláris 30-ad fokú gráf 6930 éllel.

• *parts*$(30, 10, 30, 0)$ egy másik matematikai alapú gráf. 3590 csúcsa van, minden 30 elem legfeljebb 10 osztályba való felosztásához egy. Két felosztás szomszédos, ha az egyik a másik egy részének továbbosztásából származik; ez a szabály 31377 élt definiál. A *parts*$(30, 10, 30, 1)$ irányított gráf hasonló, de ennek 31377, a rövidebb felosztásoktól a hosszabbak felé mutató irányított éle van (például `13+7+7+3` $\to$ `7+7+7+6+3`).

• *simplex*$(10, 10, 10, 10, 10, 0, 0)$ egy gráf 286 csúccsal és 1320 éllel. A csúcsai az $x_1+x_2+x_3+x_4 = 10$ $(x_i \geq 0)$ egyenlet egész megoldásai, azaz a „10-es számnak négy nemnegatív egész összegére való felbontása”; a csúcsok egy tetraéder belsejébe eső pontok baricentrikus koordinátáinak is tekinthetők. Az élek, mint például a `3,1,4,2` — `3,0,4,3`, az egymáshoz lehető legközelebb eső felosztásokat kötik össze.

• *board*$(8, 8, 0, 0, 5, 0, 0)$, illetve *tábla*$(8, 8, 0, 0, -2, 0, 0)$ olyan 64 csúcsú gráfok, amelyek 168, illetve 280 élei a sakkjáték huszárjának, illetve futójának lehetséges lépéseihez tartoznak.

Az SGB gráfgenerátorok paramétereinek variálásával tömérdek további példa nyerhető. A **??**. ábra például a *board* és a *simplex* két egyszerű változatát mutatja; a *board* valamelyest rejtett szabályait a 75. gyakorlat tárja fel.

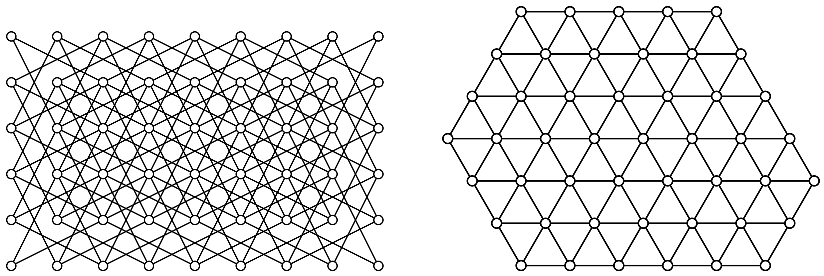
Gráfalgebra. Új gráfokat úgy is nyerhetünk, hogy már meglévő gráfokon hajtunk végre műveleteket. Ha például $G = (V, E)$ egy tetszőleges gráf, annak $\overline{G} = (V, \overline{E})$ ***komplementere*** az

$$u \text{—} v \text{ a } \overline{G}\text{-ben} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u \neq v \text{ a } u \not\text{—} v \ G\text{-ben} \tag{35}$$

módon nyerhető. Vagyis a nem-élek élekké válnak, és fordítva. Vegyük észre, hogy $\overline{\overline{G}} = G$, és a $\overline{K_n}$ gráfnak nincsenek élei. A kapcsolódó A és $\overline{A}$ szomszédsági mátrixokra

$$A + \overline{A} = J - I \tag{36}$$

teljesül, ahol J a csupa 1-esekből álló mátrix, I az egységmátrix, vagyis J, illetve $J - I$ a



board$(6, 9, 0, 0, 5, 0, 0)$ (Huszárlépések egy 6×9-es sakktáblán)

simplex$(10, 8, 7, 6, 0, 0, 0)$ (Egy csonkolt háromszögháló)

7.5. ábra. Példák táblajátékokhoz kapcsolódó SGB-gráfokra.

J_n, illetve K_n szomszédsági mátrixai n-ed rendű G esetén.

Továbbá, minden $G = (V, E)$ gráf egy $L(G)$ ***élgráfhoz*** vezet, amelynek csúcsai az E élek; két él szomszédos $L(G)$-ben, ha van közös csúcsuk. Így például az $L(K_n)$ élgráfnak $\binom{n}{2}$ csúcsa van, és reguláris $2n - 4$-ed fokú, ha $n \geq 2$ (lásd a 82. gyakorlatot). Egy gráf ***k-él-színezhető***, ha a élgráfja k-színezhető.

Adott $G = (U, E)$ és $H = (V, F)$ gráf esetén azok $G \cup H$ ***uniója*** az az $(U \cup V, E \cup F)$ gráf, amelyet a csúcsok és élek egyesítésével kapunk. Tegyük fel például, hogy a G, illetve a H gráf a sakkjáték bástya-, illetve futólépésének megfelelő gráf; ekkor $G \cup H$ a vezérlépésnek megfelelő gráf, amelynek hivatalos SGB neve

$$\mathit{gunion}(\mathit{board}(8, 8, 0, 0, -1, 0, 0), \mathit{board}(8, 8, 0, 0, -2, 0, 0), 0, 0). \tag{37}$$

Abban a speciális esetben, amikor a csúcsok U és V halmazai diszjunktak, a $G \cup H$ unió nem követeli meg a csúcsok bármilyen szokásos kereszthivatkozásán keresztüli azonosítását; a $G \cup H$ ábráját egyszerűen megkaphatjuk a G, majd a H ábrájának megrajzolásával. Ezt a speciális esetet „egymás mellé helyezésnek” vagy a G és a H ***direkt összegének*** nevezzük, és $G \oplus H$-val fogjuk jelölni. Könnyen látható például, hogy

$$K_m \oplus K_n \cong \overline{K_{m,n}}, \tag{38}$$

és hogy minden gráf az összefüggő komponenseinek direkt összege.

A (**??**) képlet speciális esete a

$$K_{n_1} \oplus K_{n_2} \oplus \cdots \oplus K_{n_k} \cong \overline{K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} \tag{39}$$

összefüggésnek, amely teljes k-részes gráfokra teljesül, ha $k \geq 2$. (39) viszont $k = 1$-re egy botrányos tény miatt nem áll fenn: a teljes gráfok szabványos gráfelméleti jelölése nem konzisztens. Valóban, $K_{m,n}$ egy teljes 2-részes gráfot jelöl, viszont K_n *nem* jelöl egy teljes 1-részes gráfot. A gráfelméleti szakemberek valahogyan már évtizedek óta együtt tudnak élni ezzel az anomáliával anélkül, hogy belebolondulnának.

A G és H diszjunkt gráfok kombinálásának egy másik fontos módja azok G—H ***összekapcsolásának*** elkészítése, ami $G \oplus H$-ból, valamint az összes $u - v$ élből áll, ahol $u \in U$ és $v \in V$ lásd Zykov cikkét [43]. Továbbá, ha G és H diszjunkt ***irányított gráfok***, a $G \to H$ ***irányított egyesítésük*** hasonló, ami azonban a $G \oplus H$-t csak az U-ból V-be tartó $u \to v$

egyirányú élekkel egészíti ki.

Az A és B mátrix direkt összege a B halmaz A halmaztól átlósan jobbra és le való elhelyezésével készíthető el:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \tag{40}$$

ahol a példában minden O a csupa nullából álló halmazt jelöli, amelynek az adott helyen megkövetelt számú sora és oszlopa van. Egyszerű megjegyezni a gráfok direkt összegére használt $G \oplus H$ jelölést, mivel a $G \oplus H$ szomszédsági mátrixa pontosan megegyezik a G, illetve H gráf A, illetve B szomszédsági mátrixának direkt összegével. Hasonlóan, a $G — H$, $G \rightarrow H$ és $G \leftarrow H$ szomszédsági mátrixai rendre

$$A — B = \begin{pmatrix} A & J \\ J & B \end{pmatrix}, \qquad A \rightarrow B = \begin{pmatrix} A & J \\ O & B \end{pmatrix}, \qquad A \leftarrow B = \begin{pmatrix} A & O \\ J & B \end{pmatrix}, \tag{41}$$

ahol a J (36)-hoz hasonlóan csupa 1-esekből álló mátrix. Ezek a műveletek asszociatívak, és kapcsolódnak a komplementerképzéshez:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C, \qquad A — (B — C) = (A — B) — C; \tag{42}$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \rightarrow B) \rightarrow C, \qquad A \leftarrow (B \leftarrow C) = (A \leftarrow B) \leftarrow C; \tag{43}$$

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A} — \overline{B}, \qquad \overline{A — B} = \overline{A} \oplus \overline{B}; \tag{44}$$

$$\overline{A \rightarrow B} = \overline{A} \leftarrow \overline{B}, \qquad \overline{A \leftarrow B} = \overline{A} \rightarrow \overline{B}; \tag{45}$$

$$(A \oplus B) + (A — B) \ = \ (A \rightarrow B) + (A \leftarrow B). \tag{46}$$

Vegyük észre, hogy a (39), (42) és (44) összevonásával

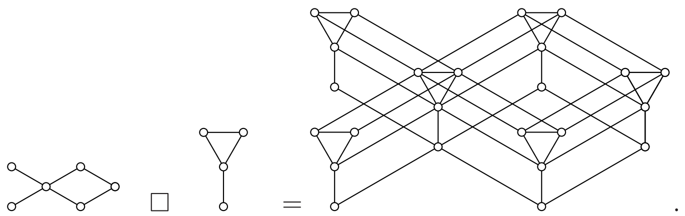
$$K_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \ = \ \overline{K_{n_1}} — \overline{K_{n_2}} — \ \cdots \ — \overline{K_{n_k}} \tag{47}$$

adódik, amikor $k \geq 2$. Továbbá,

$$K_n = K_1 — K_1 — \ \cdots \ — K_1 \quad \text{és} \quad \vec{K_n} = K_1 \rightarrow K_1 \rightarrow \cdots \rightarrow K_1, \tag{48}$$

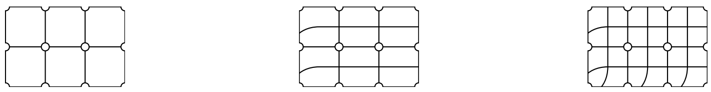
a K_1 gráf n példányát használva, ami azt mutatja, hogy $K_n = K_{1,1,\ldots,1}$ egy teljes n-részes gráf.

A direkt összegek és egyesítések hasonlóan viselkednek az összeadásra, mivel $\overline{K_m} \oplus \overline{K_n} = \overline{K_{m+n}}$ és $K_m — K_n = K_{m+n}$. A gráfokat kombinálhatjuk algebrai műveletekkel is, amelyek a szorzáshoz hasonlóak. A *Descartes-szorzat* művelet például az m-ed rendű $G = (U, E)$ és n-ed rendű $H = (V, F)$ gráfból egy mn-ed rendű $G \square H$ gráfot állít elő. A $G \square H$ csúcsai (u, v) alakú rendezett párok, ahol $u \in U$ és $v \in V$; az élek $(u, v) — (u', v)$ alakúak, ha $u — u'$ a G-be esik, valamint $(u, v) — (u, v')$ alakúak, ha $v — v'$ a H-ba esik. Más szóval, $G \square H$ létrehozásakor minden G-beli csúcs H egy példányával lesz helyettesítve, G minden éle pedig a megfelelő példányok megfelelő csúcsai közötti élekkel:



(49)

Mint általában, az általános konstrukció legegyszerűbb speciális esetei kiemelkedően fontosnak bizonyulnak a gyakorlatban. Ha mind G, mind H út vagy kör, „gráfpapír gráfokat kapunk”, nevezetesen az $m \times n$-es $P_m \,\square\, P_n$ ***rácsgráf***, az $m \times n$-es $P_m \,\square\, C_n$ ***hengergráf*** és az $m \times n$-es $C_m \,\square\, C_n$ ***tóruszgráf*** gráfokat, amelyeket az $m = 3$ és $n = 4$ esetre mutatunk be:



$P_3 \,\square\, P_4$ (3 × 4-es rácsgráf) — $P_3 \,\square\, C_4$ (3 × 4-es hengergráf) — $C_3 \,\square\, C_4$ (3 × 4-es tóruszgráf) (50)

A gráfok szorzásának négy másik nevezetes módja bizonyult még hasznosnak. A szorzatgráf csúcsai minden esetben (u, v) alakú rendezett párok.

- A $G \otimes H$ ***direkt szorzat***, amit G és a H „konjunkciójának” vagy „kategorikus szorzatának” is neveznek, (u, v)—(u', v') teljesül, amikor u—u' a G-be esik és v—v' a H-ba esik.
- A $G \boxtimes H$ ***erős szorzat*** kombinálja a $G \square H$ és a $G \otimes H$ éleit.
- A $G \bigtriangleup H$ ***páratlan szorzatra*** (u, v)—(u', v') teljesül, amikor vagy u—u' a G-be esik, vagy v—v' a H-ba esik, de nem egyszerre.
- A $G \circ H$ ***lexikografikus szorzatra***, amit a G és a H „kompozíciójának” is neveznek, $(u, v) - (u', v')$ teljesül, ha $u - u'$ a G-be esik, és $(u, v) - (u, v')$, ha $v - v'$ a H-ba esik.

Ezen öt művelet mindegyike természetes módon kiterjeszthető $k \geq 2$ gráf $G_1 = (V_1, E_1)$, $\ldots$, $G_k = (V_k, E_k)$ szorzatára, melynek csúcsai $(v_1, \ldots, v_k)$ rendezett k-asok, ahol $v_j \in V_j$ minden $1 \leq j \leq k$ esetén. Ha például $k = 3$, a $G_1 \,\square\, (G_2 \,\square\, G_3)$ és a $(G_1 \,\square\, G_2) \,\square\, G_3$ Descartes-szorzatok izomorfak, amennyiben a $(v_1, (v_2, v_3))$ és $((v_1, v_2), v_3)$ csúcsokat a (v_1, v_2, v_3)-mal megegyezőnek tekintjük. Ily módon a Descartes-szorzatból a $G_1 \,\square\, G_2 \,\square\, G_3$ módon elhagyhatjuk a zárójelezést. A k-tényezős Descartes-szorzatok legfontosabb példája a

$$K_2 \,\square\, K_2 \,\square\, \cdots \,\square\, K_2 \tag{51}$$

k dimenziós hiperkocka; ennek 2^k számú $(v_1, \ldots, v_k)$ csúcsa szomszédos, ha a Hamming-távolságuk 1.

Tegyük fel általában, hogy $v = (v_1, \ldots, v_k)$ és $v' = (v'_1, \ldots, v'_k)$ csúcsokból álló k-asok, ahol $v_j - v'_j$ a G_j-be esik pontosan a indexre a j index közül, és $v_j = v'_j$ pontosan b indexre. Ekkor:
v—v' pontosan akkor esik $G_1 \,\square\, \cdots \,\square\, G_k$-ba, ha $a = 1$ és $b = k - 1$;
v—v' pontosan akkor esik $G_1 \otimes \cdots \otimes G_k$-ba, ha $a = k$ és $b = 0$;
v—v' pontosan akkor esik $G_1 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$-ba, ha $a + b = k$ és $a > 0$;
v—v' pontosan akkor esik $G_1 \bigtriangleup \cdots \bigtriangleup G_k$-ba, ha a páratlan. A lexikografikus szorzat valamelyest különbözik, mivel nem kommutatív; $G_1 \circ \cdots \circ G_k$-ban v—v' pontosan akkor teljesül $v \neq v'$-re, ha v_j—v'_j, ahol j a legkisebb olyan alindex, amire $v_j \neq v'_j$.

A 91–102. gyakorlat megismertet a gráfszorzatok bizonyos alaptulajdonságaival. Lásd még Imrich és Klavžar könyvét [20], amely átfogó bevezetést tartalmaz az általános elméletbe, beleértve egy adott gráf „prím” részgráfokra való faktorizálására szolgáló algoritmusokat is.

Gráfok foksorozata. Nemnegatív egészek egy $d_1 d_2 \ldots d_n$ sorozatát *grafikusnak* nevezzük, ha létezik legalább egy $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsú gráf, amelyben a k csúcs fokszáma d_k. Feltehetjük, hogy $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Nyilvánvaló, hogy $d_1 < n$ minden ilyen gráfban; valamint, hogy minden grafikus sorozat $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ összege mindig páros, mivel ez éppen az élek számának kétszerese. Továbbá, könnyen ellenőrizhető, hogy a 3311 sorozat nem grafikus; azaz a grafikus sorozatoknak más feltételeket is ki kell elégíteniük. Melyek ezek?

