TARTALOMJEGYZÉK

7. KOMBINATORIKAI ELEMZÉS

Egész nap keresheted, és ha megtaláltad, kiderül, hogy nem érte meg a fáradságot.

– BASSANIO, *A velencei kalmár* (1597)
[70, 1. felvonás 1. jelenet, 117. sor]

Ahol emberek tömege él sűrűn, egymással állandó kölcsönhatásban,
az események minden lehetséges kombinációja megtörténhet,
és sok meglepő és különös kis probléma merülhet fel.

– SHERLOCK HOLMES, *A kék karbunkulus kalandja* (1892) [21]

A kombinatorikai algoritmusok területe túl nagy ahhoz, hogy
egyetlen cikkben, vagy akár egyetlen könyvben tárgyalni lehessen.

– ROBERT E. TARJAN (1976) [77, 483. oldal]

Különféle emberekkel találkozva az a benyomás alakult ki bennem,
hogy azok a sikeresek, akiknek természetes
képességük van a rejtvények megoldására.
Az élet tele van rejtvényekkel, és mi arra vagyunk hivatva,
hogy megoldjuk azokat, amelyeket a sors elénk vet.

– SAM LOYD, JR. (1927) [50]

A KOMBINATORIKA azokat a módszereket tanulmányozza, amelyek segítségével diszkrét objektumok különböző mintákba rendezhetők. Például az objektumok lehetnek számok ($2n$ darab), $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$, és kívánhatjuk azt, hogy sorba legyenek rendezve oly módon, hogy minden egyes k számjegy két megjelenése között pontosan k szám forduljon elő. Ha $n = 3$, akkor lényegében csak egy módon lehet elrendezni az ilyen „Langford-párokat”, nevezetesen $2\,3\,1\,2\,1\,3$ (és a bal-jobb tükörképe), hasonlóképpen $n = 4$ esetén is egyetlen megoldás van. Az alábbiakban számos más kombinatorikai példát tárgyalunk meg.

Rendszerint öt alapvető csoportba sorolhatók azok a kérdések, amelyek kombinatorikai példák tanulmányozása közben felmerülnek, néhány bonyolultabb a többinél.

i) Létezés: Van-e olyan X elrendezés, amelyik megfelel egy adott mintának?

ii) Konstrukció: Ha igen, akkor lehet-e ilyen X-et gyorsan találni?

iii) Összeszámlálás: Hány különböző X elrendezés létezik?

iv) Előállítás: Meg lehet-e találni módszeresen az összes X_1, X_2, $\ldots$ elrendezést?

v) Optimalizálás: Amennyiben adva van egy f célfüggvény, mely elrendezések maximalizálják, vagy minimalizálják $f(X)$-et?

Ezek a kérdések mind érdekesnek bizonyulnak a Langford-párok esetében.

Tekintsük például a létezés kérdését. Puszta próbálkozás útján kideríthető, hogy $n = 5$ esetén nem lehet megfelelően elrendezni az $\{1, 1, 2, 2, \ldots, 5, 5\}$ számokat tíz helyen. Mindkét 1-es vagy páros sorszámú, vagy páratlan sorszámú helyre kell kerüljön; hasonlóképpen a 3-asok és az 5-ösök számára két páros, vagy két páratlan hely közül kell választanunk; a 2-esek és a 4-esek azonban mindkét paritású helyből egyet-egyet foglalnak el. Azonban nem lehet azonos paritású számokkal pontosan 5 helyet megtölteni. Ilyen okfejtéssel látható be az is, hogy nincs megoldás $n = 6$ esetén, vagy általánosan fogalmazva egyetlen olyan esetben sem, amikor az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok között a páratlanok száma páratlan.

Más szóval a Langford-párok csak akkor létezhetnek, ha $n = 4m - 1$ vagy $n = 4m$, valamilyen egész m esetén. Fordítva, az ilyen alakú n-ek esetén Davies elegáns módot talált megfelelő elhelyezés készítésére (lásd az 1. gyakorlatot).

Hány lényegében különböző L_n pár létezik? n növekedtével egyre több.

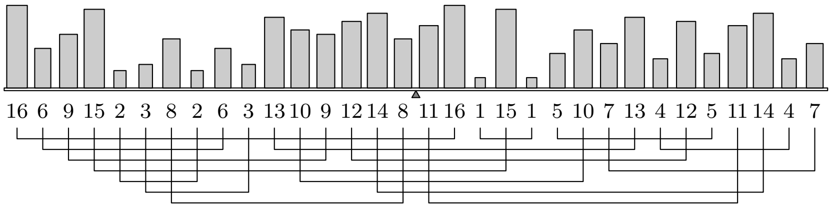
$$\begin{aligned} L_3 &= 1; & L_4 &= 1; \\ L_7 &= 26; & L_8 &= 150; \\ L_{11} &= 17\,792; & L_{12} &= 108\,144; \\ L_{15} &= 39\,809\,640; & L_{16} &= 326\,721\,800; \\ L_{19} &= 256\,814\,891\,280; & L_{20} &= 2\,636\,337\,861\,200; \\ L_{23} &= 3\,799\,455\,942\,515\,488; & L_{24} &= 46\,845\,158\,056\,515\,936. \end{aligned} \tag{1}$$

(Az L_{23} és L_{24} értéket Jaillet, Bui és Krajecki [44] határozták meg 2004-ben és 2005-ben). Előzetes vizsgálatok arra mutatnak, hogy ha L_n nem nulla, akkor hozzávetőleg $(4n/e^3)^{n+1/2}$ nagyságrendű lehet (lásd az 5. gyakorlatot); és valóban, ez a becslés az összes ismert esetben alapvetően jónak bizonyul. Egyszerű képlet azonban nem ismeretes.

A Langford-elrendezések feladata a *pontos lefedési probléma* néven ismert általános kombinatorikai problémakör speciális esete. A 7.2.2.1. alpontban tárgyaljuk az ún. „táncoló mutatók” algoritmust [43], amelyik alkalmas az ilyen probléma összes megoldásának előállítására. Ha például $n = 16$, akkor a módszernek csupán körülbelül 3200 memóriahozzáférésre van szüksége mindegyik megtalált Langford-pár elrendezéséhez. Így L_{16} értéke elfogadható idő alatt kiszámítható egyszerűen az összes pár előállítása és megszámolása segítségével.

Jegyezzük meg azonban, hogy L_{24} *igen nagy* szám – nagyjából 5×10^{16}, vagy kb. 1500 MIP-év. (Emlékeztetünk arra, hogy egy „MIP-év” azoknak az utasításoknak a száma, amelyeket egy év alatt hajt végre az a gép, amelyik másodpercenként millió utasítást végez el, nevezetesen 31 556 952 000 000.) Következésképp világos, hogy L_{24} pontos értéke olyan módszerrel lett meghatározva, amelyik *nem* tartalmazta az összes elrendezés előállítását. Valóban sokkal, sokkal gyorsabb mód L_n kiszámítására az, ha polinomalgebrát alkalmazunk. A 6. gyakorlatban leírt tanulságos módszer $O(4^n n)$ műveletet igényel, ami úgy tűnhet, hogy nem hatékony; azonban az állítsd-elő-és-számlálj módszert egy óriási, $\Theta((n/e^3)^{n-1/2})$ nagyságrendű tényezővel múlja felül, és már $n = 16$ esetén is, kb. 20-szor gyorsabban fut le. Másrészt azonban L_{100} pontos értéke valószínűleg sohasem lesz ismert, még ha a számítógépek egyre gyorsabbá és gyorsabbá válnak is.

Vizsgálhatjuk azokat a Langford-párokat is, amelyek különböző módokon *optimálisak*. Például elrendezhetünk 16 pár súlyt, – legyenek $\{1, 1, 2, 2, \ldots, 16, 16\}$ – oly módon, hogy az elrendezés eleget tegyen Langford feltételének, valamint annak a járulékos tulajdonságnak, hogy legyen „jól kiegyensúlyozott”, abban az értelemben, hogy nem billen le a mérleg karja, ha a megfelelő módon vannak a súlyok elhelyezve:



. (2)

Más szóval, $15.5 \cdot 16 + 14.5 \cdot 6 + \cdots + 0.5 \cdot 8 = 0.5 \cdot 11 + \cdots + 14.5 \cdot 4 + 15.5 \cdot 7$; és ebben a konkrét példában másfajta egyensúly is fennáll, $16 + 6 + \cdots + 8 = 11 + 16 + \cdots + 7$, így $16 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + \cdots + 1 \cdot 8 = 1 \cdot 11 + \cdots + 15 \cdot 4 + 16 \cdot 7$ is teljesül.

Ráadásul, a (2)-beli elrendezés *minimális szélességű* az összes 16-od rendű Langford-pár között: A diagram alján lévő összekötő szakaszok mutatják, hogy ha balról jobbra haladunk, legfeljebb hét olyan pár van, amelyik egy bizonyos pontnál befejezetlen[1], és belátható, hogy a hat szélesség lehetetlen. (Lásd a 7. gyakorlatot).

Az $\{1, 1, \ldots, 16, 16\}$-nak melyik $a_1 a_2 \ldots a_{32}$ elrendezése a *legkevésbé* kiegyensúlyozott abban az értelemben, hogy $\sum_{k=1}^{32} k a_k$ maximális? A lehetséges legnagyobb értéknek 5268 bizonyul. Ilyen párosítás 12 016 van, közülük egy:

$$2\ 3\ 4\ 2\ 1\ 3\ 1\ 4\ 16\ 13\ 15\ 5\ 14\ 7\ 9\ 6\ 11\ 5\ 12\ 10\ 8\ 7\ 6\ 13\ 9\ 16\ 15\ 14\ 11\ 8\ 10\ 12\,. \qquad (3)$$

Egy érdekesebb kérdés az, hogy a Langford-párok között lexikografikus sorrendben melyik a legkisebb és a legnagyobb. A válasz $n = 24$ esetén az alábbi, ha az `a`, `b`, …, `w`, `x` betűket használjuk az 1, 2, …, 23, 24 számok helyett.

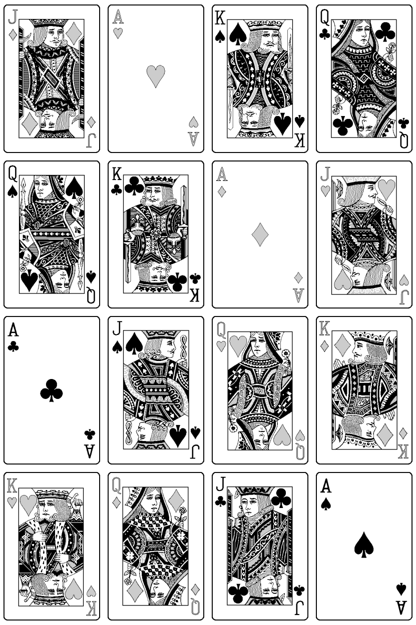
$$\{\texttt{abacbdecfgdoersfpgqtuwxvjklonhmirpsjqkhltiunmwvx},\ \texttt{xvwsquntkigrdapaodgiknqsvxwutmrpohljcfbecbhmfejl}\} \qquad (4)$$

Ennek a fejezetnek későbbi alfejezeteiben számos kombinatorikus optimalizálásra vonatkozó módszert fogunk tárgyalni. A célunk természetesen az, hogy anélkül oldjunk meg ilyen problémákat, hogy az összes lehetséges elrendezés halmazának egy kicsi szeleténél többet meg kelljen vizsgálnunk.

Ortogonális latin négyzetek. Menjünk vissza egy kis időre a kombinatorika korai korszakába. Ozanam [58, 4. kötet 434. oldal] könyvének posztumusz kiadásában egy szórakoztató rejtvény található: „Vegyük az összes ászt, királyt, dámát és bubit egy szokásos csomag kártyajátékból, és rendezzük őket egy négyzetbe úgy, hogy mindegyik sor és mindegyik oszlop tartalmazza mind a négy jelet, és mind a négy színt.” Meg tudjuk csinálni? Ozanam megoldása, amelyet a következő oldalon a 7.1. ábrán láthatunk, még ennél is többet tesz: Mindkét fődiagonálisban is megjeleníti a jelek és a színek teljes vértezetét. (Kérem ne lapozzon addig, amíg meg nem próbálkozott a feladat megoldásával.)

1779 körül egy hasonló rejtvény hozta izgalomba a szentpétervári köröket, ami felkeltette a nagy matematikus Euler érdeklődését. „Harminchat tiszt, hat különböző rangú, és hat különböző ezredből való, 6×6-os alakzatban akar vonulni, úgy, hogy mindegyik

[1]Vagyis a pár egyik tagja le van helyezve, a másik még nincs. *A fordító.*



7.1. ábra. Rendetlenség az udvari lapok között. Nincs egyezés egyik négy fős sorban sem. (Ez az alakzat egyike a sok lehetségesnek, amelyek a népszerű tizennyolcadik századi probléma megoldását adják.)

sorban és mindegyik oszlopban legyen mindegyik rangú tisztből egy, és legyen mindegyik ezredből egy. Hogyan tudják ezt megtenni?" Senki nem volt képes megfelelő menetelési elrendezést találni. Így Euler eldöntötte, hogy megoldja a találós kérdést – annak ellenére, hogy 1771-ben majdnem teljesen megvakult, és minden munkáját segédeknek diktálta. Írt egy jelentős tanulmányt a témáról [23], amelyikben elkészítette a megfelelő elrendezéseket a hasonló feladatokra n rang és n ezred esetén, ha $n = 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, \ldots$; csak az $n \bmod 4 = 2$ esetek álltak ellen a megoldásnak.

