Donald Ervin KNUTH

A SZÁMÍTÓGÉP-PROGRAMOZÁS

MŰVÉSZETE

4. kötet 0. rész

Bevezetés a kombinatorikai algoritmusokhoz és
a Boole-függvényekhez

Budapest, 2009

Az eredeti mű:
D. E. Knuth: *The Art of Computer Programming, Volume 4, Fascicle 0. Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions*
Addison–Wesley, Upper Saddle River, NJ, 07458
(Internet page http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html)

Honlap: http://www.antoncom.hu/; könyvrendelés: rendeles@antoncom.hu

Szerkesztő: Iványi Antal

Szakmai lektorok: Kása Zoltán és Sági Gábor

Nyelvi lektorok: Biró Gabriella és Selyem Zoltán

Fordítók: Hajdu András, Pásztorné Varga Katalin Láng Csabáné, Várterész Magdolna

Biró Gabriella, Hajdu András, Iványi Anna, Iványi Antal, Kása Zoltán, Láng Zsuzsanna, Mayer Gyula, Pásztorné Varga Katalin, Sági Gábor, Várterész Magdolna

A könyv honlapja: http://compalg.inf.elte.hu/~tony/KedvencKonyvek/

ISBN 978-963-87947-2-7

A borítót Hodosi Mária tervezte

Nyomás és kötés: Kinizsi Nyomda
Felelős vezető: Bördős János

TARTALOMJEGYZÉK

A szerző különösen hálás az Addison–Wesley Kiadónak
a türelméért, amiért a szerződés aláírásától egy teljes évtizedet várt
a kéziratra.
– FRANK HARARY, *Graph Theory* (1968) [?]

Bitte ein Bit!
A Bitburger Sörfőzde jelszava (1951)

ELŐSZÓ AZ ANGOL KIADÁSHOZ

Minden jó dolgot egy könyvben összefoglalni nyilvánvalóan lehetetlen.
Még az is túlzott terjedelemhez vezet, ha csak adott témakör egy adott vonatkozásában
ésszerűen átfogóak szeretnénk lenni.
– GERALD B. FOLLAND *„Editor's corner"* (2005) [?]

La dernére chose qu'on trouve en faisant un ouvrage
est de savoir celle qu'ill faut mettre la premiére.
– BLAISE PASCAL *Pensées 740* (1660 körül) [?]

Ez a könyvecske az *A számítógépes-programozás művészete* című monográfia *Kombinatorikus algoritmusok* című 4. kötetének 3. része. Amint azt az 1. kötet 1. részében leírtam, azért adom közre az anyagot ebben az előzetes formában, mert tudom, hogy a 4. kötet befejezéséhez sok évre lesz szükség; én pedig már alig várom, hogy az emberek elolvassák, amit írtam, és ellássanak értékes megjegyzéseikkel.

Ez a füzet a kombinatorikus elemzésről szóló, nagyon hosszú fejezet kezdő részeit (a 7.0. alfejezetet, valamint a 7.1.1. és a 7.1.2. pontot) tartalmazza. Ez a 7. fejezet terveim szerint az *A számítógép-programozás művészete* leghosszabb fejezete lesz, és végül is majd három kötetet tölt meg (nevezetesen a 4A, 4B és 4C köteteket), feltéve, hogy egészséges maradok. A második leghosszabb fejezethez (5. fejezet) hasonlóan ez a fejezet is ealapismereteket átadó előkészítő anyaggal kezdődik, azután következik a fő szöveg, amely bemelegítésként több tucat gyakorlatot tartalmaz. Ezután hosszú utazás következik, és fontos tartalékokat kell magunkkal vinnünk, ha felszállunk a fedélzetre. Továbbá minimalizálni akartam a 6. fejezet és az új fejezet közötti átmenet okozta sokkhatást, mivel a 6. fejezetet eredetileg több mint 30 évvel ezelőtt írtam és adtam közre.

A tényleges 7. fejezet a "*Nullák és egyesek* című alfejezettel kezdődik, amelyik egy másik típusú bevezetés, egy másik szinten. Ez az alfejezet beugrik azokba a nagyon fontos témákba, amelyek a Boole-függvények tanulmányozását körbeveszik, és ami lényegében mindennek az alapja, amit a számítógépek tesznek. A *Logikai alapok* című 7.1.1. alpont arra tesz kísérletet, hogy szilárd alapot biztosítson azoknak az elméleti és gyakorlati gondolatoknak, amelyekre később jelentős szuperstruktúrákat építünk; a *Boole-függvények kiértékelése* című 7.1.2. alpont azt vizsgálja, hogyan lehet a Boole-függvényeket maximális hatékonysággal kiszámítani.

A 7.1. alfejezet további részei – nevezetesen a *Bitenkénti trükkök és módszerek* című 7.1.3. és a *Bináris döntési diagramok* című 7.1.4. alpont rövidesen megjelenik, mint a 4. kötet 1. része. Ezután következik Boole-függvényekkel a *Minden lehetőség előállítása* című 7.2. alfejezet; az *Alapvető kombinatorikai minták előállítása* című 7.2.1. pont már megjelent. A 7.2.2. pont a visszalépéssel általában fog foglalkozni. És ez így megy tovább, ha minden jól megy; az egész 7. fejezet vázlata – ahogyan azt most elképzelem – elérhető a `taocp` honlapon, melynek címe megtalálható a kolofon oldalon.

. . .

Örömmel fizetek 2.56 dollár megtalálói jutalmat ezen füzet minden hibájáért annak, aki elsőként jelzi a hibát – függetlenül attól, hogy sajtóhibáról, helyesírási vagy történeti hibáról van-e szó. Ugyanez az elismerés jár azokért a kifejezésekért, amelyeket elfelejtettem betenni a tárgymutatóba. Értékes ajánlások a szöveg javítására egyenként 32 centet érdemelnek. Továbbá, ha Ön jobb megoldást talál egy gyakorlatra, puszta pénz helyett örök glóriát kap azzal, hogy neve bekerül a könyv végleges változatába.

Azok a jelölések, amelyeket ebben a füzetben alkalmazok, és másutt nem magyaráztam el őket, megtalálhatók az 1., 2. és 3. kötet jelölésekkel foglalkozó függelékében. Ezekben a részekben további útmutatás van arra nézve, hol van az adott jelölések részletes magyarázata. Természetesen majd egykor a 4. kötetnek saját jelölésmutatója lesz.

A gépi kódú példák az *A számítógép-programozás művészete* minden további kiadásában az `MMIX` számítógépen fognak alapulni, amelyet az 1. kötet 1. részében definiáltam.

A még megíratlan részekre való kereszthivatkozások „00”-ként jelennek meg a következő oldalakon; ezek a lehetetlen számok helyettesítik a később megadandó tényleges számokat.

Kellemes olvasást!

Stanford, California D. E. K.
2008. január

ELŐSZÓ A NEGYEDIK KÖTETHEZ

A negyedik kötet címe *Kombinatorikai algoritmusok*. Amikor ezt a címet javasoltam, nagy kedvem volt hozzátenni a *Kedvenc programozási feladataim* alcímet. A szerkesztőim elutasították ezt az érzelgősséget, de az tény marad, hogy mindig a kombinatorikai jellegű programozási feladatokkal foglalkoztam a legszívesebben.

Stanford, California
2008. április

D. E. K.

> A megmaradt hibákért természetesen vállalom a felelősséget –
> bár véleményem szerint a barátaim észrevehettek volna még néhányat.
> — CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU, *Számítási bonyolultság* (1995) [?]

. . .

Megjegyzés a hivatkozásokhoz. Az *IEEE Transactions* című folyóiratra való hivatkozások tartalmaznak egy félkövér betűt a kötet számában, amely a folyóirat típusára utal. Például „*Trans.* ***C-35***” az *IEEE Transactions on Computers* 35. kötetét jelöli. Az IEEE nem alkalmazza többé ezeket a kényesmes betűkódokat, de nem túl nehéz ezeket a kódokat megfejteni: „**EC**” az idez*Electronic Computers*, „**IT**” az „*Information Theory*”, „**SE**” a „*Software Engineeing*”, „**SP**” a „*Signal Processing*”, „**CAD**” pedig a „*Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*” rövidítése.

BEVEZETÉS A MAGYAR KIADÁSHOZ

Az informatikai algoritmusok magyar nyelvű szakirodalma az utóbbi harminc évben alakult ki. Az első szakkönyvet – *Algoritmusok* címmel – Lovász László és Gács Péter írta 1978-ban [21]. Ezt a könyvet fordítások követték: 1982-ben Aho, Hopcroft és Ullman könyve [1], 1987-ben Knuth háromkötetes monográfiája [13,14,15], majd 1997-ben Cormen, Leiserson és Rivest műve [2], amely *Algoritmusok* címmel jelent meg, és több kiadás is bizonyította népszerűségét. Időközben Kolozsváron megjelent Kása Zoltán *Algoritmusok tervezése* című tankönyve [11]. 1998-ban jelent meg Knuth, Graham és Patashnik *Konkrét matematika* című könyve, amely az algoritmusok elemzésének alapvető matematikai eszközeit foglalta össze [16]. 1999-ben újra hazai szerzők következtek – Rónyai Lajos, Ivanyos Gábor és Szabó Réka [23] – majd 2002-ben megjelent Lynch *Osztott algoritmusok* című monográfiája [22]. 2002-ben jelent meg Csörnyei Zoltán *Fordítási algoritmusok* [4], valamint Katona Y. Gyula, Recski András és Szabó Csaba *A számítástudomány alapjai* című tankönyve [12] is.

Ezt 2003 tavaszán Iványi Antal *Párhuzamos algoritmusok* című könyve [7], majd 2003 őszén – *Új algoritmusok* címmel – Cormen, Leiserson, Rivest és Stein tankönyvének [3] fordítása követte. 2004 nyarán adta közre Jordán Tibor, Recski András és Szeszlér Dávid a *Rendszeroptimalizálás* című tankönyvet [10]. 2004 őszén jelent meg az *Informatikai algoritmusok 1* [8], amelyet 2005 júniusában az *Informatikai algoritmusok 2* [9] követett. A legfrissebb magyar nyelvű tankönyv Csörnyei Zoltán és Kása Zoltán *Formális nyelvek és fordítóprogramok* című műve [5].

2005 tavaszától számítható az elektronikus tankönyvek megjelenése: az első két könyv a *Párhuzamos algoritmusok* [7] és az *Informatikai algoritmusok 1* [8].

Nagy örömünkre szolgál, hogy ezt a választékot most D. E. Knuth monográfiájának újabb részeivel bővíthetjük: a `MIX` gép helyett javasolt `MMIX` gépet bemutató 1/1. résszel („füzettel") [17], az n-esek és permutációk előállítását tárgyaló 4/2. füzettel [18], a kombinációk és felbontások generálási lehetőségeit elemző 4/3. [19] és a fák előállítási algoritmusait, valamint a kombinatorikus előállítások történetét összefoglaló 4/4. résszel [20].

A könyv egyes elemeinek számozását tekintve követjük az angol szöveget. Ezért az 1. kötet 1. része az 1.3´. alfejezettel kezdődik, és a 4/2., 4/3. és 4/4. részek a hetedik fejezet bizonyos alpontjait tartalmazzák. Ebben a 4/3. füzetben az első táblázat sorszáma 7.8., az első ábra sorszáma pedig 7.46., mivel D. E. Knuth feltételezi, hogy a már megjelent 4/0. és 4/2., valamint a várhatóan 2009. márciusában megjelenő 4/1. részben összesen 7 számozott táblázat és 45 számozott ábra lesz.

Általában mind a tartalmi, mind a formai megoldásoknál igyekeztünk az eredeti mű betűjét és szellemét követni. Például a képletek, gyakorlatok és megoldások sorszámai minden pontban (ebben a füzetben a 7.2.1.3. pontban) 1-gyel kezdődnek. A pontokon belüli hivatkozásoknál csak ezeket az egyszerű sorszámokat használjuk, míg az adott ponton kívülre történő hivatkozásoknál a sorszámok a megfelelő könyvrész azonosítójával kezdődnek.

A gyakorlatok sorszámát szögletes zárójelbe tett számok követik, amelyek a megoldáshoz szükséges gondolkodási idő hosszaként is értelmezhetők. [00] azonnal megválaszolható kérdést jelez. [10] azt mutatja, hogy át kell gondolnia az éppen elolvasott részt, de semmi különös nehézséget nem okoz a megoldás, legfeljebb egy percre lesz szüksége. Papír és ceruza hasznos lehet a megoldás előállításához. [20] azt jelzi, hogy a gyakorlat teszteli, alaposan megértette-e az anyagot. A teljes megoldáshoz 15–20 percre is szüksége lehet. [30] közepes nehézségű gyakorlatot jelez. Ezek megoldása akár két óránál is többet igényelhet. Végül [50] olyan kutatási feladatokat jelez, amelyek megoldását a könyv szerzője sem ismeri. Ha ilyeneket sikerül megoldania, publikálja a megoldást és arról tájékoztassa a könyv szerzőjét.

A gondolkodási időt jellemző számok előtt esetenként M vagy F betű áll: előbbi matematikai, utóbbi felsőbb matematikai ismeretek szükségességét jelzi. A gyakorlatok sorszáma előtti sötét háromszög (▶) pedig azt mutatja, hogy az anyag feldolgozásához ajánlott az adott gyakorlat megoldása.

Az eredeti szöveg tartalmi és formai megoldásaitól csak ott tértünk el, ahol korábban megjelent szakkönyveink stílusához igazodtunk:

- Minden füzethez irodalomjegyzéket készítettünk. Az irodalomjegyzék elektronikus változatában – a folyóiratok és kiadók internetes címei mellett – igyekeztünk megadni a szerzők honlapjának a címét is. Ha nem találtunk ilyen honlapot (például azért, mert az adott szerző már nem él), akkor adatokat tartalmazó egyéb honlapok – például a *Wikipédia* vagy a *University of St Andrews* matematikai oldala – címét adtuk meg. A szövegben az irodalmi hivatkozásokat szögletes zárójelek jelzik.
- Az eredeti indexet névmutatóra és tárgymutatóra bontottuk – és az új tárgymutató egyben az adott füzet szóanyagához magyar–angol szótárként is használható.

- Az adott füzet és az ajánlott magyar szakirodalomban szereplő művek alkotóinak neve külön névmutatóban szerepel.
- A szöveghez szorosan kapcsolódó megjegyzéseket kerek, a lazán kapcsolódó megjegyzéseket pedig kapcsos zárójelek közé tettük.

Az új részek a könyv végén vannak.

A kombinatorikai bevezetést tartalmazó 7.0. alfejezetet XY, , a logikai alapokat tartalmazó 7.1.1. pontot KP,, a Boole-függvények értékelését tartalmazó 7.1.2. alpontot pedig FJ és RZ fordította magyarra. A könyv szakmai lektorálását Kása Zoltán és Pásztorné Varga Katalin, nyelvi lektorálását pedig Biró Gabriella és Selyem Zoltán végezte.

Az eredeti angol nyelvű könyv kézirata TeX-ben készült, a magyar változaté pedig LaTeX-ben. A felmerült LaTeX-problémákat Belényesi Viktor és Csörnyei Zoltán oldották meg. Az ábrákat Locher Kornél készítette. Az egzotikus szerzőnevek megjelenítése Mayer Gyula érdeme. Az irodalomjegyzék élő hivatkozásait Iványi Anna készítette. A borítót Hodosi Mária tervezte.

MUnkánkat megkönnyítette, hogy sok segítséget kaptunk a könyv szerzőjétől: folyamatosan ellátott bennünket a friss forrásfájlokkal és hibalistákkal, valamint részletesen válaszolt kérdéseinkre és javaslatainkra.

A későbbiekben szeretnénk az első kiadás hibáit kijavítani. Ezért kérjük a könyv Olvasóit, hogy javaslataikat, észrevételeiket küldjék el a

tony@compalg.elte.hu

címre – levelükben lehetőleg pontosan megjelölve a hiba előfordulási helyét, és megadva a javasolt új szöveget. A füzetek hibajegyzékét, élő irodalomjegyzékét, tárgymutatóját és kolofonoldalát a

http://compalg.inf.elte.hu/~tony/KedvencKonyvek

címen fogjuk közreadni (az ugrópontokat aláhúzás jelzi).

Olvasóink javaslataikkal, kérdéseikkel megkereshetik a könyv alkotóit is (címük megtalálható a honlapon lévő mintában, a kolofonoldalon).

Az 1/1., 4/2. és 4/3. részek angolul 2005-ben, a 4/4. rész 2006-ban, a 4/0. rész pedig 2008 áprilisában jelent meg. A 4/1. rész megjelenését a szerző és az Addison–Wesley Professional Kiadó is 2009 márciusára tervezi. Magyarul először a 4/2. és 4/4. részek jelentek meg 2008 júliusában. Ezeket 2008 novemberében követi a 4/3., majd decemberben az 1/1. rész. Ha ezt az első hat könyvet valóban olyan nagy érdeklődés kíséri, amint az előzetes felmérésünk alapján várható, akkor az elmúlt évtizedekben bővített és javított formában megjelent első három kötetet is lefordítjuk.

Budapest, 2009. március 16.

Iványi Antal
szerkesztő

Hommage à Bach.

7. KOMBINATORIKAI ELEMZÉS

You shall seeke all day ere you finde them,
& when you have them, they are not worth the search.
– BASSANIO, in *The Merchant of Venice* (1597) [?, 1. felvonás 1. jelenet, 117. sor]

Amid the action and reaction of so dense a swarm of humanity,
every possible combination of events may be expected to take place,
and many a little problem will be presented which may be striking and bizarre.
– SHERLOCK HOLMES, in *The Adventure of the Blue Carbuncle* (1892) [?]

A kombinatorikai algoritmusok területe túl nagy ahhoz, hogy
egyetlen cikkben, vagy akár egyetlen könyvben tárgyalni lehessen.
– ROBERT E. TARJAN (1976) [?, 483. oldal]

While jostling against all manner of people
it has been impressed upon my mind that the successful ones
are those who have a natural faculty for solving puzzles.
Life is full of puzzles, and we are called upon
to solve such as fate throws our way.
– SAM LOYD, JR. (1927) [?]

Ebben a könyvben két témával foglalkozunk: a 7.0. alfejezet a kombinatorikai algoritmusok, a 7.1. alfejezet pedig a Boole-függvények elemzését vezeti be.

7.0. Bevezetés a kombinatorikai algoritmusokhoz

. . . (lásd az 1. gyakorlatot).

$$L_3 = 1; \qquad L_4 = 1 \text{ és még 5 sor} \tag{1}$$

Michaël Krajecki, Jaillet, Bui [?]

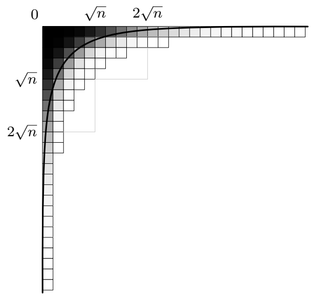
$$\text{ide ábra jön} \tag{2}$$

A (2)-beli elrendezés . . .

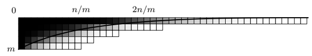
$$2\ 3\ 4\ 2 \ldots \tag{3}$$

$$\{\ldots\} \tag{4}$$

Ortogonális latin négyzetek. Ozanam [?]
Euler [?]



7.1. ábra. DISORDER – HIBÁS ÁBRA.



7.2. ábra. Petersen graph – HIBÁS ÁBRA.

Schumacher [?]
Tarry [?]
Petersen [?]
Wernicke [?]
MacNeish [?]
Bose, Shrikhande és Parker [?, ?]
Paige and Tompkins [?]
Parker [?]

Rejtvények és a valós világ.
Palluel [?]
Skolem és Langford [?]
Groth [?]
Brewster [?]
Knuth [?, 169–183. oldal]
Homérosz [?]
Tolsztoj [?]
Leonardo [?]

Az angol nyelv ötbetűs szavai.
Carroll [?]
Barnard [?]

Szógráfok.
Gardner [?, 6. fejezet]
Cover [?]
Stanley [?]

Gráfelmélet: az alapok.
Petersen [?]

Chvátal [?]

Utak és körök.
Kirkman [?]
Biggs, Lloyd, Wilson [?]
Polignac [?]
Steiner [?]
Heinen [?]

Színezés.
Guthrie [?]
Appel, Haken, Koch [?]
Robertson [?]
Kőnig [?]

Mostantól „irányított gráf" helyett mondjuk azt, hogy „irgráf"
Világos, hogy ez rövid és találó.

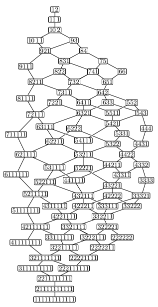
– PÓLYA GYÖRGY (1954) *Levél Frank Hararyhoz* [?]

Irányított gráfok. A 2.3.4.2. alpontban definiáltuk az *irányított gráfok* fogalmát, amelyek nagyon hasonlítanak a gráfokhoz azt leszámítva, hogy élek helyett *irányított élekkel* rendelkeznek. Az $u \to v$ irányított él az u csúcsból a v csúcsba fut, míg egy u—v él azok megkülönböztetése nélkül köti össze az u és v csúcsot . Az irányított gráfok rendelkezhetnek még a csúcsokból önmagukba futó $v \to v$ hurkokkal, továbbá ugyanazon u és v csúcs között több $u \to v$ irányított él is futhat.

Egy n-ed rendű m méretű $D = (V, A)$ irányított gráf formálisan egy n csúcsot tartalmazó V halmazból és egy m rendezett (u, v) párt tartalmazó A multihalmazból áll, ahol $u \in V$ és $v \in V$. A rendezett párokat irányított éleknek nevezzük, és $u \to v$ módon jelöljük, ha $(u, v) \in A$. Az irányított gráfot *egyszerűnek* nevezzük, ha A egyszerű- és nem multihalmaz, azaz ha minden u és v esetén legfeljebb egy $u \to v$ irányított él létezik. Minden (u, v) irányított élnek u a kezdőcsúcsa, v pedig a végcsúcsa, amit az él „hegyének" is nevezünk. Egy v csúcs $d^+(v)$ ***kifoka*** a csúcsból induló irányított élek száma, míg annak $d^-(v)$ ***befoka*** az oda beérkező, v hegyű irányított élek száma. Egy 0 befokú csúcsot „forrásnak" nevezünk; egy 0 kifokú csúcsot pedig „nyelőnek". Vegyük észre, hogy $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v)$, mivel mindkét összeg m-mel, az irányított élek teljes számával egyenlő.

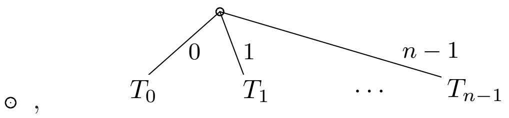
A gráfokhoz definiált fogalmak természetes módon átültethetők irányított gráfokra az „irányított" jelző kitételével, amennyiben szükséges különbséget tenni az élek és irányított élek között. Így például az irányított gráfok irányított részgráfjai lehetnek feszítőek, indukáltak vagy ezek egyike sem. Egy $D = (V, A)$ és $D' = (V', A')$ irányított gráf közötti izomorfizmus egy V-ről V'-re ható kölcsönösen egyértelmű φ leképezés, amelyre a D-beli $u \to v$ irányított élek száma megegyezik a D'-beli $\varphi(u) \to \varphi(v)$ irányított élek számával minden $u, v \in V$ esetén.

Az irányított gráf ábrája egyszerű vonalak helyett nyilakat használ a csúcsok között. A legegyszerűbb és legfontosabb n-ed rendű irányított gráfok a K_n, P_n és C_n gráfok irányított variánsai, vagyis a $\vec{K_n}$ *tranzitív verseny*, a $\vec{P_n}$ *irányított út* és a $\vec{C_n}$ *irányított ciklus*. Ezek



7.3. ábra. Az Agatha Christie által kigondolt 17-ed rendű 18 méretű irányított gráf. (A DIGRAPH – HIBÁS ÁBRA.) JELMAGYARÁZAT: 0 Pierre Michel, a francia kalauz; 1 Hercule Poirot, a belga detektív; 2 Samuel Edward Ratchett, a halott amerikai; 3 Caroline Martha Hubbard, az amerikai matróna; 4 Edward Henry Masterman, a brit komornyik; 5 Antonio Foscarelli, az olasz autókereskedő; 6 Hector MacQueen, az amerikai titkárnő; 7 Harvey Harris, a rejtőzködő angol; 8 Hildegarde Schmidt, a német hölgy szobalánya; 9 (üres); 10 Greta Ohlsson, a svéd ápolónő; 11 Mary Hermione Debenham, az angol nevelőnő; 12 Helena Maria Andrenyi, a gyönyörű grófnő; 13 Rudolph Andrenyi, a magyar gróf; 14 Natalia Dragomiroff, az orosz özvegy hercegnő; 15 Colonel Arbuthnot, a brit hivatalnok Indiából; 16 Cyrus Bettman Hardman, az amerikai detektív

a gráfok vázlatosan a következő ábrákkal rajzolhatók meg az $n = 5$ esetben:



$ROSSZ$ (24)

A J_n *teljes irányított gráf* a legnagyobb n-ed rendű egyszerű irányított gráf. Ennek n^2 számú $u \to v$ éle van, u és v minden lehetséges kiválasztásához egy.

A 7.3. ábra egy valamivel bonyolultabb, 17-ed rendű irányított gráf ábráját mutatja, amelyet „expressz-irányítottnak” is nevezhetünk: ezt az irányított gráfot írja le Hercule Poirot Agatha Christie *Gyilkosság sz Orient expresszen* című regényében [?]. A csúcsok az Isztambul–Calais útvonalon közlekedő kocsi fülkéit jelzik a történetben, egy $u \to v$ irányított él pedig azt, hogy az u fülke lakója megerősíti a v fülke lakójának alibijét. Ebben a példában hat összefüggő komponenst találunk, nevezetesen: $\{0, 1, 3, 6, 8, 12, 13, 14, 15, 16\}$, $\{2\}$, $\{4, 5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$ és $\{10, 11\}$, mivel az irányított gráfbeli összefüggőség az irányított élek egyszerű élnek való tekintésével adódik.

Két irányított él *egymást követő*, ha az első hegye a második kezdőcsúcsa. Egymást követő irányított élek $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sorozatát k hosszúságú *sétának* nevezzük; a séta jelölése a csúcsok, valamint az irányított élek feltüntetésével történik:

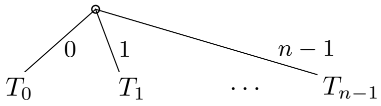
$$v_0 \xrightarrow{a_1} v_1 \xrightarrow{a_2} v_2 \cdots v_{k-1} \xrightarrow{a_k} v_k. \tag{25}$$

Egy egyszerű irányított gráfban elég csupán a csúcsokat megadni; például $1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 8 \longrightarrow 14 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3$ egy séta a 7.3. ábrán. A (25)-ben szereplő séta egy irányított út, ha a $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ csúcsok különbözőek; a séta egy irányított kör, ha a csúcsok a $v_k = v_0$ esettől eltekintve különbözőek.

Egy irányított gráfban a $d(u, v)$ irányított távolság az u-ból v-be vezető legrövidebb *irányított* út irányított éleinek a száma, ami megegyezik az u-ból v-be vezető legrövidebb séta hosszával. Ez eltérhet a $d(v,u)$ értékétől, de a (**??**)-beli háromszög-egyenlőtlenség érvényben marad.

Minden gráf felfogható irányított gráfként, mivel egy u—v él lényegében ekvivalens az $u \to v$ és $v \to u$ irányított élpárral. Az így előálló irányított gráf rendelkezik az eredeti gráf minden tulajdonságával; például a gráf minden csúcsának foka az irányított gráf csúcsának kifoka és egyben befoka is lesz. Megmaradnak továbbá a távolságértékek is.

Egy (V,E) *multigráf* hasonló egy gráfhoz attól eltekintve, hogy az E élhalmaz $\{u,v\}$ párok tetszőleges *multihalmaza* lehet; meg vannak engedve csúcsokból önmagukba futó v—v hurokélek is, amelyek $\{v,v\}$ „multipároknak” felelnek meg. Például



ROSSZ ABRA (26)

egy 3-ad rendű 6 éllel rendelkező multigráf: $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2,3\}$, $\{3,3\}$ és $\{3,3\}$. A példában szereplő csúcsok fokai $d(1) = d(2) = 3$ és $d(3) = 6$, mivel minden hurok 2-vel járul az adott csúcs fokához. Egy v—v hurokél *két* irányított $v \to v$ hurokélre bomlik, ha egy multigráfot irányított gráfnak tekintünk.