Egy adott $d_1 d_2 \ldots d_n$ sorozat grafikussága eldöntésének egy egyszerű módját és egy ilyen gráf elkészítését Havel dolgozta ki [15]. Egy üres tablóval indulunk, amelynek a k. sorában d_k cella van; ezek a cellák „nyílásokat” reprezentálnak, amelyekbe a k csúcs szomszédait helyezzük a konstruált gráfban. Legyen c_j a j. oszlopban lévő cellák száma; így $c_1 \geq c_2 \geq \cdots$, és $1 \leq k \leq n$ esetén $c_j \geq k$ teljesül pontosan akkor, ha $d_k \geq j$. Legyen például $n = 8$, és $d_1 \ldots d_8 = 55544322$; ekkor

$$\begin{array}{llllll}
1 & \square & \square & \square & \square & \square \\
2 & \square & \square & \square & \square & \square \\
3 & \square & \square & \square & \square & \square \\
4 & \square & \square & \square & \square & \\
5 & \square & \square & \square & \square & \\
6 & \square & \square & \square & & \\
7 & \square & \square & & & \\
8 & \square & \square & & &
\end{array} \tag{52}$$

a kiindulási tabló, és $c_1 \ldots c_5 = 88653$. Havel ötlete szerint kössük össze az n csúcsot a legnagyobb fokú csúcsok közül d_n-nel. Ebben az esetben létrehozzuk például a 8—3 és 8—2 élt, és a tabló a következő alakúvá változik:

$$\begin{array}{llllll}
1 & \square & \square & \square & \square & \square \\
2 & \square & \square & \square & \square & \boxed{8} \\
3 & \square & \square & \square & \square & \boxed{8} \\
4 & \square & \square & \square & \square & \\
5 & \square & \square & \square & \square & \\
6 & \square & \square & \square & & \\
7 & \square & \square & & & \\
8 & \boxed{2} & \boxed{3} & & &
\end{array} . \tag{53}$$

(A 8—1 élt nem akarjuk, mivel az üres nyílásokat tabló alakúra kell hozni; minden oszlop celláit alulról felfelé kell feltölteni.) Ezután legyen $n \leftarrow 7$, és hozzunk létre további két, a 7—1 és 7—5 élt. Ezt követi még másik három, a 6—4, 6—3 és 6—2, ami már majdnem félig késszé teszi a tablót:

$$\begin{array}{llllll}
1 & \square & \square & \square & \square & \boxed{7} \\
2 & \square & \square & \square & \boxed{6} & \boxed{8} \\
3 & \square & \square & \square & \boxed{6} & \boxed{8} \\
4 & \square & \square & \square & \boxed{6} & \\
5 & \square & \square & \square & \boxed{7} & \\
6 & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{4} & & \\
7 & \boxed{5} & \boxed{1} & & & \\
8 & \boxed{2} & \boxed{3} & & &
\end{array} . \tag{54}$$

A problémát egy $d_1 \ldots d_5 = 43333$ csúcssorozattal rendelkező gráf keresésévé egyszerűsítettük; ezen a ponton $c_1 \ldots c_4 = 5551$ szintén teljesül. Az olvasóra bízzuk az üresen maradt helyek kitöltését, mielőtt megtekintené a 103. gyakorlatnál adott választ.

H algoritmus (*gráfgenerátor adott fokszámokhoz*). Adott $d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq d_{n+1} = 0$ esetén ez az algoritmus éleket hoz létre az $\{1, \ldots, n\}$ csúcsok között úgy, hogy pontosan

d_k él tartalmazza a k csúcsot minden $1 \le k \le n$ esetén, hacsak a $d_1 \dots d_n$ sorozat nem grafikus. Átmeneti tárolóként egy $c_1 \dots c_{d_1}$ tömböt használunk.

H1. (A c-k beállítása.) Kiindulásként legyen $k \leftarrow d_1$ és $j \leftarrow 0$. Végezzük el a következő műveleteket, amíg $k > 0$ fennáll: Legyen $j \leftarrow j + 1$; amíg $k > d_{j+1}$, legyen $c_k \leftarrow j$ és $k \leftarrow k - 1$.

H2. (n megkeresése.) Legyen $n \leftarrow c_1$. Fejezzük be sikeresen a futást, ha $n = 0$, és sikertelenül, ha $d_1 \ge n > 0$.

H3. (Ciklus j-re.) Legyen $i \leftarrow 1$, $t \leftarrow d_1$ és $r \leftarrow c_t$. Hajtsuk végre a H4 lépést a $j = d_n$, $d_n - 1, \dots, 1$ esetre; majd lépjünk vissza a H2-re.

H4. (Új él létrehozása.) Legyen $c_j \leftarrow c_j - 1$ és $k \leftarrow c_t$. Készítsük el a $k - n$ élt, és legyen $d_k \leftarrow d_k - 1$, $c_t \leftarrow k - 1$. Ha $k = i$, legyen $i \leftarrow r + 1$, $t \leftarrow d_i$ és $r \leftarrow c_t$ (lásd a 104. gyakorlatot). ■

Ha a H algoritmus sikeresen lefut, elkészít egy gráfot a kívánt fokszámokkal. Ha viszont sikertelen a futása, hogyan tudjuk ellenőrizni, hogy lehetetlent kértünk tőle? Ennek a kérdésnek a kulcsa a „*majorálás*” nevű fontos fogalom: Ha $d_1 \dots d_n$ és $d'_1 \dots d'_n$ ugyanannak az egésznek két különböző felbontása (azaz, ha $d_1 \ge \dots \ge d_n$ és $d'_1 \ge \dots \ge d'_n$ és $d_1 + \dots + d_n = d'_1 + \dots + d'_n$), akkor $d_1 \dots d_n$ *majorálja* a $d'_1 \dots d'_n$-t, ha $d_1 + \dots + d_k \ge d'_1 + \dots + d'_k$, $1 \le k \le n$.

M lemma. *Ha $d_1 \dots d_n$ grafikus, és $d_1 \dots d_n$ majorálja $d'_1 \dots d'_n$-t, akkor $d'_1 \dots d'_n$ szintén grafikus.*

Bizonyítás. Az állítást elég arra az esetre bizonyítani, amikor $d_1 \dots d_n$ és $d'_1 \dots d'_n$ csak két helyen tér el,

$$d'_k = d_k - [k = i] + [k = j], \qquad \text{ahol } i < j, \tag{55}$$

mivel a $d_1 \dots d_n$-nel majorált minden sorozat megkapható az ehhez hasonló mini-majorálások ismételgetésével. (A 7.2.1.4–55. gyakorlatok tárgyalják részletesen a majorálást.)

Az (55) feltételből következik, hogy $d_i > d'_i \ge d'_{i+1} \ge d'_j > d_j$. Vagyis a $d_1 \dots d_n$ fokszámsorozattal rendelkező minden gráf tartalmaz egy v csúcsot, melyre $v — i$ és $v \not— j$. A $v — i$ él törlése és a $v — j$ él hozzáadása egy $d'_1 \dots d'_n$ kívánt fokszám sorozattal rendelkező gráfot eredményez. ■

H következmény. *A H algoritmus sikeresen fejeződik be, ha $d_1 \dots d_n$ grafikus.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $n > 1$. Legyen G egy $\{1, \dots, n\}$ csúcsú tetszőleges gráf $d_1 \dots d_n$ fokszámsorozattal, és legyen G' az $\{1, \dots, n-1\}$ csúcsok által indukált részgráf; más szavakkal, készítsük el a G'-t az n csúcs, és a hozzá illeszkedő d_n él eltávolításával. A G' gráf $d'_1 \dots d'_{n-1}$ fokszámsorozata a $d_1 \dots d_{n-1}$-ből kapható meg, d_n értéket 1-gyel csökkentve, majd ezeket csökkenő sorba rendezve. A $d'_1 \dots d'_{n-1}$ sorozat definíció szerint grafikus. A H3 és H4 lépéssel előállított $d''_1 \dots d''_{n-1}$ fokszámsorozatot minden ilyen $d'_1 \dots d'_{n-1}$ sorozat majorál, mivel 1-gyel csökkenti a legnagyobb lehetséges d_n értékeket. Ezért az új $d''_1 \dots d''_{n-1}$ grafikus. A $d_1 \dots d_{n-1} \leftarrow d''_1 \dots d''_{n-1}$-t beállító H algoritmus sikeressége ezért n-szerinti indukcióval következik. ■

A H algoritmus futási ideje durván a létrehozott élek számával arányos, amelynek nagyságrendje n^2 lehet. A 105. gyakorlat egy gyorsabb módszert közöl, ami $O(n)$ lépésben dönti el, hogy egy adott $d_1 \dots d_n$ sorozat grafikus-e vagy sem (gráf létrehozása nélkül).

Túl a gráfokon. Amennyiben egy gráf vagy irányított gráf csúcsait és/vagy éleit további adatokkal látjuk el, úgy azt *hálózatnak* nevezzük. Például a words$(5757, 0, 0, 0)$ gráf minden csúcsának van egy hozzárendlet rangja, amely a megfelelő ötbetűs szó népszerűségét jelzi. A *plane_lisa*$(360, 250, 15, 0, 360, 0, 250, 0, 0, 2295000)$ gráf csúcsainak van egy hozzárendelt *képpont* sűrűsége 0 és 15 között. A *board*$(8, 8, 0, 0, -2, 0, 0)$ minden élének van egy hozzárendelt hossz értéke, ami egy figura táblán való mozgásának távolságát írja le: Egy *futó* egyik sarokból másikba való mozgásának a hossza 7. A *Stanford GraphBase* a fentieken túl számos további generátort tartalmaz, amelyekről eddig nem volt szó, mivel ezeket elsősorban érdekes hálózatok, nem pedig érdekes struktúrával rendelkező gráfok előállítására használják.

• *miles*$(128, 0, 0, 0, 0, 127, 0)$ egy 128 csúcsú hálózat, amelyek a korábban leírt *plane_miles* észak-amerikai városaira vonatkoznak. A *plane_miles* gráftól eltérően azonban, a *miles* egy teljes gráf $\binom{128}{2}$ éllel. Minden él egész hosszúságú, annak a távolságnak a leírására, amelyet 1949-ben egy autó megtett, miközben átutazott az egyik városból egy másikba. Például 'Vancouver, BC' és 'West Palm Beach, FL' távolsága 3496 mérföld a *miles* hálózatban.

• *econ*$(81, 0, 0, 0)$ egy 81 csúccsal és 4902 éllel rendelkező hálózat. A csúcsai ez Egyesült Államok egyes gazdasági szektorait, míg élei a pénz szektorok közötti áramlásának 1985-ben mért mennyiségét reprezentálják millió dollárban számolva. Például az áramlási érték a Apparel (Ruházat) szektorból a Household furniture (Háztartási bútor) szektorba 44, vagyis a bútoripar 44.000.000 dollárt fizetett a ruházati szektornak a nevezett évben. Az egy csúcsba beérkező tételek összege megegyezik a csúcsból kiinduló tételek összegével. Él csak akkor jelenik meg, ha ez az áramlás nem nulla. A speciális, Users (Felhasználók) csúcs fogadja egy termék teljes pénzügyi igényét; egyes ilyen végfelhasználói tételek negatívak, az importált áruk egyes állami közgazdászok általi kezelése miatt.

• *games*$(120, 0, 0, 0, 0, 0, 128, 0)$ egy 120 csúccsal és 1276 éllel rendelkező hálózat. A csúcsai az Egyesült Államok főiskoláinak és egyetemeinek futballcsapatait reprezentálják. Élek azon csapatok között futnak, amelyek játszottak egymással az izgalmas 1990-es bajnokságban, és a szerzett pontokkal vannak címkézve. Például a Stanford $\to$ California él értéke 27, míg a California $\to$ Stanford értéke 25, mivel a *Stanford Cardinal* a U. C. Berkeley *Golden Bears* csapatát 27–25 arányban győzte le 1990. november 17-én.

• *risc*(16) egy teljesen más típusú hálózat. 3240 csúccsal és 7878 éllel rendelkezik, amely egy *irányított aciklikus gráfot* vagy „*iag*"-t definiál, nevezetesen egy *irányított köröket* nem tartalmazó irányított gráfot. A csúcsok logikai értékekkel rendelkező kapukat tartalmaznak; a Z45 $\leftarrow$ R0:7~ él azt jelenti, hogy a Z45 kapu értéke a R0:7~ kapu bemenete. Minden kapunak van egy (ÉS, VAGY, KIZÁRÓ VAGY, NEM, *retesz* vagy külső bemeneti) típuskódja; minden élnek van egy, a késés mértékét jelző hossza. A hálózat tartalmazza egy miniatűr RISC áramkör teljes logikai felépítését, ami tizenhat regiszter irányítására képes 16-bites egyszerű parancs használatát biztosítja.

Az SGB generátorokkal kapcsolatban az összes részlet megtalálható a szerző *The Stanford GraphBase* című könyvében [22] egyszerű példaprogramok tucatjaival együtt, amelyek elmagyarázzák a generátorok által előállított gráfok és hálózatok manipulálhatóságát. Egy LÉTRÁK című program például bemutatja, hogyan található *legrövidebb út* két ötbetűs szó között. Egy RISC_HASZNÁLATA című program elmagyarázza, hogyan működik egy *nano számítógép* lépésről lépésre, a *risc*(16) kapuiból felépülő hálózat műveleteinek szimulálásával.

Hipergráfok. A gráfok és hálózatok igen érdekesek lehetnek, de még távolról sem jelentik a történet végét. Sok fontos kombinatorikai algoritmust terveztek a gráfoknál általánosabb *hipergráfokra*, melyek élei a csúcsok *tetszőleges* részhalmazai lehetnek.

Lehet adva hét csúcs, amelyeket a $v = a_1a_2a_3$ alakú nemnulla bináris füzérek azonosítanak, és hét él, amelyeket pedig az $e = [b_1b_2b_3]$ zárójelezett nemnulla bináris füzérek azonosítanak, ahol $v \in e$ pontosan akkor, ha $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \mod 2 = 0$ (a nemnulla füzérek nem minden eleme nulla). Ezen élek mindegyike pontosan három csúcsot tartalmaz:

$$[001] = \{010, 100, 110\}; \quad [010] = \{001, 100, 101\}; \quad [011] = \{011, 100, 111\};$$
$$[100] = \{001, 010, 011\}; \quad [101] = \{010, 101, 111\};$$
$$[110] = \{001, 110, 111\}; \quad [111] = \{011, 101, 110\}. \tag{56}$$

Továbbá, a szimmetria miatt, minden csúcs pontosan három élhez tartozik. (A három vagy több csúcsot tartalmazó élt időnként *hiperélnek* is nevezik, hogy megkülönböztessék egy hagyományos gráf éleitől. Lehet azonban egyszerűen csak „éleknek” is nevezni őket.)

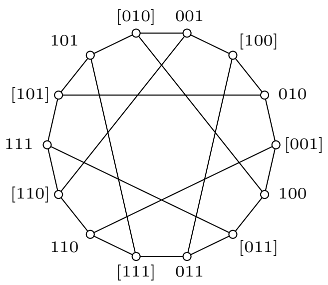
Egy hipergráf *r-egyenletes*, ha minden él pontosan r csúcsot tartalmaz. Így (56) egy 3-egyenletes hipergráf, egy 2-egyenletes hipergráf pedig egy hagyományos gráf. A $K_n^{(r)}$ teljes r-egyenletes hipergráfnak n csúcsa és $\binom{n}{r}$ éle van.

A gráfelmélet legtöbb alapfogalma természetes módon kiterjeszthető hipergráfokra. Ha például $H = (V, E)$ egy hipergráf és $U \subseteq V$, akkor az U által *indukált* $H \mid U$ részhipergráf $\{e \mid e \in E \text{ és } e \subseteq U\}$ élekkel rendelkezik. Egy *r-egyenletes hipergráf* $\overline{H}$ *komplementere* $K(r)_n$ azon éleivel rendelkezik, amelyek H-nak nem elemei. Egy hipergráf k-színezése színek csúcsokhoz való rendelése úgy, hogy ne legyenek egyszínű élek. És így tovább.

A hipergráfokat gyakran más névvel is illetik, mivel ugyanezek a tulajdonságok sok más módon is megfogalmazhatók. Például, minden $H = (V, E)$ hipergráf alapvetően *halmazok egy családja*, mivel minden él V egy részhalmaza. Egy 3-egyenletes hipergráfot *tripla rendszernek* is szoktak hívni. Egy hipergráf 0-k és 1-ek egy B mátrixával is ekvivalensek, ahol minden v csúcshoz egy sor és minden e élhez egy oszlop tartozik; a mátrix v sora és e oszlopa a $b_{ve} = [v \in e]$ értéket tartalmazza. A B mátrixot a H *illeszkedési mátrixának* nevezzük, és „v előfordul az e-ben”, ha $v \in e$. Továbbá, egy hipergráf egy *páros gráffal* ekvivalens, $V \cup E$ csúcshalmazzal és v—e éllel, amennyiben v előfordul az e-ben. A hipergráfot pontosan akkor nevezzük *összefüggőnek*, ha a megfelelő páros gráf összefüggő. Egy hipergráf k-hosszú *körét* a megfelelő páros gráf $2k$-hosszú köreként definiáljuk.

Az (56) hipergráf például egy ekvivalens előfordulási mátrixszal vagy páros gráffal is definiálható a következőképpen:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} [001] & [010] & [011] & [100] & [101] & [110] & [111] \end{array} \\ \begin{array}{c} 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



(57)

Ez a hipergráf 28 darab 3 hosszúságú utat tartalmaz, mint például

$$[101] \text{—} 101 \text{—} [010] \text{—} 001 \text{—} [100] \text{—} 010 \text{—} [101] \,. \tag{58}$$

Egy H hipergráf H^T ***duálisát*** a csúcsok és élek szerepének felcserélésével képezzük az illeszkedési reláció megőrzésével. Más szóval, az illeszkedési mátrixot transzponáljuk. Vegyük észre például, hogy egy r-***reguláris*** gráf duálisa egy r-egyenletes hipergráf.