Nyilvánvalóan nincs megoldás, ha $n = 2$. Eulert azonban megakasztotta az $n = 6$ eset, miután „tetemes számú" olyan négyzetes elrendezést vizsgált meg, amelyek nem működtek. Megmutatta, hogy bármely megtalált megoldás sok más, különbözőnek tűnő megoldáshoz elvezet, és nem hitte, hogy minden ilyen megoldás elkerülte volna a figyelmét. Ezért azt mondta: „Nem tétovázom levonni azt a következtetést, hogy nem lehet elkészíteni a 36 elemű teljes négyzetet, és hogy ez a lehetetlenség továbbgyűrűzik az $n = 10$, $n = 14 \ldots$ esetekre, általában minden páratlan sorszámú páros szám esetére."

Euler a 36 tisztet ezrede és rangja alapján nevezte el: $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$, $a\delta$, $a\epsilon$, $a\zeta$, $b\alpha$, $b\beta$, $b\gamma$, $b\delta$, $b\epsilon$, $b\zeta$, $c\alpha$, $c\beta$, $c\gamma$, $c\delta$, $c\epsilon$, $c\zeta$, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$, $d\epsilon$, $d\zeta$, $e\alpha$, $e\beta$, $e\gamma$, $e\delta$, $e\epsilon$, $e\zeta$, $f\alpha$, $f\beta$, $f\gamma$, $f\delta$, $f\epsilon$, $f\zeta$. Megfigyelte, hogy mindegyik megoldást össze lehet építeni két ***különálló*** négyzetből, ha az egyik négyzet latin betűket, a másik görög betűket tartalmaz. Mindegyik ilyen négyzetben minden sorban és minden oszlopban különböznek az elemek; így elkezdett foglalkozni $\{a, b, c, d, e, f\}$ lehetséges elrendezéseivel, amelyeket *latin négyzeteknek* hívott. Egy latin négyzet csak akkor párosítható egy görög négyzettel „görög-latin négyzetté", ha a négyzetek *ortogonálisak* egymásra, ami azt jelenti, hogy egy (latin, görög) betű pár nem fordul elő egynél több helyen, ha a négyzeteket összeépítjük. Ha például az $a = \mathtt{A}$, $b = \mathtt{B}$, $c = \mathtt{Q}$, $d = \mathtt{J}$, $\alpha = \clubsuit$, $\beta = \spadesuit$, $\gamma = \diamondsuit$, és $\delta = \heartsuit$, akkor a 7.1. ábrának az alábbi latin, görög és görög-latin négyzetek felelnek meg.

$$\begin{pmatrix} d & a & b & c \\ c & b & a & d \\ a & d & c & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \beta & \alpha \\ \beta & \alpha & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \delta & \gamma \\ \delta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} d\gamma & a\delta & b\beta & c\alpha \\ c\beta & b\alpha & a\gamma & d\delta \\ a\alpha & d\beta & c\delta & b\gamma \\ b\delta & c\gamma & d\alpha & a\beta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Természetesen *bármilyen* n különböző szimbólumot alkalmazhatunk egy $n \times n$-es latin négyzetben; mindössze az a fontos, hogy egyetlen szimbólum se forduljon elő kétszer valamelyik sorban, vagy kétszer valamelyik oszlopban. Így alkalmazhatunk az elemek számára numerikus értékeket is, $\{0, 1, \ldots, n-1\}$-et. A továbbiakban hivatkozhatunk egyszerűen „latin négyzetre”, ahelyett, hogy vagy latin, vagy görög kategóriába osztanánk a négyzeteket, hiszen a merőlegesség szimmetrikus reláció.

Euler állítását, miszerint két 6×6-os négyzet nem lehet ortogonális, Clausen megerősítette, aki Schumacher Gaussnak írt levele szerint [69] 17 alapvetően különböző eset vizsgálatára redukálta a feladatot. Clausen azonban nem publikálta az elemzését. Az első nyomtatásban megjelent bizonyítás Tarrytől [78] származik, aki a maga egyéni módján fedezte fel, hogy a 6×6-os latin négyzetek 17 különböző családba osztályozhatók. (A 7.2.3. pontban tanulmányozni fogjuk, hogyan lehet szétbontani a feladatot az elrendezések kombinatorikailag nem ekvivalens osztályaira.)

Euler sejtését a fennmaradó $n = 10$, $n = 14$, $\ldots$ esetekről háromszor „bizonyították”, Petersen [62], Wernicke [83] és MacNeish [51]. Kiderült azonban, hogy mindhárom érvelés hibás; a kérdés mindaddig megválaszolatlan maradt, amíg sok évvel később a számítógépek meg nem jelentek. A legelső kombinatorikai problémák egyike, amelyikhez géppel fogtak hozzá, a 10×10-es görög-latin négyzetek rejtvénye: Léteznek, vagy nem léteznek?

1957-ben Paige és Tompkins arra programozták a SWAC számítógépet, hogy Euler sejtésére ellenpéldát keressen. Kiválasztottak egy bizonyos „majdnem véletlen” 10×10-es latin négyzetet, és a programjuk próbált egy erre ortogonális másik négyzetet találni. Az eredmény azonban elkedvetlenítő volt, és öt óra futás után úgy döntöttek, hogy kikapcsolják a gépet. Ekkorra a program elegendő adatot állított elő számukra, hogy megjósolhassák, hogy legalább 4.8×10^{11} óra gépidőre lenne szükség a futás befejezéséhez!

Röviddel ezután három matematikus munkája áttörést hozott, s ez a latin négyzeteket a nemzetközi napilapok első oldalára juttatta: Bose [8, 9], Shrikande, és Parker [61] figyelemreméltó konstrukció sorozatot találtak, amelyik ortogonális $n \times n$-es négyzeteket szolgáltat minden $n > 6$ esetén. Így, miután 180 évig ellenállt a támadásoknak, Euler sejtése majdnem teljesen tévesnek bizonyult.

Felfedezésüket számítógép segítsége nélkül tették. Parker azonban az UNIVAC számára dolgozott, és hamarosan programozási jártasságot hozott a képbe, amivel Paige és Tompkins problémáját kevesebb, mint egy óra alatt oldotta meg az UNIVAC 1206 Military Computer-en.

Nézzük meg közelebbről azt, amit a korábbi programozók tettek, és hogy Parker milyen drámaian múlta felül a megközelítésüket. Paige és Tompkins [59] a következő 10×10-es L négyzettel, valamint ismeretlen, rá ortogonális M párjával (párjaival) kezdte:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 6 & 3 & 0 & 8 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 9 & 8 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 2 & 9 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 9 & 4 & 7 & 8 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 1 & 3 & 2 & 9 & 0 & 8 \\ 7 & 4 & 1 & 8 & 0 & 2 & 9 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 3 & 6 & 0 & 9 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 8 & 1 & 6 & 7 & 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{és } M = \begin{pmatrix} 0 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 1 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 2 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 3 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 4 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 5 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 6 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 7 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 8 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \\ 9 & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup & \sqcup \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy M sorai a $0, 1, \ldots, 9$ számokkal kezdődnek, amint látható. A feladat a maradék 90 üres hely kitöltése, és ezt az eredeti SWAC program felülről lefelé, balról jobbra haladva végezte el. A bal felső ␣ nem tölthető ki 0-val, mert a 0 már előfordul M felső sorában. És nem lehet 1 sem, mert az $(1, 1)$ pár ott van (L, M) következő sorában a bal oldalon. Ámde próbaként beilleszthetünk egy 2-est. Az 1-es számjegy a következő helyre tehető; és nagyon hamar megkapjuk M számára a lexikografikusan legkisebb lehetséges felső sort, nevezetesen 0 2 1 4 3 6 5 8 9 7-et. Hasonlóképpen a 0 2 1 4 3 6 5 8 9 7 alá illeszkedő legkisebb sorok 1 0 2 3 4 5 6 7 8 9 és 2 1 0 8 5 3 7 9 4 6; és a legkisebb szabályos sor alattuk a 3 5 4 0 6 1 9 2 7 8. Most azonban sajnos megakadunk: Nincs lehetőség arra, hogy újabb sort megtöltsünk, anélkül, hogy egy korábbi választással ellentmondásba ne kerülnénk. Így 3 5 4 0 6 1 9 2 7 8-at lecseréljük 3 5 4 0 6 2 9 1 7 8-ra, (de ez sem működik), majd 3 5 4 0 6 9 8 1 7 2-re, és így haladunk több további lépésen keresztül, míg végül 3 5 4 6 1 0 9 2 7 8-at és az őt követő 4 3 9 7 0 2 8 6 5 1-et választjuk, mielőtt újra elakadunk.

A 7.2.3. pontban tanulmányozni fogunk arra vonatkozó lehetőségeket, hogy hogyan lehet ilyen keresések viselkedését anélkül megbecsülni, hogy ténylegesen végrehajtanánk őket. Ilyen becslések alapján ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy a Paige–Tompkins módszer lényegében egy olyan kereső fát jár be, amelyiknek körülbelül 2.5×10^{18} csúcsa van. Ezeknek a csúcsoknak a nagy része a fának csak kevés szintjéhez tartozik hozzá; több, mint a felük azokra a választásokra vonatkozik, amelyek M hatodik sorának jobb felén állnak, miután a 90 helyből körülbelül 50 már ki lett töltve próbálkozással. A kereső fa egy tipikus csúcsának ellenőrzése várhatóan körülbelül 75 mems-et (memóriahozzáférést) igényel. Így a teljes futási idő egy modern számítógépen nagyjából megegyezik a végrehajtáshoz szükséges 2×10^{20} mems végrehajtásának az idejével.

Parker, ezzel szemben visszanyúlt ahhoz a módszerhez, amelyet Euler [23] alkalmazott eredetileg ortogonális párok keresésére 1779-ben. Először megkereste L összes úgynevezett *tranzverzálisát*, nevezetesen az összes lehetséges módon kiválasztott néhányat az L elemei közül úgy, hogy pontosan egy elem legyen minden sorból, egy minden oszlopból, és egy minden értékből. Például az, hogy 0 8 5 9 7 3 4 2 1 6 egy tranzverzális, Euler jelölése szerint azt jelenti, hogy 0-t választjuk a 0 oszlopból, 8-at az 1 oszlopból, ..., 6-ot a 9 oszlopból. Minden olyan tranzverzális, amelyik tartalmazza az L legbaloldalibb oszlopában lévő k-t, egy szabályos módja a tíz k M négyzetben való elhelyezésének. A tranzverzálisok megtalálásának munkája valójában meglehetősen könnyű, és kiderül, hogy az adott L mátrixnak pontosan 808 tranzverzálisa van; rendre $(79, 96, 76, 87, 70, 84, 83, 75, 95, 63)$ tranzverzális van $k = (0, 1, \ldots, 9)$ esetén.

Amint a tranzverzálisok ismertté válnak, marad egy 10 lépcsős teljes lefedési problémánk, ami jóval egyszerűbb, mint az eredeti 90 lépcsős (6)-ban. Az összes hátralévő munkánk annyi, hogy lefedjük a négyzetet tíz egymással nem kereszteződő tranzverzálissal – ugyanis a tízesek minden ilyen halmaza egy olyan M latin négyzettel ekvivalens, amelyik L-re ortogonális.

A (6)-beli L négyzetnek valójában pontosan egy ortogonális párja van:

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ 1&8&3&2&5&4&7&6&9&0\\ 2&9&5&6&3&0&8&4&7&1\\ 3&7&0&9&8&6&1&5&2&4\\ 4&6&7&5&2&9&0&8&1&3\\ 5&0&9&4&7&8&3&1&6&2\\ 6&5&4&7&1&3&2&9&0&8\\ 7&4&1&8&0&2&9&3&5&6\\ 8&3&6&0&9&1&5&2&4&7\\ 9&2&8&1&6&7&4&0&3&5 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0&2&8&5&9&4&7&3&6&1\\ 1&7&4&9&3&6&5&0&2&8\\ 2&5&6&4&8&7&0&1&9&3\\ 3&6&9&0&4&5&8&2&1&7\\ 4&8&1&7&5&3&6&9&0&2\\ 5&1&7&8&0&2&9&4&3&6\\ 6&9&0&2&7&1&3&8&4&5\\ 7&3&5&1&2&0&4&6&8&9\\ 8&0&2&3&6&9&1&7&5&4\\ 9&4&3&6&1&8&2&5&7&0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

A táncoló mutatók algoritmus megtalálja ezt a párt, és bebizonyítja, hogy ez az egyetlen, miután csupán 1.7×10^8 mems számítást végez el 808 tranzverzális esetén. Ezen kívül van a tranzverzálisok előállítása során jelentkező költség, körülbelül 5 millió mems, ami elhanyagolható a többihez képest. Így az eredeti 2×10^{20} mems futási ideje – amit korábban úgy tekintettünk, mint az üres helyek 10^{90} lehetséges kitöltésére vonatkozó feladat elkerülhetetlen költsége –, egy 10^{12}-nél (!) nagyobb tényezővel lett kisebb.