Gráfok és irányított gráfok ábrázolása. Minden irányított gráf, így a gráf és multigráf is teljes mértékben leírható az $A = (a_{uv})$ *szomszédsági mátrixával*, melynek n sora és n oszlopa van n csúcs esetén. A mátrix a_{uv} eleme az u-ból v-be vezető irányított élek számát adja meg. Így például a $K_3^{\to}$, $P_3^{\to}$, $C_3^{\to}$, J_3 és () szomszédsági mátrixai rendre

$$K_3^{\to} = \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}, \quad P_3^{\to} = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}, \quad C_3^{\to} = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 111 \\ 111 \\ 111 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 210 \\ 102 \\ 024 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

A mátrixelmélet hatékony matematikai eszközei lehetővé teszik számos nem triviális gráfelméleti eredmény bizonyítását a szomszédsági mátrixok vizsgálatának segítségével; a **??**. gyakorlat egy különösen frappáns példát mutat erre. Ennek egyik fő magyarázata, hogy a mátrixszorzásnak egy egyszerű interpretációja létezik az irányított gráfok elméletében. Tekintsük az A mátrix második hatványát, melynek u. sorában és v. oszlopában álló eleme definíció szerint

$$(A^2)_{uv} \;=\; \sum_{w \in V} a_{uw} a_{wv}\,. \tag{28}$$

Mivel a_{uw} az u-ból v-be futó élek száma, látható, hogy $a_{uw}a_{wv}$ az $u \to w \to v$ alakú séták száma. Vagyis $(A^2)_{uv}$ az u-ból v-be vezető, 2 hosszúságú összes séta száma. Hasonlóan, A^k elemei megadják az összes k hosszúságú séta számát csúcsok bármely rendezett párjai között minden $k \ge 0$ esetén. Például a (27)-ben szereplő A mátrixra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 20 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 12 \\ 9 & 18 & 42 \\ 12 & 42 & 96 \end{pmatrix}; \tag{29}$$

12 darab 3 hosszúságú séta vezet a multigráf 1. csúcsából a 3. csúcsába, valamint 18 séta a 2. csúcsból önmagába.

A csúcsok átrendezése az A szomszédsági mátrixot $P^{-}AP$-re módosítja, ahol P egy permutációs mátrix (egy 0–1 mátrix, melynek minden sorában és oszlopában pontosan egy

1-es áll), $P^{-} = P^{T}$ pedig az inverz permutáció mátrixa. Azaz

$$\begin{pmatrix}210\\102\\024\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}201\\042\\120\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}012\\120\\204\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}021\\240\\102\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}402\\021\\210\end{pmatrix}\quad \text{és}\quad \begin{pmatrix}420\\201\\012\end{pmatrix} \tag{30}$$

mindegyike a () szomszédsági mátrixai, továbbiak pedig nincsenek.

Több, mint $2^{n(n-1)/2}/n!$ darab n-ed rendű gráf létezik, ha $n > 1$, és ezek majdnem mindegyike esetén $\Omega(n^2)$ adatbitre van szükség a a leggazdaságosabb kódoláshoz. Ennek értelmében, az összes lehetséges gráf döntő többségénél a számítógépen való reprezentációjukhoz – a memóriaigényt tekintve – azok szomszédsági mátrixait célszerű használni.

A gyakorlati problémák során felmerülő gráfok azonban merőben eltérhetnek az összes lehetséges gráf közül véletlenszerűen kiválasztottaktól. Egy valós probléma gráfja általában „ritka”, vagyis $\Omega(n^2)$helyett csak $O(n \lg n)$ élt tartalmaz, kivéve ha n kicsi, mivel $\Omega(n^2)$ bitnyi adatot nehéz generálni. Tegyük fel például, hogy a csúcsok embereket, míg az élek barátságokat jelölnek. 5 milliárd embert tekintve keveseknek lesz 10000-nél több barátja. De még ha mindenkinek átlagosan 10000 barátja lenne is, a gráfnak csak 2.5×10^{13} éle lenne, miközben majdnem minden 5 milliárd csúcsú gráfnak körülbelül 6.25×10^{18} éle van.

Vagyis egy gráf számítógépen való reprezentációjának legjobb módja általában eltér az n^2 darab a_{uv} érték szomszédsági mátrixelemként való tárolásától. Helyette, a Stanford GraphBase algoritmusok olyan adatstruktúrával lettek kifejlesztve, amely a 2.2.6. pontban tárgyalt ritka mátrixok láncolt reprezentációjával rokon, bár annál valamivel egyszerűbb. Ez a megközelítés nem csak sokoldalúnak és hatékonynak, hanem könnyen felhasználhatónak is bizonyult.

Egy irányított gráf SGB reprezentációja egy soros és egy láncolt foglalás kombinálása csomópontok két alaposztályának felhasználásával. Egyes csomópontok csúcsokat, mások éleket reprezentálnak. (Létezik egy harmadik típusú csomópont is, ami a teljes gráfot reprezentálja olyan algoritmusok számára, amelyek egyszerre több gráffal dolgoznak. Minden gráfhoz azonban csak egy gráf csomópontra van szükség, így a csúcs és él csomópontok vannak túlsúlyban.)

A működési elv a következő: minden n-ed rendű és m méretű SGB irányított gráf n csúcs csomópont egy soros tömbjére épül, egyszerűvé téve így a k. csúcs elérését, ahol $0 \le k < n$. Ezzel szemben, az m irányított él csomópont egy általános, alapvetően strukturálatlan memóriaterületen keresztül kapcsolódik egymáshoz. Minden csúcs csomópont tipikusan 32 bájtot foglal és minden irányított él csomópont 20 bájtot (a gráf csomópont pedig 220 bájtot); de a csomópontok mérete egyszerűen módosítható. A csomópontok néhány mezőjének rögzített, egyértelmű jelentése van minden esetben; a kimaradó mezők különböző célokra használhatóak a különböző algoritmusokban vagy egy adott algoritmus különböző fázisaiban. Egy csomópont rögzített célú részeit „szabványos mezőknek”, a többcélú mezőit pedig „segédmezőknek” nevezzük.

Minden csúcs csomópontnak van egy `NÉV` és egy `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK` nevű szabványos mezője. Ha v egy csúcs csomópontra mutató változó, *csúcs változónak* nevezzük. Ekkor a NÉV(v) egy olyan karakterfüzérre mutat, ami a megfelelő csúcsokat emberi szemlélet szerint azonosítja; például a (**??**) gráf 49 csúcsa a CA, WA, OR, ..., RI nevekkel van ellátva. A másik szabványos mező, az `IRÁNYÍTOTT-ÉLEK`, sokkal fontosabb az algoritmusokban: egy irányított él csomópontra mutat, ami egy olyan $d^{+}(v)$ hosszúságú egyszerű láncolt lista első eleme, ahol a v csúcsból kiinduló minden irányított élhez egy csomópont tartozik.

Minden irányított él csomópontnak van egy `HEGY` és egy `KÖVETKEZŐ` nevű szabványos mezője; egy irányított él csomópontra mutató a változót *irányított él változónak* nevezünk. A $\texttt{HEGY}(a)$ az a irányított él hegyét reprezentáló csúcs csomópontra mutat; a $\texttt{KÖVETKEZŐ}(a)$ arra az irányított él csomópontra mutat, amely a következő irányított él csomópontot reprezentálja, melynek kezdőcsúcsa az a-éval megegyezik.

Egy 0 kifokú v csúcs az $\texttt{IRÁNYÍTOTT-ÉLEK}(v)$= Λ (az üres mutató) módon reprezentálható. Más esetben, ha például a kifok 3, az adatstruktúra három irányított él csomópontot tartalmaz, ahol $\texttt{IRÁNYÍTOTT-ÉLEK}(v)=a_1$, $\texttt{KÖVETKEZŐ}(a_1)=a_2$, $\texttt{KÖVETKEZŐ}(a_2)=a_3$, és $\texttt{KÖVETKEZŐ}(a_3)=\Lambda$; és a három irányított él v-ből $\texttt{HEGY}(a_1)$, $\texttt{HEGY}(a_2)$, $\texttt{HEGY}(a_3)$-ba vezet.

Tegyük fel például, hogy ki akarjuk számolni a v csúcs kifokát, és letárolni azt egy KIFOK nevű segédmezőben. Ez könnyű:

$$\begin{array}{l} \text{Legyen } a \leftarrow \texttt{IRÁNYÍTOTT-ÉLEK}(v) \text{ és } d \leftarrow 0\,. \\ \text{Mialatt } a \neq \Lambda, \text{ legyen } d \leftarrow d+1 \text{ és } a \leftarrow \texttt{KÖVETKEZŐ}(a)\,. \\ \text{Legyen } \texttt{KIFOK}(v) \leftarrow d\,. \end{array} \tag{31}$$

Ha egy gráfot vagy multigráfot a fent tárgyalt módon irányított gráfnak tekintünk, annak minden u—v éle két, $u \to v$ és $v \to u$ éllel ekvivalens. Ezeket az irányított éleket „társaknak” nevezzük; két irányított él csomópontot, például az a-t és a'-t tartalmazzák, ahol az a az u-ból induló irányított élek, míg az a' a v-ből induló irányított élek listáján szerepel. Ekkor $\texttt{HEGY}(a) = v$ és $\texttt{HEGY}(a') = u$. Használjuk a

$$\texttt{TÁRSTÁRS}(a) = a' \qquad \text{és} \qquad \texttt{TÁRS}(a') = a\,, \tag{32}$$

jelölést is olyan algoritmusokban, amelyek gyorsan át akarnak lépni egyik listáról a másikra. Általában nem szükséges azonban tárolnunk egy explicit mutatót egy irányított élről annak társára, illetve egy TÁRS segédmezőt használnunk minden irányított él csomóponton belül, mivel egy okosan megtervezett adatstruktúra esetén a szükséges kapcsolat *implicit* módon is levezethető.

Az implicit társ trükkje a következőképpen működik: egy nem irányított gráf vagy multigráf $u - v$ éleinek létrehozásakor *egymást követő* irányított él csomópontokat vezetünk be $u \to v$-re és $v \to u$-ra. Ha például minden irányított él csomópont 20 bájton van tárolva, akkor minden új párra 40 egymást követő bájtot foglalunk le. Az első bájt memóriacímét 8 többszöröseként állítsuk be. Ha ekkor az a irányított él csomópont az α memóriacímen található, akkor a társának a címe

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha + 20, & \text{ha } \alpha \mod 8 = 0 \\ \alpha - 20, & \text{ha } \alpha \mod 8 = 4 \end{array} \right\} \;=\; \alpha - 20 + \bigl(40 \;\&\; ((\alpha \;\&\; 4) - 1)\bigr)\,. \tag{33}$$

Az ilyen trükkök nagyon hasznosak olyan kombinatorikus problémákban, ahol műveletek trillióit kell végrehajtani, mivel ilyenkor a műveletenkénti 3,6 nanomásodpercnyi megtakarítással a teljes számítás egy órával korábban véget ér. A (33) összefüggés azonban közvetlenül nem „vihető át” az egyik implementációról a másikra. Ha például egy irányított gráf csomópont mérete 20-ról 24-re változik, akkor a (33)-beli 40, 20, 8 és 4 értékeket 48, 24, 16 és 8-ra kell módosítanunk.

A könyv algoritmusai nem tételeznek fel semmit a csomópontok méretéről. Ehelyett a C programnyelv és annak leszármazottjai konvencióit tekintjük, vagyis ha a egy irányított él csomópontra mutat, akkor ‘$a + 1$’ a memóriában ezt követő irányított él csomópontra vonatkozó mutatót jelöli. Általában

$$\texttt{HELY}(\texttt{CSOMÓPONT}(a + k)) \;=\; \texttt{HELY}(\texttt{CSOMÓPONT}(a)) + kc\,, \tag{34}$$

ha minden irányított él csomópontban c bájt van. Hasonlóan, ha v egy csúcs változó, '$v+k$' jelöli a v-t követő k. csúcs csomópontot; a csomópont tényleges memóriacíme v plusz k-szor egy csúcs csomópont mérete lesz.

Egy g gráf csomópont szabványos mezői tartalmazzák az irányított élek $\mathtt{M}(g)$ teljes számát; a csúcsok $\mathtt{N}(g)$ teljes számát; a csúcs csomópontok soros listájának első csúcs csomópontjára mutató $\mathtt{CSÚCSOK}(g)$ mutatót; a gráf $\mathtt{ID}(g)$ azonosítóját, ami például egy $\mathtt{szavak}$(5757,0,0,0) alakú karakterfüzér; továbbá bizonyos egyéb mezőket a memória lefoglalásához és újrahasznosításához a gráf növekedésekor vagy zsugorodásakor, vagy egy gráf külső formátumba való exportálásához, ami lehetővé teszi a hozzáférést más felhasználók és gráfkezelő rendszerek számára. Ezekre a gráf csomópont mezőkre azonban ritkán kell majd hivatkoznunk, és itt nem lesz szükség az SGB formátum egy teljes leírásának megadására sem, mivel a fejezet majdnem minden gráfalgoritmusát a magyar nyelv egy meglehetősen absztrakt szintjén fogjuk leírni, ahelyett, hogy lehatolnánk a számítógépes programok bitszintű nyelvezetéhez.

Egy egyszerű gráfalgoritmus. Egy később megjelenő közepes-/magasszintű algoritmus szemléltetéseképpen alakítsuk át a B tétel bizonyítását egy lépésről lépésre haladó eljárássá, ami két színnel színezi egy adott gráf csúcsait, amennyiben az illető gráf páros.

B algoritmus (*párosság tesztelése*). Egy SGB alakkal reprezentált gráf esetén vagy egy 2-színezést készít, ahol $\mathtt{SZÍN}(v) \in \{0,1\}$ minden v csúcsra, vagy sikertelenül befejeződik, amennyiben nem lehetséges érvényes 2-színezés. Itt a $\mathtt{SZÍN}$ egy segédmező minden csúcs csomópontban. Egy másik, a $\mathtt{LÁNC}(v)$ csúcs segédmező egy csúcs mutató az összes olyan színezett csúcs egy vermének kezelésére, amelyek szomszédait még nem vizsgáltuk meg. Ennek a veremnek a tetejére egy s csúcs változó mutat. Az algoritmus használja még az u, v, w változókat a csúcsokra, illetve az a-t az irányított élekre. A csúcs csomópontokról feltehető, hogy $v_0 + k$ minden $0 \le k < n$ esetén.

B algoritmus (*párosság tesztelése*).

B1. (Kezdőértékek beállítása.) Legyen $\mathtt{SZÍN}(v_0 + k) \leftarrow -1$ minden $0 \le k < n$-re. (Most az összes csúcs színezetlen.) Legyen $w \leftarrow v_0 + n$.

B2. (Kész?) (Ezen a ponton minden $\ge w$ csúcs már színezett, így az összes színezett csúcs szomszédja is.) Szakítsuk meg sikeresen az algoritmust, ha $w = v_0$. Egyébként legyen $w \leftarrow w - 1$, a következő alacsonyabb indexű csúcs csomópont.

B3. (w színezése, ha szükséges.) Ha $\mathtt{SZÍN}(w) \ge 0$, lépjünk vissza a B2-re. Egyébként legyen $\mathtt{SZÍN}(w) \leftarrow 0$, $\mathtt{LÁNC}(w) \leftarrow \Lambda$ és $s \leftarrow w$.

B4. (Verem $\Rightarrow u$.) Legyen $u \leftarrow s$, $s \leftarrow \mathtt{LÁNC}(s)$, $a \leftarrow \mathtt{IRÁNYÍTOTT\text{-}ÉL}(u)$. (Megvizsgáljuk a színezett u csúcs minden szomszédját.)

B5. (u kész?) Ha $a = \Lambda$, lépjünk a B8-ra. Egyébként legyen $v \leftarrow \mathtt{HEGY}(a)$.

B6. (v feldolgozása.) Ha $\mathtt{SZÍN}(v) < 0$, legyen $\mathtt{SZÍN}(\mathrm{v}) \leftarrow 1 - \mathtt{SZÍN}(u)$, $\mathtt{LÁNC}(v) \leftarrow s$, és $s \leftarrow v$. Egyébként, ha $\mathtt{SZÍN}(v) = \mathtt{SZÍN}(u)$, fejezzük be sikertelenül az algoritmust.

B7. (Ciklus a-ra.) Legyen $a \leftarrow \mathtt{KÖVETKEZŐ}(a)$, és lépjünk vissza B5-re.

B8. (A verem nem üres?) Ha $s \ne \Lambda$, lépjünk vissza B4-re. Egyébként lépjünk B2-re. ■

Ez az algoritmus egy variánsa a „mélységi bejárás" nevű általános gráfbejáró algoritmusnak, amelyet majd a 7.4.1. pontban tárgyalunk részletesen. Ennek m irányított él és n csúcs esetén a futási ideje $O(m + n)$ (lásd a 70. gyakorlatot); vagyis jól alkalmazható a szokásos ritka gráfok esetére. Kisebb módosításokkal sikertelen befejeződés esetén egy páratlan hosszúságú kört is létrehozhatunk kimenetként, ezzel bizonyítva a 2-színezés lehetetlenségét (lásd a 72. gyakorlatot).

Példák gráfokra. A Stanford GraphBase több, mint három tucat generáló eljárás egy könyvárát tartalmazza, amelynek segítségével gráfok és irányított gráfok számos variánsa elkészíthető kísérleti céllal. A *szavakról* már beszéltünk; tekintsünk át most néhány további elemet a lehetőségek megismerésének céljából.

• *roget*$(1022, 0, 0, 0)$ egy irányított gráf 1022 csúccsal és 5075 irányított éllel. A csúcsok szavak és fogalmak kategóriáit reprezentálják, amelyeket Roget [?] vezetett be híres XIX. századbeli művében. Az irányított élek a kategóriák közötti könyvben fellelhető kereszthivatkozások. Tipikus irányított élek például: `water (víz)` → `moisture (nedvesség)`, `discovery (felfedezés)` → `truth (igazság)`, `preparation (előkészítés)` → `learning (tanulás)`, `vulgarity (közönségesség)` → `ugliness (rútság)`, `wit (szellemesség)` → `amusement (szórakozás)`.

• *könyv*(`"jean"`$, 80, 0, 1, 356, 0, 0, 0)$ egy gráf 80 csúccsal és 254 éllel. A csúcsok Victor Hugo [?] *Nyomorultak* című regényének szereplőit reprezentálják; az élek azokat a szereplőket kötik össze, akik találkoznak egymással. Tipikus élek: `Fantine`—`Javert`, `Cosette`—`Thénardier`.

• *páros_könyv*(`"jean"`$, 80, 0, 1, 356, 0, 0, 0)$ egy páros gráf $80 + 356$ csúccsal és 727 éllel. A csúcsok a *Nyomorultak* szereplőit vagy fejezeteit reprezentálják; az élek a szereplőket azokkal a fejezetekkel kötik össze, amelyekben megjelennek (például `Napoleon`—`2.1.8`, `Marius`—`4.14.4`).

• *sík_mérföldek*$(128, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ egy síkgráf 129 csúccsal és 381 éllel. A csúcsok az Egyesült Államok és Kanada 128 városát reprezentálják, plusz egy speciális `INF` csúcsot a „végtelen távoli pont” csúcshoz. Az élek a városok úgy nevezett *Delaunay felbontását* definiálják a síkon a szélességi és hosszúsági koordináták alapján; ez azt jelenti, hogy u—v pontosan akkor, ha az u-n és v-n áthaladó legkisebb kör belseje nem tartalmaz más csúcsot. További élek futnak az `INF` és minden olyan csúcs között, amelyek az összes város helyének konvex burkán helyezkednek el. Tipikus élek: `Seattle, WA`—`Vancouver, BC`—`INF`; `Toronto, ON`—`Rochester, NY`.

• *sík_lisa*$(360, 250, 15, 0, 360, 0, 250, 0, 0, 2295000)$ egy síkgráf 3027 csúccsal és 5967 éllel. Ez a gráf Leonardo da Vinci [?] *Mona Lisa* című festményének digitalizált képével kapható meg, amelynek 360 sora és 250 oszlopa van, továbbá a képpontok intenzitásaihoz a szürke 16 árnyalatát használjuk 0 (fekete) és 15 (fehér) között. Az eredményül kapott 3027 vízszintesen/függőlegesen összefüggő konstans intenzitású tartomány szomszédosnak tekintendő, ha van közös határpontjuk. (Lásd a 4.7. ábrát.)

• *páros_lisa*$(360, 250, 0, 360, 0, 250, 8192, 0)$ egy páros gráf $360 + 250 = 610$ csúccsal és 40923 éllel. Ez szintén Leonardo híres festményéből származtatható, ezúttal azokat a sorokat és oszlopokat összekötve, amelyekben az intenzitás legalább $1/8$. Ilyen például a közvetlenül Lisa „mosolyának” közepén megjelenő `r102`—`c113` él.

• *raman*$(31, 23, 3, 1)$ egy, az előző példákban szereplő SGB gráfoktól eltérő típusú gráf. A nyelvhez, irodalomhoz vagy az emberi kultúra más eleméhez való kötődés helyett, ez egy úgy nevezett „Ramanujan kiterjesztő gráf”, ami szigorú matematikai elveken alapul. Mind a $(23^3 - 23)/2 = 6072$ csúcsa 32 fokszámú; azaz 97152 éle van. A csúcsok olyan 2×2-es mátrixok ekvivalenciaosztályaira vonatkoznak, amelyek nem szingulárisak modulo 23; egy tipikus él a `(2,7;1,1)`—`(4,6;1,3)`. A Ramanujan-gráfok főleg azért fontosak, mivel

7.4. ábra. A *Mona Lisa* egy digitális változata és annak egy kinagyított részlete (messzebbről nézve jobban látható).

szokatlanul nagy kerületük és kis átmérőjük van a méretükhöz és fokszámukhoz képest. A példagráfnak 4 a kerülete és 4 az átmérője.

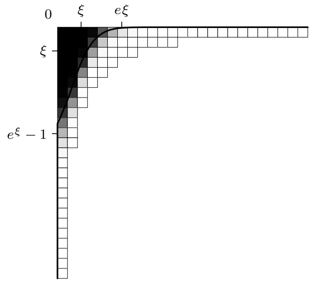
• *raman*$(5, 37, 4, 1)$, hasonlóan az előzőhöz, egy 6-od fokú reguláris gráf 50616 csúccsal és 151848 éllel. A kerülete 10, az átmérője 10 és szintén páros gráf.

• *véletlen_gráf*$(1000, 5000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, s)$ egy gráf 1000 csúccsal, 5000 éllel és s maggal. Ennek „megalkotása" élek nélkül kezdődik, miután ismétlődően pszeudo-véletlen csúcsindexeket választunk $0 \leq u, v < 1000$ szerint, és felvesszük az $u - v$ élt, hacsak $u = v$ nem teljesül, vagy az él már jelen van. Ha $s = 0$, akkor a 908-as izolált csúcs kivételével minden csúcs egy 999-ed rendű óriás komponenshez tartozik.

• *véletlen_gráf*$(1000, 5000, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ egy hasonló módon kialakuló irányított gráf 1000 csúccsal és 5000 irányított éllel. (Valójában minden irányított éle egyúttal a *véletlen_gráf*$(1000, 5000, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ gráfnak is része.)

• *részhalmazok*$(5, 1, -10, 0, 0, 0, \texttt{\#1}, 0)$ egy gráf $\binom{11}{5} = 462$ csúccsal, a $\{0, 1, \ldots, 10\}$ minden öt elemű részhalmazához eggyel. Két csúcs szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak; vagyis, a gráf reguláris 6-odfokú 1386 éllel. Felfoghatjuk úgy is, mint a Petersen-gráf egy általánosítását, amelynek SGB neve *részhalmazok*$(2, 1, -4, 0, 0, 0, \texttt{\#1}, 0)$.

• *részhalmazok*$(5, 1, -10, 0, 0, 0, \texttt{\#10}, 0)$ gráfnak ugyanaz a 462 csúcsa van, de ezek most akkor szomszédosak, ha a megfelelő részhalmazoknak négy közös eleme van. Ez egy reguláris 30-ad fokú gráf 6930 éllel.



7.5. ábra. SAMPLES – HIBÁS ÁBRA. *tábla*$(6,9,0,0,5,0,0)$; (Huszárlépések egy 6×9-es sakktáblán); *szimplex*$(10,8,7,6,0,0,0)$; (Egy csonkolt háromszögháló).

• *részek*$(30,10,30,0)$ egy másik matematikai alapú gráf. 3590 csúcsa van, minden 30 elem legfeljebb 10 osztályba való felosztásához egy. Két felosztás szomszédos, ha az egyik a másik egy részének továbbosztásából származik; ez a szabály 31377 élt definiál. A *részek*$(30,10,30,1)$ irányított gráf hasonló, de ennek 31377, a rövidebb felosztásoktól a hosszabbak felé mutató irányított éle van (például `13+7+7+3` $\to$ `7+7+7+6+3`).

• *szimplex*$(10,10,10,10,10,0,0)$ egy gráf 286 csúccsal és 1320 éllel. A csúcsai az $x_1+x_2+x_3+x_4=10$ $(x_i\geq 0)$ egyenlet egész megoldásai, azaz a „10 négy nemnegatív egész összegére bontása”; a csúcsok egy tetraéder belsejébe eső pontok baricentrikus koordinátáinak is tekinthetők. Az élek, mint például a `3,1,4,2` $-$ `3,0,4,3`, az egymáshoz lehető legközelebb eső felosztásokat kötik össze.

• *tábla*$(8,8,0,0,5,0,0)$, illetve *tábla*$(8,8,0,0,-2,0,0)$ olyan 64 csúcsú gráfok, amelyek 168, illetve 280 élei a sakkjáték huszárjának, illetve futójának lehetséges lépéseihez tartoznak.

Az SGB gráfgenerátorok paramétereinek variálásával tömérdek további példa nyerhető. A 7.5. ábra például a *tábla* és a *szimplex* két egyszerű variánsát mutatja; a *tábla* valamelyest rejtett szabályait a 75. gyakorlat tárja fel.

Gráfalgebra. Új gráfokat műveletek már meglévő gráfokon való végrehajtásával is nyerhetünk. Ha például $G=(V,E)$ egy tetszőleges gráf, annak $\overline{G}=(V,\overline{E})$ *komplementere* az

$$u\!-\!\!-\!v \text{ a } \overline{G}\text{-ben} \qquad\iff\qquad u\neq v \text{ a } u\not\!-\!\!-\!v\ G\text{-ben} \tag{35}$$

módon nyerhető. Vagyis a nem-élek élekké válnak, és fordítva. Vegyük észre, hogy $\overline{\overline{G}}=G$, és a $\overline{K_n}$ gráfnak nincsenek élei. A kapcsolódó A és $\overline{A}$ szomszédsági mátrixokra

$$A+\overline{A}=J-I \tag{36}$$

teljesül, ahol J a csupa 1-esekből álló mátrix, I az egységmátrix, vagyis J, illetve $J-I$ a J_n, illetve K_n szomszédsági mátrixai n-ed rendű G esetén.

Továbbá, minden $G=(V,E)$ gráf egy $L(G)$ *vonalgráfhoz* vezet, amelynek csúcsai az E élek; két él szomszédos $L(G)$-ben, ha van közös csúcsuk. Így például az $L(K_n)$ vonalgráfnak $\binom{n}{2}$ csúcsa van, és reguláris $2n-4$-ed fokú, ha $n\geq 2$ (lásd a 82. gyakorlatot). Egy gráf *k-él-színezhető*, ha a vonalgráfja k-színezhető.

Adott $G = (U, E)$ és $H = (V, F)$ gráf esetén azok $G \cup H$ *uniója* az az $(U \cup V, E \cup F)$ gráf, amelyet a csúcsok és élek egyesítésével kapunk. Tegyük fel például, hogy a G, illetve a H gráf a sakkjáték bástya-, illetve futólépésének megfelelő gráf; ekkor $G \cup H$ a vezérlépésnek megfelelő gráf, amelynek hivatalos SGB neve

$$\textit{gunió}(\textit{tábla}(8,8,0,0,-1,0,0), \textit{tábla}(8,8,0,0,-2,0,0),0,0)\,. \tag{37}$$

Abban a speciális esetben, amikor a csúcsok U és V halmazai diszjunktak, a $G \cup H$ unió nem követeli meg a csúcsok bármilyen szokásos keresszthivatkozásán keresztüli azonosítását; a $G \cup H$ ábráját egyszerűen megkaphatjuk a G, majd a H ábrájának megrajzolásával. Ezt a speciális esetet „határosságnak” vagy a G és a H *direkt összegének* nevezzük, és $G \oplus H$-val fogjuk jelölni. Könnyen látható például, hogy

$$K_m \oplus K_n \cong \overline{K_{m,n}}\,, \tag{38}$$

és hogy minden gráf az összefüggő komponenseinek direkt összege.

A (**??**) egyenlet speciális esete a

$$K_{n_1} \oplus K_{n_2} \oplus \cdots \oplus K_{n_k} \cong \overline{K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}} \tag{39}$$

összefüggésnek, ami teljes k-paritású gráfokra teljesül, ha $k \geq 2$. (39) viszont $k = 1$-re egy botrányos tény miatt nem áll fenn: a teljes gráfok szabványos gráfelméleti jelölése nem konzisztens. Valóban, $K_{m,n}$ egy teljes 2-paritású gráfot jelöl, viszont K_n *nem* jelöl egy teljes 1 paritású gráfot. A gráfelméleti szakemberek valahogyan már évtizedek óta együtt tudnak élni ezzel az anomáliával anélkül, hogy belebolondulnának.