Az illeszkedési mátrixok és páros gráfok vonatkozhatnak olyan hipergráfokra, amelyekben egyes élek egynél többször jelennek meg, mivel a mátrixban két oszlop megegyezhet. Egy ismétlődő élekkel nem rendelkező $H = (V, E)$ hipergráf egy másik kombinatorikai objektumnak, nevezetesen egy ***logikai függvénynek*** is megfelel. Ha például a V csúcshalmaz $\{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \bigl[\{j \mid x_j = 1\} \in E\bigr] \tag{59}$$

függvény leírja a H éleit. (56) és (57) hipergráfja például a

$$(x_1 \oplus x_2 \oplus x_4) \wedge (x_2 \oplus x_3 \oplus x_5) \wedge (x_3 \oplus x_4 \oplus x_6) \wedge (x_4 \oplus x_5 \oplus x_7)$$

$$\wedge (x_5 \oplus x_6 \oplus x_1) \wedge (x_6 \oplus x_7 \oplus x_2) \wedge (x_7 \oplus x_1 \oplus x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \tag{60}$$

logikai képlettel is leírható.

Kissé zavaró lehet, hogy a kombinatorikai objektumok ilyen sokféleképpen felfoghatók. Ez azonban egyúttal roppant hasznos is, mivel ekvivalens problémák megoldásához számos ötletet kapunk. Ha egy problémát több oldalról is górcső alá veszünk, az agyunk természetes módon több irányból is próbál a megoldáshoz eljutni. Időnként a mátrix sorai és oszlopai cserélgetésének végiggondolása vezethet el a probléma mélyebb megértéséhez. Más esetben a csúcsok útvonalként való értelmezésével vagy pontosztályok térbeli megjelenítésével érhetünk el haladást. Megint máskor, a Boole-algebra a megfelelő eszköz. Ha az egyik megközelítéssel elakadunk, egy másik siethet a segítségünkre.

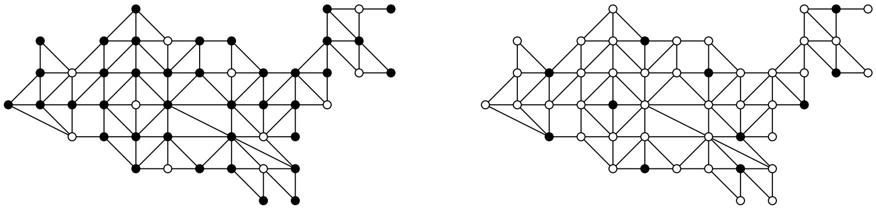
Lefedés és függetlenség. Egy $H = (V, E)$ gráf vagy hipergráf esetén, csúcsok egy U halmaza ***lefedi*** a H-t, ha minden él tartalmazza az U legalább egy elemét. Csúcsok egy W halmazát ***függetlennek*** (vagy ***stabilnak***) nevezzük a H-ban ha, a W egyetlen élt sem tartalmaz teljesen.

Az illeszkedési mátrixot tekintve, egy lefedés olyan sorok egy halmaza, amelyek oszlopösszege sehol sem nulla. Amennyiben H speciálisan egy gráf, a mátrix minden oszlopa csak két 1-est tartalmaz; vagyis egy gráf egy független halmaza egymásra kölcsönösen ***merőleges*** sorok egy halmazát jelenti – azaz egy olyan halmazt, amelyre bármely két különböző sor ***skaláris szorzata*** nulla.

Ezek a fogalmak egyazon érme két oldalát jelentik. Ha az U lefedi a H-t, akkor $W = V \setminus U$ független a H-ban; megfordítva, ha a W független a H-ban, akkor $U = V \setminus W$ lefedi a H-t. Mindkét állítás azzal ekvivalens, hogy az indukált $H \mid W$ hipergráfnak nincsenek élei.

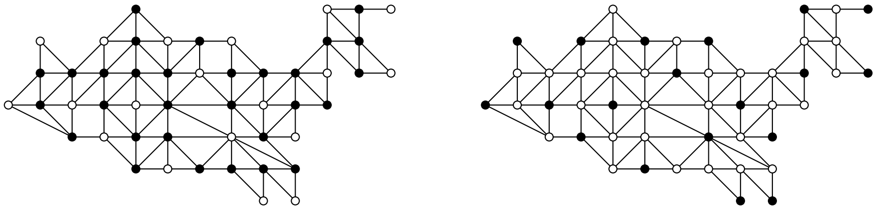
A lefedésnek és függetlenségnek ez a duális kapcsolata, amelyet először Claude Berge [2] figyelt meg, meglehetősen paradox. Habár logikailag nyilvánvaló és könnyen ellenőrizhető, intuitíve mégis meglepő. Ha egy gráfot vizsgálunk, és egy nagy méretű független halmazt próbálunk találni, másképpen gondolkodunk, mint amikor egy kis méretű csúcs lefedőt keresünk ugyanazon gráfban; miközben a cél mindkét esetben ugyanaz.

Egy lefedő U halmaz *minimális*, ha $U \setminus u$ nem lefedő minden $u \in U$ esetén. Hasonlóan, egy független W halmaz *maximális*, ha $W \cup w$ nem független minden $w \notin W$ esetén. Lejjebb példaként megadjuk a 49-csúcsú *összefüggő Egyesült Államok* (**??**) gráf egy minimális lefedését és a kapcsolódó maximális független halmazt:



Minimális csúcslefedés 38 csúccsal — Maximális független halmaz 11 csúccsal (61)

Egy lefedést *minimumnak* nevezünk, ha a mérete a lehető legkisebb, illetve egy lefedő halmazt *maximumnak*, ha a mérete a lehető legnagyobb. Például a (**??**)-es gráffal a (61)-esnél lényegesen jobb eredményt érhetünk el:



Minimális csúcslefedés 30 csúccsal — Maximális független halmaz 10 csúccsal (62)

Ezen a ponton figyeljük meg a „minimális” és a „minimum” közötti finom különbséget: Általában (bár a legtöbb *angol szótártól* eltérően) a kombinatorikai algoritmusokkal dolgozók a „minimális” vagy „optimális” szóhasználattal élnek a *lokálisan* legjobb kombinatorikai konfigurációk megjelöléséhez, amelyek kisebb módosítások hatására nem javulnak. A „minimum” vagy „optimum” kifejezések az összes szóba jövő között *globálisan* legjobb konfigurációk számára van fenntartva. Minden optimalizációs problémára könnyű találni egy gyengébb, helyi értelemben optimális megoldást, folyamatosan mászva a hegyet a csúcs eléréséig. A valódi optimumot szolgáltató megoldások megkeresése általában jóval nehezebb feladat. Így például a 7.9. alfejezetben látni fogjuk, hogy egy adott gráf *maximum független halmazának* megkeresése a bonyolult, *NP-teljes* feladatok osztályába tartozik.

Nem kell azonban kétségbe esnünk NP-teljes problémák esetén sem. Minimum lefedők keresésére használt technikákat a fejezet számos pontján tárgyalni fogunk, amelyek kisebb problémák esetén jól működnek; A (62) optimum megoldása kevesebb, mint egy másodperc alatt megtalálható volt a 2^{49} lehetőség csak egy kis szeletének átvizsgálásával. Továbbá, NP-teljes problémák speciális esetei gyakran bizonyulnak az általános esetnél egyszerűbbnek. A 7.5.1. pontban látható lesz, hogy egy minimum csúcslefedő gyorsan megkereshető egy *páros gráfban* vagy ennek a gráfnak egy *duális* hipergráfjában. A 7.5.5. pontban pedig hatékony módszereket tárgyalunk maximum *párosítás* keresésére, ami egy adott gráf *élgráfjának* maximum független halmaza.

Egy független halmaz méretének maximalizálása annyira gyakori probléma, hogy célszerű saját jelöléssel ellátni: Egy H hipergráf esetén az

$$\alpha(H) \;=\; \max\bigl\{|W| \bigm| W \text{ független csúcsok halmaza } H\text{-ban}\bigr\} \tag{63}$$

értéket a H *függetlenségi számának* (vagy *stabilitási számának*) nevezzük. Hasonlóan, a

$$\chi(H) \;=\; \min\{k \mid H \; k\text{-színezhető}\} \tag{64}$$

értéket a H *kromatikus számának* nevezzük. Vegyük észre, hogy $\chi(H)$ a H független halmazokkal val minimum lefedőjének a mérete, mivel az egyes színeket kapó csúcsoknak a definíciónk szerint függetlennek kell lenniük.

Az $\alpha(H)$ és $\chi(H)$ ezen definíciói elsősorban arra az esetre vonatkoznak, amikor H egy szokásos gráf, és ilyenkor természetesen gyakran használjuk az $\alpha(G)$ és $\chi(G)$ jelölést is. A gráfokhoz kapcsolódik még egy másik fontos érték, az

$$\omega(G) \;=\; \max\bigl\{|X| \bigm| X \text{ klikk } G\text{-ben}\bigr\}, \tag{65}$$

klikkszám, ahol egy „*klikk*” kölcsönösen szomszédos csúcsok egy halmaza.

$$\omega(G) \;=\; \alpha(\overline{G}), \tag{66}$$

nyilvánvalóan fennáll, mivel egy G-beli klikk a *komplementer gráf* egy *független halmaza*. Hasonlóan látható, hogy $\chi(\overline{G})$ egy *klikk lefedő* legkisebb mérete, ami az összes csúcsot lefedő klikkek egy halmaza.

Ebben az alfejezetben több helyen is említettünk „pontos *lefedési* problémákat” anélkül, hogy precízen elmagyaráztuk volna egy ilyen probléma mibenlétét. Mostanra készen állunk a definícióra: Egy H hipergráf *illeszkedési mátrixa* esetén, a H egy *pontos lefedése* a mátrix olyan sorainak egy halmaza, amelyek összege $(1\,1\,\ldots\,1)$. Más szóval, egy pontos lefedés olyan csúcsok egy halmaza, amelyek minden hiperélt pontosan egyszer érintenek; egy szokásos lefedésnek minden hiperélt *legalább* egyszer kell érintenie.

GYAKORLATOK

1. [*25*]

2. [*18*] ...

69. [*20*] A **??**. gyakorlatot kiterjesztve magyarázzuk el, hogyan kell egy SGB formátumban ábrázolt gráf *minden* csúcsához kiszámítani a KIFOK(v) kifokot és a BEFOK(v) befokot.

70. [*M20*] Hányszor futnak le a B algoritmus egyes lépései, amikor az algoritmus sikeresen 2-színez egy m élű és n csúcsú gráfot?

71. [*M26*] Implementáljuk a B algoritmust az MMIX számítógép számára úgy, hogy a MMIXAL assembly nyelvet használjuk. Tegyük fel, hogy a program kezdetekor a $v0$ regiszter az első csúcspontra mutat, és az n regiszter a csúcsok számát tartalmazza.

72. [*M22*] Amikor a B6-os lépésben beállítjuk a COLOR(v) értéket, akkor u-t nevezzük v *szülőjének*; viszont amikor a B3-as lépésben állítjuk be a COLOR(w)-t, akkor mondjuk azt, hogy w-nek nincs szülője. Definiáljuk a v csúcs *őseit* rekurzívan v és v szülőjének őseivel, már ha van szülője. a) Bizonyítsuk be, hogy ha a B algoritmus működése során v lejjebb van a veremben, mint u, akkor v szülője egyben u őse is. b) Továbbá, ha a B6-os lépésben COLOR(v) = COLOR(u), akkor v aktuálisan a veremben van. c) Használjuk fel ezeket az összefüggéseket, a B algoritmus kiterjesztéséhez úgy, hogy ha a gráf nem páros, akkor a kimenet a csúcsok nevei legyenek egy páratlan hosszúságú körben.

73. [*15*] Hogyan nevezzük másképpen a *véletlen_ gráf*$(10, 45, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$-t?

74. [*21*] A *roget*$(1022, 0, 0, 0)$ mely csúcsának van a legnagyobb kifoka?

75. [*22*] A *tábla*$(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ SGB gráf generátor egy olyan gráfot hoz létre, amelynek csúcsai az $(x_1, \ldots, x_t)$ t-dimenziós egész vektorok, ahol $0 \le x_i < b_i$, amelyet az első négy (n_1, n_2, n_3, n_4) paraméter határoz meg a következőképpen: Legyen $n_5 \leftarrow 0$ és $j \ge 0$ az a minimális érték, hogy $n_{j+1} \le 0$ teljesül. Ha $j = 0$, akkor legyen $b_1 \leftarrow b_2 \leftarrow 8$ és $t \leftarrow 2$; ez lesz az alapértelmezett 8×8-as tábla. Egyébként, ha $n_{j+1} = 0$, akkor legyen $b_i \leftarrow n_i$, ahol $1 \le i \le j$ és $t \leftarrow j$. Végül, ha $n_{j+1} < 0$, akkor legyen $t \leftarrow |n_{j+1}|$, és legyen b_i az i. eleme az $(n_1, \ldots, n_j, n_1, \ldots, n_j, n_1, \ldots)$ periodikus sorozatnak. (Például az $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 3, 5, -7)$ eset olyan ravasz, amilyen csak lehet; egy 7-dimenziós táblát állít elő $(b_1, \ldots, b_7) = (2, 3, 5, 2, 3, 5, 2)$- vel, tehát egy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 1800$ csúcsú gráfot.)

A maradék (p, w, o) paraméterek a gráf éleit határozzák meg. Először tegyük fel, hogy $w = o = 0$. Ha $p > 0$, $(x_1, \ldots, x_t) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_t)$ pontosan akkor, ha $y_i = x_i + \delta_i$ $1 \le i \le t$-re, ahol $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ egész megoldása a $\delta_1^2 + \cdots + \delta_t^2 = |p|$ egyenletnek. Ha $p < 0$, akkor megengedett az $y_i = x_i + k\delta_i$ eset is, ahol $k \ge 1$, amely megfelel annak, hogy k azonos irányba mozog.

Ha $w \ne 0$, akkor legyen $w = (w_t \ldots w_1)_2$ bináris alakban. Engedélyezzük a „bekerítést": $y_i = (x_i + \delta_i) \mod b_i$ vagy $y_i = (x_i + k\delta_i) \mod b_i$, minden olyan i koordinátára, amelyre $w_i = 1$.

Ha $o \ne 0$, akkor a gráf irányított; a $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ eltolás csak akkor hoz létre éleket, ha lexikografikus rendezés szerint nagyobbak, mint $(0, \ldots, 0)$. De ha $o = 0$, akkor a gráf nem irányított.

Találjunk olyan $(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ konfigurációt, amikor a *tábla* a következő alapgráfot hozza létre: (a) a k_n teljes gráf; (b) a P_n út; (c) a C_n kör; (d) a $\vec{K_n}$ tranzitív verseny; (e) a $\vec{P_n}$ irányított út; (f) a $\vec{C_n}$ irányított kör; (g) a $P_m \square P_n$ $m \times n$-es rács; (h) a $P_m \square C_n$ $m \times n$-es henger; (i) a $C_m \square C_n$ $m \times n$-es tórusz; (j) a $K_m \square K_n$ $m \times n$-es bástya gráf (k) a $\vec{C_m} \square \vec{C_n}$ $m \times n$-es irányított tórusz; (l) a $\overline{K_n}$ zérusgráf; (m) A $P_2 \square \cdots \square P_2$ 2^n csúcsú n-kocka.

76. [*20*] A *tábla*$(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$-ban lehetnek körök vagy többszörös élek?

77. [*M20*] Legyen adva egy G gráf, amelynek átmérője ≥ 3. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{G}$-nek az átmérője ≤ 3.

78. Legyen $G = (V, E)$ olyan gráf, hogy $|V| = n$ és $G \cong \overline{G}$ teljesül. (Tehát a G gráf *komplementerével megegyező*: V-nek van olyan φ permutációja, hogy $u — v$ pontosan akkor, ha $\varphi(u) \not— \varphi(v)$ és $u \ne v$. Elképzelhető, hogy K_n élei fekete vagy fehér színnel vannak színezve; a fehér élek egy olyan gráfot definiálnak, amely izomorf a fekete élek gráfjával.)

(a) Bizonyítsuk be, hogy $n \mod 4$ értéke 0 vagy 1 lehet. Készítsünk ábrát minden olyan gráfhoz, amelyre $n < 8$ teljesül.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \mod 4 = 0$, akkor a φ permutációban lévő minden kör hosszúsága 4 többszöröse.

(c) Megfordítva, minden φ permutációban, amelyben előfordul ilyen kör, valamilyen G gráfból adódik.

(d) Terjesszük ki az eredményeinket az $n \mod 4 = 1$ esetre.

79. [*M22*] Legyen adva $k \ge 0$. Készítsünk egy olyan gráfot, amelynek csúcsai $0, 1, \ldots, 4k$, valamint reguláris és komplementerével megegyező.

80. [*M22*] A 77. gyakorlatból következően a komplementerével megegyező gráfoknak 2 vagy 3 lehet az átmérője. Ha adva van $k \geq 2$, készítsünk komplementerével megegyező gráfot mindkét lehetséges átmérőre, amikor

(a) $V = \{1, 2, \ldots, 4k\}$; (b) $V = \{0, 1, 2, \ldots, 4k\}$.