Később látni fogjuk, hogy még milyen fejlesztéseket végeztek a (6)-hoz hasonló 90 szintes problémák megoldására alkalmas módszerekben. Valójában (6) egy teljes lefedési probléma (lásd a 17. gyakorlatot) közvetlen képviselőjének bizonyult, amelyiket a 7.2.2.1. alpontban szereplő táncoló mutatók algoritmus csupán 1.3×10^{11} mems költségével old meg. Az Euler –Parker-megközelítés mégis körülbelül ezerszer jobb maradt, mint a Paige–Tompkins-megközelítés. Azzal, hogy a feladatot két különálló fázisra bontották, egyik a tranzverzális-keresés, másik a tranzverzális-összekapcsolás, a T_1T_2 szorzat költséget Euler és Parker a $T_1 + T_2$ összeg költségre redukálták.

A történet tanulsága nyilvánvaló: kombinatorikai problémák a lehetőségek roppant nagy tárházával szembesíthetnek minket, mégsem szabad túl könnyen feladnunk. Egyetlen jó ötlet a számítások mennyiségét sok nagyságrenddel képes csökkenteni.

Rejtvények és a való világ. Számos olyan kombinatorikai problémát tanulmányozunk ebben a fejezetben, mint Langford párokra vonatkozó problémáját, vagy Ozanamét a tizenhat honor kártyalapra vonatkozóan, amelyeket eredetileg élvezetes rejtvényeknek, vagy „fejtörőknek” szántak. Egyes Olvasókat talán megtévesztheti a szórakoztató témák e hangsúlyozása, ezekre úgy tekintenek, mint léha időpocsékolásra. Nem kellene valójában a számítógépeknek hasznos munkát végezniük? És nem az ipar és/vagy a világ előrehaladását elősegítő jelentős alkalmazásokkal kellene a számítógép-tankönyveknek elsősorban foglalkozniuk?

Nos az Olvasó kezében tartott könyv szerzőjének egyáltalán nincs kifogása a hasznos munka és az emberi előrehaladás ellen. Erősen hiszi azonban, hogy egy olyan könyvnek, mint amilyen ez is, probléma megoldó *módszerekre* kell helyeznie a hangsúlyt, valamint ezzel együtt különböző problémák megoldásában segítő matematikai elméletekre és *modellekre*, inkább, mint hogy arra összpontosítson, hogy ezek a módszerek és modellek miért használhatóak. A kombinatorikai problémák kezelésére számos gyönyörű és hathatós eljárást fogunk megismerni, és ezeket a módszereket elsősorban eleganciájuk miatt fogjuk tanulmányozni. Kombinatorikai kihívások mindenhol felbukkannak, és minden nap új lehetőségek támadnak az ebben a fejezetben tárgyalt technikák alkalmazására. Ne korlátozzuk tehát látókörünket azzal, hogy előre megpróbáljuk számba venni azt, hogy mire jók az elméletek.

Kiderül például, hogy az ortogonális latin négyzetek roppant hasznosak, kiváltképpen kísérletek tervezésében. Már 1788-ban használta Palluel a $4{\times}4$-es latin négyzeteket annak a tanulmányozására, hogy mi történik, ha tizenhat birkát (négyet-négyet más és más fajtából) négy különböző étrend szerint táplálnak és négy különböző időben nyírnak (lásd [60]). A latin négyzet lehetővé tette számára, hogy mindezt 16 birkával tegye 64 helyett; görög-latin négyzettel más paramétereket is változtatni tudott a kísérlethez, mondjuk, a táplálék négy különböző mennyiségét, vagy négy különböző legeltetési mintát.

De ha tárgyalásunkat az ő állattenyésztésre vonatkozó megközelítésére fókuszáltuk volna, beleveszhettünk volna a tenyésztés, a zöldség termesztése szemben a gabonáéval, és a termesztési költségük stb. részleteibe. Azok az Olvasók, akik nem farmerek, ezért dönthettek volna úgy, hogy az egész témát átugorják, annak ellenére, hogy a latin négyzet mintázatok számos problémára alkalmazhatóak. (Gondoljunk arra, hogy ötféle pirulát tesztelünk olyan betegeken, akik valamilyen betegség öt fázisának valamelyikében szenvednek, öt különböző életkorúak, öt súlycsoportba tartoznak.) Továbbá, ha túlságosan a kísérlettervezésre koncentrálunk, az oda vezethet, hogy az olvasó figyelmen kívül hagyja azt a tényt, hogy a latin négyzeteket jelentős mértékben alkalmazzák a kódolásban és a rejtjelezésben is (lásd a 18–24. gyakorlatokat).

Még a Langford-párosítások témájáról is kiderül, – amely elsőre pusztán felfrissítőnek tűnik –, hogy gyakorlati jelentőségű. Skolem használta a Langford-sorozatokat Steiner-hármas rendszerének konstruálásához [73], amit adatbázis keresésekre alkalmaztunk a 6.5. alfejezetben; az 1960-as években pedig Groth [29] (Motorola Corporation) a Langford-párokat szorzó áramkörök tervezésére alkalmazta. Továbbá azok az algoritmusok, amelyek hatékonyan találják meg a Langford-párokat és a latin négyzet tranzverzálisokat, mint a táncoló mutatók algoritmus, alkalmazhatók általában a pontos lefedési problémára; és a pontos lefedés problémája nagy fontossággal bír olyan életbe vágó problémák esetén, mint a szavazó körzetek igazságos felosztása választói kerületekbe stb.

Nem az alkalmazások a legfontosabbak, és nem azok a rejtvények sem. Elsődleges célunk inkább az, hogy alapvető fogalmakat ismerjünk meg, mint a latin négyzetek és a teljes lefedés fogalma. Az ilyen fogalmak építő köveket adnak nekünk, szókincset és éleslátást, és betekintést abba, hogy a *holnap* problémáinak mire lesz szüksége.

Ámde ostobaság probléma megoldásról tárgyalni anélkül, hogy egyetlen problémát is megoldanánk ténylegesen. Szükségünk van jó problémákra, hogy serkentsük alkotó képességünket, hogy többé kevésbé rendszerezett módon aktivizáljuk a szürkeállományunkat és az alapvető elméleteket ismerőssé tegyük. A fejtörő rejtvények gyakran ideálisak erre a célra, mert néhány szóban bemutathatók, és nem igényelnek bonyolult tudományos hátteret.

Václav Havel egyszer megjegyezte [32], hogy az élet rendkívül bonyolult: „Túl sok a tudnivaló. . . Fel kell hagynunk azzal a nagyképű hiedelemmel, hogy a világ pusztán egy megoldandó rejtvény, hogy egy gép felfedezésre váró használati utasításokkal, hogy számítógép táplálására való információk tömege." Az igazságosság és felelősség érzetének növelésére szólított fel; ízlésre, bátorságra és részvétre. Szavai telve vannak nagy bölcsességgel. Mégis, hála a Gondviselésnek, vannak olyan rejtvényeink, amelyek *megoldhatóak*! A rejtvények méltóak arra, hogy az élet nagy élvezetei között tartsuk számon őket, hogy mértékkel élvezzük őket más mulatságokhoz hasonlóan.

Természetesen Langford és Ozanam emberi célra szánták rejtvényüket, nem pedig számítógép számára. Nem tévesztünk-e célt, ha pusztán áthárítjuk az ilyen kérdéseket a gépekre, nyers erővel oldva meg azokat, racionális meggondolás helyett? Brewster írta Gardnernek 1963-ban sokak által elfogadott véleménynek adva hangot: „Szórakoztató rejtvényekkel táplálni a számítógépet nem több, mint dinamittal halászni pisztrángra, tönkre téve a pillanatnyi szórakozást."

Igen, de ez a nézet figyelmen kívül hagy még egy fontos szempontot: Az egyszerű rejtvényeknek gyakran vannak olyan általánosításaik, amelyek túlmutatnak az emberi képességen és felkeltik a kíváncsiságunkat. Ezeknek az általánosításoknak a vizsgálata gyakran sugall olyan tanulságos módszereket, amelyek számos más problémánál alkalmazhatóak, és meglepő következményei vannak. Csakugyan, számos fontos technika, amelyet tanulmányozni fogunk, akkor született, amikor különféle rejtvényeket próbáltak megoldani. Bár ennek a fejezetnek az írása során a szerző nem tehetett róla, de élvezte azt a tényt, hogy a rejtvények manapság sokkal érdekesebbek, mint valaha, miközben a gépek egyre gyorsabbá és gyorsabbá válnak, ugyanis egyre több hatásos dinamitunk van a velük való játékhoz. (További megjegyzések bukkannak fel a szerző tanulmányában [42].)

A rejtvények magukban rejtik azt a veszélyt, hogy *túl* elegánsak lehetnek. A jó rejtvények matematikailag tiszták és jól strukturáltak szoktak lenni, de meg kell tanulnunk azt is, hogyan kezeljük módszeresen a rendetlenséget, a káoszt, az organikus anyagot, amelyik minden nap körülvesz bennünket. Valóban, néhány számítási technika főleg azért fontos, mert hatékony módszert nyújt arra, hogy megbirkózzunk az ilyen bonyolultságokkal. Ilyenek például a könyvtár cédulák ábécérendbe helyezésének misztikus szabályai, amelyeket az 5. fejezet elején mutattunk be, és az aktuális választói rendszer, amit a szimulációs technikák illusztrálására részletesen tárgyaltunk a 2.2.5. pontban.

A Stanford GráfBázis (SGB) nevű program- és adatgyűjtemény úgy készült, hogy kombinatorikus algoritmusokkal végzett kísérletek könnyen végrehajthatóak legyenek számos, a valódi világban előforduló példán. Az SGB tartalmaz például adatokat az amerikai autópályákról, és tartalmazza az USA gazdaságának input-output modelljét; feljegyzi Homérosz *Iliászának* [36], Tolsztoj *Anna Kareninájának* [80], és sok más regénynek a karakterkészletét, magában foglalja Roget 1879-beli *Thesaurusát* [67], dokumentálja a főiskolai futball eredmények százait; megadja Leonardo da Vinci *Gioconda* (Mona Lisa) képén [49] a pixelek színeinek az értékét. És ami talán a legfontosabb, az SGB tartalmazza az ötbetűs szavak gyűjteményét, amit az alábbiakban fogunk megtárgyalni.

Az angol nyelv ötbetűs szavai. Ebben a fejezetben sok példa az ötbetűs szavak következő listáján alapszik:

$$\texttt{aargh}, \texttt{abaca}, \texttt{abaci}, \texttt{aback}, \texttt{abaft}, \texttt{abase}, \texttt{abash}, \ldots, \texttt{zooms}, \texttt{zowie}. \qquad (8)$$

(Összesen 5757 szó van, – túl sok ahhoz, hogy mindet megmutassuk itt; de a hiányzóak könnyen elképzelhetőek.) Ez egy személyes lista, a szerző gyűjtötte össze 1972 és 1992 között, azért kezdte el, mert megértette, hogy az ilyen szavak `ideális` adatot képeznek sokféle kombinatorikai algoritmus teszteléséhez.

A lista szándékosan le lett szűkítve azokra a szavakra, amelyek `valóban` előfordulnak az angol nyelvben, abban az értelemben, hogy a szerző valóban találkozott velük használatban. Teljes szótárak tartalmazzák olyan bejegyzések ezreit, melyek sokkal ezoterikusabbak, mint az `aalii`, `abamp`, ..., `zymin`, és `zyxst`; olyan szavakat, amelyek elsősorban a Scrabble® játékosok számára hasznosak. A szokatlan szavak azonban `elrontják` a szórakozását annak, aki nem ismeri őket. Így a szerző húsz éven át szisztematikusan jegyzékbe vette az összes `szót`, amelyik `jónak` (right) látszott *A számítógép-programozás művészete* kitűzött `céljai` számára.

Végül be kellett fagyasztani a gyűjteményt, azért, hogy legyen `fix pontunk` a megismételhető kísérletek számára. Az angol nyelv állandóan fejlődik, az 5757 SGB szó azonban így mindig ugyanaz marad – még akkor is, ha a szerző néha elcsábul, hogy néhány új szót adjon hozzá, amit 1992-ben nem ismert, mint a `chads`, `stent`, `blogs`, `ditzy`, `phish`, `bling`, és esetleg `tetch`. De nem, semmiképpen (`noway`). Az SGB bármelyik módosítására hosszú idő kell az `ended`: `finis` óta.