A G és H diszjunkt gráfok kombinálásának egy másik fontos módja azok $G — H$ *egyesítésének* elkészítése, ami $G \oplus H$-ból valamint az összes $u - v$ élből áll, ahol $u \in U$ és $v \in V$ lásd Zykov cikkét [**?**]. Továbbá, ha G és H diszjunkt *irányított gráfok*, a $G \to H$ *irányított egyesítésük* hasonló, ami azonban a $G \oplus H$-t csak az U-ból V-be tartó $u \to v$ egyirányú élekkel egészíti ki.

Az A és B mátrix direkt összege a B halmaz A halmaztól átlósan jobbra és le való elhelyezésével készíthető el:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, \tag{40}$$

ahol a példában minden O a csupa nullából álló halmazt jelöli, amelynek az adott helyen megkövetelt számú sora és oszlopa van. Egyszerű megjegyezni a gráfok direkt összegére használt $G \oplus H$ jelölést, mivel a $G \oplus H$ szomszédsági mátrixa pontosan megegyezik a G, illetve H gráf A, illetve B szomszédsági mátrixának direkt összegével. Hasonlóan, a $G — H$, $G \to H$ és $G \leftarrow H$ szomszédsági mátrixai rendre

$$A — B = \begin{pmatrix} A & J \\ J & B \end{pmatrix}, \qquad A \to B = \begin{pmatrix} A & J \\ O & B \end{pmatrix}, \qquad A \leftarrow B = \begin{pmatrix} A & O \\ J & B \end{pmatrix}, \tag{41}$$

ahol a J (36)-hoz hasonlóan csupa 1-esekből álló mátrix. Ezek a műveletek asszociatívak, és kapcsolódnak a komplementerképzéshez:

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C, \qquad A — (B — C) = (A — B) — C; \tag{42}$$

$$A \to (B \to C) = (A \to B) \to C, \qquad A \leftarrow (B \leftarrow C) = (A \leftarrow B) \leftarrow C; \tag{43}$$

$$\overline{A \oplus B} = \overline{A} — \overline{B}, \qquad \overline{A — B} = \overline{A} \oplus \overline{B}; \tag{44}$$

$$\overline{A \to B} = \overline{A} \leftarrow \overline{B}, \qquad \overline{A \leftarrow B} = \overline{A} \to \overline{B}; \tag{45}$$

$$(A \oplus B) + (A — B) \ = \ (A \to B) + (A \leftarrow B). \tag{46}$$

Vegyük észre, hogy a (39), (42) és (44) összevonásával

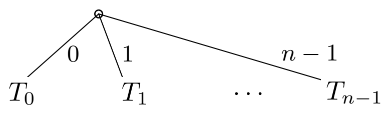
$$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \ = \ \overline{K_{n_1}} — \overline{K_{n_2}} — \ \cdots \ — \overline{K_{n_k}} \tag{47}$$

adódik, amikor $k \geq 2$. Továbbá,

$$K_n = K_1 — K_1 — \ \cdots \ — K_1 \quad \text{és} \quad K_n^{\to} = K_1 \to K_1 \to \cdots \to K_1\,, \tag{48}$$

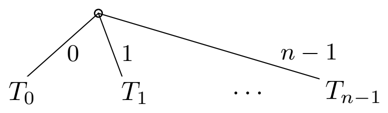
a K_1 gráf n példányát használva, ami azt mutatja, hogy $K_n = K_{1,1,\ldots,1}$ egy teljes n-paritású gráf.

A direkt összegek és egyesítések hasonlóan viselkednek az összeadásra, mivel $\overline{K_m} \oplus \overline{K_n} = \overline{K_{m+n}}$ és $K_m — K_n = K_{m+n}$. A gráfokat kombinálhatjuk algebrai műveletekkel is, amelyek a szorzáshoz hasonlóak. A *Descartes-szorzat* művelet például az m-ed rendű $G = (U, E)$ és n-ed rendű $H = (V, F)$ gráfból egy mn-ed rendű $G \square H$ gráfot állít elő. A $G \square H$ csúcsai (u, v) alakú rendezett párok, ahol $u \in U$ és $v \in V$; az élek $(u, v) — (u', v)$ alakúak, ha $u — u'$ a G-be esik, valamint $(u, v) — (u, v')$ alakúak, ha $v — v'$ a H-ba esik. Más szóval, $G \square H$ létrehozásakor minden G-beli csúcs H egy példányával lesz helyettesítve, G minden éle pedig a megfelelő példányok megfelelő csúcsai közötti élekkel:



ROSSZ ABRA. (49)

Mint általában, az általános konstrukció legegyszerűbb speciális esetei kiemelkedően fontosnak bizonyulnak a gyakorlatban. Ha mind G, mind H út vagy kör, „gráfpapír gráfokat kapunk”, nevezetesen az $m \times n$-es $P_m \square P_n$ ***rács***, az $m \times n$-es $P_m \square C_n$ ***henger*** és az $m \times n$-es $C_m \square C_n$ ***tórusz*** gráfokat, amelyeket az $m = 3$ és $n = 4$ esetre mutatunk be:



ÁBRAALÁÍRÁS: rács, henger, tórusz (50)

A gráfok szorzásának négy másik nevezetes módja bizonyult még hasznosnak. Minden esetben a szorzatgráf csúcsai (u, v) alakú rendezett párok.

- A $G \otimes H$ ***direkt szorzatra***, amit G és a H „konjunkciójának” vagy „kategorikus szorzatának” is neveznek, $(u, v) — (u', v')$ teljesül, amikor $u — u'$ a G-be esik és $v — v'$ a H-ba esik.
- A $G \boxtimes H$ ***erős szorzata*** kombinálja a $G \square H$ és a $G \otimes H$ éleit.
- A $G \vartriangle H$ ***páratlan szorzatra*** $(u, v) — (u', v')$ teljesül, amikor vagy $u — u'$ a G-be esik, vagy $v — v'$ a H-ba esik, de nem egyszerre.

• A $G \circ H$ *lexikografikus szorzatra*, amit a G és a H „kompozíciójának” is neveznek, $(u,v) - (u',v')$ teljesül, ha $u - u'$ a G-be esik, és $(u,v) - (u,v')$, ha $v - v'$ a H-ba esik.

Ezen öt művelet mindegyike természetes módon kiterjeszthető $k \geq 2$ gráf $G_1 = (V_1, E_1)$, $\ldots$, $G_k = (V_k, E_k)$ szorzatára, melynek csúcsai $(v_1, \ldots, v_k)$ rendezett k-asok, ahol $v_j \in V_j$ minden $1 \leq j \leq k$ esetén. Ha például $k = 3$, a $G_1 \square (G_2 \square G_3)$ és a $(G_1 \square G_2) \square G_3$ Descartes-szorzatok izomorfak, amennyiben a $(v_1, (v_2, v_3))$ és $((v_1, v_2), v_3)$ csúcsokat a (v_1, v_2, v_3)-mal megegyezőnek tekintjük. Ily módon a Descartes-szorzatból a $G_1 \square G_2 \square G_3$ módon elhagyhatjuk a zárójelezést. A k-tényezős Descartes-szorzatok legfontosabb példája a

$$K_2 \square K_2 \square \cdots \square K_2 \tag{51}$$

k dimenziós hiperkocka; ennek 2^k számú $(v_1, \ldots, v_k)$ csúcsa szomszédos, ha a Hamming-távolságuk 1.

Tegyük fel általában, hogy $v = (v_1, \ldots, v_k)$ és $v' = (v'_1, \ldots, v'_k)$ csúcs k-asok, ahol $v_j - v'_j$ a G_j-be esik pontosan a alindexre a j alindex közül, és $v_j = v'_j$ pontosan b alindexre. Ekkor:
$v — v'$ pontosan akkor esik $G_1 \square \cdots \square G_k$-ba, ha $a = 1$ és $b = k - 1$;
$v — v'$ pontosan akkor esik $G_1 \otimes \cdots \otimes G_k$-ba, ha $a = k$ és $b = 0$;
$v — v'$ pontosan akkor esik $G_1 \boxtimes \cdots \boxtimes G_k$-ba, ha $a + b = k$ és $a > 0$;
$v — v'$ pontosan akkor esik $G_1 {\scriptstyle\triangle\cdots\triangle} G_k$-ba, ha a páratlan. A lexikografikus szorzat valamelyest különbözik, mivel nem kommutatív; $G_1 \circ \cdots \circ G_k$-ban $v — v'$ pontosan akkor teljesül $v \neq v'$-re, ha $v_j — v'_j$, ahol j a legkisebb olyan alindex, amire $v_j \neq v'_j$.

A 91–102. gyakorlat megismertet a gráfszorzatok bizonyos alaptulajdonságaival. Lásd még Imrich és Klavžar könyvét [?], ami egy átfogó bevezetést tartalmaz az általános elméletbe, beleértve egy adott gráf „prím” részgráfokra való faktorizálására szolgáló algoritmusokat is.

Gráfok foksorozata. Nemnegatív egészek egy $d_1 d_2 \ldots d_n$ sorozatát *grafikusnak* nevezzük, ha létezik legalább egy $\{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsú gráf, amelyben a k csúcs fokszáma d_k. Feltehetjük, hogy $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Nyilvánvaló, hogy $d_1 < n$ minden ilyen gráfban; valamint, hogy minden grafikus sorozat $m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ összege mindig páros, mivel ez éppen az élek számának kétszerese. Továbbá, könnyen ellenőrizhető, hogy a 3311 sorozat nem grafikus; azaz a grafikus sorozatoknak más feltételeket is ki kell elégíteniük. Melyek ezek?

Egy adott $d_1 d_2 \ldots d_n$ sorozat grafikussága eldöntésének egy egyszerű módját és egy ilyen gráf elkészítését Havel dolgozta ki [?]. Egy üres tablóval indulunk, amelynek a k. sorában d_k cella van; ezek a cellák „nyílásokat” reprezentálnak, amelyekbe a k csúcs szomszédait helyezzük a konstruált gráfban. Legyen c_j a j. oszlopban lévő cellák száma; így $c_1 \geq c_2 \geq \cdots$, és $1 \leq k \leq n$ esetén $c_j \geq k$ teljesül pontosan akkor, ha $d_k \geq j$. Legyen például $n = 8$, és $d_1 \ldots d_8 = 55544322$; ekkor

$$\text{52. képlet: ÁBRA} \tag{52}$$

a kiindulási tabló, és $c_1 \ldots c_5 = 88653$. Havel ötlete szerint kössük össze az n csúcsot a legnagyobb fokú csúcsok közül d_n-nel. Ebben az esetben létrehozzuk például a $8 — 3$ és $8 — 2$ élt, és a tabló a következő alakúvá változik:

$$\text{53. képlet: ÁBRA} \tag{53}$$

(A $8 — 1$ élt nem akarjuk, mivel az üres nyílásokat tabló alakúra kell hozni; minden oszlop celláit alulról felfelé kell feltölteni.) Ezután legyen $n \leftarrow 7$, és hozzunk létre további két, a $7 — 1$ és $7 — 5$ élt. Ezt követi még másik három, a $6 — 4$, $6 — 3$ és $6 — 2$, ami már majdnem félig késszé teszi a tablót:

54. képlet: ÁBRA (54)

A problémát egy $d_1 \ldots d_5 = 43333$ csúcssorozattal rendelkező gráf keresésévé egyszerűsítettük; ezen a ponton $c_1 \ldots c_4 = 5551$ szintén teljesül. Az olvasóra bízzuk az üresen maradt helyek kitöltését, mielőtt megtekintené a 103. gyakorlatnál adott választ.

H algoritmus?? (*gráfgenerátor adott fokszámokhoz*). Adott $d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq d_{n+1} = 0$ esetén ez az algoritmus éleket hoz létre az $\{1, \ldots, n\}$ csúcsok között úgy, hogy pontosan d_k él tartalmazza a k csúcsot minden $1 \leq k \leq n$ esetén, hacsak a $d_1 \ldots d_n$ sorozat nem grafikus. Átmeneti tárolóként egy $c_1 \ldots c_{d_1}$ mátrixot használunk.

H1. (A c-k beállítása.) Kiindulásként legyen $k \leftarrow d_1$ és $j \leftarrow 0$. Végezzük el a következő műveleteket, amíg $k > 0$ fennáll: Legyen $j \leftarrow j + 1$; amíg $k > d_{j+1}$, legyen $c_k \leftarrow j$ és $k \leftarrow k - 1$.

H2. (n megkeresése.) Legyen $n \leftarrow c_1$. Fejezzük be sikeresen a futást, ha $n = 0$; fejezzük be sikertelenül a futást, ha $d_1 \geq n > 0$.

H3. (Ciklus j-re.) Legyen $i \leftarrow 1$, $t \leftarrow d_1$ és $r \leftarrow c_t$. Hajtsuk végre a H4 lépést a $j = d_n$, $d_n - 1$, ..., 1 esetre; majd lépjünk vissza a H2-re.

H4. (Új él létrehozása.) Legyen $c_j \leftarrow c_j - 1$ és $k \leftarrow c_t$. Készítsük el a $k - n$ élt, és legyen $d_k \leftarrow d_k - 1$, $c_t \leftarrow k - 1$. Ha $k = i$, legyen $i \leftarrow r + 1$, $t \leftarrow d_i$ és $r \leftarrow c_t$ (lásd a 104. gyakorlatot). ■

Ha a H algoritmus sikeresen lefut, elkészít egy gráfot a kívánt fokszámokkal. Ha viszont sikertelen a futása, hogyan tudjuk ellenőrizni, hogy lehetetlent kértünk tőle? Ennek a kérdésnek a kulcsa a „*majorálás*” nevű fontos fogalom: Ha $d_1 \ldots d_n$ és $d'_1 \ldots d'_n$ ugyanannak az egésznek két különböző felbontása (azaz, ha $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ és $d'_1 \geq \cdots \geq d'_n$ és $d_1 + \cdots + d_n = d'_1 + \cdots + d'_n$), akkor $d_1 \ldots d_n$ *majorálja* a $d'_1 \ldots d'_n$-t, ha $d_1 + \cdots + d_k \geq d'_1 + \cdots + d'_k$, $1 \leq k \leq n$.

M lemma. *Ha $d_1 \ldots d_n$ grafikus, és $d_1 \ldots d_n$ majorálja $d'_1 \ldots d'_n$-t, akkor $d'_1 \ldots d'_n$ szintén grafikus.*

Bizonyítás. Az állítást elég arra az esetre bizonyítani, amikor $d_1 \ldots d_n$ és $d'_1 \ldots d'_n$ csak két helyen tér el,

$$d'_k \;=\; d_k - [k = i] + [k = j], \qquad \text{ahol} i < j, \tag{55}$$

mivel a $d_1 \ldots d_n$-nel majorált minden sorozat megkapható az ehhez hasonló mini-majorálások ismételgetésével. (A 7.2.1.4–55. gyakorlatok tárgyalják részletesen a majorálást.)

Az (55) feltételből következik, hogy $d_i > d'_i \geq d'_{i+1} \geq d'_j > d_j$. Vagyis a $d_1 \ldots d_n$ fokszám sorozattal rendelkező minden gráf tartalmaz egy v csúcsot, melyre $v — i$ és $v \not— j$. A $v — i$ él törlése és a $v — j$ él hozzáadása egy $d'_1 \ldots d'_n$ kívánt fokszám sorozattal rendelkező gráfot eredményez. ■

H következmény. *A H algoritmus sikeresen fejeződik be, ha $d_1 \ldots d_n$ grafikus.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $n > 1$. Legyen G egy $\{1, \ldots, n\}$ csúcsú tetszőleges gráf $d_1 \ldots d_n$ fokszám sorozattal, és legyen G' az $\{1, \ldots, n - 1\}$ csúcsok által indukált részgráf; más szavakkal, készítsük el a G'-t az n csúcs, és az azt tartalmazó d_n él eltávolításával. A G' gráf $d'_1 \ldots d'_{n-1}$ fokszám sorozata a $d_1 \ldots d_{n-1}$-ből kapható meg, d_n bejegyzést 1-gyel csökkentve, majd ezeket csökkenő sorba rendezve. A $d'_1 \ldots d'_{n-1}$ sorozat definíció szerint grafikus. A H3 és H4 lépéssel előállított $d''_1 \ldots d''_{n-1}$ fokszám sorozatot minden ilyen $d'_1 \ldots d'_{n-1}$ sorozat majorál, mivel 1-gyel csökkenti a legnagyobb lehetséges d_n bejegyzéseket. Ezért az új $d''_1 \ldots d''_{n-1}$ grafikus. A $d_1 \ldots d_{n-1} \leftarrow d''_1 \ldots d''_{n-1}$-t beállító H algoritmus sikeressége ezért n-szerinti indukcióval következik. ■

A H algoritmus futási ideje durván a létrehozott élek számával arányos, amelynek nagyságrendje n^2 lehet. A 105. gyakorlat egy gyorsabb módszert közöl, ami $O(n)$ lépésben dönti el, hogy egy adott $d_1 \ldots d_n$ sorozat grafikus-e vagy sem (gráf létrehozása nélkül).

Túl a gráfokon. Amennyiben egy gráf vagy irányított gráf csúcsait és/vagy éleit további adatokkal látjuk el, úgy azt *hálózatnak* nevezzük. Például a *szavak*$(5757, 0, 0, 0)$ gráf minden csúcsának van egy járulékos rangja, ami a megfelelő ötbetűs szó népszerűségét jelzi. A *sima_lisa*$(360, 250, 15, 0, 360, 0, 250, 0, 0, 2295000)$ gráf csúcsainak van egy kapcsolt *képpont* sűrűsége 0 és 15 között. A *tábla*$(8, 8, 0, 0, -2, 0, 0)$ minden élének van egy kapcsolt hossz értéke, ami egy figura táblán való mozgásának távolságát írja le: Egy *futó* egyik sarokból másikba való mozgásának a hossza 7. A *Stanford GraphBase* a fentiek túl számos további generátort tartalmaz, mivel ezeket elsősorban érdekes hálózatok, nem pedig érdekes struktúrával rendelkező gráfok generálására használják:

• *mérföldek*$(128, 0, 0, 0, 0, 127, 0)$ egy 128 csúcsú hálózat, amelyek a korábban leírt *sík_mérföldek* észak-amerikai városaira vonatkoznak. A *sík_mérföldek* gráftól eltérően azonban, a *mérföldek* egy teljes gráf $\binom{128}{2}$ éllel. Minden él egész hosszúságú, annak a távolságnak a leírására, amit 1949-ben egy autó megtett, miközben átutazott az egyik városból egy másikba. Például ‘Vancouver, BC’ és ‘West Palm Beach, FL’ távolsága 3496 mérföld a *mérföldek* hálózatban.

• *gazdaság*$(81, 0, 0, 0)$ egy 81 csúccsal és 4902 éllel rendelkező hálózat. A csúcsai ez Egyesült Államok egyes gazdasági szektorait, míg élei a pénz szektorok közötti áramlásának 1985-ben mért mennyiségét reprezentálják millió dollárban számolva. Például az áramlási érték a Ruházat szektorból a Háztartási bútor szektorba 44, vagyis a bútoripar 44.000.000 dollárt fizetett a ruházati szektornak a nevezett évben. Az egy csúcsba beérkező tételek összege megegyezik a csúcsból kiinduló tételek összegével. Él csak akkor jelenik meg, ha az áramlás nem nulla. A speciális, Felhasználók csúcs fogadja egy termék teljes pénzügyi igényét; egyes ilyen végfelhasználói tételek negatívak, az importált áruk egyes állami közgazdászok általi kezelése miatt.

• *játékok*$(120, 0, 0, 0, 0, 0, 128, 0)$ egy 120 csúccsal és 1276 éllel rendelkező hálózat. A csúcsai az Egyesült Államok főiskoláinak és egyetemeinek futballcsapatait reprezentálják. Élek azon csapatok között futnak, amelyek játszottak egymással az izgalmas 1990-es bajnokságban, és a szerzett pontokkal vannak címkézve. Például a Stanford → California él értéke 27, míg a California → Stanford értéke 25, mivel a *Stanford Cardinal* a U. C. Berkeley *Golden Bears* csapatát 27–25 arányban győzte le 1990. november 17-én.

• *risc*(16) egy teljesen más típusú hálózat. 3240 csúccsal és 7878 éllel rendelkezik, ami egy *irányított aciklikus gráfot* vagy „*iag*-t definiál, nevezetesen egy *irányított köröket* nem tartalmazó irányított gráfot. A csúcsok logikai értékekkel rendelkező kapukat tartalmaznak; a Z45 ← R0:7~ él azt jelenti, hogy a Z45 kapu értéke a R0:7~ kapu bemenete. Minden kapunak van egy (ÉS, VAGY, KIZÁRÓ VAGY, NEM, *retesz* vagy külső bemeneti típuskódja); minden élnek van egy, a késés mértékét jelző hossza. A hálózat tartalmazza egy miniatűr RISC áramkör teljes logikai felépítését, ami tizenhat regiszter irányítására képes 16-bites egyszerű parancs használatát biztosítja.

Az SGB generátorokkal kapcsolatban az összes részlet megtalálható a szerző *The Stanford GraphBase* című könyvében [?] egyszerű példaprogramok tucatjaival együtt, amelyek elmagyarázzák a generátorok által előállított gráfok és hálózatok manipulálhatóságát. Egy LÉTRÁK című program például bemutatja, hogyan található *legrövidebb út* két ötbetűs szó között. Egy RISC_HASZNÁLATA című program elmagyarázza, hogyan helyezhető egy *nano számítógép* a lépéseire, a *risc*(16) kapuiból felépülő hálózat műveleteinek szimulálásával.

Hipergráfok. A gráfok és hálózatok igen elbűvölőek lehetnek, de még távolról sem jelentik a történet végét. Sok fontos kombinatorikai algoritmust terveztek a gráfoknál általánosabb *hipergráfokra*, melyek élei a csúcsok *tetszőleges* részhalmazai lehetnek.

Lehet adva például $v = a_1a_2a_3$ nemüres bináris füzérekkel hét csúcs, továbbá $e = [b_1b_2b_3]$ zárójelezett nemüres bináris füzérrel azonosított hét él, ahol $v \in e$ pontosan akkor, ha $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \mod 2 = 0$. Ezen élek mindegyike pontosan három csúcsot tartalmaz:

$$[001] = \{010, 100, 110\}; \quad [010] = \{001, 100, 101\}; \quad [011] = \{011, 100, 111\};$$

$$[100] = \{001, 010, 011\}; \quad [101] = \{010, 101, 111\};$$

$$[110] = \{001, 110, 111\}; \quad [111] = \{011, 101, 110\}. \tag{56}$$

Továbbá, a szimmetria miatt, minden csúcs pontosan három élhez tartozik. (A három vagy több csúcsot tartalmazó élt időnként *hiperélnek* is nevezik, hogy megkülönböztessék egy hagyományos gráf éleitől. Lehet azonban egyszerűen csak „éleknek” is nevezni őket.)

Egy hipergráf *r-egyenletes*, ha minden él pontosan r csúcsot tartalmaz. Így (56) egy 3-egyenletes hipergráf, egy 2-egyenletes hipergráf pedig egy hagyományos gráf. A $K(r)_n$ teljes r-egyenletes hipergráfnak n csúcsa és $\frac{n}{r}$ éle van.

A gráfelmélet legtöbb alapfogalma természetes módon kiterjeszthető hipergráfokra. Ha például $H = (V, E)$ egy hipergráf és $U \subseteq V$, akkor az U által *indukált* $H \mid U$ részhipergráf $\{e \mid e \in E$ és $e \subseteq U\}$ élekkel rendelkezik. Egy *r-egyenletes hipergráf* $\overline{H}$ *komplementere* $K(r)_n$ azon éleivel rendelkezik, amelyek H-nak nem elemei. Egy hipergráf k-színezése színek egy csúcsokhoz való rendelése, vagyis nincsenek egyszínű élek. És így tovább.

A hipergráfokat gyakran más névvel is illetik, mivel ugyanezek a tulajdonságok sok más módon is megfogalmazhatók. Például, minden $H = (V, E)$ hipergráf alapvetően *halmazok egy családja*, mivel minden él V egy részhalmaza. Egy 3-egyenletes hipergráfot *tripla rendszernek* is szoktak hívni. Egy hipergráf 0-k és 1-ek egy B mátrixával is ekvivalensek, ahol minde v csúcshoz egy sor és minden e élhez egy oszlop tartozik; a mátrix v sora és e oszlopa a $b_{ve} = [v \in e]$ értéket tartalmazza. A B mátrixot a H *illeszkedési mátrixának* nevezzük, és „v előfordul az e-ben”, ha $v \in e$. Továbbá, egy hipergráf egy *páros gráffal* = bipartite graph ” ekvivalens $V \cup E$ csúcshalmazzal és v—e éllel, amennyiben v előfordul az e-ben. A hipergráfot pontosan akkor nevezzük *összefüggőnek*, ha a megfelelő páros gráf összefüggő. Egy hipergráf k-hosszú *körét* a megfelelő páros gráf $2k$-hosszú köreként definiált.

Az (56) hipergráf például egy ekvivalens előfordulási mátrixszal vagy páros gráffal is definiálható a következőképpen:

$$\begin{array}{c} \\ 001 \\ 010 \\ 011 \\ 100 \\ 101 \\ 110 \\ 111 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} [001] & [010] & [011] & [100] & [101] & [110] & [111] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{ÁBRA HIÁNYZIK} \tag{57}$$

A hipergráf 28 darab 3-hosszúságú utat tartalmaz, mint például

$$[101] — 101 — [010] — 001 — [100] — 010 — [101]\,. \tag{58}$$

Egy H hipergráf H^T ***duálisát*** a csúcsok és élek szerepének felcserélésével képezzük az előfordulási reláció megőrzésével. Más szóval, az előfordulási mátrixot transzponáljuk. Vegyük észre például, hogy egy r-*reguláris* gráf duálisa egy r-egyenletes hipergráf.

Az előfordulási mátrixok és páros gráfok vonatkozhatnak olyan hipergráfokra, amelyben egyes élek egynél többször jelennek meg, mivel a mátrix két oszlopa megegyezhet. Egy ismétlődő élekkel nem rendelkező $H = (V, E)$ hipergráf egy másik kombinatorikai objektumnak nevezetesen egy ***logikai függvénynek*** is megfelel. Ha például a V csúcshalmaz $\{1, 2, \ldots, n\}$, akkor a

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \big[\{j \mid x_j = 1\} \in E\big] \tag{59}$$

függvény leírja a H éleit. (56) és (57) hipergráfja például a

$$(x_1 \oplus x_2 \oplus x_4) \wedge (x_2 \oplus x_3 \oplus x_5) \wedge (x_3 \oplus x_4 \oplus x_6) \wedge (x_4 \oplus x_5 \oplus x_7)$$

$$\wedge (x_5 \oplus x_6 \oplus x_1) \wedge (x_6 \oplus x_7 \oplus x_2) \wedge (x_7 \oplus x_1 \oplus x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \tag{60}$$

logikai képlettel is leírható.

Kissé zavaró lehet, hogy a kombinatorikai objektumok ilyen sokféleképpen felfoghatók. Ez azonban egyúttal roppant hasznos is, mivel ekvivalens problémák megoldásához számos ötletet kapunk. Ha egy problémát több oldalról is górcső alá veszünk, az agyunk természetes módon több irányból is próbál a megoldáshoz eljutni. Időnként a mátrix sorai és oszlopai cserélgetésének végiggondolása vezethet el a probléma mélyebb megértéséhez. Más esetben a csúcsok útvonalként való értelmezésével vagy pontosztályok térbeli megjelenítésével érhetünk el haladást. Megint máskor, a Boole-algebra a megfelelő eszköz. Ha az egyik megközelítéssel elakadunk, egy másik siethet a segítségünkre.

Lefedés és függetlenség. Egy $H = (V, E)$ gráf vagy hipergráf esetén, csúcsok egy U halmaza *lefedi* a H-t, ha minden él tartalmazza az U legalább egy elemét. Csúcsok egy W halmazát *függetlennek* (vagy *stabilnak*) nevezzük a H-ban ha, a W egyetlen élt sem tartalmaz teljesen.

Az előfordulási mátrixot tekintve, egy lefedés olyan sorok egy halmaza, amelyek oszlopösszege sehol sem nulla. Amennyiben H speciálisan egy gráf, a mátrix minden oszlopa csak két 1-est tartalmaz; vagyis egy gráf egy független halmaza egymásra kölcsönösen *merőleges* sorok egy halmazát jelenti – azaz egy olyan halmazt, amelyre bármely két különböző sor *skaláris szorzata* nulla.