81. [*20*] Egy egyszerű, körmentes irányított gráf komplementere (35) és (36) kiterjesztésével történik úgy, hogy $\underline{D}$-ben $u \to v$ akkor és csakis akkor teljesül, ha D-ben $u \neq v$ és $u \not\to v$. Melyek a 3-rendű, komplementerükkel megegyező irányított gráfok?

82. [*M21*] A vonal gráf következő állításai közül melyek igazak és melyek hamisak?

(a) Ha G-t tartalmazza G', akkor $L(G)$ indukált részgráfja $L(G')$-nek.
(b) Ha G reguláris gráf, akkor $L(G)$ is az.
(c) $L(K_{m,n})$ reguláris minden $m, n > 0$-ra.
(d) $L(K_{m,n,r})$ reguláris minden $m, n, r > 0$-ra.
(e) $L(K_{m,n}) \cong K_m \square K_n$.
(f) $L(K_4) \cong K_{2,2,2}$.
(g) $L(P_{n+1}) \cong P_n$.
(h) G és $L(G)$ gráfoknak ugyanannyi komponense van.

83. [*16*] Ábrázoljuk az $\overline{L(K_5)}$ gráfot.

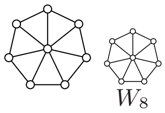
84. [*M21*] Az $L(K_{3,3})$ gráf komplementerével megegyező?

85. [*M22*] (O. Ore, 1962.) Mely G gráfokra igaz, hogy $G \cong L(G)$?

86. [*M20*] (R. G. Wilson.) Keressünk olyan 6-od rendű G gráfot, melyre igaz, hogy $\underline{G} \cong L(G)$.

87. [*20*] A Petersen-gráf

(a) 3 színezhető?
(b) 3 él-színezhető?


W_8

88. [*M20*] A $W_n = K_1 — C_{n-1}$ gráfot n-ed rendű *keréknek* nevezzük, ha $n \geq 4$. Hány kör található benne, mint részgráf?

89. [*M20*] Bizonyítsuk be a (42) és (43) asszociatív szabályokat.

90. [*M24*] Egy gráfot *generáltnak* nevezünk, ha az 1 elemű gráfból algebrailag konstruálható a komplementer képzés és/vagy a direkt összeg műveleteket használva. Például 4 darab nem izomorf 3-ad rendű gráf létezik, és ezek mindegyike generált: $\overline{K_3} = K_1 \oplus K_1 \oplus K_1$ és a komplementere, K_3; $\overline{K_{1,2}} = K_1 \oplus K_2$ és a komplementere, $K_{1,2}$, ahol $K_2 = \overline{K_1 \oplus K_1}$.

Hosszú felsorolás munkája árán kiderül, hogy 11 darab nem izomorf 4-ed rendű gráf létezik. Adjunk algebrai kifejezéseket, amellyel bebizonyíthatjuk, hogy közülük 10 generált. Melyik nem az?

91. [*20*] Készítsünk ábrát a 4 csúcsú gráfokhoz, amelyekre

(a) $K_2 \square K_2$ (b) $K_2 \otimes K_2$; (c) $K_2 \boxtimes K_2$; (d) $K_2 \triangle K_2$; (e) $K_2 \circ K_2$; (f) $\overline{K_2} \circ K_2$; (g) $K_2 \circ \overline{K_2}$.

92. [*21*] A gráfok szorzatára definiált 5-féle lehetőség működik egyszerű irányított gráfokra és közönséges gráfokra is. Készítsünk ábrát a 4 csúcsú irányított gráfokhoz, amelyekre

(a) $\vec{K_2} \square \vec{K_2}$; (b) $\vec{K_2} \otimes \vec{K_2}$; (c) $\vec{K_2} \boxtimes \vec{K_2}$;
(d) $\vec{K_2} \triangle \vec{K_2}$; (e) $\vec{K_2} \circ \vec{K_2}$.

93. [*15*] A gráf szorzatok közül melyek viszik át K_m és K_n-et K_{mn}-be?

94. [*10*] Az SGB *szó* gráfok a $P_{26} \square P_{26} \square P_{26} \square P_{26} \square P_{26}$ indukált részgráfjai?

95. [*M20*] Ha a G gráf u csúcsának d_u a foka, a H gráf v csúcsának d_v a foka, akkor mennyi a foka az (u, v) csúcsnak a következő gráfokban:

(a) $G \square H$? (b) $G \otimes H$? (c) $G \boxtimes H$? (d) $G \triangle H$? (e) $G \circ H$?

96. [*M22*] Legyen A $m \times m'$-es mátrix $a_{uu'}$ elemekkel az u sorban és u' oszlopban; Legyen B $n \times n'$-es mátrix $b_{vv'}$ elemekkel z v sorban és v' oszlopban. Az $A \otimes B$ *direkt szorzat* egy $mn \times m'n'$-es mátrix $a_{uu'}b_{vv'}$ elemekkel az (u, v) sorban és (u', v') oszlopban. Ennél fogva $A \otimes B$ a $G \otimes H$ szomszédsági mátrixa lesz, ha A és B rendre a G, illetve H szomszédsági mátrixai.

Keressünk hasonló formulákat a következő műveletek szomszédsági mátrixára: (a) $G \square H$; (b) $G \boxtimes H$; (c) $G \triangle H$; (d) $G \circ H$.

97. [*M25*] Keressünk annyi érdekes kapcsolatot a gráf szorzások és összeadások között, amennyit csak tudunk. (Például az $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ disztributív szabály a mátrixok direkt összegére és szorzatára indukálja, hogy $(G \oplus G') \otimes H = (G \otimes H) \oplus (G' \otimes H)$. Teljesül például az is, hogy $\overline{K_m} \square H = H \oplus \cdots \oplus H$, H-nak m példányára, stb.)

98. [*M20*] Ha a G gráfnak k komponense van, a H gráfnak pedig l komponense, akkor hány komponense van $G \square H$-nak és $G \boxtimes H$-nak?

99. [*M20*] Legyen $d_G(u, u')$ a G gráfban az u és u' csúcsok távolsága. Bizonyítsuk be, hogy $d_{G \square H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u') + d_H(v, v')$, és keressünk hasonló formulát $d_{G \boxtimes H}((u, v), (u', v'))$-re.

100. [*M21*] Mely összefüggő gráfok $G \otimes H$ összefüggőek?

101. [*M25*] Keressük meg az összes olyan összefüggő G és H gráfot, amelyekre $G \square H \cong G \otimes H$.

102. [*M20*] Milyen egyszerű algebrai formulát lehet adni a *király lépés* gráfjára egy $m \times n$-es táblán? (Egy lépést tesz vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan.)

103. [*20*] Fejezzük be a (54)-es tablót. Ezen kívül alkalmazzuk a H algoritmust a 866444444 sorozatra.

104. [*18*] Magyarázzuk el az i, t, r változók manipulálását a H3 és H4 lépésben.

105. [*M34*] Tegyük fel, hogy $d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$, és legyen $c_1 \geq \cdots c_{d_1}$ ennek konjugáltja, úgy mint a H algoritmusban. Bizonyítsuk be, hogy $d_1 \ldots d_n$ pontosan akkor grafikus, ha $d_1 + \cdots + d_n$ páros és $d_1 + \cdots + d_k \leq c_1 + \cdots c_k - k$, ahol $1 \leq k \leq s$ és s az a maximális érték, melyre $d_s \geq s$.

106. [*20*] Igaz-e a következő állítás: Ha $d_1 = \cdots = d_n = d < n$ és nd páros, akkor a H algoritmus *összefüggő gráfot* konstruál.

107. [*M21*] Bizonyítsuk be, hogy egy komplementerével megegyező gráf $d_1 \ldots d_n$ foksorozata $1 \leq j \leq n/2$-re teljesíti a $d_j + d_{n+1-j} = n - 1$ és a $d_{2j-1} = d_{2j}$ egyenlőségeket.

108. [*M23*] Tervezzünk egy olyan H algoritmushoz hasonló algoritmust, amely adott $1, \ldots, n$ csúcsok és azokhoz tartozó d_k^- és a d_k^+ be- és kifokok esetén óegyszerű irányított gráfot konstruál, ha létezik egyáltalán ilyen gráf.

109. [*M20*] Tervezzünk egy olyan H algoritmushoz hasonló algoritmust, amely adott $1, \ldots, m + n$ csúcsok és azokhoz tartozó d_k fokszámok esetén *páros gráfot* konstruál, ha létezik egyáltalán ilyen gráf; Minden j—k élre teljesülnie kell, hogy $j \leq m$ és $k > m$.

110. [*M22*] A H algoritmus használata nélkül mutassunk egy direkt konstrukciót arra, hogy ha $n > d1 \geq \cdots \geq d_n \geq d_1 - 1$ és $d_1 + \cdots + d_n$ páros, akkor a $d_1, \ldots, d_n$ grafikus.

111. [*25*] Legyen adva a G gráf a $V = \{1, \ldots, n\}$ csúcsokkal, és legyen d_k a k foka és $\max(d_1, \ldots, d_n) = d$. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan N egész, $n \leq N \leq 2n$ és egy H gráf, amelynek csúcsai $\{1, \ldots, N\}$ úgy, hogy H reguláris d fokkal és $H \mid V = G$. Magyarázzuk meg, hogy miként lehet ilyen reguláris gráfot készíteni a lehető legkisebb N esetén.

112. [*20*] A *mérföldek*$(128, 0, 0, 0, 0, 127, 0)$ hálóban van három, egyenlő távolságra lévő város? Ha nem, akkor mely 3 város van a legközelebb az egyenlő oldalú háromszög elrendezéshez?

113. [*05*] Ha H egy hipergráf m éllel és n csúccsal, akkor mennyi sora és oszlopa van az illeszkedési mátrixának?

114. [*M20*] Tegyük fel, hogy a (26)-ban lévő multigráfot hipergráfnak tekintjük. Mi az ennek megfelelő illeszkedési mátrix? Mi az ennek megfelelő páros gráf?

115. [*M20*] Ha B a G gráfnak az illeszkedési mátrixa, akkor mi a B^TB és BB^T szimmetrikus mátrixok jelentősége?

116. [*M17*] Írja le az éleit a teljes, páros, r-egyenletes $K_{m,n}^{(r)}$ hipergráfnak.

117. [*M22*] Hány, egymással nem izomorf 1-egyenletes hipergráfnak van m éle és n csúcsa? (Többszörös él előfordulhat.) Soroljuk fel az összeset $m=4$ és $n=3$ esetén.

118. [*M20*] A „hipererdő” egy olyan hipergráf, ami körmentes.

Ha egy hipererdőnek m éle, n csúcsa, és p komponense van, akkor mennyi lesz a csúcsai fokszámának összege?

119. [*M18*] Mely hipergráf feleltethető meg a (60)-nak a $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ záró tagot elhagyva?

120. [*M20*] Definiáljuk az *irányított hipergráfot* az irányított gráfok általánosításával.

121. [*M19*] Legyen adva a $H=(V,E)$ hipergráf, és legyen $I(H)=(V,F)$, ahol F a H összes maximálisan független halmazainak családja.

Fejezzük ki $\chi(H)$-t a $|V|$, $|F|$, és az $\alpha(I(H)^T)$ segítségével.

122. [*M24*] Találjunk egy maximálisan független halmazt és egy minimális színezést a következő hármas rendszereknek:

(a) (56) hipergráf; (b) a Petersen gráf duálisa.

123. [*17*] Mutassuk meg, hogy a $K_n \square K_n$ optimális színezései ekvivalensek egy híres kombinatorikai probléma megoldásával.

124. [*M22*] Mi a *Chvátal-gráf* (2(f) ábra) színezési száma?

125. [*M48*] Milyen g értékhez van 4-reguláris, 4-színezési számú, g kerületű gráf?

126. [*M22*] Találjunk optimális színezést a $C_m \boxtimes C_n$ „*király alapú tórusznak*”, ha $m,n \geq 3$.

127. [*M22*] Bizonyítsuk be, hogy (a) $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$ és (b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ ha G n-ed rendű gráf, és találjunk olyan gráfokat, ahol egyenlőség áll fenn.

128. [*M18*] Fejezzük ki $\chi(G \square H)$-t a $\chi(G)$ és $\chi(H)$-vel, ahol G és H gráfok.

129. [*23*] Írjuk le a 8×8-as (37) *királynő gráfnak* a maximális klikkjeit.

130. [*M20*] Hány maximális klikkje van egy teljes, k-paritású gráfnak?

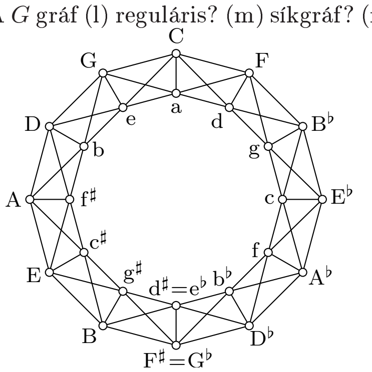
131. [*M20*] Legyen $N(n)$ az n csúcsú gráf maximális klikkjeinek legnagyobb lehetséges száma. Bizonyítsuk be, hogy $3^{\lfloor n/3 \rfloor} \leq N(n) \leq 3^{\lceil n/3 \rceil}$.

132. [*M20*] G-t *alig színezhetőnek* nevezzük, ha $\chi(G)=\omega(G)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G \boxtimes H)=\chi(G)\chi(H)$ ha G és H alig színezhetőek.

133. [*21*] Az itt látható „*zenei gráf*” egy kellemes lehetőséget ad arra, hogy áttekintsünk számos definíciót, amit ebben a részben adtunk meg, hiszen a tulajdonságai könnyen elemezhetők. Határozzuk meg a (a) *rendjét*; (b) *méretét*; (c) *kerületét*; (d) *átmérőjét*; (e) $\alpha(G)$ *függetlenségi számát*; (f) $\chi(G)$ *színezési számát*; (g) $\chi(L(G))$ *él-színezési számát*; (h) $\omega(G)$ *klikk számát*; (i) algebrai alakját jól ismert kisebb gráfok szorzataként.

Mekkora a mérete (j) egy *minimum csúcs lefedésnek*? (k) a *maximális illesztésnek*?

A G gráf (l) reguláris? (m) síkgráf? (n) összefüggő? (o) irányított? (p) szabad fa? (q) Hamilton-gráf?

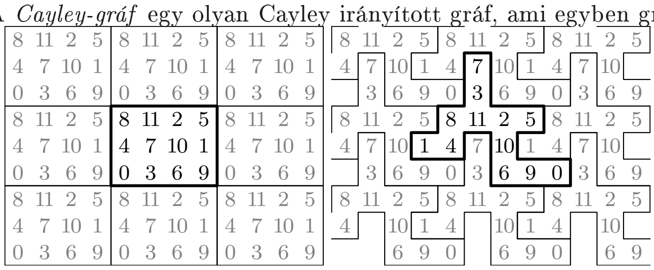


134. [*M22*] Hány *automorfizmusa* van a zenei gráfnak?

135. [*F26*] Tegyük fel, hogy egy zeneszerző tesz egy *véletlen lépést* a *zenei gráfban* a C csúcsból kiindulva, és utána minden lépésnél 5 ehhez teljesen hasonló döntést hoz. Mutassuk meg, hogy páros számú lépés után, több az esélye, hogy a séta a C csúcsban fejeződik be, mint bármely más csúcsban. Egy 12 lépéses sétánál mennyi a pontos valószínűsége annak, hogy a séta a C-ből C-be megy?

136. [*F23*] Egy *Cayley irányított gráf* egy olyan irányított gráf, amelynek V csúcsai egy adott csoport elemei, és amelynek irányított élei $v \longrightarrow v\alpha_j$, ahol $1 \leq j \leq d$ és minden csúcsa v, ahol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ fix elemek a csoportban.

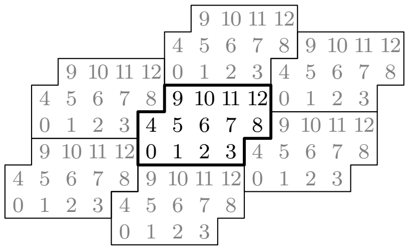
A *Cayley-gráf* egy olyan Cayley irányított gráf, ami egyben gráf is. A *Petersen-gráf* Cayley-gráf?



137. [*M25*] (*Általánosított tóruszok.*) Egy $m \times n$-es tórusz tekinthető a sík egy felosztásának. Képzeljük el például, hogy az (50)-beli 3×4-es tórusz végtelen sok másolata el van helyezve egy rácsban, ahogy ez a fenti ábra bal oldalán látható; egy megadott csúcsból tudunk mozogni északra, délre, keletre, vagy nyugatra a tórusz egy másik csúcsába. A csúcsok itt meg vannak számozva, tehát egy észak lépés a v-ből a $(v+4) \mod 12$-be megy, és egy kelet lépés $(v+3) \mod 12$-be stb. A jobb oldali ábra ugyanazt a tóruszt mutatja más alakú elrendezéssel; *Bármely* utat választjuk a 12 lehetséges útból: $\{0, 1, \ldots, 11\}$, az ki fogja parkettázni a síkot, pontosan ugyanazzal az alapul vett gráffal.

Ha egy alakzatnak az eltolt másolatát alkalmazzuk, akkor is ki fogják parkettázni a síkot, ha *általánosított* tóruszt alkotnak, amennyiben az (x, y) cella ugyanannak a csúcsnak felel meg, mint az $(x+a, y+b)$ és $(x+c, y+d)$ cellák, ahol (a, b) és (c, d) egész vektorok, valamint $n = ad - bc > 0$.