> A következő szógyűjtemény tartalmazni fogja az összes jól ismert angol szót
> ... amelyik használható a jó társaságban, és amelyik mutatóként szolgálhat.
> ... Szükség van ott egy gyorsíróra az új szavak felvételére.
> – LEWIS CARROLL *Doublets: A Word-Puzzle* (1879) [15]

> Ha létezik olyan ige, hogy ingerlékenykedni, akkor
> Mr. Lillywaite ingerlékenykedett.
> – ROBERT BARNARD Corpsein a Gilded Cage (1984) [5]

A személy nevek, mint a `Knuth`, nem számítanak szabályos szavaknak. Azonban `gauss` és `hardy érvényesek`, mert „gauss” a mágneses indukció egysége, „hardy” pedig angolul bátor. Tulajdonképpen az SGB szavak teljes egészében a szokásos kisbetűkből állnak; a lista nem tartalmaz kötőjellel ellátott szavakat, rövidítéseket, sem pedig olyan szavakat, amelyekhez szükség van ékezetre. Így mindegyik szót vektornak is tekinthetjük, amelyik öt komponenst tartalmaz a $[0\,..\,26)$ tartományból. Vektor értelemben a `yucca` és az `abuzz` szavak vannak a legtávolabb egymástól: A köztük lévő euklideszi távolság

$$\|(24,20,2,2,0)-(0,1,20,25,25)\|_2=\sqrt{24^2+19^2+18^2+23^2+25^2}=\sqrt{2415}.$$

A teljes Stanford GráfBázis az összes programjával és adathalmazával együtt könnyen letölthető a szerző honlapjáról (lásd **??**). Az összes SGB szó listáját pedig még könnyebb megkapni, mert az ugyanezen a helyen az „`sgb-words.txt`” fájlban van. Ez a fájl 5757 sort tartalmaz, soronként egy szót, kezdve a „`which`” szóval, és befejezve a „`pupal`” szóval. A szavak alapértelmezés szerint a használati gyakoriságuknak megfelelő sorrendben jelennek meg; például az 1000, 2000, 3000, 4000, és 5000 rangú szavak rendre `ditch`, `galls`, `visas`, `faker`, és `pismo`. A „`WORDS`(n)” jelölés ebben a fejezetben azt jelenti, hogy az összes szó az n gyakoriságúig ebben a sorrendezésben.

Mellesleg az ötbetűs szavak sok *négybetűs szó* többes számát tartalmazzák, és meg kell jegyeznünk, hogy nem alkalmaztuk a viktoriánus stílus cenzúráját. Az esetlegesen durva szavak el lettek távolítva a *The Official Scrabble® Players Dictionary*-ból, az SGB-ből azonban nem. Egy lehetőség annak a biztosítására, hogy a szemantikailag nem megfelelő szavak ne jelenjenek meg egy olyan tudományos cikkben, amelyik az SGB szólistáján alapszik, hogy leszűkítjük a választható szavak tartományát a `WORDS`(n)-re, ahol n mondjuk 3000.

Az alábbiakban látható 26–37. gyakorlatok bemelegítőként használhatók az SGB szavak kezdeti felderítésére, amelyeket ennek a fejezetnek a során számos különböző kombinatorikai összefüggésben fogunk látni. Ha például éppen a lefedési problémán gondolkozunk, megfigyelhetjük azt is, hogy a „`third flock began jumps`” szavak az ábécé első 21 betűjéből 20-at lefednek. Öt szó azonban legfeljebb 24 különböző betűt fed le, mint a {`becks`, `fjord`, `glitz`, `nymph`, `squaw`} szavak, ha nem folyamodunk egy ritka, nem SGB szóhoz, mint a `waqfs` (iszlám adományok), amelyik kombinálható a {`gyved`, `bronx`, `chimp`, `klutz`} szavakkal, így ezek 25-öt fednek le.

Egyszerű szavak a `WORDS`(400)-ból elegendőek ahhoz, hogy *szó négyzetet* készíthessünk:

```
class
light
agree .
sheep
steps
```
(9)

El kell azonban mennünk majdnem `WORDS`(3000)-ig, hogy *szó kockát* kapjunk,

```
types  yeast  pasta  ester  start
yeast  earth  armor  stove  three
pasta  armor  smoke  token  arena ,
ester  stove  token  event  rents
start  three  arena  rents  tease
```
(10)

amiben minden 5×5-ös „szelet” egy szó négyzet. A szimpla táncoló mutatók algoritmus egyszerű kiterjesztésével (lásd a 7.2.2.2. alpontot) meg lehet mutatni körülbelül 390 milliárd mems számítás elvégzésével, hogy a `WORDS`(3000) csak három szimmetrikus szó kockát tartalmaz, mint amilyen (10)-ben látható; a 36. gyakorlat megmutatja a másik kettőt. Meglepő módon 83 576 szimmetrikus kocka készíthető a teljes halmazból, `WORDS`(5757)-ből.

Szógráfok. Érdekes és fontos feladat az, hogy objektumokat sorokba, négyzetekbe, kockákba, és más minta szerint rendezzünk el; azonban a gyakorlati alkalmazásban másfajta kombinatorikai struktúrák még *inkább* érdekesek és fontosak, mégpedig a *gráfok*. Emlékeztetünk a 2.3.4.1. alpontból arra, hogy egy gráf pontok halmaza, amiket *csúcsoknak* hívunk, vonalak halmazával együtt, amiket *éleknek* nevezünk, és amik bizonyos csúcs párokat kötnek össze. A gráfok mindenütt ott vannak, és sok gyönyörű gráf algoritmust fedeztek fel, így természetesen a gráfok központi szerepet játszanak e fejezet számos alfejezetében. Valójában a Stanford GráfBázisban elsődlegesen gráfokról van szó, mint a neve is mutatja; az SGB szavak pedig főleg azért lettek összegyűjtve, mert érdekes és tanulságos gráfok meghatározására használhatóak.

Carroll 1877 végén tűzte ki az utat, amikor kitalált egy játékot, amit szómutatóknak, vagy szópároknak nevezett (lásd [25]). Carroll ötlete, amely hamarosan meglehetősen népszerű lett, az volt, hogy alakítsunk át egy szót egy másik szóvá egyszerre csupán egy betű megváltoztatásával:

`tears`—`sears`—`stars`—`stare`—`stale`—`stile`—`smile`. (11)

A legrövidebb ilyen átalakítás a legrövidebb *út* egy gráfban, ahol a gráf csúcsai angol szavak, élei azokat a szó párokat kötik össze, amelyek „Hamming-távolsága” 1 (ami azt jelenti, hogy éppen egy helyen különböznek egymástól).

Ha az SGB szavakra szorítkozunk, akkor Carroll szabályai a Stanford GráfBázis egy gráfját eredményezik, amelyiknek a hivatalos neve *words*(5757, 0, 0, 0). Az SGB-vel meghatározott mindegyik gráfnak egyedi azonosítója van, amit az ő *id*-jének hívunk, és az SGB szavakból Carroll módján származó gráfok *words*(n, l, t, s) alakú *id*-del vannak azonosítva. Itt n a csúcsok számát jelenti, l vagy 0, vagy súlyoknak egy listája, amit a szókincs különböző fajtáinak a megjelölésére használunk; t egy küszöbszám arra, hogy az alacsony súlyú szavak elutasíthatóak legyenek; s pedig a mag?? néhány pszeudovéletlen szám számára, amire szükség lehet az azonos súlyú szavak közötti összeköttetés megszakításához.?? Nincs szükségünk az összes részletre, de néhány példa megvilágítja a fő gondolatot:

- *words*$(n, 0, 0, 0)$ pontosan az a gráf, amelyet akkor kapunk, ha Carroll eszméjét a `WORDS`(n)-re alkalmazzuk $1 \le n \le 5757$ esetén.
- *words*$(1000, \{0,0,0,0,0,0,0,0,0\}, 0, s)$ tartalmaz 1000 véletlenszerűen választott SGB szót, s különböző értékeire rendszerint különbözőt.
- *words*$(766, \{0,0,0,0,0,0,0,1,0\}, 1, 0)$ tartalmazza az összes ötbetűs szót, amelyik megjelenik e sorok szerzőjének TeX-ről és METAFONT-ról írt könyveiben.

Az utóbbi gráfban csak 766 szó van, így nem tudunk nagyon sok (11)-belihez hasonló hosszú utat kialakítani, ámbár

`basic`—`basis`—`bases`—`based`—`baked`—`naked`—`named`—`names`—`games` (12)

egy figyelemreméltó példa.

Természetesen sok más mód is van egy gráf éleinek a definiálására, ha a csúcsok az ötbetűs szavakat reprezentálják. Kívánhatjuk például, hogy az euklideszi távolság legyen kicsi a Hamming-távolság helyett. Vagy kijelenthetjük, hogy két szó akkor legyen szomszédos, ha van közös négy betűs részszavuk; ez a stratégia lényegesen kibővítené a gráfot, lehetővé téve a `káosz` számára, hogy `békét` teremjen, jóllehet a TeX-hez kapcsolódó 766 szóra korlátozva:

`chaos`—`chose`—`whose`—`whole`—`holes`—`hopes`—`copes`—`scope`
—`score`—`store`—`stare`—`spare`—`space`—`paces`—`peace`. (13)

(Ebben az előírásban elhagyunk egy betűt, aztán beszúrunk egy másikat, lehetőleg eltérő helyen.) Vagy választhatunk egy ezektől teljesen különböző stratégiát, mint azt, hogy két szóvektor, $a_1a_2a_3a_4a_5$ és $b_1b_2b_3b_4b_5$ közé akkor és csak akkor teszünk élt, ha a skalár szorzatuk, $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5$ valamilyen m paraméternek a többszöröse. A gráf algoritmusok különböző fajtájú adatokkal boldogulnak.

Az SGB szavak elvezetnek az *irányított* gráfok érdekes családjához is, ha $\{a_2, a_3, a_4, a_5\} \subseteq \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ (mint multihalmazok) esetén $a_1a_2a_3a_4a_5 \to b_1b_2b_3b_4b_5$-t írunk. (Távolítsuk el az első betűt, szúrjunk be egy másikat, és rendezzük át őket.) Ezzel a szabállyal például átalakíthatjuk a `words` szót a `graph` szóvá hat hosszú legrövidebb irányított úton:

`words` → `dross` → `soars` → `orcas` → `crash` → `sharp` → `graph`. (14)

A gyakorlat Taylor-sorában az első tag az elmélet.
– THOMAS M. COVER *1990 Shannon lecture* (1992) [18]

A gráfelméletben jelenleg használt terminológia rendszerek száma jó közelítéssel megegyezik a gráfelméleti szakemberek számával.
– RICHARD P. STANLEY *Enumerative Combinatorics* (1986) [74]

Gráfelmélet: az alapok. Egy G gráf egy V csúcshalmazból és egy E élhalmazból áll, amit különböző csúcsokból képzett párok alkotnak. Feltesszük, hogy V és E *véges* halmazok, hacsak nem írjuk elő másképp. Azt írjuk, hogy $u — v$ ha u és v csúcsok, és $\{u,v\} \in E$, valamint $u \not— v$-t írunk, ha u és v csúcsok, de $\{u,v\} \notin E$. Ha csúcsokra fennáll $u — v$, akkor azt mondjuk, hogy „szomszédok", és azt is mondjuk rájuk, hogy „szomszédosak" G-ben. Ennek a definíciónak az egyik következménye az, hogy $u — v$ akkor és csak akkor, ha $v — u$. Másik következmény az, hogy $v \not— v$ minden $v \in V$ esetén, vagyis csúcs nem szomszédos önmagával. (Fogunk azonban multigráfokról tárgyalni, amelyekben megengedjük, hogy egy csúcsot egy hurok önmagával kössön össze.)