Ezek a fogalmak egyazon érme két oldalát jelentik. Ha az U lefedi a H-t, akkor $W = V \setminus U$ független a H-ban; megfordítva, ha a W független a H-ban, akkor $U = V \setminus W$ lefedi a H-t. Mindkét állítás azzal ekvivalens, hogy az indukált $H \mid W$ hipergráfnak nincsenek élei.

A lefedésnek és függetlenségnek ez a duális kapcsolata, amelyet először Claude Berge [**?**] figyelt meg, meglehetősen paradox. Habár logikailag nyilvánvaló és könnyen ellenőrizhető, intuitíve mégis meglepő. Ha egy gráfot vizsgálunk, és egy nagy méretű független halmazt próbálunk találni, másképpen gondolkodunk, mint amikor egy kis méretű csúcs lefedőt keresünk ugyanazon gráfban; miközben a cél mindkét esetben ugyanaz.

Egy lefedő U halmaz *minimális*, ha $U \setminus u$ nem lefedő minden $u \in U$ esetén. Hasonlóan, egy független W halmaz *maximális*, ha $W \cup w$ nem független minden $w \notin W$ esetén. Lejjebb példaként megadjuk a 49-csúcsú *folytonos Egyesült Államok* (**??**) gráf egy minimális lefedését és a kapcsolódó maximális független halmazt:

Ábraaláírás: Maximális független halmaz 11 csúccsal (61)

Egy lefedést *minimumnak* nevezünk, ha a mérete a lehető legkisebb, illetve egy lefedő halmazt *maximumnak*, ha a mérete a lehető legnagyobb. Például a (**??**)-es gráffal a (61)-esnél lényegesen jobb eredményt érhetünk el:

Ábraaláírás: Maximális független halmaz 19 csúccsal (62)

Ezen a ponton figyeljük meg a „minimális” és a „minimum” közötti finom különbséget: Általában (bár angol terminológia esetén az *angol szótáraktól* eltérően) a kombinatorikai algoritmusokkal dolgozók a „minimális” vagy „optimális” szóhasználattal élnek a *lokálisan* legjobb kombinatorikai konfigurációk megjelöléséhez, amelyek kisebb módosítások hatására nem javulnak. A „minimum” vagy „optimum” terminológia az összes szóba jövő között *globálisan* legjobb konfigurációk számára van fenntartva. Minden optimalizációs problémára könnyű találni egy gyengébb, helyi értelemben optimális megoldást, folyamatosan mászva a hegyet a csúcs eléréséig. A valódi optimumot szolgáltató megoldások megkeresése általában jóval nehezebb feladat. Így például a 7.9. alfejezetben látni fogjuk, hogy egy adott gráf *maximum független halmazának* megkeresése a bonyolult, *NP-teljes* feladatok osztályába tartozik.

Nem kell azonban kétségbe esnünk NP-teljes problémák esetén sem. Minimum lefedők keresésére használt technikákat a fejezet számos pontján tárgyalni fogunk, amelyek kisebb problémák esetén jól működnek; A (62) optimum megoldása kevesebb, mint egy másodperc alatt megtalálható volt a 2^{49} lehetőség csak egy kis szeletének átvizsgálásával. Továbbá, NP-teljes problémák speciális esetei gyakran bizonyulnak az általános esetnél egyszerűbbnek. A 7.5.1. pontban látható lesz, hogy egy minimum csúcs lefedő gyorsan megkereshető egy *páros gráfban* vagy ennek a gráfnak egy *duális* hipergráfjában. A 7.5.5. pontban pedig hatékony módszereket tárgyalunk maximum *párosítás* keresésére, ami egy adott gráf *vonalgráfjának* maximum független halmaza.

Egy független halmaz méretének maximalizálása egy annyira gyakori probléma, hogy célszerű saját jelöléssel ellátni: Egy H hipergráf esetén az

$$\alpha(H) \;=\; \max\bigl\{|W| \bigm| W \text{ csúcsok egy független halmaza } H\text{-ban}\bigr\} \tag{63}$$

értéket a H *függetlenségi számának* (vagy *stabilitási számának*) nevezzük. Hasonlóan, a

$$\chi(H) \;=\; \min\{k \mid H \; k\text{-színezhető}\} \tag{64}$$

értéket a H *színezési számának* nevezzük. Vegyük észre, hogy $\chi(H)$ a H független halmazokkal való minimum lefedőjének a mérete, mivel az egyes színeket kapó csúcsoknak a definíciónk szerint függetlennek kell lenniük.

Az $\alpha(H)$ és $\chi(H)$ ezen definíciói elsősorban arra az esetre vonatkoznak, amikor H egy szokásos gráf, és ilyenkor természetesen gyakran használjuk az $\alpha(G)$ és $\chi(G)$ jelölést is. A gráfokhoz kapcsolódik még egy másik fontos érték, az

$$\omega(G) \;=\; \max\bigl\{|X| \bigm| X \text{ egy klikk } G\text{-ben}\bigr\}\,, \tag{65}$$

klikkszám, ahol egy „*klikk*” kölcsönösen szomszédos csúcsok egy halmaza.

$$\omega(G) \;=\; \alpha(\overline{G})\,, \tag{66}$$

nyilvánvalóan fennáll, mivel egy G-beli klikk a *komplementer gráf* egy *független halmaza*. Hasonlóan látható, hogy $\chi(\overline{G})$ egy *klikk lefedő* legkisebb mérete, ami az összes csúcsot lefedő klikkek egy halmaza.

A szakaszban több helyen is említettünk „pontos*lefedési* problémákat” anélkül, hogy precízen elmagyaráztuk volna egy ilyen probléma mibenlétét. Mostanra készen állunk a definícióra: Egy H hipergráf *előfordulási mátrixa* esetén, a H egy *pontos lefedése* a mátrix olyan sorainak egy halmaza, amelyek összege $(1\,1\,\ldots\,1)$. Más szóval, egy pontos lefedés olyan csúcsok egy halmaza, amelyek minden hiperélt pontosan egyszer érintenek; egy szokásos lefedésnek minden hiperélt *legalább* egyszer kell érintenie.

GYAKORLATOK

1. [*25*]

2. [*18*] . . .

69. [*20*] A **??**. képletet kiterjesztve magyarázzuk el, hogyan kell egy SGB formátumban ábrázolt gráf *minden* csúcsához kiszámítani a KIFOK(v) kifokot és a BEFOK(v) befokot.

70. [*M20*] Hányszor futnak le a B algoritmus egyes lépései, amikor az algoritmus sikeresen 2-színez egy m élű és n csúcsú gráfot?

71. [*M26*] Implementáljuk a B algoritmust az MMIX számítógép számára úgy, hogy a MMIXAL assembly nyelvet használjuk. Tegyük fel, hogy a program kezdetekor a $v0$ regiszter az első csúcspontra mutat, és az n regiszter a csúcsok számát tartalmazza.

72. [*M22*] Amikor a B6-os lépésben beállítjuk a SZÍN(v) értéket, akkor u-t nevezzük v *szülőjének*; viszont amikor a B3-as lépésben állítjuk be a SZÍN(w)-t, akkor mondjuk azt, hogy w-nek nincs szülője. Definiáljuk a v csúcs *őseit* rekurzívan v és v szülőjének őseivel, már ha van szülője. a) Bizonyítsuk be, hogy ha a B algoritmus működése során v lejjebb van a veremben, mint u, akkor v szülője egyben u őse is. b) Továbbá, ha a B6-os lépésben SZÍN(v) = SZÍN(u), akkor v aktuálisan a veremben van. c) Használjuk fel ezeket az összefüggéseket, a B algoritmus kiterjesztéséhez úgy, hogy ha a gráf nem páros, akkor a kimenet a csúcsok nevei legyenek egy páratlan hosszúságú körben.

73. [*15*] Hogyan nevezzük másképpen a *véletlen_gráf*$(10, 45, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$-t?

74. [*21*] A *roget*$(1022, 0, 0, 0)$ mely csúcsának van a legnagyobb kifoka?

75. [*22*] A *tábla*$(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ SGB gráf generátor egy olyan gráfot hoz létre, amelynek csúcsai az $(x_1, \ldots, x_t)$ t-dimenziós egész vektorok, ahol $0 \le x_i < b_i$, amelyet az első négy (n_1, n_2, n_3, n_4) paraméter határoz meg a következőképpen: Legyen $n_5 \leftarrow 0$ és $j \ge 0$ az a minimális érték, hogy $n_{j+1} \le 0$ teljesül. Ha $j = 0$, akkor legyen $b_1 \leftarrow b_2 \leftarrow 8$ és $t \leftarrow 2$; ez lesz az alapértelmezett 8×8-as tábla. Egyébként, ha $n_{j+1} = 0$, akkor legyen $b_i \leftarrow n_i$, ahol $1 \le i \le j$ és $t \leftarrow j$. Végül, ha $n_{j+1} < 0$, akkor legyen $t \leftarrow |n_{j+1}|$, és legyen b_i az i. eleme az $(n_1, \ldots, n_j, n_1, \ldots, n_j, n_1, \ldots)$ periodikus sorozatnak. (Például az $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 3, 5, -7)$ eset olyan ravasz, amilyen csak lehet; egy 7-dimenziós táblát állít elő $(b_1, \ldots, b_7) = (2, 3, 5, 2, 3, 5, 2)$- vel, tehát egy $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 1800$ csúcsú gráfot.)

A maradék (p, w, o) paraméterek a gráf éleit határozzák meg. Először tegyük fel, hogy $w = o = 0$. Ha $p > 0$, $(x_1, \ldots, x_t) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_t)$ pontosan akkor, ha $y_i = x_i + \delta_i$ $1 \le i \le t$-re, ahol $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ egész megoldása a $\delta_1^2 + \cdots + \delta_t^2 = |p|$ egyenletnek. Ha $p < 0$, akkor megengedett az $y_i = x_i + k\delta_i$ eset is, ahol $k \ge 1$, amely megfelel annak, hogy k azonos irányba mozog.

Ha $w \ne 0$, akkor legyen $w = (w_t \ldots w_1)_2$ bináris alakban. Engedélyezzük a „bekerítést": $y_i = (x_i + \delta_i) \mod b_i$ vagy $y_i = (x_i + k\delta_i) \mod b_i$, minden olyan i koordinátára, amelyre $w_i = 1$.

Ha $o \ne 0$, akkor a gráf irányított; a $(\delta_1, \ldots, \delta_t)$ eltolás csak akkor hoz létre éleket, ha lexikografikus rendezés szerint nagyobbak, mint $(0, \ldots, 0)$. De ha $o = 0$, akkor a gráf nem irányított.

Találjunk olyan $(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ konfigurációt, amikor a *tábla* a következő alapgráfot hozza létre: (a) a k_n teljes gráf; (b) a P_n út; (c) a C_n kör; (d) a $K_n^{\rightarrow}$ tranzitív verseny; (e) a $P_n^{\rightarrow}$ irányított út; (f) a $C_n^{\rightarrow}$ irányított kör; (g) a $P_m \square P_n$ $m \times n$-es rács; (h) a $P_m \square C_n$ $m \times n$-es henger; (i) a $C_m \square C_n$ $m \times n$-es tórusz; (j) a $K_m \square K_n$ $m \times n$-es bástya gráf (k) a $C_m^{\rightarrow} \square C_n^{\rightarrow}$ $m \times n$-es irányított tórusz; (l) a $\overline{K_n}$ zérusgráf; (m) A $P_2 \square \cdots \square P_2$ 2^n csúcsú n-kocka.

76. [*20*] A *tábla*$(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$-ban lehetnek körök vagy többszörös élek?

77. [*M20*] Legyen adva egy G gráf, amelynek átmérője ≥ 3. Bizonyítsuk be, hogy $\overline{G}$-nek az átmérője ≤ 3.

78. Legyen $G = (V, E)$ olyan gráf, hogy $|V| = n$ és $G \cong \overline{G}$ teljesül. (Tehát a G gráf *komplementerével megegyező*: V-nek van olyan φ permutációja, hogy $u — v$ pontosan akkor, ha $\varphi(u) \not— \varphi(v)$ és $u \ne v$. Elképzelhető, hogy K_n élei fekete vagy fehér színnel vannak színezve; a fehér élek egy olyan gráfot definiálnak, amely izomorf a fekete élek gráfjával.)

(a) Bizonyítsuk be, hogy $n \mod 4$ értéke 0 vagy 1 lehet. Készítsünk ábrát minden olyan gráfhoz, amelyre $n < 8$ teljesül.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $n \mod 4 = 0$, akkor a φ permutációban lévő minden kör hosszúsága 4 többszöröse.

(c) Megfordítva, minden φ permutációban, amelyben előfordul ilyen kör, valamilyen G gráfból adódik.

(d) Terjesszük ki az eredményeinket az $n \mod 4 = 1$ esetre.

79. [*M22*] Legyen adva $k \ge 0$. Készítsünk egy olyan gráfot, amelynek csúcsai $0, 1, \ldots, 4k$, valamint reguláris és komplementerével megegyező.

80. [*M22*] A 77. gyakorlatból következően a komplementerével megegyező gráfoknak 2 vagy 3 lehet az átmérője. Ha adva van $k \ge 2$, készítsünk komplementerével megegyező gráfot mindkét lehetséges átmérőre, amikor

(a) $V = \{1, 2, \ldots, 4k\}$; (b) $V = \{0, 1, 2, \ldots, 4k\}$.

81. [*20*] Egy egyszerű, körmentes irányított gráf komplementere (35) és (36) kiterjesztésével történik úgy, hogy $\underline{D}$-ben $u \to v$ akkor és csakis akkor teljesül, ha D-ben $u \neq v$ és $u \not\to v$. Melyek a 3-rendű, komplementerükkel megegyező irányított gráfok?

82. [*M21*] A vonal gráf következő állításai közül melyek igazak és melyek hamisak?
(a) Ha G-t tartalmazza G', akkor $L(G)$ indukált részgráfja $L(G')$-nek.
(b) Ha G reguláris gráf, akkor $L(G)$ is az.
(c) $L(K_{m,n})$ reguláris minden $m, n > 0$-ra.
(d) $L(K_{m,n,r})$ reguláris minden $m, n, r > 0$-ra.
(e) $L(K_{m,n}) \cong K_m \square K_n$.
(f) $L(K_4) \cong K_{2,2,2}$.
(g) $L(P_{n+1}) \cong P_n$.
(h) G és $L(G)$ gráfoknak ugyanannyi komponense van.

83. [*16*] Ábrázoljuk az $\overline{L(K_5)}$ gráfot.

84. [*M21*] Az $L(K_{3,3})$ gráf komplementerével megegyező?

85. [*M22*] (O. Ore, 1962.) Mely G gráfokra igaz, hogy $G \cong L(G)$?

86. [*M20*] (R. G. Wilson.) Keressünk olyan 6-od rendű G gráfot, melyre igaz, hogy $\underline{G} \cong L(G)$.

87. [*20*] A Petersen-gráf
(a) 3 színezhető?
(b) 3 él-színezhető?

88. [*M20*] A $W_n = K_1 \mathbin{—} C_{n-1}$ gráfot n-ed rendű *keréknek* nevezzük, ha $n \geq 4$. Hány kör található benne, mint részgráf?

IDE KELL a W_8 "KERÉK" ÁBRÁJA

89. [*M20*] Bizonyítsuk be a (42) és (43) asszociatív szabályokat.

90. [*M24*] Egy gráfot *generáltnak* nevezünk, ha az 1 elemű gráfból algebrailag konstruálható a komplementer képzés és/vagy a direkt összeg műveleteket használva. Például 4 darab nem izomorf 3-ad rendű gráf létezik, és ezek mindegyike generált: $\overline{K_3} = K_1 \oplus K_1 \oplus K_1$ és a komplementere, K_3; $\overline{K_{1,2}} = K_1 \oplus K_2$ és a komplementere, $K_{1,2}$, ahol $K_2 = \overline{K_1 \oplus K_1}$.

Hosszú felsorolás munkája árán kiderül, hogy 11 darab nem izomorf 4-ed rendű gráf létezik. Adjunk algebrai kifejezéseket, amellyel bebizonyíthatjuk, hogy közülük 10 generált. Melyik nem az?

91. [*20*] Készítsünk ábrát a 4 csúcsú gráfokhoz, amelyekre
(a) $K_2 \square K_2$ (b) $K_2 \otimes K_2$; (c) $K_2 \boxtimes K_2$; (d) $K_{2 \vartriangle K_2}$; (e) $K_2 \circ K_2$; (f) $\overline{K_2} \circ K_2$; (g) $K_2 \circ \overline{K_2}$.

92. [*21*] A gráfok szorzatára definiált 5-féle lehetőség működik egyszerű irányított gráfokra és közönséges gráfokra is. Készítsünk ábrát a 4 csúcsú irányított gráfokhoz, amelyekre
(a) $\vec{K_2} \square \vec{K_2}$; (b) $\vec{K_2} \otimes \vec{K_2}$; (c) $\vec{K_2} \boxtimes \vec{K_2}$;
(d) $\vec{K_2}_{\vartriangle \vec{K_2}}$; (e) $\vec{K_2} \circ \vec{K_2}$.

93. [*15*] A gráf szorzatok közül melyek viszik át K_m és K_n-et K_{mn}-be?

94. [*10*] Az SGB *szó*-gráfok a $P_{26} \square P_{26} \square P_{26} \square P_{26} \square P_{26}$ indukált részgráfjai?

95. [*M20*] Ha a G gráf u csúcsának d_u a foka, a H gráf v csúcsának d_v a foka, akkor mennyi a foka az (u, v) csúcsnak a következő gráfokban:
(a) $G \square H$? (b) $G \otimes H$? (c) $G \boxtimes H$? (d) $G_{\vartriangle H}$? (e) $G \circ H$?

96. [*M22*] Legyen A $m \times m'$-es mátrix $a_{uu'}$ elemekkel az u sorban és u' oszlopban; Legyen B $n \times n'$-es mátrix $b_{vv'}$ elemekkel z v sorban és v' oszlopban. Az $A \otimes B$ *direkt szorzat* egy $mn \times m'n'$-es mátrix $a_{uu'} b_{vv'}$ elemekkel az (u, v) sorban és (u', v') oszlopban. Ennél fogva $A \otimes B$ a $G \otimes H$ szomszédsági mátrixa lesz, ha A és B rendre a G, illetve H szomszédsági mátrixai.

Keressünk hasonló formulákat a következő műveletek szomszédsági mátrixára: (a) $G \square H$; (b) $G \boxtimes H$; (c) $G_{\triangle H}$; (d) $G \circ H$.

97. [*M25*] Keressünk annyi érdekes kapcsolatot a gráf szorzások és összeadások között, amennyit csak tudunk. (Például az $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ disztributív szabály a mátrixok direkt összegére és szorzatára indukálja, hogy $(G \oplus G') \otimes H = (G \otimes H) \oplus (G' \otimes H)$. Teljesül például az is, hogy $\overline{K_m} \square H = H \oplus \cdots \oplus H$, H-nak m példányára, stb.)

98. [*M20*] Ha a G gráfnak k komponense van, a H gráfnak pedig l komponense, akkor hány komponense van $G \square H$-nak és $G \boxtimes H$-nak?

99. [*M20*] Legyen $d_G(u, u')$ a G gráfban az u és u' csúcsok távolsága. Bizonyítsuk be, hogy $d_{G \square H}((u, v), (u', v')) = d_G(u, u') + d_H(v, v')$, és keressünk hasonló formulát $d_{G \boxtimes H}((u, v), (u', v'))$-re.

100. [*M21*] Mely összefüggő gráfok $G \otimes H$ összefüggőek?

101. [*M25*] Keressük meg az összes olyan összefüggő G és H gráfot, amelyekre $G \square H \cong G \otimes H$.

102. [*M20*] Milyen egyszerű algebrai formulát lehet adni a *király lépés* gráfjára egy $m \times n$-es táblán? (Egy lépést tesz vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan.)

103. [*20*] Fejezzük be a (54)-es tablót. Ezen kívül alkalmazzuk a H algoritmust a 866444444 sorozatra.

104. [*18*] Magyarázzuk el az i, t, r változók manipulálását a H3 és H4 lépésben.

105. [*M34*] Tegyük fel, hogy $d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$, és legyen $c_1 \geq \cdots c_{d_1}$ ennek konjugáltja, úgy mint a H algoritmusban. Bizonyítsuk be, hogy $d_1 \ldots d_n$ pontosan akkor grafikus, ha $d_1 + \cdots + d_n$ páros és $d_1 + \cdots + d_k \leq c_1 + \cdots c_k - k$, ahol $1 \leq k \leq s$ és s az a maximális érték, melyre $d_s \geq s$.

106. [*20*] Igaz-e a következő állítás: Ha $d_1 = \cdots = d_n = d < n$ és nd páros, akkor a H algoritmus *összefüggő gráfot* konstruál.

107. [*M21*] Bizonyítsuk be, hogy egy komplementerével megegyező gráf $d_1 \ldots d_n$ foksorozata $1 \leq j \leq n/2$-re teljesíti a $d_j + d_{n+1-j} = n - 1$ és a $d_{2j-1} = d_{2j}$ egyenlőségeket.

108. [*M23*] Tervezzünk egy olyan H algoritmushoz hasonló algoritmust, amely adott $1, \ldots, n$ csúcsok és azokhoz tartozó d_k^- és a d_k^+ be- és kifokok esetén óegyszerű irányított gráfot konstruál, ha létezik egyáltalán ilyen gráf.

109. [*M20*] Tervezzünk egy olyan H algoritmushoz hasonló algoritmust, amely adott $1, \ldots, m + n$ csúcsok és azokhoz tartozó d_k fokszámok esetén *páros gráfot* konstruál, ha létezik egyáltalán ilyen gráf; Minden $j — k$ élre teljesülnie kell, hogy $j \leq m$ és $k > m$.

110. [*M22*] A H algoritmus használata nélkül mutassunk egy direkt konstrukciót arra, hogy ha $n > d1 \geq \cdots \geq d_n \geq d_1 - 1$ és $d_1 + \cdots + d_n$ páros, akkor a $d_1, \ldots, d_n$ grafikus.

111. [*25*] Legyen adva a G gráf a $V = \{1, \ldots, n\}$ csúcsokkal, és legyen d_k a k foka és $\max(d_1, \ldots, d_n) = d$. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan N egész, $n \leq N \leq 2n$ és egy H gráf, amelynek csúcsai $\{1, \ldots, N\}$ úgy, hogy H reguláris d fokkal és $H \mid V = G$. Magyarázzuk meg, hogy miként lehet ilyen reguláris gráfot készíteni a lehető legkisebb N esetén.

112. [*20*] A *mérföldek*$(128, 0, 0, 0, 0, 127, 0)$ hálóban van három, egyenlő távolságra lévő város? Ha nem, akkor mely 3 város van a legközelebb az egyenlő oldalú háromszög elrendezéshez?

113. [*05*] Ha H egy hipergráf m éllel és n csúccsal, akkor mennyi sora és oszlopa van az előfordulási mátrixának?

114. [*M20*] Tegyük fel, hogy a (7.0)-ban lévő multigráfot hipergráfnak tekintjük. Mi az ennek megfelelő előfordulási mátrix? Mi az ennek megfelelő páros gráf?

115. [*M20*] Ha B a G gráfnak az előfordulási mátrixa, akkor mi a $B^T B$ és BB^T szimmetrikus mátrixok jelentősége?

116. [*M17*] Írja le az éleit a teljes, páros, r-egyenletes $K_{m,n}^{(r)}$ hipergráfnak.

117. [*M22*] Hány, egymással nem izomorf 1-egyenletes hipergráfnak van m éle és n csúcsa? (Többszörös él előfordulhat.) Soroljuk fel az összeset $m = 4$ és $n = 3$ esetén.

118. [*M20*] A „hipererdő” egy olyan hipergráf, ami körmentes.

Ha egy hipererdőnek m éle, n csúcsa, és p komponense van, akkor mennyi lesz a csúcsai fokszámának összege?

119. [*M18*] Mely hipergráf feleltethető meg a (60)-nak a $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ záró tagot elhagyva?

120. [*M20*] Definiáljuk az *irányított hipergráfot* az irányított gráfok általánosításával.

121. [*M19*] Legyen adva a $H = (V, E)$ hipergráf, és legyen $I(H) = (V, F)$, ahol F a H összes maximálisan független halmazainak családja.

Fejezzük ki $\chi(H)$-t a $|V|$, $|F|$, és az $\alpha(I(H)^T)$ segítségével.

122. [*M24*] Találjunk egy maximálisan független halmazt és egy minimális színezést a következő hármas rendszereknek:

(a) (56) hipergráf; (b) a Petersen gráf duálisa.

123. [*17*] Mutassuk meg, hogy a $K_n \square K_n$ optimális színezései ekvivalensek egy híres kombinatorikai probléma megoldásával.

124. [*M22*] Mi a *Chvátal-gráf* (2(f) ábra) színezési száma?

125. [*M48*] Milyen g értékhez van 4-reguláris, 4-színezési számú, g kerületű gráf?

126. [*M22*] Találjunk optimális színezést a $C_m \boxtimes C_n$ „*király alapú tórusznak*”, ha $m, n \geq 3$.

127. [*M22*] Bizonyítsuk be, hogy (a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ és (b) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ ha G n-ed rendű gráf, és találjunk olyan gráfokat, ahol egyenlőség áll fenn.

128. [*M18*] Fejezzük ki $\chi(G \square H)$-t a $\chi(G)$ és $\chi(H)$-vel, ahol G és H gráfok.

129. [*23*] Írjuk le a 8×8-as (37) *királynő gráfnak* a maximális klikkjeit.

130. [*M20*] Hány maximális klikkje van egy teljes, k-paritású gráfnak?

131. [*M20*] Legyen $N(n)$ az n csúcsú gráf maximális klikkjeinek legnagyobb lehetséges száma. Bizonyítsuk be, hogy $3^{\lfloor n/3 \rfloor} \leq N(n) \leq 3^{\lceil n/3 \rceil}$.

132. [*M20*] G-t *alig színezhetőnek* nevezzük, ha $\chi(G) = \omega(G)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G \boxtimes H) = \chi(G)\chi(H)$ ha G és H alig színezhetőek.

133. [*21*] Az itt látható „*zenei gráf*” egy kellemes lehetőséget ad arra, hogy áttekintsünk számos definíciót, amit ebben a részben adtunk meg, hiszen a tulajdonságai könnyen elemezhetők. Határozzuk meg a (a) *rendjét*; (b) *méretét*; (c) *kerületét*; (d) *átmérőjét*; (e) $\alpha(G)$ *független-*

lenségi számát; (f) $\chi(G)$ *színezési számát*; (g) $\chi(L(G))$ *él-színezési számát*; (h) $\omega(G)$ *klikk számát*; (i) algebrai alakját jól ismert kisebb gráfok szorzataként.

Mekkora a mérete (j) egy *minimum csúcs lefedésnek*? (k) a *maximális illesztésnek*?

A G gráf (l) reguláris? (m) síkgráf? (n) összefüggő? (o) irányított? (p) szabad fa? (q) Hamilton-gráf?

IDE ÁBRA KELL

134. [*M22*] Hány *automorfizmusa* van a zenei gráfnak?

135. [*F26*] Tegyük fel, hogy egy zeneszerző tesz egy *véletlen lépést* a *zenei gráfban* a C csúcsból kiindulva, és utána minden lépésnél 5 ehhez teljesen hasonló döntést hoz. Mutassuk meg, hogy páros számú lépés után, több az esélye, hogy a séta a C csúcsban fejeződik be, mint bármely más csúcsban. Egy 12 lépéses sétánál mennyi a pontos valószínűsége annak, hogy a séta a C-ből C-be megy?

136. [*HM23*] Egy *Cayley irányított gráf* egy olyan irányított gráf, amelynek V csúcsai egy adott csoport elemei, és amelynek irányított élei $v \longrightarrow v\alpha_j$, ahol $1 \leq j \leq d$ és minden csúcsa v, ahol $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ fix elemek a csoportban.

A *Cayley-gráf* egy olyan Cayley irányított gráf, ami egyben gráf is. A *Petersen-gráf* Cayley-gráf?

137. [*M25*] (*Általánosított tóruszok.*) Egy $m \times n$-es tórusz tekinthető a sík egy felosztásának. Képzeljük el például, hogy az (50)-beli 3×4-es tórusz végtelen sok másolata el van helyezve egy rácsban, ahogy ez a fenti ábra bal oldalán látható; egy megadott csúcsból tudunk mozogni északra, délre, keletre, vagy nyugatra a tórusz egy másik csúcsába. A csúcsok itt meg vannak számozva, tehát egy észak lépés a v-ből a $(v+4) \mod 12$-be megy, és egy kelet lépés $(v+3) \mod 12$-be stb. A jobb oldali ábra ugyanazt a tóruszt mutatja más alakú elrendezéssel; *Bármely* utat választjuk a 12 lehetséges útból: $\{0, 1, \ldots, 11\}$, az ki fogja parkettázni a síkot, pontosan ugyanazzal az alapul vett gráffal.