Az általánosított tórusznak n pontja lesz. Ezek az (a, b) és (c, d) vektorok $(4, 0)$ és $(0, 3)$ értékűek a fenti 3×4-es példában; amikor pedig az értékük $(5, 2)$ és $(1, 3)$, akkor



Itt $n = 13$, és egy észak lépés v-ből $(v + 4) \mod 13$-ba megy; egy kelet lépés $(v + 1) \mod 13$-be. Bizonyítsuk be, hogy ha $lnko(a, b, c, d) = 1$, akkor az ilyen általánosított tóruszok csúcsaihoz mindig hozzá lehet rendelni $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ egész címkéket oly módon, hogy a v szomszédai $(v \pm p) \mod n$ és $(v \pm q) \mod n$ valamilyen p és q egész értékekre.

138. [*F27*] A 137. gyakorlatot folytatva, mi lehet egy jó módszer a k-dimenziós $x = (x_1, \ldots, x_k)$ csúcsok egy címkézéséhez, amikor adottak α_j egész vektorok úgy, hogy minden x vektor ekvivalens $x + \alpha_j$-vel, ahol $1 \le j \le k$?

Illusztráljuk a módszert a $k = 3$, $\alpha_1 = (3, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 3)$ esetben.

139. [*M22*] Legyen H egy h-ad rendű fix gráf, és legyen $\#(H{:}G)$ azon előfordulások száma, amikor a H előfordul egy adott G gráf *indukált részgráfjában*. Ha G-t véletlenszerűen választjuk ki a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsú, összesen $2^{n(n-1)/2}$ gráf közül, mennyi az átlagos értéke $\#(H{:}G)$-nek, ha H (a) K_h; (b) P_h, ahol $h > 1$; (c) C_h, ahol $h > 2$; (d) tetszőleges?

140. [*M30*] A G gráfot *arányosnak* nevezzük, ha az indukált részgráfjainak száma $\#(K_3{:}G)$, $\#(\overline{K_3}{:}G)$, és $\#(P_3{:}G)$, amelyek mindegyike megfelel a 139. gyakorlatban kiszámolt értékeknek.

- Mutassuk meg, hogy a W_8 *kerékgráf* a 88. gyakorlatban arányos ebben az értelemben.
- Bizonyítsuk be, hogy G pontosan akkor arányos, ha $\#(K_3{:}G) = \frac{1}{8}\binom{n}{n3}$ és a csúcsainak $d_1 \ldots d_n$ *foksorozata* kielégíti a következő egyenlőségeket:

$$d_1 + \cdots + d_n = \left(\binom{n}{2}\right), \qquad d_1^2 + \cdots + d_n^2 = \frac{n}{2}\left(\binom{n}{2}\right).(*)$$

141. [*26*] A 140(b) gyakorlatban leírt feltétel csak akkor áll fenn, ha $n \mod 16 \in \{0, 1, 8\}$. Írjunk programot az összes olyan arányos gráf megtalálására, aminek $n = 8$ csúcsa van.

142. [*M30*] (S. Janson és J. Kratochvíl, 1991.) Bizonyítsuk be, hogy egy 4 vagy több csúcsú G gráf sem lehet „túlarányos” abban az értelemben, hogy a $(H{:}G)$ részgráf száma megegyezik a 139. gyakorlatban kiszámolt értékkel mind a 11 lehetséges nemizomorf 4-ed rendű H gráfban. *Útmutató:* $(n - 3)\#(K_3{:}G) = 4\#(K_4{:}G) + 2\#(K_{1,1,2}{:}G) + \#(K_1 \oplus K_3{:}G)$.

143. [*M25*] Legyen A tetszőleges mátrix, melynek $m > 1$ *különböző sora*, és $n \ge m$ oszlopa van. Bizonyítsuk be, hogy legalább egy oszlopát törölhetjük az A-nak anélkül, hogy a művelet után 2 megegyező sor keletkezne.

144. [*21*] Legyen X egy $m \times n$-es mátrix, amelynek x_{ij} elemei 0, 1, vagy $*$. Az X mátrix *kiegészítése* egy olyan X^* mátrix, ahol minden $*$-ot 0-ra vagy 1-re cserélünk ki. Bizonyítsuk be, hogy a lehető legkevesebb sorral rendelkező kiegészítő mátrix meghatározásának problémája ekvivalens egy gráf *színezési számának* megkeresésével.

145. [*25*] (R. S. Boyer és J. S. Moore, 1980.) Tegyük fel, hogy az $a_1 \dots a_n$ tömb tartalmaz egy *gyakori elemet*, nevezetesen egy értéket, ami több, mint $n/2$ alkalommal előfordul. Készítsünk olyan algoritmust, ami megtalálja az elemet kevesebb, mint n összehasonlítással. *Útmutatás*: Ha $n \geq 3$ és $a_{n-1} \neq a_n$, akkor az $a_1 \dots a_n$ gyakori eleme egyben gyakori eleme az $a_1 \dots a_{n-2}$-nek is.

MEGOLDÁSOK

A 7.0. alfejezet gyakorlatainak megoldása

1.

2. ...

8. ...

69. Először legyen $\texttt{BEFOK}(v) \leftarrow 0$ minden v csúcsra. Utána alkalmazzuk (**??**)-et minden v-re, és legyen $u \leftarrow \texttt{TIP}(\mathrm{a})$ és $\texttt{BEFOK}(u) \leftarrow \texttt{BEFOK}(u) + 1$ a mini-algoritmus második sorában.

Ahhoz, hogy az SGB formátumban elvégezzük a „minden v-re” műveletet, előbb legyen $v \leftarrow \texttt{CSÚCSOK}(g)$; majd, amíg $v < \texttt{CSÚCSOK}(g) + \texttt{N}(g)$, végezzük el a műveletet, és legyen $v \leftarrow v + 1$.

70. A B1-es lépés egyszer kerül végrehajtásra (de $O(n)$ időbe kerül).

A (B2, B3, ..., B8) lépések egyenként $(n+1, n, n, m+n, m, m, n)$ alkalommal kerülnek végrehajtásra, mindegyik $O(1)$ költséggel.

71. Sok lehetőség van. Mi itt 32-bites mutatókat alkalmazunk, és mindegyik relatív egy `Sor` szimbolikus címhez, ami az `Adat_Szegmens`-ben található.

A következő deklaráció segítségével alakíthatjuk ki azokat a szabályokat, hogy alap SGB adatstruktúrával tudjunk dolgozni.

```
VSIZE IS 32 ;ASIZE IS 24          Csomópont méretek
ARCS IS 0 ;COLOR IS 8 ;LINK IS 12 Eltolások a csúcsmezőkben
TIP IS 0 ;NEXT IS 4               Eltolás az irányított él mezőben
arcs GREG Pool+ARCS ;color GREG Pool+COLOR ;link GREG Pool+LINK
tip GREG Pool+TIP ;next GREG Pool+NEXT
u GREG ;v GREG ;w GREG ;s GREG ;a GREG ;mone GREG -1
AlgB     BZ    n,Success         Kilépés, ha a gráf nullgráf.
         MUL   $0,n,VSIZE        B1. Kezdőértékek megadása.
         ADDU  v,v0,$0           v ← v0 + n.
         SET   w,v0              w ← v0.
1H       STT   mone,color,w      COLOR(w) ← −1.
         ADDU  w,w,VSIZE         w ← w + 1.
         CMP   $0,w,v
         PBNZ  $0,1B             Repeat until w = v.
0H       SUBU  w,w,VSIZE         w ← w − 1.
3H       LDT   $0,color,w        B3. Ha szükséges, w színezése.
         PBNN  $0,2F             To B2 if COLOR(w) ≥ 0.
         STCO  0,link,w          COLOR(w) ← 0, LINK(w) ← Λ.
         SET   s,w               s ← w.
4H       SET   u,s               B4. Tegyük ⇒ u-t a verembe. Set u ← s.
         LDTU  s,link,s          s ← LINK(s).
         LDT   $1,color,u
         NEG   $1,1,$1           $1 ← 1 − COLOR(u).
         LDTU  a,arcs,u          a ← ARCS(u).
5H       BZ    a,8F              B5. Végeztünk u-val? Ha a = Λ, menjünk B8-ra.
5H       LDTU  v,tip,a           v ← TIP(a).
6H       LDT   $0,color,v        B6. v feldolgozása.
         CMP   $2,$0,$1          (A program itt meglehetősen okos)
         PBZ   $2,7F             To B7 if COLOR(v) = 1 − COLOR(u).
         BNN   $0,Failure        Nem sikerül, ha COLOR(v) = COLOR(u).
         STT   $1,color,v        COLOR(v) ← 1 − COLOR(u).
         STTU  s,link,v          LINK(v) ← s.
         SET   s,v               s ← v.
7H       LDTU  a,next,a          B7. Ciklus a szerint. Legyen a ← NEXT(a).
         PBNZ  a,5B              To B5 if a ≠ Λ.
8H       PBNZ  s,4B              B8. A verem nem üres? Ha s ≠ Λ, menj B4-re.
2H       CMP   $0,w,v0           B2. Kész?
         PBNZ  $0,0B             Ha w ≠ v0, csökkentsük w-t és menjünk B3-ra.
Siker    LOC   @                 (Sikeres befejezés)
```
■

72. (a) Ez a feltétel tisztán invariáns marad, amikor a csúcs bekerül a verembe, vagy kikerül onnan.

(b) A v csúcs ki lett már színezve, de még nincs felfedezve, mivel minden felfedezett csúcs szomszédai már megfelelő színűek.

(c) Éppen azelőtt a lépés előtt, mielőtt beállítjuk $s \leftarrow v$-t a B6-os lépésben, legyen `SZÜLŐ`$(v) \leftarrow u$, ahol `SZÜLŐ` egy új segédmező. Továbbá, mielőtt sikeresen befejeződne a működés ebben a lépésben, tegyük a következőt: „Ismétlődően tegyük a kimenetre `NÉV`(u)-t, és legyen $u \leftarrow$`SZÜLŐ`(u), amíg $u =$`SZÜLŐ`(v); majd tegyük kimenetre `NÉV`(u)-t és `NÉV`$(v)(v)$-t."

73. K_{10}. (Továbbá, a *véletlen_ gráf* $(10, 100, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ a J_{10}.)

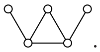
74. A *rosszaság*-nak 22 a kifoka; nincs másik olyan csúcs, aminek a kifoka > 20.

75. Legyenek az $(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ paraméterek rendre
(a) $(n, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$;
(b) $(n, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$;
(c) $(n, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$;
(d) $(n, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$;
(e) $(n, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$;
(f) $(n, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
(g) $(m, n, 0, 0, 1, 0, 0)$;
(h) $(m, n, 0, 0, 1, 2, 0)$;
(i) $(m, n, 0, 0, 1, 3, 0)$;
(j) $(m, n, 0, 0, -1, 0, 0)$;
(k) $(m, n, 0, 0, 1, 3, 1)$;
(l) $(n, 0, 0, 0, 2, 0, 0)$;
(m) $(2, -n, 0, 0, 1, 0, 0)$.

76. Igen, például a 75(c) válaszban a C_1 és C_2-ben. (De valódi hurok előfordulhat a $p < 0$ esetben, hiszen az $x \longrightarrow y = x + k\delta$ irányított élek $k = 1, 2, \ldots$ esetén generálásra kerülnek egészen addig, amíg y kilép a tartományból, vagy $y = x$.)

77. Tegyük fel, hogy x és y olyan csúcsok, melyekre igaz, hogy $d(x, y) > 2$. Így $x \not\!\!-\, y$; és ha v bármely más csúcs, akkor vagy $v \not\!\!-\, x$, vagy $v \not\!\!-\, y$. Ezek az összefüggések $\overline{G}$-ban megengednek bármely két u és v csúcs között egy legfeljebb 3 hosszúságú utat.

78. (a) Az élek száma $\binom{n}{2}/2$, egésznek kell lennie.

A legkisebb példa K_0, K_1, P_4, C_5, és  .

(b) Ha q egy tetszőleges páratlan szám, akkor $u — v$ akkor és csakis akkor, ha $\varphi^q(u) \not\!\!-\, \varphi^q(v)$. Ezért φ^q-nek nem lehet két fixpontja, és nem lehet benne 2-kör.

(c) V-nek egy ilyen permutációja egyben definiál egy újabb $\widehat{\varphi}$ permutációt a K_n élein, mivel $\{u, v\} \mapsto \widehat{\varphi}(\{u, v\}) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$, és könnyen belátható, hogy a $\widehat{\varphi}$ köreinek a hossza mind 4 többszöröse.

Ha $\widehat{\varphi}$-ben t kör van, akkor 2^t komplementerével megegyező gráfot kapunk úgy, hogy minden körnek az éleit váltakozó színnel színezzük.

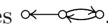
(d) Ez esetben φ-nek van egy egyedi v fixpontja, és $G' = G \setminus v$ a komplementerével megegyező. Tegyük fel, hogy φ-ben r kör van (v)-n kívül; ekkor $\widehat{\varphi}$-ben r kör van, amely magába foglalja azokat az éleket, amelyek érintik a v csúcsot, és 2^r módon terjeszthető ki a G' gráf egy G gráffá.

Hivatkozások: Sachs [33] és Ringel [31].

79. 1. megoldás (H. Sachs) $\varphi = (1\,2\,\ldots\,4k)$ esetén: Legyen $u — v$, ha $u > v > 0$ és $u + v \bmod 4 \le 1$; ezzel együtt $0 — v$ ha $v \bmod 2 = 0$.

2. megoldás, $\varphi = (a_1\,b_1\,c_1\,d_1)\ldots(a_k\,b_k\,c_k\,d_k)$ esetén, ahol $a_j = 4j-3$, $b_j = 4j-2$, $c_j = 4j-1$, és $d_j = 4j$: Legyen $0 — b_j — a_j — c_j — d_j — 0$, ha $1 \le j \le k$, és $a_i — a_j — b_i — d_j — c_i — c_j — d_i — b_j — a_i$, ha $1 \le i < j \le k$.

80. (G. Ringel megoldása.) Legyen φ olyan, mint a 79. gyakorlat 2. megoldásában. Legyen E_0 a $3k$ $b_j — a_j — c_j — d_j$ él, ha $1 \le j \le k$; legyen E_1 a $8\binom{k}{2}$ él $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ és $\{b_j, d_j\}$ között, ha $1 \le i < j \le k$; legyen E_2 a $8\binom{k}{2}$ él $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ és $\{a_j, c_j\}$ között, ha $1 \le i < j \le k$. Az (a) esetben, $E_0 \cup E_1$ 2 átmérőt ad; $E_0 \cup E_2$ pedig 3 átmérőt. A (b) eset hasonló, de itt hozzáadjuk a következő $2k$ élt: $b_j — 0 — d_j$-t E_1-hez, $a_j — 0 — c_j$-t E_2-höz.

81. $\vec{C_3}$, $\vec{K_3}$, $D =$ , és .

(A D irányított gráf D^T *fordítottját* megkaphatjuk úgy, hogy irányított éleinek megfordítjuk az irányát.

16, egymással nem izomorf *egyszerű, 3-ad rendű, irányított, körmentes gráf* van, közülük 10 *önfordított*, beleértve $\vec{C_3}$-t és $\vec{K_3}$-t.)

82. (a) Igaz, definíció szerint.

(b) Igaz: Ha minden csúcsnak d szomszédja van, akkor minden u—v élnek $d-1$ u—w szomszédja van és $d-1$ w—v szomszédja.

(c) Igaz: $\{a_i, b_j\}$-nek $m+n-2$ szomszédja van, ha $0 \le i < m$ és $0 \le j < n$.

(d) Hamis: $L(K_{1,1,2})$-nek 5 csúcsa és 8 éle van.

(e) Igaz.

(f) Igaz: A nem szomszédos élek csak: $\{0,1\} \not- \{2,3\}$, $\{0,2\} \not- \{1,3\}$, $\{0,3\} \not- \{1,2\}$.

(g) Igaz,minden $n > 0$.

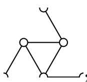
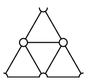
(h) Hamis, feltéve ha G-ben nincs *izolált csúcs.*

83. Ez a *Petersen-gráf* lásd Kowalewski cikkét [23].

84. Igen: Legyen $\varphi(\{a_u, b_v\}) = \{a_{(u+v) \bmod 3}, b_{(u-v) \bmod 3}\}$, ahol $0 \le u, v < 3$.

85. Legyenek a csúcsok fokszámai $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Ekkor G-nek $\frac{1}{2}(d_1 + \cdots + d_n)$, $L(G)$-nek pedig $\frac{1}{2}(d_1(d_1-1) + \cdots + d_n(d_n-1))$ éle van. Így G-nek és $L(G)$-nek pontosan n éle van pontosan akkor, ha $(d_1-2)^2 + \cdots + (d_n-2)^2 = 0$. Ebből következően az **??**. gyakorlat megadja a választ.

Lásd Menon cikkét [25].

86. Ha , akkor  $= L(G)$.

87. (a) Igen, könnyedén. Valójában, Brooks bebizonyította [4], hogy *minden* összefüggő gráf, amelynek a maximális csúcs fokszáma $d > 2$, d-színezhető, kivéve a K_{d+1} teljes gráfot.