A $G' = (V', E')$ ***részgráfja*** a $G = (V, E)$ gráfnak, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$. ***Feszítő*** részgráfja G-nek, ha ráadásul még $V' = V$. És ***indukált*** részgráfja G-nek, ha E' a lehetséges legtöbb élt tartalmazza, amennyiben V' a csúcsok adott részhalmaza. Más szóval ha $V' \subseteq V$, a V' által feszített $G' = (V', E')$ részgráfja $G = (V, E)$-nek, ahol

$$E' \;=\; \bigl\{\, \{u,v\} \bigm| u \in V',\, v \in V',\, \text{és } \{u,v\} \in E \,\bigr\}. \tag{15}$$

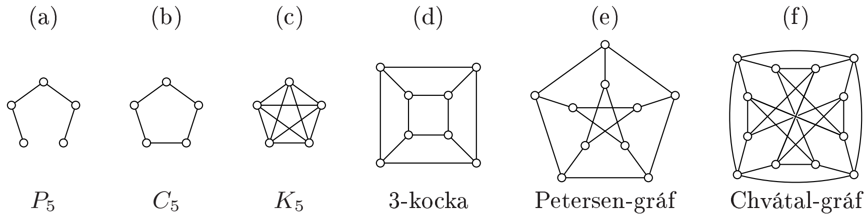
Ezt a G' részgráfot $G \mid V'$ jelöli, és gyakran hívjuk úgy, hogy „G leszűkítése V'-re" . Abban a gyakori esetben, ha $V' = V \setminus \{v\}$, egyszerűen azt írjuk, hogy $G \setminus v$ („G mínusz a v csúcs") mintegy a $G \mid (V \setminus \{v\})$ rövidítéseként. Hasonlóképp, ha $e \in E$, akkor a $G' = (V, E \setminus \{e\})$ részgráf jelölésére, amit egy él eltávolításával kapunk csúcsé helyett, a $G \setminus e$ jelölést alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy az összes korábban leírt, $\mathit{words}(n,l,t,s)$-ként ismert SGB gráf feszítő részgráfja a $\mathit{words}(5757,0,0,0)$ fő gráfnak; ezekben a gráfokban csak a szókincs változik, nem pedig a szomszédsági szabályok.

Egy n csúcsú és e élű gráfra azt mondjuk, hogy ***n*-ed *rendű*** és ***e méretű***. A legegyszerűbb és legfontosabb n-ed rendű gráfok a K_n *teljes gráf*, a P_n *út*, és a C_n *kör*. Tegyük fel, hogy a csúcsok halmaza $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ekkor

- K_n-nek $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ éle van, $u — v$, ha $1 \le u < v \le n$; minden n csúcsú gráf feszítő részgráfja K_n-nek.
- P_n-nek $n-1$ éle van, $v — (v{+}1)$, amikor $1 \le v < n$ és $n \ge 1$; ez egy $n{-}1$ hosszú út 1-től n-ig.
- C_n-nek n éle van, $v — ((v \bmod n){+}1)$, ha $1 \le v \le n$; ez csak akkor gráf, ha $n = 0$ vagy $n \ge 3$ (azonban C_1 és C_2 multigráfok).

A K_n, P_n, és C_n gráfokat valójában a $\{0, 1, \ldots, n{-}1\}$ csúcsokon, vagy ***bármelyik*** n-elemű V halmazon definiálhattuk volna az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz helyett, mert két gráf, amelyik csak csúcsai nevében különbözik, éleinek struktúrájában azonban nem, kombinatorikailag ekvivalens.

Formálisan azt mondjuk, hogy a $G = (V, E)$ és a $G' = (V', E')$ gráfok ***izomorfak***, ha van egy φ egy-egy értelmű megfeleltetés V-ről V'-re úgy hogy $u — v$ akkor és csak akkor



7.2. ábra. Hat példa gráf, amelyek rendre $(5, 5, 5, 8, 10, 12)$ csúcsot és $(4, 5, 10, 12, 15, 24)$ élt tartalmaznak.

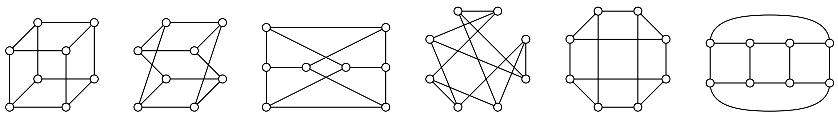
áll fenn G-ben, ha $\varphi(u) \text{—} \varphi(v)$ fennáll G'-ben. A $G \cong G'$ jelölés gyakran használatos arra, hogy G és G' izomorfak; de sokszor leszünk kevésbé precízek, és az izomorf gráfokat úgy kezeljük, mint azonosakat, és alkalmanként $G = G'$-t írunk még ha G és G' csúcshalmaza szigorúan véve nem is azonos.

Kis gráfokat egyszerűen definiálhatunk az ábrájuk megrajzolásával, amiben a csúcsok kicsi körök, az élek pedig vonalak közöttük. A 7.2. ábra több fontos példát mutat, amelyek tulajdonságait később fogjuk tanulmányozni. A Petersen-gráf 7.2.(e)-ben Petersenről, egy egykori gráfelméleti szakemberről kapta a nevét, aki egy kézenfekvő feltevés megdöntésére használta [62]; valójában ez egy nevezetes alakzat, amelyik ellenpéldaként szolgál számos derűlátó sejtésre arról, hogy mi lehet igaz gráfokra általában. A 7.2.(f) ábrán látható Chvátal-gráfot Chvátal vezette be [16].

Egy gráf ábrában lehetséges, hogy a vonalak olyan pontokban keresztezik egymást, amelyek nem csúcsok. Például 7.2.(f) középső pontja *nem* csúcsa Chvátal gráfjának. Egy gráfot *síkba rajzolhatónak* nevezünk ha van keresztezés nélküli lerajzolása. Világos, hogy P_n és C_n mindig síkba rajzolhatóak; 7.2.(d) mutatja, hogy a 3-kocka is síkba rajzolható. Azonban K_5-nek túl sok éle van ahhoz, hogy síkba rajzolható legyen (lásd a 46. gyakorlatot)

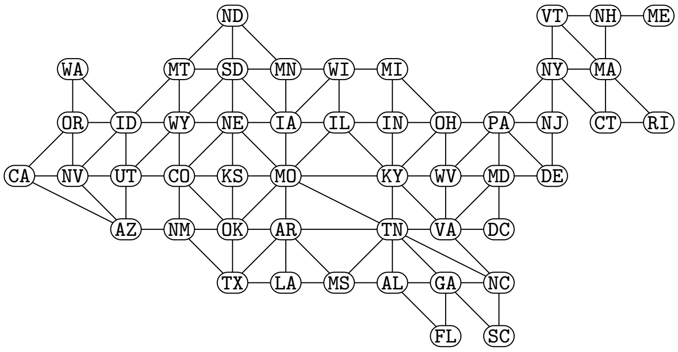
Egy csúcs *foka* a szomszédainak a száma. Ha minden csúcsnak ugyanakkora a foka, akkor a gráfot *regulárisnak* nevezzük. A 7.2. ábrán például P_5 irreguláris, mert van két 1-fokú csúcsa és három 2-fokú. A többi öt gráf azonban reguláris, rendre a $(2, 4, 3, 3, 4)$ fokszámokkal. Egy 3-fokú reguláris gráfot gyakran „kubikus???-nak”, vagy „trivalens-nek???” hívnak.

Egy adott gráf megrajzolására számos mód van, néhány áttekinthetőbb a többinél. Például a (16) ábrán látható hat diagram mindegyike izomorf a 3-kockával, a 7.2.(d) ábra Chvátal-gráfjának a 7.2.(d) ábrán látható elrendezését Bondy fedezte fel sok évvel azután, hogy Chvátal tanulmánya megjelent, miáltal váratlan szimmetriák tárultak fel.


. (16)

Egy gráf szimmetriái, amiket az *automorfizmusainak* is hívunk, a csúcsainak olyan permutációi, amelyek megőrzik a szomszédságot. Más szóval a φ permutáció G automorfizmusa, ha $\varphi(u) \text{—} \varphi(v)$ teljesül, valahányszor $u \text{—} v$ fennáll G-ben. Egy a 7.2.(f) ábrán láthatóhoz hasonlóan jól megválasztott lerajzolás képes felfedni a rejtőzködő szimmetriát, egy ábra azonban nem mindig tudja megmutatni az összes létező szimmetriát. Például a kockának 48 automorfizmusa van, a Petersen-gráfnak pedig 120. A 7.2.3. pontban tanulmányozni fogunk az izomorfizmussal és az automorfizmussal foglalkozó algoritmusokat. A szimmetriák hasznosíthatóak arra, hogy elkerülhessünk szükségtelen számításokat, egy algoritmust akár k-szor gyorsabbá téve, ha olyan gráffal dolgozik, amelyiknek k automorfizmusa van.

Azok a gráfok, amelyek a valódi világban adódnak, rendszerint különböznek a 7.2. ábrabeli tulajdonképpeni matematikai gráfoktól. Itt van például a (17) ábrán egy ismert gráf, amelyiknek egyáltalán nincs szimmetriája, jóllehet megvan az az előnye, hogy síkba rajzolható.



. (17)

Az USA államainak a szomszédságát reprezentálja és később több példában fogjuk használni. Ennek az ábrának a 49 csúcsát az egyszerűség kedvéért a kétbetűs postai kódokkal indexeltük, ahelyett, hogy üres körökre redukáltuk volna.

Utak és körök. Egy gráf feszítő útját *Hamilton-útnak* nevezzük, egy feszítő kört pedig *Hamilton-körnek*, mert Hamilton kitalált egy rejtvényt 1859-ben, amelyiknek az volt a célja, hogy ilyen utakat és köröket találjanak a dodekaéder élein. Kirkman ettől függetlenül tanulmányozta a problémát poliéderekre általában (lásd [40] és [7, 2. fejezet]). A feszítő út vagy feszítő kör keresésének feladata azonban sokkal régebbi – valóban, jogosan tekinthetjük a legrégibbnek az összes kombinatorikai probléma közül, mert a huszár sakktáblán megtett útjainak és mozgásának a története visszanyúlik a kilencedik századi Indiáig (lásd a 7.3.3. pontban). Egy gráfot *Hamilton-gráfnak* nevezünk, ha van Hamilton-köre. (A Petersen-gráf egyébként a legkisebb 3-reguláris gráf, amelyik sem nem síkba rajzolható, sem nem Hamilton-gráf [63].

A gráf *kerülete* a legrövidebb körének a hossza; a kerület végtelen, ha a gráf aciklikus (nem tartalmaz kört). Például a 7.2. ábra hat gráfjának kerülete rendre $(\infty, 5, 3, 4, 5, 4)$. Nem nehéz bebizonyítani, hogy egy olyan gráfnak, amelyiknek a minimális fokszáma k és 5 a kerülete, legalább $k^2 + 1$ csúcsa kell legyen. További vizsgálat megmutatja, hogy ez a minimális érték csak $k = 2$ (C_5), $k = 3$ (Petersen), $k = 7$, vagy esetleg $k = 57$ esetén valósítható meg. (Lásd a 63–65. gyakorlatokat.)

Két csúcs, u és v között a $d(u, v)$ ***távolság*** a gráfban az u-ból v-be menő utak minimális hossza; ez végtelen, ha nincs ilyen út. Nyilvánvalóan $d(v, v) = 0$ és $d(u, v) = d(v, u)$. Fennáll a háromszög egyenlőtlenség is:

$$d(u, v) + d(v, w) \;\geq\; d(u, w)\,. \tag{18}$$

Ha $d(u,v)=p,\ \ d(v,w)=q,\ \ p<\infty$ és $q<\infty$, akkor

$$u=u_0 — u_1 — \cdots — u_p=v \quad \text{és} \quad v=v_0 — v_1 — \cdots — v_q=w\,, \tag{19}$$

utak, és meg tudjuk a legkisebb r indexet találni, amire $u_r=v_s$ valamilyen s esetén. Ekkor

$$u_0 — u_1 — \cdots — u_{r-1} — v_s — v_{s+1} — \cdots — v_q \tag{20}$$

egy u-tól w-ig tartó $\le p+q$ hosszú út.

Egy gráf *átmérője* $d(u,v)$ maximuma az összes u és v csúcsra nézve. A gráf *összefüggő*, ha átmérője véges. Egy gráf csúcsai mindig szétoszthatóak összefüggő *komponensekbe*, ahol két u és v csúcs akkor és csak akkor tartozik ugyanabba a komponensbe, ha $d(u,v)<\infty$.

A $words(5757,0,0,0)$ gráfban például $d(\texttt{tears},\texttt{smile})=6$, mert (11) legrövidebb út `tears`-től `smile`-ig. Hasonlóan $d(\texttt{tears},\texttt{happy})=6$, $d(\texttt{smile},\texttt{happy})=10$ és $d(\texttt{world},\texttt{court})=6$. Azonban $d(\texttt{world},\texttt{happy})=\infty$; a gráf nem összefüggő. Valóban, tartalmaz az `aloof`-hoz hasonlóan 671 olyan szót, amelyiknek nincs szomszédja, és mindegyik saját magával 1-rendű összefüggő komponenst képez. Szó párok, mint az `alpha`—`aloha`, `droid`—`druid`, és az `opium`—`odium` a többi 103 2-rendű komponenshez tartoznak. Néhány 3-rendű komponens út, mint a `chain`—`chair`—`choir`; mások, mint a {`getup`, `letup`, `setup`} pedig körök. Néhány kisebb komponens van még, amilyen a

$$\texttt{login} — \texttt{logic} — \texttt{yogic} — \texttt{yogis} — \texttt{yogas} — \texttt{togas} \tag{21}$$

furcsa út, amelyik szavainak nincs több szomszédja. Az összes ötbetűs szó hatalmas többsége azonban egy 4493-rendű óriás komponenshez tartozik. Ha ön el tud menni két lépésre egy adott szótól, annak az esélye, hogy az ön szava mindennel össze van kötve az óriás komponensben, nagyobb, mint 15 az 1-hez.