Ha egy alakzatnak az eltolt másolatát alkalmazzuk, akkor is ki fogják parkettázni a síkot, ha *általánosított* tóruszt alkotnak, amennyiben az (x, y) cella ugyanannak a csúcsnak felel meg, mint az $(x+a, y+b)$ és $(x+c, y+d)$ cellák, ahol (a, b) és (c, d) egész vektorok, valamint $n = ad-bc > 0$. Az általánosított tórusznak n pontja lesz. Ezek az (a, b) és (c, d) vektorok $(4, 0)$ és $(0, 3)$ értékűek a fenti 3×4-es példában; amikor pedig az értékük $(5, 2)$ és $(1, 3)$, akkor

IDE ÁBRA KELL (67)

Itt $n = 13$, és egy észak lépés v-ből $(v+4) \mod 13$-ba megy; egy kelet lépés $(v+1) \mod 13$-be. Bizonyítsuk be, hogy ha $lnko(a, b, c, d) = 1$, akkor az ilyen általánosított tóruszok csúcsaihoz mindig hozzá lehet rendelni $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ egész címkéket oly módon, hogy a v szomszédai $(v \pm p) \mod n$ és $(v \pm q) \mod n$ valamilyen p és q egész értékekre.

138. [*F27*] A 137. gyakorlatot folytatva, mi lehet egy jó módszer a k-dimenziós $x = (x_1, \ldots, x_k)$ csúcsok egy címkézéséhez, amikor adottak α_j egész vektorok úgy, hogy minden x vektor ekvivalens $x + \alpha_j$-vel, ahol $1 \leq j \leq k$?

Illusztráljuk a módszert a $k = 3$, $\alpha_1 = (3, 1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 1)$, $\alpha_3 = (1, 1, 3)$ esetben.

139. [*M22*] Legyen H egy h-ad rendű fix gráf, és legyen $\#(H{:}G)$ azon előfordulások száma, amikor a H előfordul egy adott G gráf *indukált részgráfjában.* Ha G-t véletlenszerűen választjuk ki a $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ csúcsú, összesen $2^{n(n-1)/2}$ gráf közül, mennyi az átlagos értéke $\#(H{:}G)$-nek, ha H (a) K_h; (b) P_h, ahol $h > 1$; (c) C_h, ahol $h > 2$; (d) tetszőleges?

140. [*M30*] A G gráfot *arányosnak* nevezzük, ha az indukált részgráfjainak száma $\#(K_3{:}G)$, $\#(\overline{K_3}{:}G)$, és $\#(P_3{:}G)$, amelyek mindegyike megfelel a 139. gyakorlatban kiszámolt értékeknek.

- Mutassuk meg, hogy a W_8 *kerék gráf* a 88. gyakorlatban arányos ebben az értelemben.
- Bizonyítsuk be, hogy G pontosan akkor arányos, ha $\#(K_3{:}G) = \frac{1}{8}\binom{n}{n3}$ és a csúcsainak $d_1 \ldots d_n$ *foksorozata* kielégíti a következő egyenlőségeket:

$$d_1 + \cdots + d_n = \left(\binom{n}{2}\right), \qquad d_1^2 + \cdots + d_n^2 = \frac{n}{2}\left(\binom{n}{2}\right).(*)$$

141. [*26*] A 140(b) gyakorlatban leírt feltétel csak akkor áll fenn, ha $n \mod 16 \in \{0, 1, 8\}$. Írjunk programot az összes olyan arányos gráf megtalálására, aminek $n = 8$ csúcsa van.

142. [*M30*] (S. Janson és J. Kratochvíl, 1991.) Bizonyítsuk be, hogy egy 4 vagy több csúcsú G gráf sem lehet „túlarányos" abban az értelemben, hogy a $(H{:}G)$ részgráf száma megegyezik a 139. gyakorlatban kiszámolt értékkel mind a 11 lehetséges nemizomorf 4-ed rendű H gráfban. *Útmutató:* $(n-3)\#(K_3{:}G) = 4\#(K_4{:}G) + 2\#(K_{1,1,2}{:}G) + \#(K_1 \oplus K_3{:}G)$.

143. [*M25*] Legyen A tetszőleges mátrix, melynek $m > 1$ *különböző sora*, és $n \geq m$ oszlopa van. Bizonyítsuk be, hogy legalább egy oszlopát törölhetjük az A-nak anélkül, hogy a művelet után 2 megegyező sor keletkezne.

144. [*21*] Legyen X egy $m \times n$-es mátrix, amelynek x_{ij} elemei 0, 1, vagy $*$. Az X mátrix *kiegészítése* egy olyan X^* mátrix, ahol minden $*$-ot 0-ra vagy 1-re cserélünk ki. Bizonyítsuk be, hogy a lehető legkevesebb sorral rendelkező kiegészítő mátrix meghatározásának problémája ekvivalens egy gráf *színezési számának* megkeresésével.

145. [*25*] (R. S. Boyer és J. S. Moore, 1980.) Tegyük fel, hogy az $a_1 \ldots a_n$ tömb tartalmaz egy *gyakori elemet*, nevezetesen egy értéket, ami több, mint $n/2$ alkalommal előfordul. Készítsünk olyan algoritmust, ami megtalálja az elemet kevesebb, mint n összehasonlítással. *Útmutatás*: Ha $n \geq 3$ és $a_{n-1} \neq a_n$, akkor az $a_1 \ldots a_n$ gyakori eleme egyben gyakori eleme az $a_1 \ldots a_{n-2}$-nek is.

Yet now and then your men of wit
Will condescend to take a bit.
– JONATHAN SWIFT, *Cadenus and Vanessa* (1713) [?]

If the base 2 is used the resulting units may be called binary digits,
or more briefly bits, a word suggested by J. W. Tukey.
– CLAUDE E. SHANNON, (1948) [?]

bit (bit), n ... [A] boring tool ...
JESS STEIN AND LAURENCE URDANG *Random House Dictionary of the English Language* (1966) [?]

7.1. Egyesek és nullák

7.1.1. Logikai alapok

Let us conceive, then, of an Algebra
in which the symbols x, y, z, &c. admit indifferently of
the values 0 and 1, and of these values alone.
– GEORGE BOOLE *An investigation of the Laws of Thought* (1854) [?, 2. fejezet 15. alfejezete]

'Contrariwise,' continued Tweedledee, 'if it was so, it might be;
and if it were so, it would be;
but as it isn't, it ain't. That's logic.'
– LEWIS CARROLL *Through the Looking Glass* (1871) [?, 4. fejezet]

Boole [?, ?]

Jevons [?, 69. &]

$$(x \vee y) \wedge z \;=\; (x \wedge z) \wedge (y \vee z)\,; \tag{1}$$

$$(x \wedge y) \vee z \;=\; (x \vee z) \wedge (y \vee z)\,. \tag{2}$$

Peirce [?]
Peirce [?, 32. oldal]
Megarai Philo [?]
Galen [?]
Bocheński [?]
Scheffer [?]
Peirce [?, 4. kötet &&12–20., 264. oldal]

Alapvető azonosságok.
Morgan [?]
Ockham [?]
Burley [?]

7.1. táblázat.
A TIZENHAT KÉTVÁLTOZÓS LOGIKAI MŰVELET

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\bar{\supset}$	
0 0 1 1	x	L	
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\bar{\subset}$	
0 1 0 1	y	R	
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy
1 0 0 0	y	$\bar{\vee}$	
1 0 0 1	$x \equiv y,\ x \leftrightarrow y,\ x \Leftrightarrow y$	$\equiv$	ekvivalencia
1 0 1 0	$\bar{y},\ \neg y,\ !y,\ \sim y$	$\bar{\mathsf{R}}$	
1 0 1 1	$x \vee \bar{y}, x \subset y, x \Leftarrow y,\ [x \geq y], x^y$	$\subset$	ha
1 1 0 0	$\bar{x},\ \neg x,\ !x,\ \sim x$	$\bar{\mathsf{L}}$	
1 1 0 1	$\bar{x} \vee y, x \supset y, x \Rightarrow y,\ [x \leq y], y^x$	$\supset$	ha ... akkor
1 1 1 0	$\bar{x} \vee \bar{y},\ \overline{x \wedge y},\ x \bar{\wedge} y,\ x\|y$	$\bar{\wedge}$	
1 1 1 1	1	$\top$	

n-változós függvények.

Zsegalkin [?]
Peirce [?]
Bernays [?]
Quine [?]
McCluskey [?]
Fišer és Jan Hlavička [?]

Q tétel.

Bizonyítás. Quine [?] A ■

Q következmény.

Kielégíthetőség.

Egyszerű speciális esetek.

H tétel.

Bizonyítás. Horn [?, 7. lemma] A ■

C algoritmus

Dowling és Gallier [?]

K tétel.

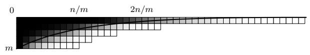
Bizonyítás. Krom [?, 2.2. következmény] A ■

Tarjan [?]
Knuth [?]

Mediánok.

$$\langle xyz \rangle \ = \tag{43}$$

7.6. ábra. THE DIGRAPH . . . HIBÁS ÁBRA.



7.7. ábra. INTERVALS – HIBÁS ÁBRA.

Post [?]

P tétel.

Bizonyítás. A ■

Miiller [?]

Medián algebrák és medián gráfok.

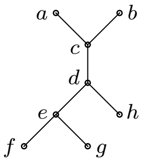
M lemma.

Bizonyítás. A ■

G tétel.

Bizonyítás. A ■

Medián címkék.



(63)

C tétel.

Bizonyítás. A ■

C következmény.

Bizonyítás. A ■

Jha [?]

Hagauer [?]

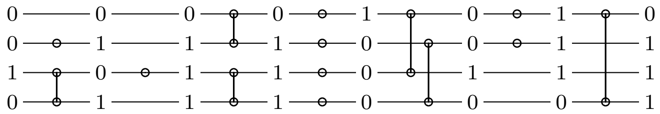
H algoritmus.

7.2. táblázat.
LABELS —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x\wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x\wedge\bar{y},\ x\not\supset y,\ [x>y],\ x\dot{-}y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x}\wedge y,\ x\not\subset y,\ [x<y],\ y\dot{-}x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x\oplus y,\ x\not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x\vee y,\ x\vert y$	$\vee$	vagy

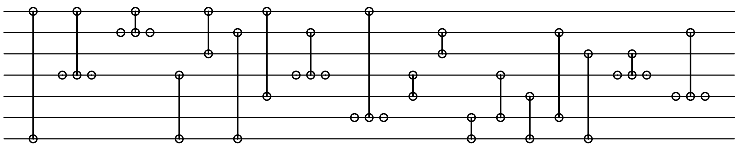
I szubrutin.

***Medián halmazok.**
S tétel.



(69)

F tétel.
Bizonyítás. Feder [?] Wiedemann [?]



(74)

F következmény.
Bizonyítás. ■
Hell [?]

Küszöbfüggvények.
McCullough és Pitts [?]
Chow [?]
Muroga [?]

Szimmetrikus Boole-függvények.
Minnick [?]
Sasaki [?]

Kényszerítő függvények.
Kauffman [?]

Mennyiségi meggondolások.

7.3. táblázat.
BOOLEAN ... n —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy

7.4. táblázat.
BOOLEAN ... OF VARIABLES —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy

7.5. táblázat.
BOOLEAN ... /PERMUTATION —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy

GYAKORLATOK

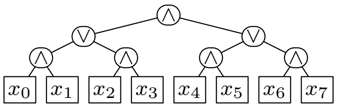
1. [*15*] (Lewis Carroll)

2. [*17*]

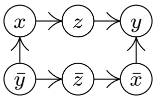
...

66. Garcia-Molina és Barbara [?]

...

24. 

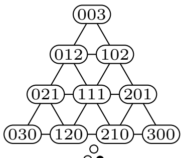
...

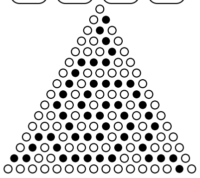
56. 

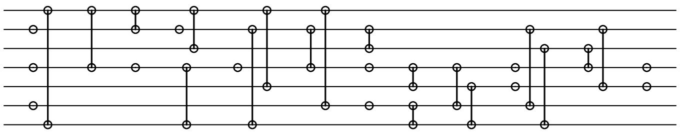
...

57. [*M25*] Lamport [?] Garcia-Molina [?]

58. [*M25*]

59. 

 ...

88. 

89.

90.

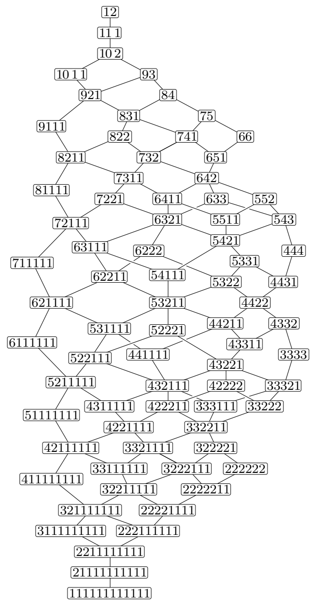
91. Ajtai [?]

...

109.

...

116.



7.8. ábra. OPTIMUM — HIBÁS ÁBRA.

...

133. [*20*]

By and large the minimization of switching components
in designing economical logic circuits.
– H. A. CURTIS *A New Approach to the Design of Switching Circuits* (1854) [?, 161. és 162. oldal]

He must be a great calculator indeed who succeeds.
Simplify, simplify.
– HENRY D. THOREAU, *Walden; or, Life in the Woods* (1854) [?, 2. fejezet 17. &]

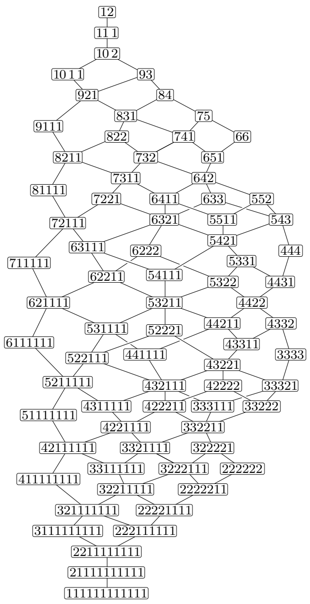
7.1.2. Boole-függvények kiértékelése

$$(x_1 \wedge x_2) \ldots \tag{1}$$

Optimális láncok az $n = 4$ esetre.
L algoritmus.

***Kiértékelés minimális memóriával.**

***A minimális költség meghatározása.**
Aiken [?]



7.9. ábra. 7.9. ábra. OPTIMUM — HIBÁS ÁBRA.

7.6. táblázat.
7.6. táblázat. THE NUMBER —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{}y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x \vert y$	$\vee$	vagy

Hellerman [?]
Liang [?]

***Az $n = 5$ eset.**

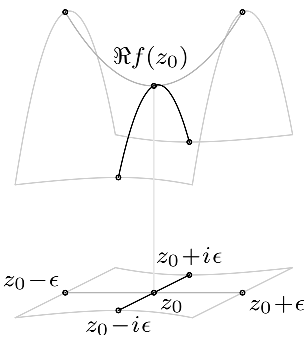
***Többszörös kimenetek.**
Redkin [?]

***Aszimptotikus tények.**
S tétel.
Bizonyítás. A ■
Shannon [?]

7.7. táblázat.

7.7. táblázat. THE NUMBER OF FIVE —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy



7.10. ábra. 7.10. ábra. OPTIMUM — HIBÁS ÁBRA.

Lupanov [?]

L tétel.

Bizonyítás. A ■

Jó lánc szintetizálása.

Wood [?]

Tic-tac-toe játék.

Keister [?]

Babbage [?]

Funkcionális felbontás.

Ashenhurst [?]

Shen [?]

***Parciális függvények felbontása.**

Hight [?]

Boros [?]

Curtis [?]

Curtis [?]

7.8. táblázat.

7.8. táblázat. THE NUMBER OF 4-VARIABLE —- NEM JÓ TÁBLÁZAT

igazságtábla	jelölések	operátor szimbóluma	nevek
0 0 0 0	0	$\perp$	ellentmondás
0 0 0 1	$xy,\ x \wedge y,\ x\&y$	$\wedge$	konjunkció; és
0 0 1 0	$x \wedge \bar{y},\ x \not\supset y,\ [x > y],\ x \dot{-} y$	$\overline{\supset}$	
0 0 1 1	x		
0 1 0 0	$\bar{x} \wedge y,\ x \not\subset y,\ [x < y],\ y \dot{-} x$	$\overline{\subset}$	
0 1 0 1	y		
0 1 1 0	$x \oplus y,\ x \not\equiv y,\ x\hat{\ }y$	$\oplus$	
0 1 1 1	$x \vee y,\ x\|y$	$\vee$	vagy

Karp [?]

n **nagyobb értékei.**
Brayton [?]
Micheli [?]

Alsó korlátok.
Blum [?]
Stockmeyer [?]
Büchi [?, ?]
Stockmeyer [?]

További olvasnivaló.
Wegener [?]
Razborov [?, ?]

GYAKORLATOK

1. [*24*]

2. [*21*]

...

88. [*25*]

MEGOLDÁSOK

A 7.0. alfejezet gyakorlatainak megoldása

1. [?]

2. [?]
[?] [?]
[?] ...

8. Langford [?]
Baron [?]
Knuth [?]
Ibn [?]
Doutte [?]
Ahrens [?]
Andersen [?]
Sauveur [?]
Mann [?]

14.

15. Brown [?]
Ganter [?]
Weisner [?]
McKay [?]
Wang [?]
Todorov [?]

16. Brualdi [?, §8.2.]

17.

18. Rao [?]

19. Moore [?, ?]
[?, 12. és 13. fejezet]

20.

21.

22. Bruck [?, ?]
[?]
Hsiao [?]
[?]
[?]
[?]
Morris [?]
Cohen [?]
Grant [?]
Kempe [?]
Dudeney [?]
Redei [?]
Szele [?]
Landau [?]
Harary [?]
Brown, Brown [?, ?]
Aschbacher [?]

...

69. Először legyen $\texttt{BEFOK}(v) \leftarrow 0$ minden v csúcsra. Utána alkalmazzuk (??)-et minden v-re, és legyen $u \leftarrow \texttt{TIP}(\mathrm{a})$ és $\texttt{BEFOK}(u) \leftarrow \texttt{BEFOK}(u) + 1$ a mini-algoritmus második sorában.

Ahhoz, hogy az SGB formátumban elvégezzük a „minden v-re" műveletet, előbb legyen $v \leftarrow \texttt{CSÚCSOK}(g)$; majd, amíg $v < \texttt{CSÚCSOK}(g) + \texttt{N}(g)$, végezzük el a műveletet, és legyen $v \leftarrow v + 1$.

70. A B1-es lépés egyszer kerül végrehajtásra (de $O(n)$ időbe kerül).

A (B2, B3, ..., B8) lépések egyenként $(n+1, n, n, m+n, m, m, n)$ alkalommal kerülnek végrehajtásra, mindegyik $O(1)$ költséggel.

71. Sok lehetőség van. Mi itt 32-bites mutatókat alkalmazunk, és mindegyik relatív egy `Sor` szimbolikus címhez, ami az `Adat_Szegmens`-ben található.

A következő deklaráció segítségével alakíthatjuk ki azokat a szabályokat, hogy alap SGB adatstruktúrával tudjunk dolgozni.

```
VSIZE IS 32 ;ASIZE IS 24          Csomópont méretek
ARCS IS 0 ;COLOR IS 8 ;LINK IS 12 Eltolások a csúcs mezőkben
TIP IS 0 ;NEXT IS 4               Eltolás az irányított él mezőben
arcs GREG Pool+ARCS ;color GREG Pool+COLOR ;link GREG Pool+LINK
tip GREG Pool+TIP ;next GREG Pool+NEXT
u GREG ;v GREG ;w GREG ;s GREG ;a GREG ;mone GREG -1
```

`AlgB`	`BZ`	`n,Success`	Kilépés, ha a gráf nullgráf.
	`MUL`	`$0,n,VSIZE`	<u>*B1. Kezdőértékek megadása.*</u>
	`ADDU`	`v,v0,$0`	$v \leftarrow v_0 + n$.
	`SET`	`w,v0`	$w \leftarrow v_0$.
`1H`	`STT`	`mone,color,w`	$COLOR(w) \leftarrow -1$.
	`ADDU`	`w,w,VSIZE`	$w \leftarrow w + 1$.
	`CMP`	`$0,w,v`	
	`PBNZ`	`$0,1B`	Repeat until $w = v$.
`0H`	`SUBU`	`w,w,VSIZE`	$w \leftarrow w - 1$.
`3H`	`LDT`	`$0,color,w`	<u>*B3. Ha szükséges, w színezése.*</u>
	`PBNN`	`$0,2F`	To B2 if $COLOR(\mathrm{w}) \geq 0$.
	`STCO`	`0,link,w`	$COLOR(w) \leftarrow 0$, $LINK(w) \leftarrow \Lambda$.
	`SET`	`s,w`	$s \leftarrow w$.
`4H`	`SET`	`u,s`	<u>*B4. Tegyük ⇒ u-t a verembe.*</u> Set $u \leftarrow s$.
	`LDTU`	`s,link,s`	$s \leftarrow LINK(s)$.
	`LDT`	`$1,color,u`	
	`NEG`	`$1,1,$1`	$\$1 \leftarrow 1 - COLOR(u)$.
	`LDTU`	`a,arcs,u`	$a \leftarrow ARCS(u)$.
`5H`	`BZ`	`a,8F`	<u>*B5. Végeztünk u-val?*</u> Ha $a = \Lambda$, menjünk B8-ra.
`5H`	`LDTU`	`v,tip,a`	$v \leftarrow TIP(a)$.
`6H`	`LDT`	`$0,color,v`	<u>*B6. v feldolgozása.*</u>
	`CMP`	`$2,$0,$1`	(A program itt meglehetősen okos)
	`PBZ`	`$2,7F`	To B7 if $COLOR(v) = 1 - COLOR(u)$.
	`BNN`	`$0,Failure`	Nem sikerül, ha $COLOR(v) = COLOR(u)$.
	`STT`	`$1,color,v`	$COLOR(v) \leftarrow 1 - COLOR(u)$.
	`STTU`	`s,link,v`	$LINK(v) \leftarrow s$.
	`SET`	`s,v`	$s \leftarrow v$.
`7H`	`LDTU`	`a,next,a`	<u>*B7. Ciklus a szerint*</u>. Legyen $a \leftarrow NEXT(a)$.
	`PBNZ`	`a,5B`	To B5 if $a \neq \Lambda$.
`8H`	`PBNZ`	`s,4B`	<u>*B8. A verem nem üres?*</u> Ha $s \neq \Lambda$, menj B4-re.
`2H`	`CMP`	`$0,w,v0`	<u>*B2. Kész?*</u>
	`PBNZ`	`$0,0B`	Ha $w \neq v_0$, csökkentsük w-t és menjünk B3-ra.
`Siker`	`LOC`	`@`	(Sikeres befejezés) ■

72. (a) Ez a feltétel tisztán invariáns marad, amikor a csúcs bekerül a verembe, vagy kikerül onnan.

(b) A v csúcs ki lett már színezve, de még nincs felfedezve, mivel minden felfedezett csúcs szomszédai már megfelelő színűek.

(c) Éppen azelőtt a lépés előtt, mielőtt beállítjuk $s \leftarrow v$-t a B6-os lépésben, legyen `SZÜLŐ`$(v) \leftarrow u$, ahol `SZÜLŐ` egy új segédmező. Továbbá, mielőtt sikeresen befejeződne a működés ebben a lépésben, tegyük a következőt: „Ismétlődően tegyük a kimenetre `NÉV`(u)-t, és legyen $u \leftarrow$`SZÜLŐ`(u), amíg $u =$`SZÜLŐ`(v); majd tegyük kimenetre `NÉV`(u)-t és `NÉV`$(v)(v)$-t.”

73. K_{10}. (Továbbá, a *véletlen_gráf*$(10, 100, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ a J_{10}.)

74. A *rosszaság*-nak 22 a kifoka; nincs másik olyan csúcs, aminek a kifoka > 20.

75. Legyenek az $(n_1, n_2, n_3, n_4, p, w, o)$ paraméterek rendre
(a) $(n, 0, 0, 0, -1, 0, 0)$;
(b) $(n, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$;
(c) $(n, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$;
(d) $(n, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$;
(e) $(n, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$;
(f) $(n, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
(g) $(m, n, 0, 0, 1, 0, 0)$;
(h) $(m, n, 0, 0, 1, 2, 0)$;
(i) $(m, n, 0, 0, 1, 3, 0)$;
(j) $(m, n, 0, 0, -1, 0, 0)$;
(k) $(m, n, 0, 0, 1, 3, 1)$;
(l) $(n, 0, 0, 0, 2, 0, 0)$;
(m) $(2, -n, 0, 0, 1, 0, 0)$.

76. Igen, például a 75(c) válaszban a C_1 és C_2-ben. (De valódi hurok előfordulhat a $p < 0$ esetben, hiszen az $x \longrightarrow y = x + k\delta$ irányított élek $k = 1, 2, \ldots$ esetén generálásra kerülnek egészen addig, amíg y kilép a tartományból, vagy $y = x$.)

77. Tegyük fel, hogy x és y olyan csúcsok, melyekre igaz, hogy $d(x, y) > 2$. Így $x \not\!\!-\, y$; és ha v bármely más csúcs, akkor vagy $v \not\!\!-\, x$, vagy $v \not\!\!-\, y$. Ezek az összefüggések $\overline{G}$-ban megengednek bármely két u és v csúcs között egy legfeljebb 3 hosszúságú utat.

78. (a) Az élek száma $\binom{n}{2}/2$, egésznek kell lennie.
A legkisebb példa K_0, K_1, P_4, C_5, és IDE ÁBRA KELL.

(b) Ha q egy tetszőleges páratlan szám, akkor $u - v$ akkor és csakis akkor, ha $\varphi^q(u) \not\!\!-\, \varphi^q(v)$. Ezért φ^q-nek nem lehet két fixpontja, és nem lehet benne 2-kör.

(c) V-nek egy ilyen permutációja egyben definiál egy újabb $\widehat{\varphi}$ permutációt a K_n élein, mivel $\{u, v\} \mapsto \widehat{\varphi}(\{u, v\}) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}$, és könnyen belátható, hogy a $\widehat{\varphi}$ köreinek a hossza mind 4 többszöröse.

Ha $\widehat{\varphi}$-ben t kör van, akkor 2^t komplementerével megegyező gráfot kapunk úgy, hogy minden körnek az éleit váltakozó színnel színezzük.

(d) Ez esetben φ-nek van egy egyedi v fixpontja, és $G' = G \setminus v$ a komplementerével megegyező. Tegyük fel, hogy φ-ben r kör van (v)-n kívül; ekkor $\widehat{\varphi}$-ben r kör van, amely magába foglalja azokat az éleket, amelyek érintik a v csúcsot, és 2^r módon terjeszthető ki a G' gráf egy G gráffá.

Hivatkozások: Sachs [?] és Ringel [?].

79. 1. megoldás (H. Sachs) $\varphi = (1\,2\,\ldots\,4k)$ esetén: Legyen $u - v$, ha $u > v > 0$ és $u + v \bmod 4 \le 1$; ezzel együtt $0 - v$ ha $v \bmod 2 = 0$.

2. megoldás, $\varphi = (a_1\, b_1\, c_1\, d_1) \ldots (a_k\, b_k\, c_k\, d_k)$ esetén, ahol $a_j = 4j-3$, $b_j = 4j-2$, $c_j = 4j-1$, és $d_j = 4j$: Legyen $0 - b_j - a_j - c_j - d_j - 0$, ha $1 \le j \le k$, és $a_i - a_j - b_i - d_j - c_i - c_j - d_i - b_j - a_i$, ha $1 \le i < j \le k$.

80. (G. Ringel megoldása.) Legyen φ olyan, mint a 79. feladat 2. megoldásában. Legyen E_0 a $3k$ $b_j - a_j - c_j - d_j$ él, ha $1 \le j \le k$; legyen E_1 a $8\binom{k}{2}$ él $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ és $\{b_j, d_j\}$ között, ha $1 \le i < j \le k$; legyen E_2 a $8\binom{k}{2}$ él $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ és $\{a_j, c_j\}$ között, ha $1 \le i < j \le k$. Az (a) esetben, $E_0 \cup E_1$ 2 átmérőt ad; $E_0 \cup E_2$ pedig 3 átmérőt. A (b) eset hasonló, de itt hozzáadjuk a következő $2k$ élt: $b_j - 0 - d_j$-t E_1-hez, $a_j - 0 - c_j$-t E_2-höz.

81. $\vec{C_3}$, $\vec{K_3}$, $D = \circ\!\longrightarrow\!\circ\!\rightleftarrows\!\circ$, és ... IDE KELL MÉG EGY ÁBRA

(A D irányított gráf D^T *fordítottját* megkaphatjuk úgy, hogy irányított éleinek megfordítjuk az irányát.

