TARTALOMJEGYZÉK

1. $((x_1 \vee x_4) \wedge x_2) \equiv (x_1 \vee x_3)$.

2. (a) $(w \oplus (x \wedge y)) \oplus ((x \oplus y) \wedge z)$; (b) $(w \wedge (x \vee y)) \wedge ((x \wedge y) \vee z)$.

3. [1] Tekintsünk egy $k \times n$-es mátrixot, melynek sorait azon x vektorok alkotják, melyekre $f(x) = 1$. A változók permutálásával és/vagy negálásával feltételezhetjük, hogy az első sor az $1 \ldots 1$ és az oszlopok rendezve vannak. Tegyük fel, hogy l különböző oszlopunk van. Ekkor $f = g \wedge h$, melyben g az összes $(x_{j-1} \equiv x_j)$ kifejezés konjunkciója, ahol $1 < j \leq n$, és a $j-1$. oszlop megegyezik a j. oszloppal, míg h jelöli a k darab l hosszúságú minterm diszjunkcióját, ahol az azonos oszlopok közül mindig csak egyet használunk. Például, ha $n = 8$ és f a következő $k = 3$ pontban igaz: 11111111, 00001111, 00110111, akkor $l = 4$, míg $f(x)$ megegyezik $(x_1 \equiv x_2) \wedge (x_3 \equiv x_4) \wedge (x_6 \equiv x_7) \wedge (x_7 \equiv x_8) \wedge ((x_1 \wedge x_3 \wedge x_5 \wedge x_6) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_3 \wedge x_5 \wedge x_6) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_3 \wedge \bar{x}_5 \wedge x_6))$ formulával. Az így kapott formula hossza $2n + (k-2)\,l - 1$, ahol $l \leq 2^{k-1}$.

Figyeljük meg, hogy ha k nagy, akkor rövidebb formulát kapunk, ha $f(x)$-et $f_1(x) \vee \ldots \vee f_r(x)$ alakban írjuk fel, ahol minden f_j legfeljebb $\lceil k/r \rceil$ 1-est tartalmaz. Ekkor

$$L(f) \leq \min_{r \geq 1} \left(r - 1 + \left(2n + \lceil k/r - 2 \rceil \, 2^{\lceil k/r - 1 \rceil} \right) r \right).$$

4. Az első egyenlőtlenség közvetlen következménye annak, hogy egy d mélységű bináris fa legfeljebb $1 + 2 + \ldots + 2^{d-1} = 2^d - 1$ belső csúcsot tartalmazhat.

Az utalás rendben van, hiszen létezik legkisebb részfa, melynek mérete $\geq \lfloor r/3 \rfloor$. Ennek mérete s legfeljebb $1 + 2\,(\lfloor r/3 \rfloor - 1)$. Ez alapján $f = (g?\ f_1 :\ f_0)$, ahol g egy s méretű részformula, míg f_0 és f_1 olyan $r - s - 1$ méretű formulák, melyeket f-ből a g helyére rendre 0 illetve 1 helyettesítésével kapunk.

Legyen $d(r) = \max\{D(f) \mid L(f) = r\}$. Mivel a muxfüggvény mélysége 2, és $\max(s, r - s - 1) < \left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil$, ezért $r \geq 3$ esetén $d(r) \leq 2 + d\left(\left\lceil \frac{2r}{3} \right\rceil - 1\right)$, melyből az eredmény r szerinti indukcióval következik [2].

5. Legyen $g_0 = 0$, $g_1 = x_1$, és $g_j = x_j \wedge (x_{j-1} \vee g_{j-2})$, ahol $j \geq 2$. Ekkor $F_n = g_n \vee g_{n-1}$, melynek költsége $2n-2$, mélysége pedig n. [Ezek a g_j függvények fontos szerepet játszanak a bináris összeadásnál is. A **??**-es, illetve **??**-es gyakorlatoknál bemutatjuk, hogyan lehet őket $O(\lg n)$ mélységű fügvényekkel meghatározni.]