(b) Nem. Alapvetően csak egy módja van, hogy 3-színezzük a belső 5-kör éleit a 2(e) ábrán; ez ellentmondásban van a belső 5-körrel. Petersen 1898-ban bebizonyította.

88. Egy kör nem használja a középső csúcsot, és van $(n-1)(n-2)$ kör, ami igen (nevezetesen van egy minden, a szélén lévő különböző csúcsokból rendezett párban.) A C_0-t nem számítjuk bele.

89. Mindkét oldal egyenlő rendre a következő mátrixokkal:

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & J & J \\ J & B & J \\ J & J & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & J & J \\ O & B & J \\ O & O & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O & O \\ J & B & O \\ J & J & C \end{pmatrix}.$$

90. K_4 és $\overline{K_4}$; $K_{1,1,2}$ és $\overline{K_{1,1,2}}$; $K_{2,2} = C_4$ és $\overline{K_{2,2}}$; $K_{1,3}$ és $\overline{K_{1,3}}$; $K_1 \oplus K_{1,2}$ és a komplementere; minden K_α gráf generált (47) alapján. A $P_4 = \overline{P_4}$ hiányzik. (Egy generált gráf minden összefüggő részgráfjának átmérője ≤ 2; W_5 generált, de W_6 nem.)

91. IDE ÁBRÁK KELLENEK (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 1; (e) 3; (f) 4; (g) 5.

(Általánosan $K_2 \bigtriangleup H = (K_2 \square H) \cup (K_2 \otimes \overline{H})$,és $K_2 \circ H = H$—H. Így a $K_2 \bigtriangleup H = K_2 \square H$ és a $K_2 \circ H = K_2 \boxtimes H$ egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha H teljes gráf.)

Hivatkozások: A $G \square H$ és a $G \boxtimes H$ *jelölés* szépen megfeleltethető az (a) és (c) jelölésének, ahogy ezt Nešetřil [29] javasolta. A $G \times H$ analóg jelölés szintén csábító a (b)-re; de ezt itt nem vezettük be, hiszen írók százai használták a $G \times H$ jelölést a $G \square H$-ra.

92. IDE ÁBRÁK KELLENEK (a) ; (b) ; (c) ; (d) ; (e) .

93. $K_m \boxtimes K_n = K_m \circ K_n \cong K_{mn}$.

94. Nem; ezek $K_{26} \square K_{26} \square K_{26} \square K_{26} \square K_{26}$ indukált részgráfjai.

95. (a) $d_u + d_v$. (b) $d_u d_v$. (c) $d_u d_v + d_u + d_v$. (d) $d_u(n - d_v) + (m - d_u) d_v$. (e) $d_u n + d_v$.

96. (a) $A \square B = A \otimes I + I \otimes B$. (b) $A \boxtimes B = A \square B + A \otimes B$. (c) $A \vartriangle B = A \otimes J + J \otimes B - 2A \otimes B$. (d) $A \circ B = A \otimes J + I \otimes B$.

Az (a), (b), és (d) formulák tetszőleges *irányított gráfra* és *multigráfra* definiálják a *gráf szorzást*. A (c) *egyszerű irányított gráfok* esetén is igaz; de előfordulhatnak negatív elemek is, ha A és B tartalmaz > 1 értékeket.

Történelmi megjegyzés. A mátrixok direkt szorzatát gyakran *Kronecker szorzatnak* nevezzük, mivel Hensel elmondása szerint [16] Kronecker előadásain hallotta; Kronecker azonban soha nem publikált semmit róla. Az első ismert megjelenése Zehfuss cikkében [42] történt, aki bebizonyította, hogy $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m$, ha $m = m'$ és $n = n'$. Az alapvető $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, $(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'$, és $(A \otimes B)\_ = A\_ \otimes B\_$ formulák A-nak következménye lásd Hurwitz cikkét [19].

97. A szomszédsági mátrixokkal elvégezhető műveletek bizonyítják, hogy $(G \oplus G') \square H = (G \square H) \oplus (G' \square H)$; $(G \oplus G') \boxtimes H = (G \boxtimes H) \oplus (G' \boxtimes H)$; $(G \oplus G') \circ H = (G \circ H) \oplus (G' \circ H)$. Mivel $G \square H \cong H \square G$, $G \otimes H \cong H \otimes G$, és $G \boxtimes H \cong H \boxtimes G$, így vannak $G \square (H \oplus H') \cong (G \square H) \oplus (G \square H')$; $G \otimes (H \oplus H') \cong (G \otimes H) \oplus (G \otimes H')$; $G \boxtimes (H \oplus H') \cong (G \boxtimes H) \oplus (G \boxtimes H')$ jobb-disztributív szabályok is.

A lexikografikus szorzás kielégíti a $\overline{G \circ H} = \overline{G} \circ \overline{H}$ egyenlőséget; tehát $K_m \circ H = H — \cdots — H$, így $K_m \circ \overline{K}_n = K_{n,\ldots,n}$.

Továbbá, $G \circ K_n = G \boxtimes K_n$; $K_m \otimes K_n = \overline{K_m \square K_n} = L(K_{m,n})$.

98. kl komponens van (Az előző gyakorlat *disztributív szabályai*, valamint az alapján, hogy $G \square H$ és $G \boxtimes H$ összefüggő, ha G és H összefüggő).

99. Minden út (u, v)-ból (u', v')-be a $G \square H$-ban legalább $d_G(u, u')$ „G-lépést" és legalább $d_H(v, v')$ „H-lépést" használ; és ez a minimum elérhető. Hasonló érvelés mutatja, hogy $d_{G \boxtimes H}((u, v), (u', v')) = \max(d_G(u, u'), d_H(v, v'))$.

100. Ha G és H összefüggő, és mindkettőnek van legalább 2 csúcsa, $G \otimes H$ pontosan akkor nem összefüggő, ha G és H páros. A „ha" rész könnyű; megfordítva, ha van egy páratlan kör G-ben, akkor (u, v)-ból (u', v')-be eljuthatunk a következő módon: Először menjünk (u'', v')-be, ahol u'' G-nek egy megfelelő csúcsa. Majd menjünk páros számú lépést G-ben u''-ből u'-be, míg a H-ban a v' és az egyik szomszédja között ingázunk lásd Weichsel cikkét [38].

101. Válasszuk ki az u és v csúcsokat maximális fokszámmal. Ekkor $d_u + d_v = d_u d_v$ a 95. gyakorlat alapján; tehát vagy $G = H = K_1$, vagy $d_u = d_v = 2$. Utóbbi esetben, $G = P_m$ vagy C_m, és $H = P_n$ vagy C_n. $G \square H$ azonban összefüggő, tehát G vagy H mindenképpen páratlan, mondjuk G. Ekkor $G \square H$ páratlan, tehát H-nak mindenképpen páratlannak kell lennie; így $G = C_m$ és $H = C_n$, miközben m és n is páratlan. $C_m \square C_n$-ben a legrövidebb kör hossza $\min(m, n)$; $C_m \otimes C_n$-ben a hossza $\max(m, n)$; így $m = n$.

Megfordítva, ha $n \geq 3$ páratlan, akkor $C_n \square C_n \cong C_n \otimes C_n$, azon izomorfizmus alatt, amelynek alakja: $(u, v) \mapsto ((u + v) \mod n, (u - v) \mod n)$, ahol $0 \leq u, v < n$ lásd Miller cikkét [26].

102. $P_m \boxtimes P_n$. (Ez csak akkor *síkgráf*, ha $\min(m, n) \leq 2$ vagy $m = n = 3$.)

103.

1	2	3	4	5	7			
2	1	3	4	6	8			
3	1	2	5	6	8			
4	1	2	5	6				
5	3	4	1	7				
6	2	3	4					
7	5	1						
8	2	3						

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	3	4	6	8	9		
3	1	2	5	6	8	9		
4	1	2	5	7				
5	3	4	1	7				
6	2	3	1	7				
7	4	5	6	1				
8	2	3	1	9				
9	8	2	3	1				

104. Az éleket kissé körülményes sorrendben kell létrehozni, hogy fenntartsuk a tabló alakját. Az r és i változók jelölik a kezdő - és utolsó sorát a t oszlopban. Például, a 103. gyakorlat második része a következőképpen kezdődik: $i \leftarrow 1$, $t \leftarrow 8$, $r \leftarrow 1$; majd $9 — 1$, $i \leftarrow 2$, $t \leftarrow 6$, $r \leftarrow 3$; utána $9 — 3$, $9 — 2$, $i \leftarrow 4$, $t \leftarrow 4$, $r \leftarrow 8$; végül $9 — 8$.

105. Vegyük észre, hogy $d_k \geq k$ pontosan akkor, ha $c_k \geq k$.

Ha $d_k \geq k$, akkor

$$c_1 + \cdots + c_k \;=\; k^2 + \min(k, d_{k+1}) + \min(k, d_{k+2}) + \cdots + \min(k, d_n);$$

ennek következtében a $d_1 + \cdots + d_k \leq c_1 + \cdots + c_k - k$ feltétel ekvivalens a következővel:

$$d_1 + \cdots + d_k \leq f(k), \quad \text{ahol} f(k) = k(k-1) + \min(k, d_{k+1}) + \cdots + \min(k, d_n)(*)$$

Ha $k \geq s$, akkor $f(k+1) - f(k) = 2k - d_{k+1} \geq d_{k+1}$; így $(*)$ fennáll $1 \leq k \leq n$ esetén pontosan akkor, ha fennáll $1 \leq k \leq s$-re.

A $(*)$ kifejezést Erdős és Gallai [7] fedezték fel. Használata nyilvánvalóan szükséges, ha az $\{1, \ldots, k\}$ és $\{k+1, \ldots, n\}$ közötti éleket tekintjük.

Legyen $a_k = d_1 + \cdots + d_k - c_1 - \cdots - c_k + k$, és tegyük fel, hogy $a_k > 0$ valamely $k \leq s$-re miután a H3 és H4 lépés életbe lépett. Legyen A_j, C_j, D_j, N, és S rendre az a_j, c_j, d_j, n, és s-nek megfelelő számok a H3 és H4 lépések *előtt*; így $N = n + 1$, $D_j = d_j + (0 \text{ or } 1)$, stb. Be akarjuk bizonyítani, hogy $A_K > 0$ valamely $K \leq S$ esetén. A H3 és H4 eltávolította a legalsó q cellát a t oszlopban, valamely $t \geq S$-re, az 1-től p. sor legjobboldali celláival együtt, ahol $q + p = D_N$. Így $A_j = a_j$, ha $1 \leq j \leq p$; továbbá $A_j = a_j$, ha $j \geq C_t$. Legyen k minimális $a_k > 0$-val, és legyen $d_k = d$; vegyük észre, hogy $c_k \leq d$. Ha $d > t$, akkor $k \leq p$, tehát $A_k = a_k > 0$. Ennélfogva feltehetjük, hogy $d = t - (0 \text{ or } 1)$, és $D_k = t$. Ha $k < j \leq C_t$, akkor $d_j \geq D_j - 1 = t - 1 \geq d - 1 \geq c_k - 1 \geq c_j - 1$.Ennek következtében $A_K = a_K \geq a_k$, ha $K = C_t$; feltehetjük, hogy $C_t > S$. Most $D_S = D_{S+1} = t$, tehát $S = t$. $k = t$ szintén fennáll; egyébként $c_k \geq S + 1 > t \geq d$.

Így $s = S$ és $d = t = c_t$. További vizsgálatok megmutatják, hogy az egyetlen lehetőség $A_t \leq 0$-ra $D_j = t + [j \geq t]$, ha $1 \leq j \leq N = t + 2$. A H algoritmus tényleg kicseréli ezt a „jó” sort egy „rosszra”; de $D_1 + \cdots + D_N = t^2 + 3t - 1$ páratlan.

106. Hamis az olyan triviális esetekben, mint $d \leq 1$ és $n \geq d + 2$. Egyébként igaz: Valójában, a H4-es lépés során generált első $n - 1$ él körmentes, tehát feszítőfát alkot.

107. A 78. gyakorlat φ permutációja megfeleltet egy d fokú csúcsot egy $n - 1 - d$ fokú csúcsnak. φ^2 pedig egy *automorfizmus*, ami két egyenlő fokú csúcsot párosít össze, kivéve egy lehetséges $(n-1)/2$ fokú fixpontot. (Megfordítva, a H algoritmus egy kissé bonyolult kiterjesztése egy komplementerével megegyező gráfot konstruál minden grafikus sorozatból, ami kielégíti a feltételeket, feltéve, hogy $d_{(n-1)/2} = (n-1)/2$ ha n páratlan. Lásd Clapham és Kleitman cikkét [6].

108. Feltehető, hogy $d_1^+ \geq \cdots \geq d_n^+$; a d_k^- befokoknak nem szükséges egy megadott sorrendben állniuk. Alkalmazzuk a H algoritmust a $d_1 \ldots d_n = d_1^+ \ldots d_n^+$ sorozatra, de változtassuk meg a következőket: A H2-es lépés a következő lesz: '„[Kész?] Sikeresen befejeződik, ha $d_1 = n = 0$; sikertelenül fejeződik be, ha $d_1 > n$.”' Miután beállítottuk az i, t, és r értékét a H3-as lépésben, sikertelenül fejeződjön be, ha $d_n^- > c_1$; egyébként hajtsuk végre a H4-es lépést, ha $1 \leq j \leq d_n^-$, és legyen $n \leftarrow n-1$, majd térjünk vissza H2-höz. H5-ben hagyjuk el a „$c_j \leftarrow c_j - 1$”-t, és készítsük el a $k \to n$ irányított élt a $k — n$ él helyett. Az M lemma és H következmény igazolja megközelítésünket.

(A 7.2.1.4–57. gyakorlat bebizonyítja, hogy ilyen irányított gráf pontosan akkor létezik, ha $d_1^- + \cdots + d_n^- = d_1^+ + \cdots + d_n^+$ és $d_1^- \ldots d_n^- = \{d_1', \ldots, d_n'\}$, ahol $d_1' \geq \cdots \geq d_n'$ és $d_1' \ldots d_n'$ *majorálva* van a $c_1 \ldots c_n = (d_1^+ \ldots d_n^+)^T$ *konjugált partícióval.* Nehezebb az az eset, amikor a $v \longrightarrow v$ hurok nem megengedett; lásd Fulkerson cikkét [11].

109. Ugyanaz, mint a 108. gyakorlat a következő kiegészítésekkel: $d_k^+ = d_k[k \leq m]$ és $d_k^- = d_k[k > m]$.

110. p csúcs van, amely $d = d_1$ fokú, és q csúcs van, amely $d - 1$ fokú, ahol $p + q = n$. 1.eset, $d = 2k + 1$. Legyen $u — v$, ha $(u - v) \mod n \in \{2, 3, \ldots, k+1, n-k-1, \ldots, n-3, n-2\}$; továbbá vegyük fel a $p/2$ darab $1 — 2$, $3 — 4$, $\ldots$, $(p-1) — p$ élt.

2. eset, $d = 2k$. Legyen $u — v$, ha $(u - v) \mod n \in \{2, 3, \ldots, k, n-k, \ldots, n-3, n-2\}$; továbbá vegyük fel az $1 — 2$, $\ldots$, $(q-1) — q$ éleket, valamint a $(q = 0?\ n\colon q) — (q+1) — \cdots — (n-1) — n$ kört vagy utat. Wang és Kleitman bebizonyították [37], hogy az ilyen gráfok erősen összefüggőek.

111. Tegyük fel, hogy $N = n + n'$, és $V' = \{n + 1, \ldots, N\}$. Konstruálni akarunk $e_k = d - d_k$ éleket k és V' között, és további éleket V'-n belül úgy, hogy V' minden csúcsának d legyen a foka. Legyen $s = e_1 + \cdots + e_n$. Ez a lépés pontosan akkor végezhető el, ha (i) $n' \geq \max(e_1, \ldots, e_n)$; (ii) $n'd \geq s$; (iii) $n'd \leq s + n'(n' - 1)$; és (iv) $(n + n')d$ páros.

Ilyen élek léteznek, már ha n' kielégíti (i)–(iv)-et: Először, (i) miatt, s megfelelő él V és V' között létrehozható úgy, hogy ciklikusan választjuk végpontnak $(n+1, n+2, \ldots, n+n', n+1, \ldots)$-et. Ez a folyamat hozzárendeli vagy az $\lfloor s/n' \rfloor$ vagy az $\lceil s/n' \rceil$ éleket V' minden csúcsához; $\lceil s/n' \rceil \leq d$ teljesül (ii) miatt, és $d - \lfloor s/n' \rfloor \leq n' - 1$ (iii) miatt. Ennél fogva a további élek, amelyek szükségesek V'-n belül, megkonstruálhatók a 110-es feladathoz hasonlóan (iv) segítségével.

Az $n' = n$ választás mindig jó. Megfordítva, ha $G = K_n(V) \setminus \{1 — 2\}$, az (iii) feltétel megköveteli, hogy $n' \geq n$, ha $n \geq 4$. lásd Erdős és Kelly [8].