16, egymással nem izomorf *egyszerű, 3-ad rendű, irányított, körmentes gráf* van, közülük 10 *önfordított*, beleértve $C_{\vec{3}}$-t és $K_{\vec{3}}$-t.)

82. (a) Igaz, definíció szerint.

(b) Igaz: Ha minden csúcsnak d szomszédja van, akkor minden u—v élnek $d-1$ u—w szomszédja van és $d-1$ w—v szomszédja.

(c) Igaz: $\{a_i, b_j\}$-nek $m+n-2$ szomszédja van, ha $0 \le i < m$ és $0 \le j < n$.

(d) Hamis: $L(K_{1,1,2})$-nek 5 csúcsa és 8 éle van.

(e) Igaz.

(f) Igaz: A nem szomszédos élek csak: $\{0,1\} \not- \{2,3\}$, $\{0,2\} \not- \{1,3\}$, $\{0,3\} \not- \{1,2\}$.

(g) Igaz,minden $n > 0$.

(h) Hamis, feltéve ha G-ben nincs *izolált csúcs*.

83. Ez a *Petersen-gráf* lásd Kowalewski cikkét [?].

84. Igen: Legyen $\varphi(\{a_u, b_v\}) = \{a_{(u+v) \mod 3}, b_{(u-v) \mod 3}\}$, ahol $0 \le u, v < 3$.

85. Legyenek a csúcsok fokszámai $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Ekkor G-nek $\frac{1}{2}(d_1 + \cdots + d_n)$, $L(G)$-nek pedig $\frac{1}{2}(d_1(d_1-1) + \cdots + d_n(d_n-1))$ éle van. Így G-nek és $L(G)$-nek pontosan n éle van pontosan akkor, ha $(d_1-2)^2 + \cdots + (d_n-2)^2 = 0$. Ebből következően az **??**. gyakorlat megadja a választ.

Lásd Menon cikkét [?].

86. Ha **ÁBRA KELL**, akkor **ÁBRA KELL** $= L(G)$.

87. (a) Igen, könnyedén. Valójában, Brooks bebizonyította [?], hogy *minden* összefüggő gráf, amelynek a maximális csúcs fokszáma $d > 2$, d-színezhető, kivéve a K_{d+1} teljes gráfot.

(b) Nem. Alapvetően csak egy módja van, hogy 3-színezzük a belső 5-kör éleit a 2(e) ábrán; ez ellentmondásban van a belső 5-körrel. Petersen 1898-ban bebizonyította.

88. Egy kör nem használja a középső csúcsot, és van $(n-1)(n-2)$ kör, ami igen (nevezetesen van egy minden, a szélén lévő különböző csúcsokból rendezett párban.) A C_0-t nem számítjuk bele.

89. Mindkét oldal egyenlő rendre a következő mátrixokkal:

$$\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & J & J \\ J & B & J \\ J & J & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & J & J \\ O & B & J \\ O & O & C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & O & O \\ J & B & O \\ J & J & C \end{pmatrix}.$$

90. K_4 és $\overline{K_4}$; $K_{1,1,2}$ és $\overline{K_{1,1,2}}$; $K_{2,2} = C_4$ és $\overline{K_{2,2}}$; $K_{1,3}$ és $\overline{K_{1,3}}$; $K_1 \oplus K_{1,2}$ és a komplementere; minden K_α gráf generált (47) alapján. A $P_4 = \overline{P_4}$ hiányzik. (Egy generált gráf minden összefüggő részgráfjának átmérője ≤ 2; W_5 generált, de W_6 nem.)

91. IDE ÁBRÁK KELLENEK (a) 1; (b) 2; (c) 3; (d) 1; (e) 3; (f) 4; (g) 5.

(Általánosan $K_{2 \vartriangle H = (K_2 \,\square\, H) \cup (K_2 \otimes \overline{H})}$,és $K_2 \circ H = H — H$. Így a $K_{2 \vartriangle H = K_2 \,\square\, H}$ és a $K_2 \circ H = K_2 \boxtimes H$ egyenlőségek pontosan akkor teljesülnek, ha H teljes gráf.)

Hivatkozások: A $G \square H$ és a $G \boxtimes H$ *jelölés* szépen megfeleltethető az (a) és (c) jelölésének, ahogy ezt Nešetřil [?] javasolta. A $G \times H$ analóg jelölés szintén csábító a (b)-re; de ezt itt nem vezettük be, hiszen írók százai használták a $G \times H$ jelölést a $G \square H$-ra.

92. IDE ÁBRÁK KELLENEK (a) ; (b) ; (c) ; (d) ; (e) .

93. $K_m \boxtimes K_n = K_m \circ K_n \cong K_{mn}$.

94. Nem; ezek $K_{26} \square K_{26} \square K_{26} \square K_{26} \square K_{26}$ indukált részgráfjai.

95. (a) $d_u + d_v$. (b) $d_u d_v$. (c) $d_u d_v + d_u + d_v$. (d) $d_u(n - d_v) + (m - d_u)d_v$. (e) $d_u n + d_v$.

96. (a) $A \square B = A \otimes I + I \otimes B$. (b) $A \boxtimes B = A \square B + A \otimes B$. (c) $A_{\vartriangle B = A \otimes J + J \otimes B - 2A \otimes B}$. (d) $A \circ B = A \otimes J + I \otimes B$.

Az (a), (b), és (d) formulák tetszőleges *irányított gráfra* és *multigráfra* definiálják a *gráf szorzást*. A (c) *egyszerű irányított gráfok* esetén is igaz; de előfordulhatnak negatív elemek is, ha A és B tartalmaz > 1 értékeket.

Történelmi megjegyzés. A mátrixok direkt szorzatát gyakran *Kronecker szorzatnak* nevezzük, mivel Hensel elmondása szerint [?] Kronecker előadásain hallotta; Kronecker azonban soha nem publikált semmit róla. Az első ismert megjelenése Zehfuss cikkében [?] történt, aki bebizonyította, hogy $\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m$, ha $m = m'$ és $n = n'$. Az alapvető $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$, $(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'$, és $(A \otimes B)\_ = A\_ \otimes B\_$ formulák A-nak következménye lásd Hurwitz cikkét [?].

97. A szomszédsági mátrixokkal elvégezhető műveletek bizonyítják, hogy $(G \oplus G') \,\square\, H = (G \,\square\, H) \oplus (G' \,\square\, H)$; $(G \oplus G') \boxtimes H = (G \boxtimes H) \oplus (G' \boxtimes H)$; $(G \oplus G') \circ H = (G \circ H) \oplus (G' \circ H)$. Mivel $G \,\square\, H \cong H \,\square\, G$, $G \otimes H \cong H \otimes G$, és $G \boxtimes H \cong H \boxtimes G$, így vannak $G \,\square\, (H \oplus H') \cong (G \,\square\, H) \oplus (G \,\square\, H')$; $G \otimes (H \oplus H') \cong (G \otimes H) \oplus (G \otimes H')$; $G \boxtimes (H \oplus H') \cong (G \boxtimes H) \oplus (G \boxtimes H')$ jobb-disztributív szabályok is.

A lexikografikus szorzás kielégíti a $\overline{G \circ H} = \overline{G} \circ \overline{H}$ egyenlőséget; tehát $K_m \circ H = H — \cdots — H$, így $K_m \circ \overline{K}_n = K_{n,\ldots,n}$.

Továbbá, $G \circ K_n = G \boxtimes K_n$; $K_m \otimes K_n = \overline{K_m \,\square\, K_n} = L(K_{m,n})$.

98. kl komponens van (Az előző gyakorlat *disztributív szabályai*, valamint az alapján, hogy $G \,\square\, H$ és $G \boxtimes H$ összefüggő, ha G és H összefüggő).

99. Minden út (u, v)-ból (u', v')-be a $G \,\square\, H$-ban legalább $d_G(u, u')$ „G-lépést" és legalább $d_H(v, v')$ „H-lépést" használ; és ez a minimum elérhető. Hasonló érvelés mutatja, hogy $d_{G \boxtimes H}((u, v), (u', v')) = \max(d_G(u, u'), d_H(v, v'))$.

100. Ha G és H összefüggő, és mindkettőnek van legalább 2 csúcsa, $G \otimes H$ pontosan akkor nem összefüggő, ha G és H páros. A „ha" rész könnyű; megfordítva, ha van egy páratlan kör G-ben, akkor (u, v)-ból (u', v')-be eljuthatunk a következő módon: Először menjünk (u'', v')-be, ahol u'' G-nek egy megfelelő csúcsa. Majd menjünk páros számú lépést G-ben u''-ből u'-be, míg a H-ban a v' és az egyik szomszédja között ingázunk lásd Weichsel cikkét [?].

101. Válasszuk ki az u és v csúcsokat maximális fokszámmal. Ekkor $d_u + d_v = d_u d_v$ a 95. gyakorlat alapján; tehát vagy $G = H = K_1$, vagy $d_u = d_v = 2$. Utóbbi esetben, $G = P_m$ vagy C_m, és $H = P_n$ vagy C_n. $G \,\square\, H$ azonban összefüggő, tehát G vagy H mindenképpen páratlan, mondjuk G. Ekkor $G \,\square\, H$ páratlan, tehát H-nak mindenképpen páratlannak kell lennie; így $G = C_m$ és $H = C_n$, miközben m és n is páratlan. $C_m \,\square\, C_n$-ben a legrövidebb kör hossza $\min(m, n)$; $C_m \otimes C_n$-ben a hossza $\max(m, n)$; így $m = n$.

Megfordítva, ha $n \geq 3$ páratlan, akkor $C_n \,\square\, C_n \cong C_n \otimes C_n$, azon izomorfizmus alatt, amelynek alakja: $(u, v) \mapsto ((u + v) \mod n, (u - v) \mod n)$, ahol $0 \leq u, v < n$ lásd Miller cikkét [?].

102. $P_m \boxtimes P_n$. (Ez csak akkor *síkgráf*, ha $\min(m, n) \leq 2$ vagy $m = n = 3$.)

103. IDE JÓ ÁBRA KELL!

104. Az éleket kissé körülményes sorrendben kell létrehozni, hogy fenntartsuk a tabló alakját. Az r és i változók jelölik a kezdő - és utolsó sorát a t oszlopban. Például, a 103. gyakorlat második része a következőképpen kezdődik: $i \leftarrow 1$, $t \leftarrow 8$, $r \leftarrow 1$; majd $9 — 1$, $i \leftarrow 2$, $t \leftarrow 6$, $r \leftarrow 3$; utána $9 — 3$, $9 — 2$, $i \leftarrow 4$, $t \leftarrow 4$, $r \leftarrow 8$; végül $9 — 8$.

105. Vegyük észre, hogy $d_k \geq k$ pontosan akkor, ha $c_k \geq k$.

Ha $d_k \geq k$, akkor

$$c_1 + \cdots + c_k \;=\; k^2 + \min(k, d_{k+1}) + \min(k, d_{k+2}) + \cdots + \min(k, d_n);$$

ennek következtében a $d_1 + \cdots + d_k \leq c_1 + \cdots + c_k - k$ feltétel ekvivalens a következővel:

$$d_1 + \cdots + d_k \leq f(k), \quad \text{ahol} f(k) = k(k-1) + \min(k, d_{k+1}) + \cdots + \min(k, d_n) (*)$$

Ha $k \geq s$, akkor $f(k+1) - f(k) = 2k - d_{k+1} \geq d_{k+1}$; így $(*)$ fennáll $1 \leq k \leq n$ esetén pontosan akkor, ha fennáll $1 \leq k \leq s$-re.

A $(*)$ kifejezést Erdős és Gallai [?] fedezték fel. Használata nyilvánvalóan szükséges, ha az $\{1, \ldots, k\}$ és $\{k+1, \ldots, n\}$ közötti éleket tekintjük.

Legyen $a_k = d_1 + \cdots + d_k - c_1 - \cdots - c_k + k$, és tegyük fel, hogy $a_k > 0$ valamely $k \leq s$-re miután a H3 és H4 lépés életbe lépett. Legyen A_j, C_j, D_j, N, és S rendre az a_j, c_j, d_j, n, és s-nek megfelelő számok a H3 és H4 lépések *előtt*; így $N = n + 1$, $D_j = d_j + (0 \text{ or } 1)$, stb. Be akarjuk bizonyítani, hogy $A_K > 0$ valamely $K \leq S$ esetén. A H3 és H4 eltávolította a legalsó q cellát a t oszlopban, valamely $t \geq S$-re, az 1-től p. sor legjobboldali celláival együtt, ahol $q + p = D_N$. Így $A_j = a_j$, ha $1 \leq j \leq p$; továbbá $A_j = a_j$, ha $j \geq C_t$. Legyen k minimális $a_k > 0$-val, és legyen $d_k = d$; vegyük észre, hogy $c_k \leq d$. Ha $d > t$, akkor $k \leq p$, tehát $A_k = a_k > 0$. Ennélfogva feltehetjük, hogy $d = t - (0 \text{ or } 1)$, és $D_k = t$. Ha $k < j \leq C_t$, akkor $d_j \geq D_j - 1 = t - 1 \geq d - 1 \geq c_k - 1 \geq c_j - 1$.Ennek következtében $A_K = a_K \geq a_k$, ha $K = C_t$; feltehetjük, hogy $C_t > S$. Most $D_S = D_{S+1} = t$, tehát $S = t$. $k = t$ szintén fennáll; egyébként $c_k \geq S + 1 > t \geq d$.

Így $s = S$ és $d = t = c_t$. További vizsgálatok megmutatják, hogy az egyetlen lehetőség $A_t \leq 0$-ra $D_j = t + [j \geq t]$, ha $1 \leq j \leq N = t + 2$. A H algoritmus tényleg kicseréli ezt a „jó” sort egy „rosszra”; de $D_1 + \cdots + D_N = t^2 + 3t - 1$ páratlan.

106. Hamis az olyan triviális esetekben, mint $d \leq 1$ és $n \geq d + 2$. Egyébként igaz: Valójában, a H4-es lépés során generált első $n - 1$ él körmentes, tehát feszítőfát alkot.

107. A 78. gyakorlat φ permutációja megfeleltet egy d fokú csúcsot egy $n - 1 - d$ fokú csúcsnak. φ^2 pedig egy *automorfizmus*, ami két egyenlő fokú csúcsot párosít össze, kivéve egy lehetséges $(n-1)/2$ fokú fixpontot. (Megfordítva, a H algoritmus egy kissé bonyolult kiterjesztése egy komplementerével megegyező gráfot konstruál minden grafikus sorozatból, ami kielégíti a feltételeket, feltéve, hogy $d_{(n-1)/2} = (n-1)/2$ ha n páratlan. Lásd Clapham és Kleitman cikkét [?].

108. Feltehető, hogy $d_1^+ \geq \cdots \geq d_n^+$; a d_k^- befokoknak nem szükséges egy megadott sorrendben állniuk. Alkalmazzuk a H algoritmust a $d_1 \ldots d_n = d_1^+ \ldots d_n^+$ sorozatra, de változtassuk meg a következőket: A H2-es lépés a következő lesz: ‘„[Kész?] Sikeresen befejeződik, ha $d_1 = n = 0$; sikertelenül fejeződik be, ha $d_1 > n$.”’ Miután beállítottuk az i, t, és r értékét a H3-as lépésben, sikertelenül fejeződjön be, ha $d_n^- > c_1$; egyébként hajtsuk végre a H4-es lépést, ha $1 \leq j \leq d_n^-$, és legyen $n \leftarrow n-1$, majd térjünk vissza H2-höz. H5-ben hagyjuk el a „$c_j \leftarrow c_j - 1$”-t, és készítsük el a $k \to n$ irányított élt a k—n él helyett. Az M lemma és H következmény igazolja megközelítésünket.

(A 7.2.1.4–57. gyakorlat bebizonyítja, hogy ilyen irányított gráf pontosan akkor létezik, ha $d_1^- + \cdots + d_n^- = d_1^+ + \cdots + d_n^+$ és $d_1^- \ldots d_n^- = \{d_1', \ldots, d_n'\}$, ahol $d_1' \geq \cdots \geq d_n'$ és $d_1' \ldots d_n'$ *majorálva* van a $c_1 \ldots c_n = (d_1^+ \ldots d_n^+)^T$ *konjugált partícióval.* Nehezebb az az eset, amikor a $v \longrightarrow v$ hurok nem megengedett; lásd Fulkerson cikkét [?].

109. Ugyanaz, mint a 108. gyakorlat a következő kiegészítésekkel: $d_k^+ = d_k[k \leq m]$ és $d_k^- = d_k[k > m]$.

110. p csúcs van, amely $d = d_1$ fokú, és q csúcs van, amely $d - 1$ fokú, ahol $p + q = n$. 1.eset, $d = 2k+1$. Legyen u—v, ha $(u - v) \mod n \in \{2, 3, \ldots, k+1, n-k-1, \ldots, n-3, n-2\}$; továbbá vegyük fel a $p/2$ darab 1—2, 3—4, …, $(p-1)$—p élt.

2. eset, $d = 2k$. Legyen u—v, ha $(u - v) \mod n \in \{2, 3, \ldots, k, n-k, \ldots, n-3, n-2\}$; továbbá vegyük fel az 1—2, …, $(q-1)$—q éleket, valamint a $(q = 0?\ n\colon q)$—$(q+1)$—$\cdots$—$(n-1)$—n kört vagy utat. Wang és Kleitman bebizonyították [?], hogy az ilyen gráfok erősen összefüggőek.

111. Tegyük fel, hogy $N = n + n'$, és $V' = \{n+1, \ldots, N\}$. Konstruálni akarunk $e_k = d - d_k$ éleket k és V' között, és további éleket V'-n belül úgy, hogy V' minden csúcsának d legyen a foka. Legyen $s = e_1 + \cdots + e_n$. Ez a lépés pontosan akkor végezhető el, ha (i) $n' \geq \max(e_1, \ldots, e_n)$; (ii) $n'd \geq s$; (iii) $n'd \leq s + n'(n'-1)$; és (iv) $(n + n')d$ páros.

Ilyen élek léteznek, már ha n' kielégíti (i)–(iv)-et: Először, (i) miatt, s megfelelő él V és V'

között létrehozható úgy, hogy ciklikusan választjuk végpontnak $(n{+}1, n{+}2, \ldots, n{+}n', n{+}1, \ldots)$-et. Ez a folyamat hozzárendeli vagy az $\lfloor s/n' \rfloor$ vagy az $\lceil s/n' \rceil$ éleket V' minden csúcsához; $\lceil s/n' \rceil \leq d$ teljesül (ii) miatt, és $d - \lfloor s/n' \rfloor \leq n' - 1$ (iii) miatt. Ennél fogva a további élek, amelyek szükségesek V'-n belül, megkonstruálhatók a 110-es feladathoz hasonlóan (iv) segítségével.

Az $n' = n$ választás mindig jó. Megfordítva, ha $G = K_n(V) \setminus \{1 — 2\}$, az (iii) feltétel megköveteli, hogy $n' \geq n$, ha $n \geq 4$. lásd Erdős és Kelly [?].

112. Az egyetlen legjobb háromszög a *mérföldek* adatban
IDE ÁBRA KELL

113. Murphy törvénye szerint, n sora és m oszlopa van; tehát $n \times m$-es, nem pedig $m \times n$-es.

114. Egy *hurok* egy adott multigráfban egy $\{a, a\}$ él, amelyben ismétlődő csúcsok vannak, és egy multigráf 2-egyenletes hipergráf. Így egy általános hipergráfnak az előfordulási mátrixában meg vannak engedve 1-nél nagyobb értékek, ha egy él egy megadott csúcsot többször is tartalmaz. Egy vaskalapos ember valószínűleg ezt „*multihipergráfnak*” hívná abból a megfontolásból, hogy a (7.0)-nak megfelelő illeszkedési mátrix és páros gráf a következő:
IDE ÁBRA KELL

115. A B^TB e sorban és f oszlopban lévő eleme $\sum_v b_{ve}b_{vf}$; tehát B^TB megegyezik $2I$ plusz az $L(G)$ szomszédsági mátrixával. Hasonlóan, BB^T a D plusz G szomszédsági mátrixa, ahol D a diagonális mátrix, melyben d_{vv} a v *foka.* (Lásd a 2.3.4.2–18., 19. és 20. gyakorlatokat.)

116. $\overline{K_{m,n}^{(r)}} = K_m^{(r)} \oplus K_n^{(r)}$, (**??**)-at általánosítva minden $r \geq 1$-re.

117. $m = 4$ és $V = \{0, 1, 2\}$ esetén az egyszeres élek nemizomorf multihalmazai a következők lehetnek:
$\{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\}$, $\{\{0\}, \{0\}, \{0\}, \{1\}\}$, $\{\{0\}, \{0\}, \{1\}, \{1\}\}$ és $\{\{0\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}\}$.

A válasz általában az m legfeljebb n részre való *felosztásának* a száma, nevezetesen $\left|\begin{matrix} m+n \\ n \end{matrix}\right|$ a 7.2.1.4. alpont jelöléseit használva. (Természetesen kevés ok van arra, hogy a partíciókra úgy tekintsünk, mint 1-egyenletes hipergráfokra, kivéve, ha speciális feladatokat akarunk megoldani.)

118. Legyen d a csúcs fokszámok összege. A megfelelő páros gráf egy erdő $m + n$ csúccsal, d éllel és p komponenssel. Így $d = m + n - p$, a 2.3.4.1.A tétel szerint.

119. Van egy további él, ami tartalmazza mind a 7 csúcsot.

120. Azt mondhatjuk, hogy az irányított (hiper) élek csúcsok tetszőleges sorozata, vagy különböző csúcsok sorozata. A legtöbb szerző az *irányított hiperélt* azonban $A \to v$-nek definiálja, ahol az A csúcsok rendezetlen halmaza.

A legjobb definíciót úgy találhatjuk meg, hogy megnézzük, melyiknek van a legfontosabb gyakorlati alkalmazása.

121. $\chi(H) = |F| - \alpha(I(H)^T)$ a V minimális lefedésének a mérete az F halmazokkal.

122. (a) Igazolható, hogy csak 7 darab 3-elemű lefedés van, nevezetesen az él csúcsai; tehát 7 darab 4-elemű független halmaz létezik, nevezetesen az élek komplementerei. Nem tudjuk 2-színezni a hipergráfot, mivel egy színt 4 alkalommal kellene használni, és a maradék 3 szín egy él lenne. (Az (56) hipergráf alapvetően a 7 pontból, és 7 egyenesből álló *projektív sík.*)

(b) Mivel duálist használunk, nevezzük a Petersen-gráf csúcsait és éleit „pontoknak” és „egyeneseknek”; így a duális csúcsai és élei rendre az egyenesek és a pontok. Színezzük pirosra azt az 5 egyenest, melyek egy külső pontot belső ponttal kötnek össze.

A maradék 10 egyenes független (nem tartalmazzák mind a három, valamely pontot érintő egyenest); tehát zöldre színezhetők.

Bármely 11 egyenes halmaza nem lehet független, mivel nincs olyan 4 egyenes, amely egyszerre tudná érinteni mind a 10 pontot. (Így a Petersen duálisa a *páros hipergráf*, annak ellenére, hogy van benne 5 hosszúságú kör.)

123. Megfeleltethetőek az $n \times n$ *latin négyzetnek*, amelynek elemei csúcs színek.

124. 4 szín bőven elegendő. Ha *3-színezhető* lenne, akkor minden színre jutna 4 csúcs, mivel nincs olyan 5 csúcs, ami független lenne. Így 2 ellentétes saroknak ugyanolyan színűnek kell lenni, vagyis ellentmondásra jutunk.

125. A *Chvátal-gráf* a legkisebb gráf $g = 4$-gyel. *Brinkmann* megtalálta a legkisebbet $g = 5$-tel: 21 csúcsa van: a_j, b_j, c_j, ha $0 \le j < 7$, élei $a_j — a_{j+2}$, $a_j — b_j$, $a_j — b_{j+1}$, $b_j — c_j$, $b_j — c_{j+2}$, $c_j — c_{j+3}$ és az alsó indexei mod 7. Meringer megmutatta, hogy legalább 35 csúcsnak kell lennie, ha $g > 5$. Grünbaum azt sejtette, hogy g tetszőlegesen nagy lehet; de további konstrukciók nem ismertek lásd [?, ?].

126. Amikor m és n páros, mind a C_m és C_n páros, és könnyű a *4-színezés*. Egyébként egy 4-színezés lehetetlen. Ha $m = n = 3$, egy 9-színezés megfelelő a 93. gyakorlat alapján. Ha $m = 3$ és $n = 4$ vagy 5, akkor legfeljebb két csúcs független; könnyű találni egy megfelelő 6- vagy 8-színezést.

Egyébként megkapunk egy 5-színezést úgy, hogy a (j, k) csúcsot $(a_j + 2b_k) \mod 5$-tel színezzük, ahol az $\langle a_j \rangle$ és $\langle b_k \rangle$ periodikus sorozatok léteznek rendre m és n periódussal úgy, hogy $a_j - a_{j+1} \equiv \pm 1$ és $b_k - b_{k+1} \equiv \pm 1$ minden j-re és k-ra lásd K. Vesztergombi cikkét [?].

127. (a) Az eredmény $n = 1$ esetén igaz. Különben legyen $H = G \setminus v$, ahol v tetszőleges csúcs. Ekkor $\overline{H} = \overline{G} \setminus v$, és $\chi(H) + \chi(\overline{H}) \le n$ indukció alapján. Világos, hogy $\chi(G) \le \chi(H) + 1$ és $\chi(\overline{G}) \le \chi(\overline{H}) + 1$; tehát nincs probléma egészen addig, amíg mindhárom esetben nem teljesül az egyenlőség. De ez nem történhet meg; ebből következik, hogy $\chi(H) \le d$ és $\chi(\overline{H}) \le n - 1 - d$, ahol d a v foka a G-ben lásd Nordhaus és Gaddum cikkét [?].

Ahhoz, hogy egyenlőséget kapjunk, legyen $G = K_a \oplus \overline{K_b}$, ahol $ab > 0$ és $a + b = n$. Ekkor $\overline{G} = \overline{K_a} — K_b$, $\chi(G) = a$, és $\chi(\overline{G}) = b + 1$. Minden gráf, amelyben fennáll az egyenlőség, megtalálható Finck cikkében [?].

(b) A G egy k-színezésében van legalább $\lceil n/k \rceil$ színezett csúcs; azok a csúcsok, amelyek a $\overline{G}$ egy klikkjében vannak. Így $\chi(G)\chi(\overline{G}) \ge \chi(G)\lceil n/\chi(G) \rceil \ge n$.

Egyenlőség áll fenn, ha $G = K_n$.

(Az (a) és (b)-ből következtetjük, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \ge 2\sqrt{n}$ és $\chi(G)\chi(\overline{G}) \le \frac{1}{4}(n + 1)^2$.)

128. $\chi(G \square H) = \max(\chi(G), \chi(H))$. Ennyi színre mindenképpen szükségünk van. Ha továbbá az $a(u)$ és $b(v)$ függvények kiszínezik G-t és H-t a $\{0, 1, \ldots, k - 1\}$ színekkel, ki tudjuk színezni $G \square H$-t $c(u, v) = (a(u) + b(v)) \mod k$-val.

129. Egy teljes sor vagy oszlop (16 eset); egy teljes, 4 vagy több hosszú átló (18 eset); egy 5-cellás minta $\{(x, y), (x-a, y-a), (x-a, y+a), (x+a, y-a), (x+a, y+a)\}$, ha $a \in \{1, 2, 3\}$ $(36+16+4$ eset); egy 5-cellás minta $\{(x, y), (x-a, y), (x+a, y), (x, y-a), (x, y+a)\}$, ha $a \in \{1, 2, 3\}$ $(36+16+4$ eset); egy minta, amelyben az 5 cellából 4 van, ha az ötödik kívül esik a táblán $(24 + 32 + 24$ eset); vagy egy 4-cellás $\{(x, y), (x+a, y), (x, y+a), (x+a, y+a)\}$ minta, ha $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ $(49 + 25 + 9 + 1$ eset).

Összesen maximum 310 klikk, rendre $(168, 116, 4, 4, 18)$ és $(4, 5, 6, 7, 8)$ méretekkel.

130. Ha a G gráfnak p maximális klikkje van, a H gráfnak pedig q, akkor az *egyesített* $G — H$-nak pq, mivel a $G — H$ klikkjei egyszerűen a G és H klikkjeinek az uniója. Továbbá, a $\overline{K_n}$ üres gráfnak n maximális klikkje van (nevezetesen az egyszeres halmazai).

Így az $\{n_1, \ldots, n_k\}$ partícióméretekkel rendelkező teljes k-partíciós gráfnak, ami egyébként az adott méretű üres gráfok egyesítésével keletkezik, $n_1 \ldots n_k$ maximális klikkje van.