6. Igaz: vizsgálja meg az $y = 0$ valamint az $y = 1$ esetet.

7. $\hat{x}_5 = x_1 \vee x_4$, $\hat{x}_6 = x_2 \wedge \hat{x}_5$, $\hat{x}_7 = x_1 \vee x_3$, $\hat{x}_8 = \hat{x}_6 \oplus \hat{x}_7$. (Az eredeti lánc a (**??**)-os „random"függvényt számítja; lásd az **??**. gyakorlatot. Az új lánc ennek a függvénynek a normalizáltját, nevezetesen a negáltját számítja.)

8. Az x_k igazságtáblájában 2^{n-k} darab 0-t, valamint 2^{n-k} darab 1-est tartalmazó blokkok váltakoznak, amint az a (**??**)-ben is megfigyelhető. így ha megszorozzuk $2^{2^{n-k}} + 1$-gyel, az eredményül kapott $x_k + \left(x_k \ll 2^{n-k}\right)$ csupa 1-esből fog állni.

9. Az L6-os lépésben, amikor $L(f) = \infty$, tároljuk el g-t és h-t egy f-hez rendelt rekordban. Ekkor f-hez egy rekurzív eljárássegítségével, a megfelelő g és h felhasználásával előállítható egy minimum hosszúságú formula.

10. Az L3-as lépésben írjunk $k = r-1-j$ helyére $k = r-1$-et, valamint írjuk át mindenhol az L-et D-re.

11. Az egyetlen probléma az, hogy az U3 lépésben *csökkenteni* kell j-t. Ekkor $j=0$ esetén $\phi(g)\,\&\,\phi(h)\neq 0$, így az összes $r-1$ költségű esetet megtaláljuk, még mielőtt nekifognánk az $r-1$. listának.

U1. [Kezdeti beállítás.] Legyen $U(0)\leftarrow\phi(0)\leftarrow 0$ míg $U(f)\leftarrow\infty$ minden $1\leq f<2^{2^n-1}$ esetén. Ekkor legyen $U(x_k)\leftarrow\phi(x_k)\leftarrow 0$ és fűzzük x_k-t a 0. listához, ahogy azt az L1 lépésben tettük. Ugyanakkor legyen $U(x_j\circ x_k)\leftarrow 1$, és rendeljük $\phi(x_j\circ x_k)$-hoz a neki megfelelő 1 súlyú bit vektort, és fűzzük $x_j\circ x_k$-t az 1. listához, minden $1\leq j<k\leq n$ és mind az öt $\circ$ normál operátor esetén. Végül legyen $c\leftarrow 2^{2^n-1}-5\binom{n}{2}-n-1$.

U2. [Ciklus r-re.] Ismételjük az U3 lépést $r=2,\ 3,\ \ldots$ esetén, amíg $c>0$.

U3. [Ciklus j-re és k-ra.] Ismételjük az U4 lépést $j=\lfloor(r-1)/2\rfloor,\ \lfloor(r-1)/2\rfloor-1,\ \ldots,$ valamint $k=r-1-j$ esetén, amíg $j\geq 0$.

U4. [Ciklus g-re és h-ra.] Ismételjük az U5 lépést a j. lista minden g és a k. lista minden h elemére. Amennyiben $j=k$, csak azon h elemeket tekintsük, melyek a g *után következnek* a k. listán.

U5. [Ciklus f-re.] Ha $\phi(g)\,\&\,\phi(h)\neq 0$, akkor legyen $u\leftarrow r-1$ és $v\leftarrow\phi(g)\,\&\,\phi(h)$, különben pedig legyen $u\leftarrow r$ és $v\leftarrow\phi(g)\mid\phi(h)$. Ekkor végezzük el az U6 lépést $f=g\,\&\,h$, $f=\bar g\,\&\,h$, $f=g\,\&\,\bar h$, $f=g\mid h$, illetve $f=g\oplus h$ esetén.