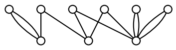
112. Az egyértelműen legjobb háromszög a *miles* adatok között

$$\texttt{Saint Louis, MO} \overset{748}{—} \texttt{Toronto, ON} \overset{746}{—} \texttt{Winston-Salem, NC} \overset{748}{—} \texttt{Saint Louis, MO.}$$

113. Murphy törvénye szerint, n sora és m oszlopa van; tehát $n \times m$-es, nem pedig $m \times n$-es.

114. Egy *hurok* egy adott multigráfban egy $\{a, a\}$ él, amelyben ismétlődő csúcsok vannak, és egy multigráf 2-egyenletes hipergráf. Így egy általános hipergráfnak az illeszkedési mátrixában meg vannak engedve 1-nél nagyobb értékek, ha egy él egy megadott csúcsot többször is tartalmaz. Egy vaskalapos ember valószínűleg ezt „*multihipergráfnak*” hívná abból a megfontolásból, hogy a (26)-nak megfelelő illeszkedési mátrix és páros gráf a következő:

$\begin{pmatrix} 210000 \\ 011100 \\ 001122 \end{pmatrix}$@;



115. A B^TB e sorban és f oszlopban lévő eleme $\sum_v b_{ve} b_{vf}$; tehát B^TB megegyezik $2I$ plusz az $L(G)$ szomszédsági mátrixával. Hasonlóan, BB^T a D plusz G szomszédsági mátrixa, ahol D a diagonális mátrix, melyben d_{vv} a v *foka*. (Lásd a 2.3.4.2–18., 19. és 20. gyakorlatokat.)

116. $\overline{K_{m,n}^{(r)}} = K_m^{(r)} \oplus K_n^{(r)}$, (**??**)-at általánosítva minden $r \geq 1$-re.

117. $m = 4$ és $V = \{0, 1, 2\}$ esetén az egyszeres élek nemizomorf multihalmazai a következők lehetnek:

$\{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\}$, $\{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{1\}\}$, $\{\{0\}, \{0\}, \{1\}, \{1\}\}$ és $\{\{0\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$.

A válasz általában az m legfeljebb n részre való *felosztásának* a száma, nevezetesen $\left|\begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix}\right|$ a 7.2.1.4. alpont jelöléseit használva. (Természetesen kevés ok van arra, hogy a partíciókra úgy tekintsünk, mint 1-egyenletes hipergráfokra, kivéve, ha speciális feladatokat akarunk megoldani.)

118. Legyen d a csúcs fokszámok összege. A megfelelő páros gráf egy erdő $m + n$ csúccsal, d éllel és p komponenssel. Így $d = m + n - p$, a 2.3.4.1.A tétel szerint.

119. Van egy további él, ami tartalmazza mind a 7 csúcsot.

120. Azt mondhatjuk, hogy az irányított (hiper) élek csúcsok tetszőleges sorozata, vagy különböző csúcsok sorozata. A legtöbb szerző az *irányított hiperélt* azonban $A \to v$-nek definiálja, ahol az A csúcsok rendezetlen halmaza.

A legjobb definíciót úgy találhatjuk meg, hogy megnézzük, melyiknek van a legfontosabb gyakorlati alkalmazása.

121. $\chi(H) = |F| - \alpha(I(H)^T)$ a V minimális lefedésének a mérete az F halmazokkal.

122. (a) Igazolható, hogy csak 7 darab 3-elemű lefedés van, nevezetesen az él csúcsai; tehát 7 darab 4-elemű független halmaz létezik, nevezetesen az élek komplementerei. Nem tudjuk 2-színezni a hipergráfot, mivel egy színt 4 alkalommal kellene használni, és a maradék 3 szín egy él lenne. (Az (56) hipergráf alapvetően a 7 pontból, és 7 egyenesből álló *projektív sík*.)

(b) Mivel duálist használunk, nevezzük a Petersen-gráf csúcsait és éleit „pontoknak" és „egyeneseknek"; így a duális csúcsai és élei rendre az egyenesek és a pontok. Színezzük pirosra azt az 5 egyenest, melyek egy külső pontot belső ponttal kötnek össze.

A maradék 10 egyenes független (nem tartalmazzák mind a három, valamely pontot érintő egyenest); tehát zöldre színezhetők.

Bármely 11 egyenes halmaza nem lehet független, mivel nincs olyan 4 egyenes, amely egyszerre tudná érinteni mind a 10 pontot. (Így a Petersen duálisa a *páros hipergráf*, annak ellenére, hogy van benne 5 hosszúságú kör.)

123. Megfeleltethetőek az $n \times n$ *latin négyzetnek*, amelynek elemei csúcsszínek.

124. 4 szín bőven elegendő. Ha *3-színezhető* lenne, akkor minden színre jutna 4 csúcs, mivel nincs olyan 5 csúcs, ami független lenne. Így 2 ellentétes saroknak ugyanolyan színűnek kell lenni, vagyis ellentmondásra jutunk.

125. A *Chvátal-gráf* a legkisebb gráf $g = 4$-gyel. *Brinkmann* megtalálta a legkisebbet $g = 5$-tel: 21 csúcsa van: a_j, b_j, c_j, ha $0 \le j < 7$, élei $a_j — a_{j+2}$, $a_j — b_j$, $a_j — b_{j+1}$, $b_j — c_j$, $b_j — c_{j+2}$, $c_j — c_{j+3}$ és az alsó indexei mod 7. Meringer megmutatta, hogy legalább 35 csúcsnak kell lennie, ha $g > 5$. Grünbaum azt sejtette, hogy g tetszőlegesen nagy lehet; de további konstrukciók nem ismertek lásd [12, 13].

126. Amikor m és n páros, mind a C_m és C_n páros, és könnyű a *4-színezés*. Egyébként egy 4-színezés lehetetlen. Ha $m = n = 3$, egy 9-színezés megfelelő a 93. gyakorlat alapján. Ha $m = 3$ és $n = 4$ vagy 5, akkor legfeljebb két csúcs független; könnyű találni egy megfelelő 6- vagy 8-színezést.

Egyébként megkapunk egy 5-színezést úgy, hogy a (j, k) csúcsot $(a_j + 2b_k) \mod 5$-tel színezzük, ahol az $\langle a_j \rangle$ és $\langle b_k \rangle$ periodikus sorozatok léteznek rendre m és n periódussal úgy, hogy $a_j - a_{j+1} \equiv \pm 1$ és $b_k - b_{k+1} \equiv \pm 1$ minden j-re és k-ra lásd K. Vesztergombi cikkét [36].

127. (a) Az eredmény $n = 1$ esetén igaz. Különben legyen $H = G \setminus v$, ahol v tetszőleges csúcs. Ekkor $\overline{H} = \overline{G} \setminus v$, és $\chi(H) + \chi(\overline{H}) \le n$ indukció alapján. Világos, hogy $\chi(G) \le \chi(H) + 1$ és $\chi(\overline{G}) \le \chi(\overline{H}) + 1$; tehát nincs probléma egészen addig, amíg mindhárom esetben nem teljesül az egyenlőség. De ez nem történhet meg; ebből következik, hogy $\chi(H) \le d$ és $\chi(\overline{H}) \le n - 1 - d$, ahol d a v foka a G-ben lásd Nordhaus és Gaddum cikkét [30].

Ahhoz, hogy egyenlőséget kapjunk, legyen $G = K_a \oplus \overline{K_b}$, ahol $ab > 0$ és $a + b = n$. Ekkor $\overline{G} = \overline{K_a} — K_b$, $\chi(G) = a$, és $\chi(\overline{G}) = b + 1$. Minden gráf, amelyben fennáll az egyenlőség, megtalálható Finck cikkében [10].

(b) A G egy k-színezésében van legalább $\lceil n/k \rceil$ színezett csúcs; azok a csúcsok, amelyek a $\overline{G}$ egy klikkjében vannak. Így $\chi(G)\chi(\overline{G}) \ge \chi(G)\lceil n/\chi(G) \rceil \ge n$.

Egyenlőség áll fenn, ha $G = K_n$.

(Az (a) és (b)-ből következtetjük, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \ge 2\sqrt{n}$ és $\chi(G)\chi(\overline{G}) \le \frac{1}{4}(n+1)^2$.)

128. $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$. Ennyi színre mindenképpen szükségünk van. Ha továbbá az $a(u)$ és $b(v)$ függvények kiszínezik G-t és H-t a $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ színekkel, ki tudjuk színezni $G \square H$-t $c(u, v) = (a(u) + b(v)) \mod k$-val.

129. Egy teljes sor vagy oszlop (16 eset); egy teljes, 4 vagy több hosszú átló (18 eset); egy 5-cellás minta $\{(x, y), (x-a, y-a), (x-a, y+a), (x+a, y-a), (x+a, y+a)\}$, ha $a \in \{1, 2, 3\}$ $(36 + 16 + 4$ eset);

egy 5-cellás minta $\{(x,y),(x-a,y),(x+a,y),(x,y-a),(x,y+a)\}$, ha $a \in \{1,2,3\}$ ($36+16+4$ eset); egy minta, amelyben az 5 cellából 4 van, ha az ötödik kívül esik a táblán ($24+32+24$ eset); vagy egy 4-cellás $\{(x,y),(x+a,y),(x,y+a),(x+a,y+a)\}$ minta, ha $a \in \{1,3,5,7\}$ ($49+25+9+1$ eset).

Összesen maximum 310 klikk, rendre $(168,116,4,4,18)$ és $(4,5,6,7,8)$ méretekkel.

130. Ha a G gráfnak p maximális klikkje van, a H gráfnak pedig q, akkor az *egyesített* $G — H$-nak pq, mivel a $G — H$ klikkjei egyszerűen a G és H klikkjeinek az uniója. Továbbá, a $\overline{K_n}$ üres gráfnak n maximális klikkje van (nevezetesen az egyszeres halmazai).

Így az $\{n_1,\ldots,n_k\}$ partícióméretekkel rendelkező teljes k-partíciós gráfnak, ami egyébként az adott méretű üres gráfok egyesítésével keletkezik, $n_1\ldots n_k$ maximális klikkje van.

131. Feltehető, hogy $n > 1$. Egy teljes k-partíciós gráfban, akkor maximálisak az $n_1\ldots n_k$ számok, ha mindegyik résznek a mérete 3, kivéve talán egy vagy két részt, amelyek mérete 2. (Lásd a 7.2.1.4–68(a) gyakorlatot.) Tehát be kell bizonyítani, hogy $N(n)$ ennél nem lehet nagyobb *bármely* gráfban.

Legyen $m(v)$ azon klikkeknek a maximális száma, amelyek tartalmazzák a v csúcsot. Ha $u \not- v$ és $m(u) \le m(v)$, akkor készítsük el a G' gráfot hasonlóan a G-hez, kivéve, hogy u most szomszédos v minden szomszédjával, kivéve a korábbi szomszédjait. Minden U maximális klikk valamelyik gráfban a következő 3 osztály egyikébe tartozik:

- i) $u \in U$; Ezek közül $m(u)$ a G-ben van és $m(v)$ a másikból G'-ben.
- ii) $v \in U$; Ezek közül $m(v)$ a G-ben és a G'-ben is van.
- iii) $u \notin U$ és $v \notin U$; az ilyen maximális klikkek a G-ben egyben maximálisak a G'-ben is.

Ebből következően G'-nek legalább annyi maximális klikkje van, mint G-nek. Így, a folyamat megismétlésével megkaphatunk egy k-partíciós gráfot.

Az érvelés Erdős Páltól származik, lásd Moon és Moser cikkét [28].

132. A G-ben és a H-ban lévő klikkek erős szorzata klikk $G \boxtimes H$-ban a 93-as gyakorlat szerint; így $\omega(G \boxtimes H) \ge \omega(G)\omega(H) = \chi(G)\chi(H)$. Másrészt, a G $a(u)$ és H $b(v)$ színezése elvezet a $G \boxtimes H$ $c(u,v) = (a(u), b(v))$ színezéséhez; tehát $\chi(G \boxtimes H) \le \chi(G)\chi(H)$. Továbbá, $\omega(G \boxtimes H) \le \chi(G \boxtimes H)$.

133. (a) 24; (b) 60; (c) 3; (d) 6; (e) 6; (f) 4; (g) 5; (h) 4; (i) $K_2 \boxtimes C_{12}$; (j) 18; (k) 12. (l) Igen, 5 fokkal. (m) Nem. Le lehet rajzolni 12 *vonal* segítségével? (n) Igen; Valójában, 4-összefüggő (lásd 7.4.1). (o) Igen; *minden* gráfot irányítottnak tekintünk, 2 irányított éllel egy élnél. (p) Természetesen nem. (q) Igen, könnyedén.

A zenei gráf egyszerű modulációt reprezentál a kulcs hangjegyek között. Megtekinthető Wilson és Watkins könyvében [39, 73.oldal].

134. Ha elforgatjuk és/vagy kicseréljük a belső és külső csúcsokat, találhatunk egy automorfizmust, amely bármely csúcsot C-ba visz. Ha C fix, akkor felcserélhetjük a külső és belső csúcsát a fennmaradó 11 pár bármely részhalmazában, és/vagy megejthetünk egy bal-jobb tükrözést.

Ebből következően $24 \times 2^{11} \times 2 = 98304$ automorfizmus van összesen.

135. Legyen $\omega = e^{2\pi i/6}$, és definiáljuk a $Q = (q_{ij})$, $S = (s_{ij})$ mátrixokat, ahol $q_{ij} = [j = (i+1) \bmod 12]$ és $s_{ij} = \omega^{ij}$, $0 \le i, j < 12$ esetén. A 96(b) gyakorlat szerint a $K_2 \boxtimes C_{12}$ zenei gráf szomszédsági mátrixa $A = \binom{1\,1}{1\,1} \otimes (I + Q + Q^-) - I$. Legyen T a $\binom{1\;\;\,1}{1\;-1} \otimes S$ mátrix; ekkor T^-AT egy D diagonális mátrix, amelynek első 12 eleme $1 + 4\cos\frac{j\pi}{6}$, ha $0 \le j < 12$, és a maradék 12 eleme -1. Ezért $A^{2m} = TD^mT^-$, továbbá a $2m$-lépéses utak száma C-ből $(\mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{B}, \mathrm{F}^\sharp)$-be rendre

$$
\begin{array}{lclllll}
\mathrm{C}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +2(13+4\sqrt{3})^m & +3^{2m+1} & +2(13-4\sqrt{3})^m & +16)\,; \\
\mathrm{G}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +\sqrt{3}(13+4\sqrt{3})^m & -\sqrt{3}(13-4\sqrt{3})^m & -1)\,; & \\
\mathrm{D}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +(13+4\sqrt{3})^m & +(13-4\sqrt{3})^m-3) & ; & \\
\mathrm{A}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -3^{2m+1}+2)\,; & & & \\
\mathrm{E}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -(13+4\sqrt{3})^m & -(13-4\sqrt{3})^m+1)\,; & & \\
\mathrm{B}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -\sqrt{3}(13+4\sqrt{3})^m & +\sqrt{3}(13-4\sqrt{3})^m-1)\,; & & \\
\mathrm{F}^\sharp_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -2(13+4\sqrt{3})^m & +3^{2m+1} & -2(13-4\sqrt{3})^m)\,; &
\end{array}
$$

Teljesül még, hogy $\mathrm{a}_m = \mathrm{C}_m - 1$, $\mathrm{d}_m = \mathrm{F}_m = \mathrm{e}_m = \mathrm{G}_m$ stb. Speciálisan,

$(\mathrm{C}_6, \mathrm{G}_6, \mathrm{D}_6, \mathrm{A}_6, \mathrm{E}_6, \mathrm{B}_6, \mathrm{F}^\sharp_6) = (15462617,\ 14689116,\ 12784356,\ 10106096,\ 7560696,\ 5655936,\ 5015296)$, tehát a keresett valószínűség $15462617/5^{12} \approx 6.33$. Ha $m \to \infty$, akkor a valószínűségek mindegyike $\frac{1}{24} + O(0.8^m)$.

136. Nem. Csak két 10-ed rendű Cayley-gráf harmadfokú, nevezetesen $K_2 \square C_5$ (amelynek csúcsai $\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3, \beta\alpha^4\}$ alakba írhatók, ahol $\alpha^5 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = e\big)$ és a $\{0, 1, \ldots, 9\}$ csúcsokkal rendelkező gráf és irányított élei $v \to (v \pm 1) \mod 10$, $v \to (v+5) \mod 10$. Lásd Holton és Sheehan könyvét [17, 9.10. gyakorlat]. Mellékesen, a *raman*$(p, q, t, 0)$ SGB gráfok Cayley-gráfok.

137. Legyen $[x, y]$ az (x, y) címkéjének a jelölése; Azt szeretnénk, hogy $[x, y] = [x + a, y + b] = [x + c, y + d]$ legyen minden x-re és y-ra. Ha A az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix, akkor az A legalsó sorát t-szer hozzáadva a felső sorhoz megváltoztatja az A mátrixot az $A' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mátrixra, ahol $a' = a + tc$, $b' = b + td$, $c' = c$, $d' = d$. Az új $[x, y] = [x + a', y + b'] = [x + c', y + d']$ feltételek ekvivalensek a régivel; és $\mathrm{lnko}(a', b', c', d') = \mathrm{lnko}(a, b, c, d)$. Hasonlóan tudjuk az A-t $\big(10 \quad t \quad 1\big)$-gyel balszorozni a probléma megváltoztatása nélkül.