131. Feltehető, hogy $n > 1$. Egy teljes k-partíciós gráfban, akkor maximálisak az $n_1 \ldots n_k$ számok, ha mindegyik résznek a mérete 3, kivéve talán egy vagy két részt, amelyek mérete 2. (Lásd a 7.2.1.4–68(a) gyakorlatot.) Tehát be kell bizonyítani, hogy $N(n)$ ennél nem lehet nagyobb *bármely* gráfban.

Legyen $m(v)$ azon klikkeknek a maximális száma, amelyek tartalmazzák a v csúcsot. Ha $u \not\to v$ és $m(u) \le m(v)$, akkor készítsük el a G' gráfot hasonlóan a G-hez, kivéve, hogy u most szomszédos v minden szomszédjával, kivéve a korábbi szomszédjait. Minden U maximális klikk valamelyik gráfban a következő 3 osztály egyikébe tartozik:

- i) $u \in U$; Ezek közül $m(u)$ a G-ben van és $m(v)$ a másikból G'-ben.
- ii) $v \in U$; Ezek közül $m(v)$ a G-ben és a G'-ben is van.
- iii) $u \notin U$ és $v \notin U$; az ilyen maximális klikkek a G-ben egyben maximálisak a G'-ben is.

Ebből következően G'-nek legalább annyi maximális klikkje van, mint G-nek. Így, a folyamat megismétlésével megkaphatunk egy k-partíciós gráfot.

Az érvelés Erdős Páltól származik, lásd Moon és Moser cikkét [**?**].

132. A G-ben és a H-ban lévő klikkek erős szorzata klikk $G \boxtimes H$-ban a 93-as gyakorlat szerint; így $\omega(G \boxtimes H) \ge \omega(G)\omega(H) = \chi(G)\chi(H)$. Másrészt, a G $a(u)$ és H $b(v)$ színezése elvezet a $G \boxtimes H$ $c(u,v) = (a(u), b(v))$ színezéséhez; tehát $\chi(G \boxtimes H) \le \chi(G)\chi(H)$. Továbbá, $\omega(G \boxtimes H) \le \chi(G \boxtimes H)$.

133. (a) 24; (b) 60; (c) 3; (d) 6; (e) 6; (f) 4; (g) 5; (h) 4; (i) $K_2 \boxtimes C_{12}$; (j) 18; (k) 12. (l) Igen, 5 fokkal. (m) Nem. Le lehet rajzolni 12 *vonal* segítségével? (n) Igen; Valójában, 4-összefüggő (lásd 7.4.1). (o) Igen; *minden* gráfot irányítottnak tekintünk, 2 irányított éllel egy élnél. (p) Természetesen nem. (q) Igen, könnyedén.

A zenei gráf egyszerű modulációt reprezentál a kulcs hangjegyek között. Megtekinthető Wilson és Watkins könyvében [**?**, 73.oldal].

134. Ha elforgatjuk és/vagy kicseréljük a belső és külső csúcsokat, találhatunk egy automorfizmust, amely bármely csúcsot C-ba visz. Ha C fix, akkor felcserélhetjük a külső és belső csúcsát a fennmaradó 11 pár bármely részhalmazában, és/vagy megejthetünk egy bal-jobb tükrözést.

Ebből következően $24 \times 2^{11} \times 2 = 98304$ automorfizmus van összesen.

135. Legyen $\omega = e^{2\pi i/6}$, és definiáljuk a $Q = (q_{ij})$, $S = (s_{ij})$ mátrixokat, ahol $q_{ij} = [j = (i+1) \bmod 12]$ és $s_{ij} = \omega^{ij}$, $0 \le i, j < 12$ esetén. A 96(b) gyakorlat szerint a $K_2 \boxtimes C_{12}$ zenei gráf szomszédsági mátrixa $A = \binom{1\,1}{1\,1} \otimes (I + Q + Q^-) - I$. Legyen T a $\binom{1\ \ 1}{1\ -1} \otimes S$ mátrix; ekkor $T^- AT$ egy D diagonális mátrix, amelynek első 12 eleme $1 + 4\cos\frac{j\pi}{6}$, ha $0 \le j < 12$, és a maradék 12 eleme -1. Ezért $A^{2m} = TD^mT^-$, továbbá a $2m$-lépéses utak száma C-ből $(\mathrm{C}, \mathrm{G}, \mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{B}, \mathrm{F}^\sharp)$-be rendre

$$\begin{array}{lclllll}
\mathrm{C}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +2(13+4\sqrt{3})^m & +3^{2m+1} & +2(13-4\sqrt{3})^m & +16)\,; \\
\mathrm{G}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +\sqrt{3}(13+4\sqrt{3})^m & -\sqrt{3}(13-4\sqrt{3})^m & -1)\,; & \\
\mathrm{D}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & +(13+4\sqrt{3})^m & +(13-4\sqrt{3})^m - 3) & ; & \\
\mathrm{A}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -3^{2m+1} + 2)\,; & & & \\
\mathrm{E}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -(13+4\sqrt{3})^m & -(13-4\sqrt{3})^m + 1)\,; & & \\
\mathrm{B}_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -\sqrt{3}(13+4\sqrt{3})^m & +\sqrt{3}(13-4\sqrt{3})^m - 1)\,; & & \\
\mathrm{F}^\sharp_m & = & \frac{1}{24}(25^m & -2(13+4\sqrt{3})^m & +3^{2m+1} & -2(13-4\sqrt{3})^m)\,; &
\end{array}$$

Teljesül még, hogy $\mathrm{a}_m = \mathrm{C}_m - 1$, $\mathrm{d}_m = \mathrm{F}_m = \mathrm{e}_m = \mathrm{G}_m$ stb. Speciálisan,

$(\mathrm{C}_6, \mathrm{G}_6, \mathrm{D}_6, \mathrm{A}_6, \mathrm{E}_6, \mathrm{B}_6, \mathrm{F}^\sharp_6) = (15462617,\ 14689116,\ 12784356,\ 10106096,\ 7560696,\ 5655936,\ 5015296)$, tehát a keresett valószínűség $15462617/5^{12} \approx 6.33$. Ha $m \to \infty$, akkor a valószínűségek mindegyike $\frac{1}{24} + O(0.8^m)$.

136. Nem. Csak két 10-ed rendű Cayley-gráf harmadfokú, nevezetesen $K_2 \square C_5$ (amelynek csúcsai $\{e, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3, \beta\alpha^4\}$ alakba írhatók, ahol $\alpha^5 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = e$) és a $\{0, 1, \ldots, 9\}$ csúcsokkal rendelkező gráf és irányított élei $v \to (v{\pm}1) \bmod 10$, $v \to (v{+}5) \bmod 10$. Lásd Holton és Sheehan könyvét [**?**, 9.10. gyakorlat]. Mellékesen, a *raman*$(p, q, t, 0)$ SGB gráf Cayley-gráf.]

137. Legyen $[x, y]$ az (x, y) címkéjének a jelölése; Azt szeretnénk, hogy $[x, y] = [x + a, y + b] = [x + c, y + d]$ legyen minden x-re és y-ra. Ha A az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix, akkor az A legalsó sorát t-szer hozzáadva a felső sorhoz megváltoztatja az A mátrixot az $A' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ mátrixra, ahol $a' = a + tc$, $b' = b + td$, $c' = c$, $d' = d$. Az új $[x, y] = [x + a\prime, y + b\prime] = [x + c', y + d']$ feltételek ekvivalensek a régivel; és $\mathrm{lnko}(a', b', c', d') = \mathrm{lnko}(a, b, c, d)$. Hasonlóan tudjuk az A-t $\begin{pmatrix} 10 & t & 1 \end{pmatrix}$-gyel balszorozni a probléma megváltoztatása nélkül.

Az oszlopokkal is tudunk manipulálni úgy, hogy az A-t kicseréljük az

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

mátrixra, ahol $a'' = a$, $b'' = ta + b$, $c'' = c$, $d'' = tc + d$. Ez a művelet csak egy kicsit változtatja meg a gyakorlat lényegét: Ha találunk egy címkézést, ami kielégíti az $< x, y >=< x + a'', y + b'' >=< x + c'', y + d'' >$-t minden x-re és y-ra, akkor $[x, y] = [x + a, y + b] = [x + c, x + d]$, ha $[x, y] =< x, y + tx >$. Hasonlóan tudjuk az A-t jobbszorozni a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixszal, a probléma majdnem ugyanaz marad.

Az ilyen sor- és oszlopműveletek sorozata A-t az $UAV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ alakra egyszerűsíti, ahol U és V egész mátrixok, melyekre teljesül, hogy $\det U = \det V = 1$. Ha pedig $V = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, akkor a redukált feladat címkézése, ami kielégíti az $< x, y >=< x + 1, y >=< x, y + n >$ feltételt, egy egyszerű megoldást ad az eredeti címkézési feladatra $[x, y] =< \alpha x + \gamma y, \beta x + \delta y >$ megadással. Végül, a redukált címkézési probléma egyszerű: legyen $< x, y >= y \mod n$. Így a keresett válasz a $p = \beta$, $q = \delta$ beállítás.

138. Folytatva azt, amit elkezdtünk, de most egy $k \times k$-os A mátrixszal, a sor- és oszlop műveletek redukálják a problémát az UAV diagonális mátrixra. A $(d_1, \dots, d_k)$ diagonális elemek azokkal a feltétellel vannak jellemezve, hogy $d_1 \dots d_j$ az A minden $j \times j$-s részmátrixa determinánsainak a legnagyobb közös osztója. [Ez a „*Smith normál forma*”; lásd Smith cikkét [?]. Ha az $< x >$ címkézés kielégíti a redukált problémát, az eredeti feladat is meg van oldva $[x] =< xV >$ választással. Az általánosított tórusz elemeinek száma $n = \det A = d_1 \dots d_k$.

Mint ahogy azt említettük, a redukált problémának van egyszerű megoldása, ha $d_1 = \cdots = d_{k-1} = 1$. De általánosságban a redukált címkézés egy rendes r-dimenziós tórusz $(d_{k-r+1}, \dots, d_k)$ dimenzióval, ahol $d_{k-r+1} > d_{k-r} = 1$. (Itt $d_0 = 1$; lehetséges, hogy $r = k$.)

A kért példában azt találjuk, hogy $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 10$, $n = 20$; valóban,

$$UAV = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Minden (x, y, z) ponthoz most egy 2-dimenziós $(u, v) = ((5x+y) \mod 2, (6x+y+z) \mod 10)$ címke tartozik.

Az (u, v) 6 szomszédja $((u \pm 1) \mod 2, v)$, $((u \pm 1) \mod 2, (v \pm 1) \mod 10)$, $(u, (v \pm 1) \mod 10)$.

Ez egy *multigráf*, mivel az első 2 szomszéd azonos; de ez nem ugyanaz, mint a $C_2 \boxtimes C_{10}$ multigráf, amely 8-ad fokú.

Az általánosított tóruszok tulajdonképpen az Ábel-csoportok *Cayley-gráfjai*; lásd a 136. gyakorlatot. Úgy vannak tervezve, mint megfelelő összekapcsolt hálózatok, melyben fontos az átmérő minimalizálása, amikor k és n meg vannak adva. Lásd Wong és Coppersmith [?], valamint Fiduccia, Forcade és Zito cikkét [?].

139. (Ez a gyakorlat segít tisztázni a különbséget a G *címkézett gráfok*, ahol a csúcsoknak határozott neve van, és a ??. ábrán látható H *címkézetlen gráfok* között.) Ha N_H azon címkézett gráfok száma $\{1, 2, \ldots, h\}$ felett, amelyek izomorfak H-val, és ha U bármely h-elemű részhalmaza V-nek, annak a valószínűsége, hogy $G \mid U$ izomorf H-val $N_H/2^{h(h-1)/2}$. Ezért a válasz $\binom{n}{h}N_H/2^{h(h-1)/2}$. Meg kell határoznunk az N_H értékét, amely: (a) 1; (b) $h!/2$; (c) $(h-1)!/2$; (d) $h!/a$, ahol H-nak a *automorfizmusa* van.

140. (a) $\#(K_3{:}W_n) = n-1$ és $\#(P_3{:}W_n) = \binom{n-1}{2}$, ha $n \geq 5$; valamint $\#(\overline{K_3}{:}W_8) = 7$.

(b) G pontosan akkor arányos, ha $\#(K_3{:}G) = \#(\overline{K_3}{:}G) = \frac{1}{n}\binom{n}{3}$ és $\#(P_3{:}G) = \#(\overline{P}_3{:}G) = \frac{3}{8}\binom{n}{3}$. Ha G-nek e éle van, akkor $(n-2)e = 3\#(K_3{:}G)+2\#(P_3{:}G)+\#(\overline{P}_3{:}G)$, mivel minden csúcspár $n-2$ indukált részgráfban szerepel. Ha G-nek $d_1 \ldots d_n$ foksorozata van, akkor $d_1 + \cdots + d_n = 2e$, $\binom{d_1}{2} + \cdots + \binom{d_n}{2} = 3\#(K_3{:}G) + \#(P_3{:}G)$, és $d_1(n-1-d_1) + \cdots + d_n(n-1-d_n) = 2\#(P_3{:}G) + 2\#(\overline{P}_3{:}G)$.

Ezért egy arányos gráf kielégíti $(*)$-ot – kivéve ha $n = 2$. (A gyakorlatnak ki kell zárnia ezt az esetet.)

Másrészt, ha G kielégíti $(*)$-ot és megvan a helyes $\#(K_3{:}G)$ érték, akkor megvan a helyes $\#(P_3{:}G)$, $\#(\overline{P}_3{:}G)$, és $\#(\overline{K_3}{:}G)$ érték is.

Hivatkozások: Janson és Kratochvíl cikke [?]. A [?] közleményben Barbour, Karoński és Ruciński megmutatta, hogy a $\#(H{:}G)$ eltérése arányos vagy n^{2h-2}-vel, vagy n^{2h-3}-mal, vagy n^{2h-4}-el, ahol az első eset akkor áll elő, ha H-nak nincsen $\frac{1}{2}\binom{h}{2}$ éle, és a harmadik eset akkor áll elő, ha H arányos gráf.

141. Csak 8 darab $d_1 \ldots d_8$ foksorozat elégíti ki $(*)$-ot: 73333333 (1/2), 65433322 (26/64), 64444222 (2/10), 64443331 (8/22), 55543222 (8/20), 55533331 (2/10), 55444321 (26/64), és 44444440 (1/2). Minden foksorozat itt (N_1/N) statisztikával van bemutatva, ahol N nemizomorf gráfnak van ez a sorozata, és N_1 közülük arányos. Az utolsó három eset az első három komplementere.

Nincs olyan 8-ad rendű gráf, amely egyszerre arányos és *komplementerével megegyező*. Maximálisan szimmetrikus példák az első 5 esetre W_8,

IDE ÁBRA KELL

142. A tipp ugyanaz, mint amit az előző feladatban csináltunk; $(n-3)\#(\overline{K_3}{:}G)$ és $(n-3)\#(P_3{:}G)$ kifejezhető négycsúcsok számában. Továbbá egy e élű gráfra $\binom{e}{2} = \#(P_3 \subseteq G) + \#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G)$, mivel bármely két él P_3-at vagy $K_2 \oplus K_2$-t alkot; ebben a formulában $\#(P_3 \subseteq G)$ nem feltétlenül indukált részgráfot számol.

$\#(P_3 \subseteq G) = \#(P_3{:}G) + 3\#(K_3{:}G)$, és egy hasonló formula kifejezi $\#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G)$-t az indukáltak megszámlálásának a segítségével.

Így egy túlarányos gráfnak arányosnak kell lenni és ki kell elégítenie $e = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$-t, $\#(P_3 \subseteq G) = \frac{3}{4}\binom{n}{3}$-t, $\#(K_2 \oplus K_2 \subseteq G) = \frac{3}{4}\binom{n}{4}$-t. Ezek az értékek azonban ellentmondanak az $\binom{e}{2}$ formulának.

143. Tekintsük azt a gráfot, amelynek csúcsai az A-nak a sorai, és amelynek u—v élei olyan u és v sorokat kötnek össze, amelyek a j oszlop kivételével megegyeznek. Cimkézzünk egy ilyen élt j-vel.

Ha a gráfban van kör, töröljük valamely élét a körnek, és ismételjük a folyamatot mindaddig, amíg nem lesz kör. Vegyük észre, hogy a törölt élnek a címkéje valahol máshol feltűnik a körben; így a törlés nem befolyásolja az él címkék halmazát. Ekkor azonban már csak kevesebb, mint $m \leq n$ él maradt a 2.3.4.1A tétel szerint; tehát kevesebb, mint n különböző címke van. Lásd Bondy cikkét [?].

144. Legyen G gráf az $\{1, \ldots, m\}$ csúcsokkal, és i—j élekkel akkor és csakis akkor, ha $* \neq x_{il} \neq$

$x_{jl} \neq *$ valamely l-re. Ez a gráf pontosan akkor k-színezhető, ha van egy kiegészítése legfeljebb k különböző sorral. Másrészt, ha G egy gráf $\{1,\ldots,n\}$ élekkel, A *szomszédsági mátrixszal*, az $n\times n$-es $X = A + *(J - I - A)$ mátrixnak van az a tulajdonsága, hogy i—j pontosan akkor, ha $* \neq x_{il} \neq x_{jl} \neq *$ valamely l-re. Lásd Sauerhoff és Wegener cikkét [?].

145. Legyen $c \leftarrow 0$ és ismételjük a következő műveleteket $1 \leq j \leq n$-re: Ha $c = 0$, akkor legyen $x \leftarrow a_j$ és $c \leftarrow 1$; egyébként, ha $x = a_j$, legyen $c \leftarrow c + 1$; egyébként legyen $c \leftarrow c - 1$. Ekkor x a válasz.

Az ötlet az, hogy tartsuk szemmel a lehetséges x gyakori elemet, amely c alkalommal fordul elő a nem elhagyott elemek között; Elhagyjuk az a_j-t és egy x-et mindannyiszor, ha találunk $x \neq a_j$-t. Lásd Wos cikkét [?].

Az összes olyan elem megkeresésének kiterjesztését $O(n \lg k)$ lépésben, amely több, mint n/k alkalommal fordul elő, Misra és Gries cikke tárgyalja [?].

A 7.1.1. pont gyakorlatainak megoldása

1.

2.

3.

4. Scheffer [?]

5. Bernstein [?]

6.

7. Jevons [?, §151]

8.

...

24. Knuth és Moore [?]

25.

26.

27. Fredman [?]

28. Cutler [?]

29.

30. Morreale [?, ?]

31. Blake [?]
Samson [?]
Quine [?]
Tison [?]
Sloan [?, ?]
Chandra [?]
Laborde [?]

32.

33.

34. Mileto [?]
Weber [?]

35. Ball [?]

36. Boros [?]

37. Ball [?]

38.

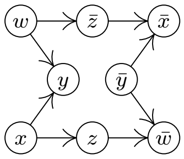
39.

40.

41. Cook [?]
Peirce [?] . . . . . .

49. Büning [?, §5.6]

50. Istrate [?]

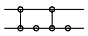
85. 

86.

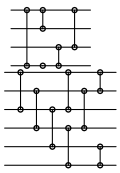
87.

88.

89.

90. Ha $t = 2$, akkor 

. . .

95. 

. . .

133.

A 7.1.2. pont gyakorlatainak megoldása

1.

2.

3. Finikov [?]

4. Spira [?]

...

31. Lupanov [?]

...

35. Wegener [?]

36. Ladner [?]

37. Snir [?]

38. Muller [?]

39. Paterson [?]

40.

41. Sklansky [?]

42. Weinberger [?]
Brent [?]
Hrapcsenko [?]
Knuth [276–279][?]
Babbage [?]
Fenwick [?]

43.

44. Ofman [?] Savage [?]

45. Savage [?]

46.

47.

48. Knuth [?]

49. Riordan [?]
Kricsevszki [?]
Lupanov [?]

50. Ofman [?]

...

88.

IRODALOMJEGYZÉK

TÁRGYMUTATÓ

NÉVMUTATÓ

ANGOL–MAGYAR SZÓTÁR

Jelölések
$\smile$, *see* `smile` = $\smile$, *lásd* mosoly
0–1 matrices, *see also* Adjacency matrices = 0–1 mátrixok, *lásd még* szomszédsági mátrixok
0–1 principle = 0–1-elv
0-preserving functions, *see* Normal Boolean functions = 0-megőrző függvények, *lásd* normál Boole-függvények
2-coloring = 2-színezés
2-monotonic functions, *see* Regular Boolean functions = 2-monoton függvények, *lásd* reguláris Boole-függvények
2-partite graphs, *see* Bipartite graphs = páros gráfok
2-variable functions = 2 változós függvények
    table of 2-variable functions = 2 változós függvények táblázata
2^m-way multiplexer = 2^m-utas multiplexer
2CNF, *see also* Krom functions = 2CNF, *lásd még* Krom-függvények
2SAT = 2SAT
2SAT functions, *see* 2CNF = 2SAT függvények, *lásd* 2CNF
3-coloring = 3 színezés
3-cube = 3 kocka
3-variable functions = 3 változós függvények
    table of 3-variable functions = 3 változós függvények táblázata
3CNF = 3CNF
3SAT = 3SAT
4-coloring = 4-színezés
4-cycles = 4 körök
4-variable functions = 4 változós függvények
5-variable functions = 5 változós függvények $\alpha(H)$ (independence number of a graph or hypergraph) = $\alpha(H)$ (gráf vagy hipergráf függetlenségi száma)
γ (Euler's constant), as source of "random" data = γ (Euler-konstans), mint „véletlen" adatok forrása
νx (sideways sum) = oldalösszeg
π (circle ratio), as source of "random" data, *see also* Pi function = π (körarány), mint „véletlen" adatok forrása, *lásd* Pi-függvény
$\pi = \pi$
$\Sigma(f)$ (true-vector sum) = $\Sigma(f)$ (igazság-vektor összeg)
ϕ (golden ratio) as source of "random" data = = ϕ (aranymetszés aránya) mint az „véletlen" adatok forrása
$\chi(H)$ (chromatic number of a graph or hypergraph) = $\chi(H)$ (gráf vagy hipergráf kromatikus száma)
$\omega(G)$ (clique number of a graph) =

a-codes, *see* Asterisk codes for subcubes = a-kódok, *lásd* csillag-kódok részkockákra
Abelian (commutative) groups = Abel-féle (kommutatív) csoportok
Absorption laws = abszorpciós szabályok
Acyclic: Containing no cycles = körmentes: kört nem tartalmazó
Acyclic digraphs = körmentes irányított gráfok
Addition, binary = bináris összeadás
Addition modulo 3 and 5 = összeadás modulo 3 és 5
Addition modulo 4 = összeadás modulo 4
Addition table modulo n = mod n összeadási tábla
Adjacency lists = szomszédsági listák
Adjacency matrices = szomszédsági mátrixok

Adjacent vertices = szomszédos csúcsok
Affine Boolean functions =
Affirmation ($\top$) =
All-0s matrix =
All-1s matrix =
All-equal function ($S_{0,n}$) =
Alphabetic order =
Anagrams = anagrammák
Analysis of algorithms = algoritmusok elemzése
AND ($\wedge$) = AND ($\wedge$)
  bitwise AND (&) = bitenkénti AND (&)
AND operation, bitwise = bitenkénti AND művelet
AND gates ($\wedge$) = AND kapuk ($\wedge$)
  with vacuum tubes =
AND-OR chains = AND-OR láncok
AND-OR–NOT chains, *see also* Canalizing chains
Antisymmetric digraphs = antiszimmetrikus irányított gráfok
Apportionment =
Approximately decomposable functions =
Arabic mathematics = arab matematika
Arc lists = irányított élek listái
Arc variables =
Arcs in a graph = irányított élek egy gráfban
  arcs in a graph as edges = irányított élek egy gráfban mint élek
ARCS(v) (first arc of a vertex) = ARCS(v) (egy csúcs első irányított éle)
Arithmetic progressions = számtani sorozatok
Associative block designs =
Associative laws = asszociatív szabályok
Asterisk codes for subcubes =
Asterisks =
Asymptotic methods = aszimptotikus módszerek
Automated deduction =
Automorphisms = automorfizmusok
Availability polynomials =

b-codes, *see* Bit codes for subcubes =
Backward-computation principle =
Bad pairs = rossz párok
Barycentric coordinates = baricentrikus koordináták
Bears, California Golden =
Bell Telephone Laboratories =
Bent functions =
Betweenness =
bi_book graphs =
bi_lisa graphs =
Bigraphs, *see* Bipartite graphs
Bijunctive clauses, *see* Krom clauses
Binary addition =
Binary comparison function =
Binary decoder =
Binary majorization lattices =
Binary number system =
Binary operator: A function of two variables =
Binary recurrences =
Binary strings = bináris füzérek
Binary trees = bináris fák
  complete binarytrees = teljes bináris fák
Binary-coded decimal digits =
Bipartite graphs = páros gráfok
  bipartite graphs corresponding to hypergraphs = hipergráfoknak megfelelő páros gráfok
Bipartite hypergraphs = páros hipergráfok
Bipartite matching =
Bipartiteness testing = párosság tesztelése
Bishop moves on a chessboard =
Bit codes for subcubes =
Bitburger Brauerei =
Bitwise operations = bitenkénti műveletek
  AND (&) =
  medians =

  OR ($|$) =
  saturating subtraction ($\dot{-}$) =
  XOR ($\oplus$) =
Block designs =
board graphs =
book graphs =
Boolean binary operators = bináris Boole-operátorok
  table of Boolean binary operators = bináris Boole-műveletek táblázata
Boolean chains = Boole-láncok
  AND-OR Boolean chains = AND-OR Boole-láncok
  AND-OR-NOT Boolean chains = AND-OR-NOT Boole-láncok
  canalizing of Boolean chains =
  definition of Boolean chains = Boole-láncok definíciója
  monotone Boolean chains = monoton Boole-láncok
  Boolean chains of 3 variables = 3 változós Boole-láncok
  Boolean chains of 4 variables = 4 változós Boole-láncok
  Boolean chains of 5 variables = 5 változós Boole-láncok
  Boolean chains of many variables = sokváltozós Boole-láncok
  optimization of Boolean chains = Boole-láncok optimizálása
  Boolean chains with several outputs =
Boolean functions = Boole-függvények
  affine Boole functions = affin Boole-függvények
  bent of Boole-functions =
  canalizing of Boole-functions =
  duals of Boole-functions =
  enumeration of Boole-functions =
  Horn =
  Krom =
  majority, *see* Medians =
  monotone, *see* Monotone Boolean functions =
  Boolean chains of 2 variables =
  Boolean chains of 3 variables =
  random Boolean chains =
  regular Boolean functions = reguláris Boole-függvények
  self-dual, *see* Self-dual Boolean functions =
  symmetric Boole functions = szimmetrikus Boole-függvények
  threshold Boole functions = küszöb Boole-függvények
  unate Boole functions =
Boolean games = Boole-játékok
Boolean values = Boole-értékek
Bootstrapping =
Bottom-up synthesis =
Breadth-first search =
Buddies =
BUT-NOT gates ($\overline{\supset}$) =

C language =
$C(f)$, *see* Cost of a Boolean function. $C(f_1 \ldots f_m)$ =
$C^+(f)$ =
$C_m(f)$ =
C_n (cycle of order n) =
$\vec{C_n}$ (oriented cycle of order n) =
California Golden Bears =
Canalizing chains =
Canalizing functions =
Canalizing operators =
Cancellation laws =
Canonical forms, *see* Full conjunction normal form, Full disjunctive normal form, Integer multilinear representation, Multilinear representation of a Boolean function =
Cardinal, Stanford =
Cares, *see also* Don't-cares =
Carry bits = átviteli bitek
Cartesian product of graphs = gráfok Descartes-szorzata
Cat's game =
Categorical product of graphs, *see* Direct product of graphs =
Cayley digraphs = irányított Cayley-gráfok
Cayley graphs = Cayley-gráfok
Censorship =

Conjunction ($\wedge$), *see* AND =
Conjunction of graphs, *see* Direct product of graphs =
Conjunctive normal form (CNF) = konjunktív normál forma (CNF)
  full conjunctive normal form = teljes konjuktív normál forma
  monotone conjunctive normal form = monoton konjuktív normál forma
Conjunctive prime form =
Connected digraphs = összefüggő irányított gráfok
Connected graphs = összefüggő gráfok
Connectivity of a graph = gráf összefüggősége
Consecutive 1s = egymást követő 1-esek
Consecutive arcs = egymást követő irányított élek
Consensus =
Consonants = mássalhangzók
Context-free grammar = környezetfüggetlen nyelvtan
Contiguous United States of America =
Contradiction ($\perp$) =
Contrapositive =
Control grids =
Converse implication ($\subset$) =
Converse nonimplication ($\overline{\subset}$) =
Converse of a digraph =
Convex hull of points = pontok konvex burka
Convex sets = konvex halmazok
Core of a Horn function =
Cost of a Boolean function = Boole-függvény költsége
  statistics =
Coteries =
Covering in a lattice =
Covering problems =
  exact covering problems =
  minimum covering problems
Crossings in a diagram =
Cube graphs (k-cubes) =
Cubes, *see also* Hypercubes, Subcubes =
Cubic graphs =
Cycle graph C_n =
Cycles =
  cycles in a hypergraph =
  cycles of a permutation = oriented cycles =
Cylinders =