Hasonlóan a $words(n,0,0,0)$ gráf óriás komponenseinek a rendje $(3825,2986,2056,1198,224)$, ha sorra $n=(5000,4000,3000,2000,1000)$. Ha azonban n kicsi, nincs elég él sok kapcsolat létesítéséhez. Például $words(500,0,0,0)$-nek 327 különböző komponense van, semelyik sem 15, vagy nagyobb rendű.

A távolság-fogalmat ki lehet terjeszteni $d(v_1,v_2,\ldots,v_k)$-ra bármely k érték esetén, ami az élek minimális számát jelenti abban az összefüggő részgráfban, amelyik tartalmazza a $\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ csúcsokat. Például, $d(\texttt{blood},\texttt{sweat},\texttt{tears})$ 15-nek bizonyul, mert a

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\texttt{blood} & — & \texttt{brood} & — & \texttt{broad} & — & \texttt{bread} & — & \texttt{tread} & — & \texttt{treed} & — & \texttt{tweed}\\
 & & & & & & & & & & | & & |\\
\texttt{tears} & — & \texttt{teams} & — & \texttt{trams} & — & \texttt{trims} & — & \texttt{tries} & — & \texttt{trees} & & \texttt{tweet}\\
 & & & & & & & & & & & & |\\
 & & & & & & & & & & \texttt{sweat} & — & \texttt{sweet}
\end{array} \tag{22}$$

részgráf 15 élű, és nincs megfelelő 14[2] élű részgráf.

Említettük a 2.3.4.1. alpontban, hogy a legkevesebb élű összefüggő gráfot *szabad fának* hívjuk. Az a részgráf, amelyik a $d(v_1,\ldots,v_k)$ általánosított távolságnak megfelel, mindig szabad fa. Félrevezető módon hívják *Steiner-fának*, mert Steiner egyszer említette a $k=3$ esetet a $\{v_1,v_2,v_3\}$ pontokra az euklideszi síkban [75]. Heinen oldotta meg ezt a problémát [34]; Gauss kiterjesztette a vizsgálatot $k=4$-re Schumacherhez írt levelében (1836. márc.

[2] Vagy kevesebb. *A fordító.*

21.).

Színezés. Egy gráfot *k-részesnek* vagy *k-színezhetőnek* nevezünk, ha csúcsai k vagy kevesebb részre oszthatók szét úgy, hogy minden él végpontjai különböző részhez tartozzanak, – vagy ami ezzel ekvivalens, ha ki lehet a csúcsokat legfeljebb k különböző színnel színezni úgy, hogy soha ne tartozzon ugyanaz a szín két szomszédos csúcshoz. A híres négyszín tétel, amit Guthrie sejtett meg 1852-ben, és végül masszív számítógépes segítséggel Appel, Haken, és Koch [3] bizonyította be, azt állítja, hogy *minden síkba rajzolható gráf 4-színezhető*. Egyszerű bizonyítás nem ismert, de speciális esetek, mint a (17), kiszínezhetők ránézésre (lásd a 45. gyakorlatot); és egy síkba rajzolható gráf 4-színezéséhez általában elegendő $O(n^2)$ lépés [66].

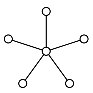
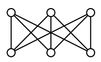
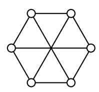
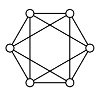
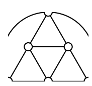
A 2-színezhető gráfok különösen fontosak a gyakorlatban. A 2 részes gráfokat általában *kétrészesnek*, vagy egyszerűen „bigráfnak” hívjuk; egy ilyen gráf minden élének egy végpontja van mindkét részben.

B tétel. *Egy gráf akkor és csak akkor kétrészes, ha nem tartalmaz páratlan hosszúságú kört.*

Bizonyítás. (Lásd [41].) Egy k részes gráf mindegyik részgráfja k részes. Így a C_n kör csak akkor lehet egy kétrészes gráf részgráfja, ha C_n maga is bigráf, ekkor pedig n-nek párosnak kell lennie.

Fordítva, ha egy gráf nem tartalmaz páratlan kört, kiszínezhetjük a csúcsait két színnel, a $\{0,1\}$ színekkel a következő eljárás végrehajtásával: Kezdetben mindegyik csúcs színezetlen. Ha a színezett csúcsok minden szomszédja színezett már, válasszunk egy színezetlen w csúcsot, és színezzük 0-val. Egyébként válasszunk egy színezett u csúcsot, amelyiknek van egy színezetlen v szomszédja, és rendeljük v-hez a másik színt. A 48. gyakorlat bebizonyítja, hogy végül érvényes 2-színezést kapunk. ■

A *teljes kétrészes gráf*, $K_{m,n}$ a legnagyobb kétrészes gráf, amelyiknek a csúcsai m és n méretű részekből állnak. Az $\{1,2,\ldots,m+n\}$ csúcsokon úgy definiálhatjuk, hogy $u — v$ mindahányszor $1 \le u \le m < v \le m+n$. Más szóval $K_{m,n}$-nek mn éle van, amelyekhez minden lehetséges módon az egyik csúcsot az első részben, a másikat a második részben választjuk. Hasonlóan a *teljes k-részes gráf* $K_{n_1,\ldots,n_k}$ $N = n_1 + \cdots + n_k$ csúcsból áll, amelyek $\{n_1,\ldots,n_k\}$ méretű részekbe oszlanak szét, és bármelyik két olyan csúcs között van él, amelyek nem tartoznak ugyanahhoz a részhez. Itt van néhány példa, ha $N = 6$:

 ;  ; $\cong$  ; ;  $\cong$  . (23)

$K_{1,5}$ $K_{3,3}$ $K_{2,2,2}$

Vegyük észre, hogy $K_{1,n}$ szabad fa; népszerű nevén $n+1$-ed rendű *csillaggráf*.

GYAKORLATOK

1. [*25*] Tegyük fel, hogy $n = 4m-1$. Készítsük el az $\{1,1,\ldots,n,n\}$ számokra a Langford-párok elrendezését úgy, hogy $n = 4m$-re is megkapjuk a megoldást az első „$2m-1$”-et „$4m$”-re cserélve és „$2m-1$ $4m$”-et jobbról hozzáírva. *Útmutatás.* Helyezzük balra az $m-1$ páros számot, $4m-4$, $4m-6$, …, $2m$-et.

2. [*18*] Milyen n esetén lehet $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$-et Langford-párokba rendezni?

3. [*22*] Tegyük fel, hogy a $\{0, 0, 1, 1, \ldots, n{-}1, n{-}1\}$ számokat *körben* rendezzük el, nem pedig egy vonalban úgy, hogy k távolság legyen két k között. Kaphatunk-e olyan megoldásokat, amelyek lényegesen különböznek a 2. gyakorlat megoldásaitól?

4. [*M20*] (T. Skolem, 1957.) Mutassuk meg, hogy az 1.2.8.-36. gyakorlat $S_\infty = babbababbabba\ldots$ Fibonacci-füzére egyenesen elvezet a Langford-párok *összes* nemnegatív egész halmazán vett 00121 32453674 ... végtelen sorozatához, ha az a-kat és a b-ket egymástól függetlenül sorban a 0, 1, 2, stb. számjegyekkel helyettesítjük balról jobbra haladva.

5. [*F22*] Ha véletlenszerűen választjuk $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ egyik permutációját, mi a valószínűsége annak, hogy két k pontosan k pozícióra van egymástól adott k esetén? Használjuk ezt a képletet arra, hogy megbecsüljük a Langford-számok L_n számát (1)-ben.

6. [*M28*] (M. Godfrey, 2002.) Legyen $f(x_1, \ldots, x_{2n}) = \prod_{k=1}^{n}\bigl(x_k x_{n+k} \sum_{j=1}^{2n-k-1} x_j x_{j+k+1}\bigr)$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{x_1,\ldots,x_{2n}\in\{-1,+1\}} f(x_1, \ldots, x_{2n}) = 2^{2n+1} L_n$.

b) Indokoljuk meg, hogyan lehet ezt az összeget $O(4^n n)$ lépésben megbecsülni. Hány bit pontosságú aritmetikára van szükség ehhez?

c) Adjuk meg nyolc??? egyik tényezőjét, felhasználva az alábbi azonosságot:

$$f(x_1, \ldots, x_{2n}) = f(-x_1, \ldots, -x_{2n}) = f(x_{2n}, \ldots, x_1) = f(x_1, -x_2, \ldots, x_{2n-1}, -x_{2n}).$$

7. [*M22*] Bizonyítsuk be, hogy $\{1, 1, \ldots, 16, 16\}$ mindegyik Langford-párosításának valahol hét befejezetlen párt[3] kell tartalmaznia, ha balról jobbra haladunk.

8. [*23*] A legegyszerűbb Langford-sorozat nem csupán jól kiegyensúlyozott, hanem *síkba rajzolható* is, abban az értelemben, hogy a párokat össze lehet kötni a vonalak kereszteződése nélkül, mint (2)-ben:

$$2\;3\;1\;2\;1\;3\,.$$

Keressük meg az összes síkba rajzolható Langford-párosítást, ha $n \leq 8$.

9. [*24*] (*Langford-hármasok.*) Hányféleképpen lehet sorba rendezni $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, \ldots, 9, 9, 9\}$-et úgy, hogy két egymás utáni k egymástól k távolságra legyen $1 \leq k \leq 9$ esetén?

10. [*M20*] Mutassuk meg, hogy hogyan lehet *bűvös négyzetet* készíteni közvetlenül a 7.1. ábrából. (Feleltessünk meg mindegyik kártyának egy 1 és 16 közé eső számot olyan módon, hogy a sorokban, oszlopokban, valamint a főátlókban 34 legyen az összeg.)

11. [*20*] Terjesszük ki (5)-öt egy „héber-görög-latin” négyzetté úgy, hogy a **HÉBER** betűk valamelyikét hozzáírjuk mindegyik cellában lévő kétbetűs füzérhez. Egyetlen (latin, görög), (latin, héber), illetve (görög, héber) betű pár sem fordulhat elő egynél több helyen.

12. [*M21*] (L. Euler.) Legyen $L_{ij} = (i + j) \mod n$, ha $0 \leq i, j < n$ egészek modulo n vett összeadási táblája. Mutassuk meg, hogy L-re ortogonális latin négyzet akkor és csak akkor létezik, ha n páratlan.

13. [*M25*] Egy 10×10-es négyzet négy 5×5-ös negyedre osztható. Egy 10×10-es latin négyzetnek, amelyik a $\{0, 1, \ldots, 9\}$ számjegyeket tartalmazza, k „betolakodója” van, ha a felső baloldali negyede pontosan $k \geq 5$ elemet tartalmaz. (Lásd $k = 3$-ra példaként a 14.(e) gyakorlatot.) Bizonyítsuk be, hogy a négyzetnek nincs ortogonális párja, kivéve, ha van legalább három betolakodója.

---

[3] Vagyis a pár egyik tagja le van helyezve, a másik még nincs. *A fordító.*

14. [*29*] Keressük meg az alábbi latin négyzetek összes ortogonális párját:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
3145926870	2718459036	0572164938	1680397425	7823456019
2819763504	0287135649	6051298473	8346512097	8234067195
9452307168	7524093168	4867039215	9805761342	2340178956
6208451793	1435962780	1439807652	2754689130	3401289567
8364095217	6390718425	8324756091	0538976214	4012395678
5981274036 ;	4069271853 ;	7203941586 ;	4963820571 ;	5678912340 .
4627530981	3102684597	5610473829	7192034658	6789523401
0576148329	9871546302	9148625307	6219405783	0195634782
1730689452	8956307214	2795380164	3471258906	1956740823
7093812645	5643820971	3986512740	5027143869	9567801234

15. [*50*] Keressünk 10×10-es latin négyzeteket, amelyek kölcsönösen ortogonálisak egymásra.

16. [*48*] (H. J. Ryser, 1967.) Egy latin négyzetet „n-ed rendűnek" mondunk, ha n sora, n oszlopa van és n szimbólumot tartalmaz. Van-e minden páratlan rendű latin négyzetnek tranzverzálisa?

17. [*25*] Legyen L egy latin négyzet, melynek elemei L_{ij}, ha $0 \le i, j < n$. Nézzük a következő két feladatot: (a) L összes tranzverzálisának a megkeresése és (b) L összes ortogonális párjának a megkeresése. Igazoljuk, hogy ez a két probléma speciális esete az általános teljes lefedési problémának.

18. [*M23*] Az $x_1x_2 \ldots x_N$ füzért „n-árisnak" nevezzük, ha mindegyik x_j elem az n-áris $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazból való. Két $x_1x_2 \ldots x_N$ és $y_1y_2 \ldots y_N$ füzért *ortogonálisnak* mondunk, ha az N darab (x_j, y_j) pár diszjunkt, ahol $1 \le j \le N$. (Következésképpen két n-áris füzér nem lehet ortogonális, ha N hosszuk meghaladja az n^2-et.) Egy m sorral és n^2 oszloppal rendelkező olyan n-áris mátrixot, amelyiknek sorai ortogonálisak egymásra n-ed rendű m-mélységű *ortogonális mátrixnak* nevezünk.