U6. [$U(f)$ és $\phi(f)$ aktualizálása.] Ha $U(f)=\infty$, akkor legyen $c\leftarrow c-1$, $\phi(f)\leftarrow v$, és fűzzük f-et az u. listához. Különben, ha $U(f)>u$, akkor legyen $\phi(f)\leftarrow v$, és helyezzük át f-et az $U(f)$. listáról az u. listára. Ha pedig $U(f)=u$, akkor legyen $\phi(f)\leftarrow\phi(f)\mid v$. ■

12. $x_4=x_1\oplus x_2$, $x_5=x_3\wedge x_2$, $x_6=x_2\wedge\bar x_4$, $x_7=x_5\vee x_6$.

13. $f_5=01010101$ (x_3); $f_4=01110111$ $(x_2\vee x_3)$; $f_3=01110101$ $((\bar x_1\wedge x_2)\vee x_3)$; $f_2=00110101$ $(x_1?\ x_3{:}\ x_2)$; $f_1=00010111$ $(\langle x_1x_2x_3\rangle)$.

14. Tetszőleges $1\leq j\leq n$ esetén számítsuk ki $t\leftarrow(g\oplus(g\gg 2^{n-j}))\,\&\,x_j$, $t\leftarrow t\oplus(t\ll 2^{n-j})$, ahol x_j a (**??**)-es igazságtábla. Ekkor $1\leq k\leq n$ és $k\neq j$ esetén az $x_j\leftarrow x_j\circ x_k$ műveletnek megfelelő igazságtábla a $g\oplus(t\,\&\,((x_j\circ x_k)\oplus x_j))$ képlettel számítható. (Mivel az $(x_j\circ x_k)\oplus x_j$ által leírt $5n(n-1)$ különböző művelet g-től független, azok előre kiszámíthatóak. Ugyanez az ötlet működik az ennél általánosabb $x_{j(i)}\leftarrow x_{k(i)}\circ_i x_{l(i)}$ alakú számításokra, és a neki megfelelő $(x_k\circ x_l)\oplus x_j$ által leírt $5n^2(n-1)$ féle műveletre is.)

15. Valódi aszimmetrikus módszerek szimmetrikus függvények kiszámítására:

(a)	(b)	(c)
$x_1\leftarrow x_1\oplus x_2$,	$x_1\leftarrow x_1\oplus x_2$,	$x_1\leftarrow x_1\oplus x_2$,
$x_3\leftarrow x_3\oplus x_4$,	$x_2\leftarrow x_2\wedge\bar x_1$,	$x_2\leftarrow x_2\oplus x_3$,
$x_1\leftarrow x_1\oplus x_3$,	$x_3\leftarrow x_3\oplus x_4$,	$x_2\leftarrow x_2\vee x_1$,
$x_2\leftarrow x_2\oplus x_4$,	$x_4\leftarrow x_4\wedge x_1$,	$x_1\leftarrow x_1\oplus x_4$,
$x_3\leftarrow x_3\vee x_2$,	$x_2\leftarrow\bar x_2\wedge x_3$,	$x_1\leftarrow x_1\wedge x_3$,
$x_3\leftarrow x_3\wedge\bar x_1$.	$x_2\leftarrow x_2\oplus x_1$,	$x_2\leftarrow x_2\wedge\bar x_1$,
	$x_2\leftarrow x_2\wedge\bar x_4$.	$x_2\leftarrow x_2\oplus x_4$.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] B. Finikov. On a family of classes of functions in the logic algebra and their realization in the class of π-schemes (oroszul). *Doklady Akademii Nauk SSSR (Novaja Serija)*, 115:247–248, 1957. 2

[2] P. M. Spira. *Hawaii International Conference on System Sciences*, 4:525–527, 1971. 2

TÁRGYMUTATÓ

NÉVMUTATÓ