$D(f)$, *see* Depth of a Boolean function =
$d^+(v)$ (out-degree of v) =
$d^-(v)$ (in-degree of v) =
$d(u,v)$ (distance in a graph) =
  directed distance in a graph =
  generalized distance in a graph =
Dags (directed acyclic graphs) =
Dancing links method =
Data replication =
De Morgan laws =
Decoder, binary = bináris dekóder
Decomposition of functions =
Decomposition of partial functions =
Decomposition or development laws =
Definite Horn clauses =
Definite Horn functions =
Degree of a vertex = csúcs fokszáma
Degree sequences = foksorozatok
Delaunay triangulation =
Depth of a Boolean function =
  statistics
Depth-first search =
Determinants = determinánsok
Diagonal matrices =
Diagonalization =
Diagrams for digraphs
Diagrams for graphs =

Diameter of a free median graph =
Diameter of a graph = gráf átmérője
Dictionaries of English =
Digitized image =
Digraphs, *see* Directed graphs =
Direct product of graphs =
Direct product of matrices =
Direct sum of graphs =
Direct sum of matrices =
Directed acyclic graphs =
Directed distance $d(u, v)$ =
Directed graphs = irányított gráfok
  complete directed graphs = teljes irányított gráfok
  components of directed graphs = irányított gráfok komponensei
  converse of directed graphs =
  random directed graphs =
  representation of directed graphs =
  strong components of directed graphs = irányított gráfok erős komponensei
Directed hypergraphs = irányított hipergráfok
Directed join of digraphs =
Discrete Fourier transforms = diszkrét Fourier-transzformált
Disjoint decomposition = diszjukt dekompozíció
Disjoint graphs = diszjunkt gráfok
Disjoint sets = diszjunkt halmazok
Disjunctive normal form (DNF) = diszjunktív normál forma (DNF)
  full disjunctive normal form =
  irredundant disjunctive normal form =
  monotone disjunctive normal form =
  orthogonal disjunctive normal form
  shortest disjunctive normal form =
Disjunctive prime form =
Distance $d(u, v)$ in a graph =
  generalized distance in a graph=
Distance of a code =
Distinct columns = különböző oszlopk
Distinct rows = különböző sorok
Distributed systems =
Distributive lattices =
Distributive laws = disztributív szabályok
  distributive laws for medians = mediánok disztributív szabályai
Divide and conquer =
DNF, *see* Disjunctive normal form =
Dodecahedron =
Dominance order, *see* Majorization lattices =
Dominated coteries =
Don't-cares =
Dot minus ($\dot{-}$) =
Dot product of vectors =
Doublets game =
Doubly linked lists =
Dual identities =
Dual of a Boolean function: $F^D(x) = \bar{F}(\bar{x})$; *see also* Self-dual Boolean functions =
  computing monotone CNF from DNF =
Dual of a hypergraph = hipergráf duálisa
Dynamic programming = dinamikus programozás

e, as source of "random" data =
Early neighbors =
econ graphs =
Edge-chromatic number $\chi(L(G))$ =
Edges in a graph = gráf élei
  edges in a graph as arcs = gráf élei mint irányított élek
Edges in a hypergraph =
Eigenvalues of a matrix =
Eigenvectors of a matrix =
Electoral districts =
Electrical engineers = villamosmérnökök
Elementary symmetric functions =
Empty graphs $(\overline{K_n})$ =

English language = angol nyelv
Enumeration of Boolean functions = Boole-függvények leszámlálása
  asymptotic enumeration of Boole-functions = Boole-függvények aszimptotikus leszámlálása
Equidistant cities =
Equivalence operator ($\equiv$) =
Equivalence relations =
Equivalence under permutations =
  and complementations =
Error-correcting codes = hibajavító kódok
Euclidean distance = euklideszi távolság
Euclidean plane = euklideszi sík
Evaluation of Boolean functions, *see* Boolean chains =
Even permutations = páros permutációk
Evolution of random graphs = véletlen gráfok fejlődése
Exact cover problems =
Exclusive disjunction ($\oplus$), *see* XOR =
Existential quantifiers =
Expander graphs = expander gráfok
Exponential growth: $2^{\Theta(n)}$ =
Exponential time = exponenciális idő
Extended real numbers: Real numbers together with $-\infty$ and $+\infty$ =

Factorization of a graph = gráfok faktorizációja
Failing units =
Falsehood ($\perp$) =
Families of sets, *see* Hypergraphs =
Families of subsets =
Fan-in: The number of inputs to a gate =
Fan-out: The number of uses of a gate =
Fibonacci numbers = Fibonacci-számok
Fibonacci strings = Fibonacci-füzérek
Fibonacci threshold functions = Fibonacci-küszöbfüggvények
Fields, finite =
Final vertex of an arc = irányított él végpontja
Finite fields = véges testek
Finite state transducers =
First-order predicate calculus =
Five-letter words = ötbetűs szavak
Five-variable functions = ötváltozós függvények
Flows of money =
Floyd lemma = Floyd-lemma
Football scores = football sorozatok
Footprints =
Forcing functions = kényszerítő függvények
Formula complexity, *see* Length of a Boolean function =
Four Color Theorem = négyszín tétel
Four-variable functions = négyváltozós függvények
Fourier transform, discrete = diszkrét Fourier-transzformáció
Free median algebras =
Free systems =
Free trees = szabad fák
Frequency of usage in English =
Full adders =
Full conjunctive normal form =
Full disjunctive normal form =
Functional decomposition =

Games, *see also* Tic-tac-toe =
games graphs =
Gates, networks of =
Generalized consensus =
Generalized toruses = általánosított tóruszok
Generator routines =
Geometric nets =
Gherardini, Lisa, *see Mona Lisa* =
Giant component of a graph =
Girth of a graph =
Globally optimum solutions =

Image, digitized =
Implicants, *see also* Prime implicants =
Implication ($\supset$) =
Implicit data structure =
In-degree of a vertex = csúcs befoka
Incidence matrix of a graph or hypergraph =
Inclusion and exclusion principle =
Inclusive disjunction ($\vee$), *see* OR =
Incremental changes =
Incompatible columns = inkompatibilis oszlopok
Independence number $\alpha(H)$ of a graph or hypergraph =
Independent vertices = független csúcsok
Induced subgraphs = indukált részgráfok
Induced subhypergraphs =
Infinity, point at =
Initial vertex of an arc = irányított él kezdőpontja
Integer multilinear representation =
Integer programming = egészértékű programozás
Internet = internet
ITE, *see* If-then-else function =
Interpolating polynomials = interpolációs polinomok
Intersecting families of sets =
Intervals in graphs = intervallumok gráfokban
Intervals in median algebras =
Intruders =
Inverse permutation =
Inverter gates, *see* Complement of a Boolean function. Inverter modules =
Irredundant DNFs =
Islamic mathematics =
Isolated vertices: Vertices of degree 0 = izolást csúcsok: 0 fokú csúcsok
Isometric: Distance-preserving =
    subgraphs =
Isomorphic graphs = izomorf gráfok
    directed isomorphic graphs = irányított izomorf gráfok
Isotone functions =

J (all-ones matrix) =
J_n (complete digraph of order n) =
Join of graphs =
Juxtaposition of graphs, *see* Direct sum of graphs =

k-ary trees = k-áris fák
k-colorable graphs or hypergraphs =
k-edge-colorable graphs =
k-in-a-row function =
k-partite graphs or hypergraphs =
    complete =
K_n (complete graph of order n) = K_n (n csúcsú teljes gráf)
$K_n^{(r)}$ (complete r-uniform hypergraph) =
$\vec{K_n}$ (transitive tournament of order n) = $\vec{K_n}$ (n-ed rendű tranzitív verseny)
$K_{3,3}$ (utilities graph) =
$K_{m,n}$ (complete bipartite graph) = $K_{m,n}$ (teljes páros gráf)
$K_{m,n}^{(r)}$ (complete r-uniform bipartite hypergraph) =
$K_{n_1,\ldots,n_k}$ (complete k-partite graph) = $K_{n_1,\ldots,n_k}$ (teljes k-részes graph)
Kernel of a graph, *see* Maximal independent sets = gráf magja, *lásd* maximális független halmazok
King moves on a chessboard = király lépések a sakktáblán
Kingwise torus =
Knapsacks = hátizsákok
Knight moves on a chessboard = huszár lépések a sakktáblán
Krom clauses = Krom-klózok
Krom functions, *see also* 2CNF = Krom-függvények, *lásd még* 2CNF
Krom satisfiability = Krom-kielégíthetőség
Kronecker product = Kronecker-szorzat

$L(f)$, *see* Length of a Boolean function =
$L(G)$ (line graph of G) = $L(G)$ (G vonalgráfja)
Labeled graphs = címkézett gráfok
Labels of graph vertices = gráfok csúcsainak címkéi

LADDERS program =
Langford pairs = Langford-párok
Langford triples = Langford-hármasok
Las Vegas hotels =
Latch gates =
Late neighbors =
Latin squares = latin négyzetek
Lattices, *see also* Majorization lattices = hálók, *lásd még* majorizáló hálók

distributive lattices = disztributív hálók
Least upper bounds = legkisebb alsó korlátok
Left complementation ($\bar{\llcorner}$) =
Left projection ($\llcorner$) =
Legitimate lattices of functions =
Length of a Boolean function = Boole-függvények hossza
statistics = statisztikai adataok Boole-függvények hosszáról
Lexicographic order =
Lexicographic product of graphs =
Line graph of a graph =
Linear inequalities =
Linear ordering =
Linear polynomials = lineáris polinomok
Linear programming = lineáris programozás
Linear subgraphs = lineáris részgrág
Linear time = lineáris idő
Linked allocation =
Literals = literálok
Lo Shu magic square =
`LOC` (memory location) =
Local optimizations = lokális optimalizálás
Locally optimal solutions = lokálisan optimális megoldások
Logic = logika
Long distributive law =
Loops from a vertex to itself =
Lower bounds on combinational complexity =

$m \times n$ cylinders =
$m \times n$ grids =
$m \times n$ rook graphs =
$m \times n$ toruses = $m \times n$-es tóruszok
directed $m \times n$ toruses = irányított $m \times n$-es tóruszok
`M`(g) (the number of arcs in an SGB graph) = `M`(g)) (irányított élek száma az SGB gráfban)
$M(n)$ (binary majorization lattice) =
Magic Fifteen =
Magic squares = bűvös négyzetek
Majority element = többségi elem
Majority functions, *see* Medians
Majority law =
Majority of odd, *see* Median of odd =
Majorization lattices, of binary vectors = bináris vektorok majorizációs hálói
of n-tuples =
Matching in a graph =
`MATE` (the converse arc) =
Mates in a Boolean chain =
Mates of arcs =
Matrix multiplication =
max (maximum operator) =
Maximal cliques =
Maximal independent sets = maximális független halmazok
Maximal intersecting families =
Maximal planar graphs =
Maximal subcubes =
Maximal versus maximum =
Maximum independent sets = maximális méretű független halmaz
Maximum matchings = maximális méretű párosítások
Maxterms, *see* Minclauses =
Median algebras = medián algebrák
Median chains = medián láncok
Median expansion formula =

Median graphs = medián gráfok
Median labels = medián címkék
Median of odd =
    of five =
Median of seven =
Median operation =
Median sets = medián halmazok
Medians $\langle xyz \rangle$= mediánok
    bitwise medians = bitenkénti mediánok
Mems: Memory accesses = mems: memória hozzáférések
METAFONT= METAFONT
miles graphs =
min (minimum operator) =
Minclauses =
Minimal versus minimum =
Minimal vertex covers =
Minimum-memory evaluation =
Minimum vertex covers =
Minterms =
MIP-years =
Mirror pairs =
Mixed-radix majorization lattices =
Mixed-radix numbers =
`MMIX` computer =
`MMIXAL` assembly language =
Mnemonics =
Mod 2 canonical form, *see* Multilinear representation of a Boolean function. Modular arithmetic =
Mona Lisa =
Monadic logic: Logic with only unary operators =
Monotone Boolean chains = monoton Boole-láncok
Monotone Boolean functions =
    computing CNF from DNF =
    self-dual
    shellability of =
    threshold =
Monotone complexity =
Multilevel logic synthesis =
Multigraphs = multigráfok
Multihypergraphs =
Multilinear representation of a Boolean function *see also* Integer multilinear representation =
Multilinked data structures =
Multipairs =
Multiple outputs
Multiplexer, 2-way, *see* Mux
    2^m-way =
Multiplication =
Multisets = multihalmazok
Murphy's Law = Murphy törvénye
Museum of Science and Industry =
Musical graph =
Mutual exclusion = kölcsönös kizárás
Mutually orthogonal latin squares = kölcsönösen ortogonális latin négyzetek
Mux (multiplex) operation =

n-ary Boolean functions = n-áris Boole-függvények
n-ary strings = n-áris füzérek
n-cube: The 2^n points $(x_1, \ldots, x_n)$ with $x_j = 0$ or $x_j = 1$ in each coordinate position =
    subcubes of an n-cube =
$\mathtt{N}(g)$ (the number of vertices in an SGB graph) =
Name servers =
$\mathtt{NAME}(v)$ (the name of a vertex) =
NAND ($\overline{\wedge}$) =
    with vacuum tubes =
Nanocomputer simulation =
Neighboring vertices =
Networks: Graphs or digraphs together with auxiliary data =
Neural networks =
$\mathtt{NEXT}(a)$ (the next arc with the same initial vertex) = $\mathtt{NEXT}(a)$ (a következő irányított él ugyanazzal a kezdőcsúccsal)

Nodes in SGB format =
Nonconjunction ($\overline{\wedge}$), *see* NAND =
Nondisjunction ($\overline{\vee}$), *see* NOR =
Nonimplication ($\overline{\supset}$) =
NOR gates ($\overline{\vee}$) =
Normal Boolean functions =
Normal forms, *see* Full conjunction normal form, Full disjunctive normal form, Integer multilinear representation, Multilinear representation of a Boolean function =
Normalization = normalizálás
NOT gates =
NOT-BUT gates ($\overline{\subset}$) = tagadott implikáció kapuk (NOT-BUT, $\overline{\subset}$)
Notation =
Notational conventions =
  notational conventions for Boolean binary operators =
  notational conventions for symmetric Boolean functions =
  $\overline{G}$ (complementation) =
  $G \cong G'$ (isomorphism) = $G \cong G'$ (izomorfizmus)
  $G \mid V'$ (induced subgraph) =
  $G \setminus e$ (edge removal) = $G \setminus e$ (él eltávolítása)
  $G \setminus v$ (vertex removal) = $G \setminus v$ (csúcs eltávolítása)
  $[u \,..\, v]$ (closed interval) = $[u \,..\, v]$ (zárt intervallum)
  $x \subseteq y$ (componentwise $\leq$) =
  $\langle xyz \rangle$ (median) = $\langle xyz \rangle$ (médián)
  $\langle x_1 \ldots x_{2k-1} \rangle$ (median) = $\langle x_1 \ldots x_{2k-1} \rangle$ (médian)
$x?\ y\colon z$, *see* Mux (multiplex) operation = $x?\ y\colon z$, *see* Mux (multiplex) művelet
Noughts and crosses, *see* Tic-tac-toe =
Novels =
NP-complete problems = NP-teljes feladatok
Null graphs ($\overline{K_n}$) =

O (all-zeros matrix) =
Oblivious sorting =
Odd permutations =
Odd product of graphs =
ODNFs =
Optimal versus optimum =
Optimization of Boolean chains =
Optimum Boolean evaluation =
Optimum coteries =
OR (inclusive or, $\vee$) =
  bitwise OR ($|$) = bitenkénti OR ($|$)
OR gates ($\vee$) =
  OR gates with vacuum tubes =
Order of a digraph = irányított gráf rendje
Order of a graph = gráf rendje
Order of a latin square =
Order of an orthogonal array =
Order ideals =
Organ-pipe order =
Oriented binary trees =
Oriented cycles =
Oriented paths = irányított utak
  spanning oriented paths = feszítő irányított utak
Orthogonal arrays = ortogonális tömbök
  generalized orthogonal arrays = általánosított ortogonális tömbök
Orthogonal DNFs =
Orthogonal latin squares = ortogonális latin négyzetek
Orthogonal strings = ortogonális füzérek
Orthogonal vectors = ortogonális vektorok
Otter theorem-proving program = más tételbizonyító programok
Out-degree of a vertex = csúcs kifoka
Overlapping subtrees =

P = NP (?) = P = NP (?)
P_n (path of order n) =
$P_{\vec{n}}$ (oriented path of order n) =
Palindromes = palindrómák
Parallel addition = párhuzamos összeadás

Parallel computation = párhuzamos számítás
Parallel edges of a multigraph = multigráf párhuzamos élei
Parallel lines = párhuzamos vonalak
Parity bits = paritásbitek
Parity function = paritás függvény
Partial cubes =
Partial functions = = parciális függvények
Partially symmetric functions =
Partitions of an integer =
parts graphs =
Patents = szabadalmak
Path graph P_n =
Paths in a graph =
 oriented paths in a graphs = irányított utak egy gráfban
 shortest path in a graph = legrövidebb út egy gráfban
Perfect shuffles =
Permanent of a matrix = mátrix permanense
Permutation digraphs = irányított permutációs gráfok
Permutation matrices = permutációs mátrixok
Petersen graph = Petersen-gráf
Phi (ϕ) = fi (ϕ)
as source of "random" data =
Pi (π), as source of "random" data, *see also* Pi function =
Pi function =
Pigeonhole principle = skatulyaelv
Pincusian mathematics =
Pixels = pixelek
Planar graphs = síkgráfok
Planar Langford pairings =
plane_ lisa graphs =
plane_ miles graphs =
PLAs =
Playing cards, 3–4. Poetry = költészet
Polish notation = lengyel jelölés
Polyhedral combinatorics = poliéderes kombinatorika
Polynomials, *see* Availability polynomials, Integer multilinear representation, Interpolating polynomials, Multilinear representation of a Boolean function =
Portable programs = hordozható programok
Positive Boolean functions, *see* Monotone Boolean functions =
Positive normal form, *see* Multilinear representation of a Boolean function =
Positive threshold functions =
Postal codes = postai indexek
Precedence of operators =
Prefix problem = prefix feladat
Prefixes of strings = füzérek prefixei
Prime clauses =
Prime forms =
Prime graphs =
Prime implicants =
 of a majority function =
Prime-number function =
Priority encoders =
Product-of-sums expression, *see* Conjunctive normal form =
Products of digraphs and multigraphs =
Products of graphs = gráfok szorzatai
Programmable logic arrays =
Programming languages = programozási nyelvek
Projection functions =
Projections in a median algebra =
Projective planes, finite =
Prolog language = Prolog nyelv
Proportional graphs =
Pseudorandom numbers =
Pun resisted =
Pure majority functions =
Puzzles = rejtvények
Pyramids, tetrahedral =

Quantified formulas =

Queen moves on a chessboard =
Queues = sorok
Quorums =

r-closed graphs =
r-families of edges =
r-uniform hypergraphs =
RainBones puzzle =
raman graphs =
Ramanujan graphs =
Random Boolean functions =
random_graph graphs =
Random graphs = véletlen gráfok
Random number generation = véletlenszám generátorok
Random walks = véletlen séták
Randomization = véletlenítés
Real numbers = valós számok
 extended real number = kiterjesztett valós számok
Recreations =
Recurrence relations = rekurzív egyenletek
 binary recurrence relations = bináris rekurzív egyenletek =
Recursive procedures = rekurzív eljárások
Reduced median sets =
Redundant coordinates = redundáns koordináták
Redundant implicants =
Registers = regiszterek
Regular Boolean functions = reguláris Boole-függvények
Regular graphs = reguláris gráfok
Reliability polynomials =
Renaming (selectively complementing) Boolean variables =
Representation of graphs and digraphs =
Resolution principle =
Resolvents =
Restriction of a graph =
Retracts =
Retraction mappings =
Right complementation ($\overline{\mathsf{R}}$) =
Right projection (R) =
Ring sum expansion, *see* Multilinear representation of a Boolean function =
risc graphs =
RISC: Reduced Instruction Set Computer =
roget graphs =
Rook moves on a chessboard =
Rookwise connected pixels =
Runs of 0s or 1s =

S-boxes =
$S_{k_1,\ldots,k_t}(x)$ notation, *see* Symmetric functions =
Satisfiability problem = kielégíthetőségi feladat
 satisfiability problem for Horn clauses = kielégíthetőségi feladat Horn-klózokra
 satisfiability problem for Krom clauses = kielégíthetőségi feladat Krom-klózokra
Satisfiable Boolean formulas = kielégíthető Boole-formulák
Saturating subtraction ($\dot{-}$) =
Scandalous fact =
Scheduling = ütemezés
Scrabble® =
Search trees = keresőfák
Second-order logic = másodrendű logika
Seed value for pseudorandom numbers =
Selection function, *see* Mux =
Self-complementary graphs =
Self-converse graphs =
Self-dual Boolean functions =
 monotone self-dual Boolean functions =
 threshold self-dual Boolean functions =
Self-dualization =
Self-loops =
Self-organizing data structures =

Self-reference =
Semidefinite programming =
Separable functions, *see* Threshold functions =
Sequential algorithms = soros algoritmusok
Sequential allocation =
Series-parallel switching networks =
Server locations =
Set systems, *see* Hypergraphs =
Seven-segment display =
SGB, *see* Stanford GraphBase =
Shadows of bit codes = bitkódok árnyékai
Sheep =
Shelling a monotone Boolean function =
Shortest normal forms =
Shortest paths in a graph =
Shrinking an edge =
Sideways addition function (νx) =
Signed permutations =
Simple digraphs = egyszerű irányított gráfok
Simple games = egyszerű játékok
Simple graphs, *see* Graphs =
simplex graphs =
Single-faced functions, *see* Canalizing functions =
Sink vertex =
Sinks = nyelők
Size of a digraph =
Size of a graph =
smile = **smile**
Smith normal form =
Sorting networks = rendező hálózatok
Source vertex = forráscsúcs
Sources = források
Spanning subgraphs =
Sparse graphs = ritka gráfok
Spectrum of an irrational number =
Spheres =
Stability number $\alpha(H)$ of a graph or hypergraph =
Stable sets, *see* Independent vertices =
Stack structures =
Standard fields in SGB format =
Stanford Cardinal =
Stanford GraphBase = Stanford GraphBase
  complete guide to Stanford Graphbase =
  Stanford GraphBase format for digraphs and graphs =
Star graphs =
Steiner trees = Steiner-fák
Steiner triple systems = Steiner-féle hármas rendszerek
Stone representation =
Storage access function =
Straight insertion sorting =
Straight-line computations, *see* Boolean chains =
Strong components: Strongly connected components =
Strong product of graphs =
Subcubes =
  maximal =
Subgraphs =
  subgraphs of a hypercube =
subsets graphs =
Subwords = részszók
Suffixes of strings =
Sum-of-products expression, *see* Disjunctive normal form =
SWAC computer =
Symmetric block designs =
Symmetric Boolean functions =
Symmetric functions =
Symmetric matrices = szimmetrikus mátrixok
Symmetries of a graph =
Syntax, context-free =

Vacuum-tube circuits =
Valency, *see* Degree of a vertex =
Validity ($\top$) =
Variance = szórás
Vector-valued Boolean functions = vektorértékű Boole-függvények
Vectors = vektorok
Vertex connectivity =
Vertex covers =
    minimum vertex covers =
Vertex variables =
`VERTICES`(g) (the first vertex node) =
Vowels

W_n (wheel graph of order n) =
`WORDS`(n), the n most common five-letters words of English
Walks in a graph = séták egy gráfban
Weak second-order logic =
Well-balanced Langford pairings =
Wheel graphs =
Width of a Langford pairing =
Witness bits =
Word cubes =
Word ladders =
Word problems =
Word squares =
words graphs =
`WORDS(`n`)`, the n most common five-letter words of English =
Working units =
Wraparound =
WS1S =

XOR (exclusive or, $\oplus$) =
    bitwise =
XOR gates ($\oplus$)

Y functions = Y-függvények

ZDDs: Zero-suppressed decision diagrams =
Zero-one principle =
Zigzag paths =

MAGYAR IRODALOMJEGYZÉK

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman. *Számítógép-algoritmusok tervezése és analízise.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1982. Angolul: *The Design and Analysis of Computer Algorithms.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 1974.

[2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest. *Algoritmusok.* Műszaki Kiadó, Budapest, 2003 (szerkesztette Iványi Antal). Angolul: *Introduction to Algorithms.* MIT Press/McGraw-Hill, Cambridge/Boston, 1990.

[3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein. *Új algoritmusok.* Scolar Kiadó, Budapest, 2003 (szerkesztette Iványi Antal). Angolul: *Introduction to Algorithms.* MIT Press/McGraw-Hill, Cambridge/Boston, 2007 (Második kiadás nyolcadik, javított utánnyomása).

[4] Csörnyei Zoltán. *Fordítási algoritmusok.* Ábel Kiadó, Kolozsvár, 2002. *Fordítóprogramok.* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest, 2006.

[5] Csörnyei Zoltán, Kása Zoltán. *Formális nyelvek és fordítóprogramok.* Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2007.

[6] O-J. Dahl, E. W. Dijkstra, C. A. R. Hoare. *Strukturált programozás* (fordította Lőcs Gyula), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978. Angolul: *Structured Programming,* Academic Press, New York, 2002.

[7] Iványi Antal. *Párhuzamos algoritmusok.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003. Elektronikusan: ELTE IK, Budapest, 2005: http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Elektronikus/.

[8] Iványi Antal (szerk.). *Informatikai algoritmusok. 1.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. Elektronikusan: ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005: http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Elektronikus/.

[9] Iványi Antal (szerk.). *Informatikai algoritmusok. 2.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005.

[10] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid. *Rendszeroptimalizálás.* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest, 2004.

[11] Kása Zoltán. *Algoritmusok tervezése.* Stúdium, Kolozsvár, 1994.

[12] Katona Y. Gyula, Recski András, Szabó Csaba. *A számítástudomány alapjai.* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest, 2005 (2., javított kiadás).

[13] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 1. kötet. Alapvető algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1993 (2. kiadás, 1. kiadás 1988, szerkesztette Simonovits Miklós). Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 1. Fundamental Algorithms.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 1997 (3. javított kiadás – 1. kiadás 1968).

[14] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 2. kötet. Szeminumerikus algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, 1993 (2. kiadás, 1. kiadás 1988, szerkesztette Simonovits Miklós). Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 2. Seminumerical Algorithms.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 1998 (3. javított kiadás – 1. kiadás 1968).

[15] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 3. kötet. Keresés és rendezés.* Műszaki Könyvkiadó, 1994, 2. kiadás (1. kiadás 1988, szerkesztette Simonovits Miklós). Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 3. Sorting and Searching.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 1998 (2. javított kiadás – 1. kiadás 1968).

[16] D. E. Knuth, R. L. Graham, O. Patashnik. *Konkrét matematika* (szerkesztette Kátai Imre). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998. Angolul: *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Upper Saddle River, 1994 (2. javított kiadás, 1. kiadás 1989).

[17] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 1. kötet. 1. rész. MMIX. RISC számítógép a következő évezredre.* AnTonCom, Budapest, 2008. Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 1. Fascicle 1. MMIX. A RISC Computer for the New Millenium.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 2005.

[18] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 4. kötet. 2. rész. Permutációk és n-esek előállítása.* AnTonCom, Budapest, 2008. Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 4. Fascicle 2. Generating All Tuples and Permutations.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 2005.

[19] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 4. kötet. 3. rész. Kombinációk és partíciók előállítása.* AnTonCom, Budapest, 2008. Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 4. Fascicle 3. Generating All Combinations and Partitions.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 2005.

[20] D. E. Knuth. *A számítógép-programozás művészete. 4. kötet. 4. rész. Fák előállítása. Kombinatorikus előállítások története.* AnTonCom, Budapest, 2008. Angolul: *The Art of Computer Programming. Volume 4. Fascicle 4. Generating All Trees. History of Combinatorial Generation.* Addison–Wesley, Upper Saddle River, 2005.

[21] Lovász László, Gács Péter. *Algoritmusok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978 és Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[22] N. A. Lynch. *Osztott algoritmusok.* Kiskapu Kiadó, Budapest, 2002 (szerkesztette Iványi Antal). Angolul: *Distributed Algorithms.* Morgan Kaufman Publisher, San Francisco, 2005 (5. kiadás).

[23] Rónyai Lajos, Ivanyos Gábor, Szabó. *Algoritmusok.* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest, 1999.

MAGYAR NÉVMUTATÓ