Keressünk összefüggést m mélységű ortogonális mátrixok, és kölcsönösen ortogonális latin négyzetek $m-2$ listája között. Melyik ortogonális mátrix felel meg a 11. gyakorlatnak?

19. [*M25*] A 18. gyakorlatot folytatva bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ rendű és m mélységű ortogonális mátrix csak akkor lehetséges, ha $m \le n+1$. Mutassuk meg, hogy ez a felső határ megvalósítható, ha n egy p prímszám. Írjunk fel egy példát, ha $p = 5$.

20. [*F20*] Mutassuk meg, hogy ha egy ortogonális mátrix minden k elemét $e^{2\pi k i/n}$-nel helyettesítjük, akkor a sorok ortogonális vektorok lesznek a szokásos értelemben (vektoriális szorzatuk nulla).

21. [*M21*] Egy *geometriai háló* pontok és egyenesek rendszere, amelyek eleget tesznek három axiómának:

i) Mindegyik egyenes pontok halmaza.

ii) Különböző egyeneseknek legfeljebb egy közös pontjuk van.

iii) Ha p egy pont és L egy egyenes, amelyikre $p \notin L$, akkor pontosan egy olyan M egyenes van, amelyikre $p \in M$ és $L \cap M = \emptyset$.

Ha $L \cap M = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy L *párhuzamos* M-mel, és ezt $L \parallel M$-mel jelöljük.

a) Bizonyítsuk be, hogy egy geometriai háló egyenesei ekvivalencia osztályokba oszthatóak szét úgy, hogy két egyenes akkor és csak akkor van ugyanabban az osztályban, ha megegyezik, vagy párhuzamos.

b) Mutassuk meg, hogy ha van a párhuzamos egyeneseknek legalább két osztálya, mindegyik egyenes ugyanannyi számú pontot tartalmaz, mint az ugyanebben az osztályban lévő többi egyenes.

c) Továbbá, ha van legalább három osztály, vannak olyan m és n számok, hogy minden pont pontosan m egyeneshez tartozik, és minden egyenes pontosan n pontot tartalmaz.

22. [*M22*] Mutassuk meg, hogy mindegyik ortogonális mátrix tekinthető geometriai hálónak. Igaz-e ennek a fordítottja is?

23. [*M21*] (*Hibajavító kódok.*) Két $x = x_1 \dots x_N$ és $y = y_1 \dots y_N$ füzér közötti $d(x, y)$ „Hamming-távolság" azoknak a j pozícióknak a száma, amelyekre $x_j \neq y_j$. Egy *b-áris kód n információs jeggyel és r ellenőrző jeggyel* b^n $x = x_1 \dots x_{n+r}$ füzér $C(b, n, r)$ halmaza, ahol $0 \leq x_j < b$, ha $1 \leq j \leq n + r$. Ha egy küldött kódszó az x, y pedig a fogadott üzenet, akkor $d(x, y)$ az átviteli hibák száma. A kódot *t-hibajavítónak* nevezzük, ha minden olyan alkalommal meg tudjuk állapítani x értékét, amikor az y fogadott üzenetre $d(x, y) \leq t$. A kód *távolsága* az összes $x \neq x'$ kódszó pár esetén $d(x, x')$ minimális értéke.

a) Bizonyítsuk be, hogy egy kód akkor és csak akkor t-hiba javító, ha távolsága meghaladja a $2t$-t.
b) Bizonyítsuk be, hogy egy olyan 1-hiba javító b-áris kód, amelyiknek 2 információs jegye és 2 ellenőrző jegye van, ekvivalens egy pár b rendű ortogonális latin négyzettel.
c) Továbbá egy $r + 1$ távolságú $C(b, 2, r)$ kód ekvivalens r kölcsönösen ortogonális b rendű latin négyzetek egy halmazával.

24. [*M30*] Egy N pontból és R egyenesből álló geometriai háló természetes úton elvezet a $C(2, N, R)$ bináris kódhoz, ha az $x_1 \dots x_N x_{N+1} \dots x_{N+R}$ kódszavak az alábbi paritás bittel vannak definiálva:

$$x_{N+k} = f_k(x_1, \dots, x_N) = \left(\sum\{x_j \mid \text{a } j \text{ pont a } k \text{ egyenesen fekszik}\}\right) \mod 2\,.$$

a) Ha a hálónak m osztálya van, amelyeket párhuzamos egyenesek alkotnak, bizonyítsuk be, hogy a kód távolsága $m + 1$.
b) Keressünk hatékony módot arra, hogy ha $m = 2t$, akkor ezzel a kóddal t-hibával bezárólag javítani tudjunk. Szemléltessük a dekódolás folyamatát az $N = 25$, $R = 30$, $t = 3$ esetben.

25. [*27*] Keressünk olyan latin négyzetet, amelynek sorai és oszlopai ötbetűs szavakból álló szó-négyzetek. (Ehhez a gyakorlathoz elő kell ásnunk a nagyszótárakat.)

26. [*25*] Alkossunk értelmes angol mondatot, amelyik csupán ötbetűs szavakat tartalmaz.

27. [*20*] Hány SGB szó tartalmaz k különböző betűt, ha $1 \leq k \leq 5$?

28. [*20*] Van-e olyan SGB szó vektor pár, amelyik komponenseiben az egymásnak megfelelő betűk ± 1-gyel térnek el egymástól[4]?

29. [*20*] Keressük meg az összes SGB szót, amelyek *palindromák* (megegyezik a fordítottjával), vagy tükör párok (mint a `regal lager`).

30. [*20*] A `first` szó betűi alfabetikus sorrendben vannak balról jobbra. Melyik lexikografikusan az első ilyen ötbetűs szó? Melyik az utolsó?

31. [*21*] (C. Manus.) Keressük meg az összes olyan halmazt, amelyik három olyan SGB szót tartalmaz, amelyek számtani sorozatot alkotnak, de nincs közös betűjük semmilyen rögzített helyen. (Egy ilyen példa {`power`, `slugs`, `visit`}.)

---

[4] Az angol ábécében elfoglalt helyük szerint. *A fordító.*

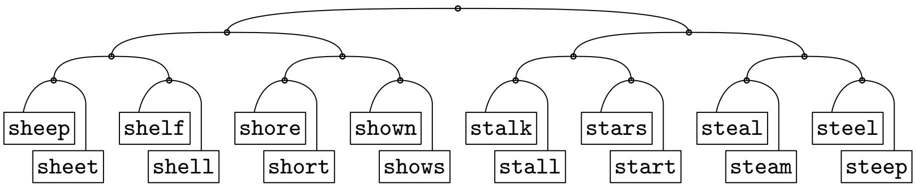
32. [*23*] Vannak-e az angol nyelvben olyan 10-betűs $a_0a_1\ldots a_9$ szavak, amelyekre $a_0a_2a_4a_6a_8$ és $a_1a_3a_5a_7a_9$ is SGB szavak?

33. [*20*] (S. Morris.) Egészítsük ki a 26 érdekes SGB szó következő listáját:

$$\texttt{about}\,,\ \texttt{bacon}\,,\ \texttt{faced}\,,\ \texttt{under}\,,\ \texttt{chief}\,,\ \ldots,\ \texttt{pizza}\,.$$

34. [*21*] Minden olyan SGB szóból, amelyik nem tartalmazza az `y` betűt, nyerjünk ki egy 5-bites bináris számot úgy, hogy az {`a`, `e`, `i`, `o`, `u`} magánhangzókat 1-re cseréljük, a többi betűt pedig 0-ra. Melyek a legismertebb szavak a 32 bináris eredmény mindegyikénél?

35. [*26*] A `WORDS`(1000) alábbi tizenhat jól megválasztott eleme elágaztatási stratégiához vezet:



ami az `s` betűvel kezdődő szavak teljes bináris vizsgálata. Azonban nincs ilyen sablon az `a` betűvel kezdődő szavakra, még akkor sem, ha a `WORDS`(5757) teljes gyűjteményét vizsgáljuk. Az ábécé mely betűi használhatóak olyan tizenhat szó kezdőbetűjeként, amelyek adott n esetén a `WORDS`(n)-ben teljes bináris vizsgálatot képeznek?

36. [*M17*] Derítsük fel a (10)-beli szó kockában megjelenő szimmetriákat. Mutassuk meg azt is, hogy további két ilyen kockát kapunk csupán a {`stove`, `event`} szavak cseréjével.

37. [*20*] Melyek a *words* (5757, 0, 0, 0) gráf maximális fokszámú csúcsai?

38. [*22*] A (14)-beli irányított gráf szabályt használva változtassuk `tears`-t `smile`-ra pontosan három lépésben, *számítógép segítsége nélkül.*

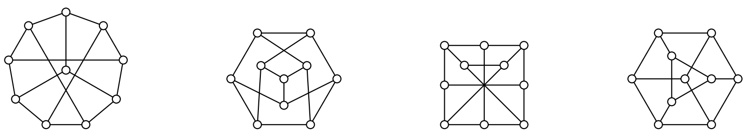
39. [*M00*] $G \setminus e$ feszített részgráfja-e G-nek? Feszítő részgráf-e?

40. [*M15*] Hány (a) feszítő (b) feszített részgráfja van egy $G = (V, E)$ gráfnak, ha $|V| = n$ és $|E| = e$?

41. [*M10*] Milyen n egész szám esetén lesz (a) $K_n = P_n$? (b) $K_n = C_n$?

42. [*15*] (D. H. Lehmer.) Legyen G egy gráf 13 csúccsal, amelyben minden csúcs foka 5. Adjunk nem triviális állítást G-ről.

43. [*23*] A következő gráfok ugyanazok-e, mint a Petersen-gráf?



44. [*M23*] Hány szimmetriája van a Chvátal-gráfnak? (Lásd a 7.2.(f) ábrát.)

45. [*20*] Keressünk könnyű módot a (17)-beli síkba rajzolható gráf 4-színezésére. Elegendő lenne-e 3 szín?

46. [*M25*] Tegyük fel, hogy egy $n \geq 3$ csúcsú G gráfot olyan síkbeli ábrával definiálunk, amelyik „maximális” abban az értelemben, hogy újabb vonalat nem lehet húzni nem szomszédos csúcsok között a meglévő élekkel való kereszteződés nélkül.

a) Bizonyítsuk be, hogy az ábra a síkot olyan tartományokra osztja fel, amelyek mindegyikének határán pontosan három csúcs van. (Ezeknek a tartományoknak az egyike azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az ábrán kívül fekszenek.)

b) Következésképpen G-nek pontosan $3n - 6$ éle van.

47. [*M22*] Bizonyítsuk be, hogy a $K_{3,3}$ teljes bigráf nem síkba rajzolható.

48. [*M25*] Egészítsük ki a B tétel bizonyítását annak a megmutatásával, hogy a szóban forgó eljárás sohasem adja ugyanazt a színt két szomszédos csúcsnak.

49. [*18*] Rajzoljuk meg az összes legfeljebb 6 csúcsú kubikus?? gráf ábráját.

50. [*M24*] Keressük meg az összes olyan kétrészes gráfot, amelyik pontosan 24-féleképpen 3-színezhető.

51. [*M22*] Adott egy, a 21. gyakorlatban leírt geometriai háló, készítsünk olyan kétrészes gráfot, amelyiknek a csúcsai a háló p pontjai és L egyenesei, és $p — L$ akkor és csak akkor, ha $p \in L$. Mekkora a *kerülete* ennek a gráfnak?

52. [*M16*] Keressünk egyszerű egyenlőtlenséget, amelyik megadja hogyan viszonyul a gráf átmérője a kerületéhez. (Mennyire kicsi lehet az átmérő, ha a kerület nagy terjedelmű?)

53. [*15*] A `world` és a `happy` szavak közül melyik tartozik a *words* $(5757, 0, 0, 0)$ gráf óriás komponenséhez?

54. [*21*] A (17)-beli gráfban a 49 postai kód alfabetikus sorrendben a következő: `AL`, `AR`, `AZ`, `CA`, `CO`, `CT`, `DC`, `DE`, `FL`, `GA`, `IA`, `ID`, `IL`, `IN`, `KS`, `KY`, `LA`, `MA`, `MD`, `ME`, `MI`, `MN`, `MO`, `MS`, `MT`, `NC`, `ND`, `NE`, `NH`, `NJ`, `NM`, `NV`, `NY`, `OH`, `OK`, `OR`, `PA`, `RI`, `SC`, `SD`, `TN`, `TX`, `UT`, `VA`, `VT`, `WA`, `WI`, `WV`, `WY`,

a) Tegyük fel, hogy akkor tekintünk két államot szomszédosnak, ha a postai kódjuk egy helyen megegyezik (nevezetesen `AL`—`AR`—`OR`—`OH` stb.). Melyek ennek a gráfnak a komponensei?

b) Készítsünk irányított gráfot az `XY` $\longrightarrow$ `YZ`-vel (például `AL` $\to$ `LA` $\to$ `AR` stb.). Melyek ennek a gráfnak az *erősen összefüggő komponensei*? (Lásd a 2.3.4.2. pontot.)

c) Az USA-nak vannak postai kódjai a (17) ábrabelieken kívül: `AA`, `AE`, `AK`, `AP`, `AS`, `FM`, `GU`, `HI`, `MH`, `MP`, `PW`, `PR`, `VI`. Gondoljuk meg a (b) kérdést mind a 62 kód felhasználásával.