Az oszlopokkal is tudunk manipulálni úgy, hogy az A-t kicseréljük az

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

mátrixra, ahol $a'' = a$, $b'' = ta + b$, $c'' = c$, $d'' = tc + d$. Ez a művelet csak egy kicsit változtatja meg a gyakorlat lényegét: Ha találunk egy címkézést, ami kielégíti az $< x, y >=< x + a'', y + b'' >=< x + c'', y + d'' >$-t minden x-re és y-ra, akkor $[x, y] = [x + a, y + b] = [x + c, x + d]$, ha $[x, y] =< x, y + tx >$. Hasonlóan tudjuk az A-t jobbszorozni a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixszal, a probléma majdnem ugyanaz marad.

Az ilyen sor- és oszlopműveletek sorozata A-t az $UAV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ alakra egyszerűsíti, ahol U és V egész mátrixok, melyekre teljesül, hogy $\det U = \det V = 1$. Ha pedig $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, akkor a redukált feladat címkézése, ami kielégíti az $< x, y >=< x + 1, y >=< x, y + n >$ feltételt, egy egyszerű megoldást ad az eredeti címkézési feladatra $[x, y] =< \alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y >$ megadással. Végül, a redukált címkézési probléma egyszerű: legyen $< x, y >= y \mod n$. Így a keresett válasz a $p = \beta$, $q = \delta$ beállítás.

138. Folytatva azt, amit elkezdtünk, de most egy $k \times k$-os A mátrixszal, a sor- és oszlop műveletek redukálják a problémát az UAV diagonális mátrixra. A $(d_1, \ldots, d_k)$ diagonális elemek azokkal a feltétellel vannak jellemezve, hogy $d_1 \ldots d_j$ az A minden $j \times j$-s részmátrixa determinánsainak a legnagyobb közös osztója. [Ez a „*Smith normál forma*”; lásd Smith cikkét [35]. Ha az $< x >$ címkézés kielégíti a redukált problémát, az eredeti feladat is meg van oldva $[x] =< xV >$ választással. Az általánosított tórusz elemeinek száma $n = \det A = d_1 \ldots d_k$.

Mint ahogy azt említettük, a redukált problémának van egyszerű megoldása, ha $d_1 = \cdots = d_{k-1} = 1$. De általánosságban a redukált címkézés egy rendes r-dimenziós tórusz $(d_{k-r+1}, \ldots, d_k)$ dimenzióval, ahol $d_{k-r+1} > d_{k-r} = 1$. (Itt $d_0 = 1$; lehetséges, hogy $r = k$.)

A kért példában azt találjuk, hogy $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 10$, $n = 20$; valóban,

$$UAV = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Minden (x, y, z) ponthoz most egy 2-dimenziós $(u, v) = ((5x+y) \mod 2, (6x+y+z) \mod 10)$ címke tartozik.

Az (u, v) 6 szomszédja $((u \pm 1) \mod 2, v)$, $((u \pm 1) \mod 2, (v \pm 1) \mod 10)$, $(u, (v \pm 1) \mod 10)$.

Ez egy *multigráf*, mivel az első 2 szomszéd azonos; de ez nem ugyanaz, mint a $C_2 \boxtimes C_{10}$ multigráf, amely 8-ad fokú.

Az általánosított tóruszok tulajdonképpen az Ábel-csoportok *Cayley-gráfjai*; lásd a 136. gyakorlatot. Úgy vannak tervezve, mint megfelelő összekapcsolt hálózatok, melyben fontos az átmérő minimalizálása, amikor k és n meg vannak adva. Lásd Wong és Coppersmith [40], valamint Fiduccia, Forcade és Zito cikkét [9].

139. (Ez a gyakorlat segít tisztázni a különbséget a G *címkézett gráfok*, ahol a csúcsoknak határozott neve van, és a **??**. ábrán látható H *címkézetlen gráfok* között.) Ha N_H azon címkézett gráfok száma $\{1, 2, \ldots, h\}$ felett, amelyek izomorfak H-val, és ha U bármely h-elemű részhalmaza V-nek, annak a valószínűsége, hogy $G \,|\, U$ izomorf H-val $N_H/2^{h(h-1)/2}$. Ezért a válasz $\binom{n}{h} N_H/2^{h(h-1)/2}$. Meg kell határoznunk az N_H értékét, amely: (a) 1; (b) $h!/2$; (c) $(h-1)!/2$; (d) $h!/a$, ahol H-nak *aautomorfizmusa* van.

140. (a) $\#(K_3{:}W_n) = n-1$ és $\#(P_3{:}W_n) = \binom{n-1}{2}$, ha $n \geq 5$; valamint $\#(\overline{K_3}{:}W_8) = 7$.

(b) G pontosan akkor arányos, ha $\#(K_3{:}G) = \#(\overline{K_3}{:}G) = \frac{1}{n}\binom{n}{3}$ és $\#(P_3{:}G) = \#(\overline{P}_3{:}G) = \frac{3}{8}\binom{n}{3}$. Ha G-nek e éle van, akkor $(n-2)e = 3\#(K_3{:}G) + 2\#(P_3{:}G) + \#(\overline{P}_3{:}G)$, mivel minden csúcspár $n-2$ indukált részgráfban szerepel. Ha G-nek $d_1 \ldots d_n$ foksorozata van, akkor $d_1 + \cdots + d_n = 2e$, $\binom{d_1}{2} + \cdots + \binom{d_n}{2} = 3\#(K_3{:}G) + \#(P_3{:}G)$, és $d_1(n-1-d_1) + \cdots + d_n(n-1-d_n) = 2\#(P_3{:}G) + 2\#(\overline{P}_3{:}G)$.

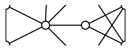
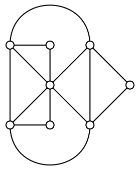
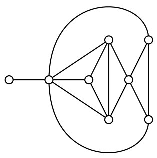
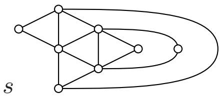
Ezért egy arányos gráf kielégíti $(*)$-ot – kivéve ha $n = 2$. (A gyakorlatnak ki kell zárnia ezt az esetet.)

Másrészt, ha G kielégíti $(*)$-ot és megvan a helyes $\#(K_3{:}G)$ érték, akkor megvan a helyes $\#(P_3{:}G)$, $\#(\overline{P}_3{:}G)$, és $\#(\overline{K_3}{:}G)$ érték is.

Hivatkozások: Janson és Kratochvíl cikke [21]. A [1] közleményben Barbour, Karoński és Ruciński megmutatta, hogy a $\#(H{:}G)$ eltérése arányos vagy n^{2h-2}-vel, vagy n^{2h-3}-mal, vagy n^{2h-4}-el, ahol az első eset akkor áll elő, ha H-nak nincsen $\frac{1}{2}\binom{h}{2}$ éle, és a harmadik eset akkor áll elő, ha H arányos gráf.

141. Csak 8 darab $d_1 \ldots d_8$ foksorozat elégíti ki $(*)$-ot: 73333333 (1/2), 65433322 (26/64), 64444222 (2/10), 64443331 (8/22), 55543222 (8/20), 55533331 (2/10), 55444321 (26/64), és 44444440 (1/2). Minden foksorozat itt (N_1/N) statisztikával van bemutatva, ahol N nemizomorf gráfnak van ez a sorozata, és N_1 közülük arányos. Az utolsó három eset az első három komplementere.

Nincs olyan 8-ad rendű gráf, amely egyszerre arányos és *komplementerével megegyező*. Maximálisan szimmetrikus példák az első 5 esetre W_8,


,

,

s

.

142. A tipp ugyanaz, mint amit az előző feladatban csináltunk; $(n-3)\#(\overline{K}_3{:}G)$ és $(n-3)\#(P_3{:}G)$ kifejezhető négycsúcsok számában. Továbbá egy e élű gráfra $\binom{e}{2} = \#(P_3 \subseteq G) + \#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G)$, mivel bármely két él P_3-at vagy $K_2 \oplus K_2$-t alkot; ebben a formulában $\#(P_3 \subseteq G)$ nem feltétlenül indukált részgráfot számol.

$\#(P_3 \subseteq G) = \#(P_3{:}G) + 3\#(K_3{:}G)$, és egy hasonló formula kifejezi $\#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G)$-t az indukáltak megszámlálásának a segítségével.

Így egy túlarányos gráfnak arányosnak kell lenni és ki kell elégítenie $e = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$-t, $\#(P_3 \subseteq G) = \frac{3}{4}\binom{n}{3}$-t, $\#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G) = \frac{3}{4}\binom{n}{4}$-t. Ezek az értékek azonban ellentmondanak az $\binom{e}{2}$ formulának.

143. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai az A-nak a sorai, és amelynek u—v élei olyan u és v sorokat kötnek össze, amelyek a j oszlop kivételével megegyeznek. Cimkézzünk egy ilyen élt j-vel.

Ha a gráfban van kör, töröljük valamely élét a körnek, és ismételjük a folyamatot mindaddig, amíg nem lesz kör. Vegyük észre, hogy a törölt élnek a címkéje valahol máshol feltűnik a körben; így a törlés nem befolyásolja az él címkék halmazát. Ekkor azonban már csak kevesebb, mint $m \le n$ él maradt a 2.3.4.1A tétel szerint; tehát kevesebb, mint n különböző címke van. Lásd Bondy cikkét [3].

144. Legyen G gráf az $\{1, \ldots, m\}$ csúcsokkal, és i—j élekkel akkor és csakis akkor, ha $* \neq x_{il} \neq x_{jl} \neq *$ valamely l-re. Ez a gráf pontosan akkor k-színezhető, ha van egy kiegészítése legfeljebb k különböző sorral. Másrészt, ha G egy gráf $\{1, \ldots, n\}$ élekkel, A *szomszédsági mátrixszal*, az $n \times n$-es $X = A + *(J - I - A)$ mátrixnak van az a tulajdonsága, hogy i—j pontosan akkor, ha $* \neq x_{il} \neq x_{jl} \neq *$ valamely l-re. Lásd Sauerhoff és Wegener cikkét [34].

145. Legyen $c \leftarrow 0$ és ismételjük a következő műveleteket $1 \le j \le n$-re: Ha $c = 0$, akkor legyen $x \leftarrow a_j$ és $c \leftarrow 1$; egyébként, ha $x = a_j$, legyen $c \leftarrow c + 1$; egyébként legyen $c \leftarrow c - 1$. Ekkor x a válasz.

Az ötlet az, hogy tartsuk szemmel a lehetséges x gyakori elemet, amely c alkalommal fordul elő a nem elhagyott elemek között; Elhagyjuk az a_j-t és egy x-et mindannyiszor, ha találunk $x \neq a_j$-t. Lásd Wos cikkét [41].

Az összes olyan elem megkeresésének kiterjesztését $O(n \lg k)$ lépésben, amely több, mint n/k alkalommal fordul elő, Misra és Gries cikke tárgyalja [27].

IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. Barbour, M. Karoński, A. Ruciński. A central limit theorem for decomposable random variables with applications to random graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 47(2):125–145, 1989. MR1047781 (91m:60038). 38

[2] C. R. Berge. *Introduction to Signal Transmission*. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, 1971. 18

[3] J. Bondy. Induced subsets. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 12:201–202, 1972. MR0319773 (47 #8315). 39

[4] R. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*, 37:194–197, 1941. MR0012236 (6,281b). 31

[5] A. Christie. *Murder on the Orient Express*. Collins Crime Club, London, 1934. Magyarul: *Gyilkosság az Orient Expresszen*. Európa Könyvkiadó, Budapest, 2000. 3

[6] C. R. J. Clapham, D. Kleitman. The degree sequences of self-complementary graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 20(1):67–74, 1976. MR0419291 (54 #7314). 33

[7] P. Erdős, T. Gallai. *Matematikai Lapok*, 11:264–274, 1960. 33

[8] P. Erdős, P. Kelly. Mathematical notes: The minimal regular graph containing a given graph. *American Mathematical Monthly*, 70(10):1074–1075, 1963. MR1532429. 34

[9] C. M. Fiduccia, R. W. Forcade, J. S. Zito. Geometry and diameter bounds of directed Cayley graphs of Abelian groups. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 11(1):157–167 (digitálisan), 1998. 38

[10] H.-J. Finck. Über die chromatischen zahlen eines graphen und seines komplements. I, II. (német). *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Ilmenau*, 12:243–246, 1966. 35

[11] D. Fulkerson. Zero-one matrices with zero trace. *Pacific Journal of Mathematics*, 10:831–836, 1960. MR0120166 (22 #10923). 33

[12] B. Grünbaum. Research problems: A problem in graph coloring. *American Mathematical Monthly*, 77(10):1088–1092, 1970. MR1536140. 35

[13] B. Grünbaum. *Graph Theory Notes of New York*, 32:40–41, 1997. 35

[14] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, 1969. MR0256911 (41 #1566). 2

[15] V. Havel. Eine Bemerkung über die Existenz der endlichen Graphen (német). *Československá Akademie Věd. Časopis Pro Pěstování Matematiky*, 80:477–480, 1955. 14

[16] K. W. S. Hensel. *Crelle*, 105:329–344, 1889. 32

[17] D. A. Holton, J. Sheehan. *The Petersen Graph*. Australian Mathematical Society Lecture Series, **7**. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. 37

[18] V. Hugo. *Les Misérables*. Hurst & Blackett, Párizs, 1862. Magyarul: Lazi Bt., Budapest, 2006. Fordította Lányi Viktor,, Révay József és Szekeres György, digitálisan http://mek.niif.hu/02000/02068/html/index.htm. 8

[19] A. H. Hurwitz. Zur Invariantentheorie (németül). *Mathematische Annalen*, 45(3):381–404, 1894. MR1510869. 32

[20] W. Imrich, S. Klavžar. *Product Graphs: Structure and Recognition*. John Wiley & Sons, San Francisco, 2000. 13

[21] S. Janson, J. Kratochvíl. Proportional graphs. *Random Structures and Algorithms*, 2(2):209–224, 1991. MR1099800 (92a:05119). 38

[22] D. E. Knuth. *The Stanford GraphBase: A Platform for Combinatorial Computing*. ACM Press and Addison-Wesley, 1992. 16

[23] A. Kowalewski. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa*, 126:67–90, 1917. 31

[24] L. Leonardo. Mona Lisa, 1506 (festmény). 9

[25] V. Menon. The isomorphism between graphs and their adjoint graphs. *Canadian Mathematical Bulletin*, 8:7–15, 1965. MR0175114 (30 #5299). 31

[26] D. J. Miller. The categorical product of graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, 20:1511–1521, 1968. MR0231745 (38 #73). 32

[27] J. Misra, D. J. http://www.cs.cornell.edu/gries/gries.html. Finding repeated elements. *Science of Computer Programming*, 2(2):143–152, 1982. 39

[28] J. H. Moon. On cliques in graphs. *Israel Journal of Mathematics*, 3:23–28, 1965. MR0182577 (32 #60). 36

[29] J. Nešetřil. Representations of graphs by means of products and their complexity. In *Mathematical foundations of computer science (Štrbské Pleso, 1981)*, 94–102. o. *Lecture Notes in Computer Science*, **118**. Springer-Verlag, Berlin, 1981. MR0652742 (84g:05051). 31

[30] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. *American Mathematical Monthly*, 63:175–177, 1956. MR0078685 (17,1231c). 35

[31] G. Ringel. Selbstkomplementäre Graphen (német). *Archiv der Mathematik*, 14:354–358, 1963. MR0154273 (27 #4222). 30

[32] P. Roget. *Roger's Thesaurus, 6. javított kiadás*. Collins, New York, 2002. A könyv 1805-ben készült el és először 1852-ben jelent meg. Az új kiadást B. A. Kipfer szerkesztette. 8

[33] H. Sachs. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 14:354–358, 1962. 30

[34] M. Sauerhoff, I. Wegener. On the complexity of minimizing the obdd size for incompletely specified functions. *IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 15(11):1435–1437, 1996. 39

[35] H. W. Smith. *Philosophical Transactions*, 151:293–326, 1861. 38

[36] K. Vesztergombi. Some remarks on the chromatic number of the strong product of graphs. *Acta Cybernetica*, 4(2):207–212, 1978/79. MR0525046 (81e:05073). 35

[37] D. Wang, D. Kleitman. On the existence of n-connected graphs with prescribed degrees ($n \geq 2$). *Networks*, 3:225–239, 1973. MR0340118 (49 #4874). 34

[38] P. Weichsel. The Kronecker product of graphs. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 13:47–52, 1962. 32

[39] R. M. Wilson, J. J. Watkins. *Graphs*. John Wiley & Sons, New York, 1990. MR1038804 (91b:05001). 36

[40] C. Wong, D. Cppersmith. A combinatorial problem related to multimodule memory organizations. *Journal of the ACM*, 21:392–402, 1974. MR0457246 (56 #15454). 38

[41] L. D. Wos. The problem of finding a restriction strategy more effective than the set of support strategy. *The Journal of Automated Reasoning*, 7(1):105–107, 1991. MR1103460. 39

[42] J. Zehfuss. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 43:298–301, 1858. 32

[43] A. Zykov. On some properties of linear complexes (oroszul). *Matematicseskij Szbornik, Novaya Szerija*, 24(66):163–188, 1949. 11

TÁRGYMUTATÓ

NÉVMUTATÓ

MAGYAR NÉVMUTATÓ