55. [*M20*] Hány él van a $K_{n_1,\ldots,n_k}$ teljes k-részes gráfban?

56. [*M10*] Igaz, vagy hamis: Egy multigráf akkor és csak akkor gráf, ha a megfelelő digráf egyszerű.

57. [*M10*] Igaz, vagy hamis: Az u és v akkor és csak akkor vannak egy irányított gráf ugyanazon összefüggő komponensében, ha vagy $d(u, v) < \infty$, vagy $d(v, u) < \infty$.

58. [*M17*] Írjuk le az összes (a) gráfot (b) multigráfot, amelyek 2-fokú regulárisak.

59. [*M23*] Egy n-ed rendű *verseny* egy irányított gráf n csúccsal és pontosan $\binom{n}{2}$ irányított éllel, melyekre $u \to v$ vagy $v \to u$ teljesül bármely két különböző $\{u, v\}$ csúcs esetén.

a) Bizonyítsuk be, hogy mindegyik verseny tartalmaz egy $v_1 \to \cdots \to v_n$ irányított feszítő utat.

b) Tekintsünk egy versenyt a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ csúcsokon, amelyikre $u \to v$ akkor és csak akkor, ha $(u - v) \mod 5 \geq 3$. Hány irányított feszítő útja van?

c) Vajon $K_n^{\rightarrow}$ az egyetlen n-ed rendű verseny, amelyiknek egyetlen irányított feszítő útja van?

60. [*M22*] Legyen u a versenyben a legnagyobb ki-fokú csúcs, és legyen v egy másik csúcs. Bizonyítsuk be, hogy $d(u, v) \leq 2$.

61. [*M16*] Készítsünk olyan digráfot, amelyiknek k darab k hosszú sétája van az 1 csúcstól a 2 csúcsig.

62. [*M21*] Egy *permutációs digráf* olyan irányított gráf, amelyikben minden csúcs ki-foka 1 és be-foka is 1; így a komponensei irányított körök. Ha n csúcsa és k komponense van, *párosnak* nevezzük, ha $n-k$ páros, és *páratlannak*, ha $n-k$ páratlan.

a) Legyen G irányított gráf az A szomszédsági mátrixszal. Bizonyítsuk be, hogy G feszítő permutációs digráfjainak a száma $\operatorname{per} A$, az A permanense.

b) Értelmezzük a $\det A$ determinánst a feszítő permutációs digráf szempontjából.

63. [*M23*] Legyen G egy g kerületű gráf, amelyben minden csúcsnak legalább d szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább N csúcsa van, ahol

$$N = \begin{cases} 1 + \sum_{0\le k<t} d(d-1)^k, & \text{ha g=2t+1;} \\ 1 + (d-1)^t + \sum_{0\le k<t} d(d-1)^k, & \text{ha g=2t+2.} \end{cases}$$

64. [*M21*] Folytatva a 63. gyakorlatot, mutassuk meg, hogy van *egyetlen* 4 kerületű gráf d minimális fokszámmal és $2d$ renddel minden $d \ge 2$ esetén.

65. [*F31*] Tegyük fel, hogy a G gráf kerülete 5, minimális fokszáma d, és $N = d^2 + 1$ csúcsa van.

a) Bizonyítsuk be, hogy G A szomszédsági mátrixa kielégíti az $A^2+A = (d-1)I+J$ egyenlőséget.

b) Mivel A szimmetrikus mátrix, N darab x_j ortogonális sajátvektora van, a megfelelő λ_j sajátértékekkel úgy, hogy $Ax_j = \lambda_j x_j$, ha $1 \le j \le N$. Bizonyítsuk be, hogy mindegyik λ_j vagy d, vagy $(-1 \pm \sqrt{4d-3}\,)/2$.

c) Mutassuk meg, hogy ha $\sqrt{4d-3}$ irracionális, akkor $d = 2$. *Útmutatás:* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = \operatorname{trace}(A) = 0$.

d) És ha $\sqrt{4d-3}$ racionális, akkor $d \in \{3, 7, 57\}$.

66. [*M30*] A 65. gyakorlatot folytatva, alkossunk meg egy gráfot, melyre $d = 7$.

67. [*M48*] Van-e olyan reguláris gráf, amelyiknek 57 a foka, 3250 a rendje, és 5 a kerülete?

68. [*M20*] Hány különböző szomszédsági mátrixa van egy n csúcsú G mátrixnak?

A 7.0. alfejezet gyakorlatainak megoldása

1. Az útmutatás szerint a második „$4m-4$"-et közvetlenül követnie kell az első „$2m-1$"-nek. A kívánt elrendezéseket ki lehet következtetni az első négy példából, amelyek hexadecimális jelöléssel: `231213`, `46171435623725`, `86a31b1368597a425b2479`, `ca8e531f1358ac7db9e6427f2469bd`. [19]

2. Ilyen elrendezés akkor és csak akkor létezik, ha $n \bmod 4 = 0$ vagy 3. Ez a feltétel szükséges, mert páros kell legyen a páratlan elemek száma. És elégséges is a feltétel, mert az előző gyakorlatban a megoldás elejére lehet „00"-t helyezni.

Megjegyzés: Ezt a kérdést először Hall vetette fel 1951-ben, és Leahy, oldotta meg a következő évben [47]. Ettől függetlenül vetette fel és oldotta meg a feladatot Skolem és Bang [72]. Más számintervallumokra lásd Simpson teljes megoldását [71].

3. Igen. A (0072362435714165) kört például nem lehet megszakítani.

4. b k-adszor balról a $\lfloor k\phi \rfloor$-edik helyen fordul elő, a pedig k-adszor a $\lfloor k\phi^2 \rfloor$-edik helyen jelenik meg. Nyilván $\lfloor k\phi^2 \rfloor - \lfloor k\phi \rfloor = k$, mert $\phi^2 = \phi + 1$. (A $\lfloor k\phi \rfloor$ egészek ϕ „spektrumát” alkotják ; lásd a *CMath* 3.13. gyakorlatát.)

5. A $\binom{2n}{2}$ egyformán lehetséges pozíciópárból $2n - k - 1$ elégíti ki az adott feltételt. Ha ezek a valószínűségek függetlenek volnának egymástól (de nem azok), akkor $2L_n$ értéke a következő volna:

$$\binom{2n}{2,2,\ldots,2} \prod_{k=1}^{n} \bigl((2n-1-k)/\tbinom{2n}{2}\bigr) = \frac{(2n)!^2 n(n-1)}{n!(2n)^{n+1}(2n-1)^{n+1}}$$
$$= \exp\Bigl(n \ln \frac{4n}{e^3} + \ln \sqrt{\frac{\pi e n}{2}} + O(n\_)\Bigr).$$

6. (a) Ha a szorzatokat kifejtjük, $(2n-2)!/(n-2)!$ tagú polinomot kapunk, mindegyik tag foka $4n$. Mindegyik Langford-párosítás számára van egy $x_1^2 \ldots x_{2n}^2$ tag; az összes többi tagnak van legalább egy 1-fokú változója. $x_1, \ldots, x_{2n} \in \{-1, +1\}$-re összegezve kiesik az összes rossz tag, és 2^{2n} adódik a jó tagok esetén. Ezen kívül egy 2-es tényező azért jelenik meg, mert $2L_n$ Langford-pár van (beleértve a bal-jobb megfordítottját).

(b) Legyen $f_k = \sum_{j=1}^{2n-k-1} x_j x_{j+k+1}$ a k-adik tényező fő része. Legyen $x_1, \ldots, x_{2n} \in \{-1, +1\}$, ekkor mind a 4^n esetén végig tudunk futni a Gray-kód sorrendjében, (lásd a 7.2.1.1. alpont hurokmentes-gray?? algoritmusát), miközben egyszerre csak egy x_j-t zárunk ki. Egy x_j-ben történő csere esetén legfeljebb kétszer kell hozzányúlni mindegyik f_k-hoz; így mindegyik Gray-kód lépés költsége $O(n)$.

Nincs szükségünk arra, hogy az összeget pontosan kiszámítsuk; elegendő mod 2^N dolgoznunk, ahol 2^N megfelelően meghaladja $2^{2n+1} L_n$-et. Ha $n = 24$, akkor még jobb mod $2^{60} - 1$ végezni a számításokat, vagy mod $2^{30} - 1$ és mod $2^{30} + 1$ is. Meg lehet takarítani $\lceil n/2 \rceil$ bit pontosságot kihasználva azt a tényt, hogy $f_k \equiv k + 1$ (modulo 2).

(c) A harmadik egyenlőség tulajdonképpen csak akkor érvényes, ha n mod $4 = 0$ vagy 3; de ezek az érdekes n-ek. Az összegzés n lépésben végrehajtható, ahol a p lépés $p < n$-re azokat az eseteket foglalja magába, ahol $x_{n-1} = x_{n+2}$, $x_{n-2} = x_{n+3}$, $\ldots$, $x_{n-p+1} = x_{n+p}$, $x_{n-p} = x_n = x_{n+1} = +1$, és $x_{n+p+1} = -1$; van egy külső ciklusa, amelyik $(x_{n-p+1}, \ldots, x_{n-1})$-et választja mind a 2^{p-1} módon, és egy belső ciklusa, amelyik $(x_1, \ldots, x_{n-p-1}, x_{n+p+2}, \ldots, x_{2n})$-et választja mind a $2^{2n-2p-2}$ módon. (A belső ciklus Gray bináris kódot használ, „orgonasíp sorrendben” részesíti előnyben az indexeket úgy, hogy x_1 és x_{2n} váltakozzon a leggyorsabban. A külső ciklus nem kell, hogy különösen hatékony legyen.) Az n lépés lefedi a 2^{n-1} tükörkép esetet ha $x_j = x_{2n+1-j}$, $1 \le j < n$-re és $x_n = x_{n+1} = +1$. Ha s_p jelöli a p lépésben az összeget, akkor $s_1 + \cdots + s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n = 2^{2n-2} L_n$.

A tagok jelentős részéről kiderül, hogy nulla. Például ha $n = 16$, az esetek körülbelül 76%-ában nulla jelenik meg (408 838 754 esetben a $2^{29} + 2^{14}$-ből). Ezt a tényt használhatjuk arra, hogy a belső ciklusban sok szorzást elkerüljünk. (Csak f_1, f_3, $\ldots$ lehet nulla.)

7. Legyen d_k a befejezetlen párok száma, miután k karaktert elolvastunk; így $d_0 = d_{2n} = 0$, és $d_k = d_{k-1} \pm 1$, ha $1 \le k \le 2n$. A leghosszabb olyan sorozat, amelyikben d_k sohasem haladja meg a 6-ot $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 6, \ldots, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0)$. Erre a sorozatra $\sum_{k=1}^{2n} d_k = 11n - 30$. De $\sum_{k=1}^{2n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \binom{n+1}{2} + n$ bármelyik Langford-párosításnál. Ebből $\binom{n+1}{2} + n \le 11n - 30$, és $n \le 15$. (Valójában a 6 szélesség $n = 15$ esetén sem lehetséges. A legnagyobb és legkisebb lehetséges szélességet nem ismerjük általában.)

8. Nincs megoldás, ha $n = 4$ vagy $n = 7$. Ha $n = 8$, akkor négy van:

13175386425724 68 427524863571 3168; 5286235743681417; 1418634753268257

(Ez a probléma egy jó kis összerakós rejtvényhez vezet, ha $k+1$ szélességű és $\lceil k/2 \rceil$ magasságú részecskéket használunk a k darab számára. Langford hasonló darabokat mutatott be eredeti feljegyzésében [46] és $n = 12$-re síkba rajzolható megoldást adott. A kérdés megfogalmazható teljes lefedési problémaként, ha a nem elsődleges oszlopok reprezentálják azokat a helyeket, ahol két részecske nem keresztezheti egymást;?? lásd a 7.2.2.1.-00 gyakorlatot. Brette egy hasonló rejtvényt eszelt ki; a probléma Skolem-féle változatára alapozott, és a szélességet használta a síkba rajzolhatóság helyett; 1992-ben adott egy másolatot David Singmasternek.)

9. Pontosan háromféleképpen: 181915267285296475384639743, 191218246279458634753968357, 191618257269258476354938743 (és a tükörképük). Ezt először Baron találta meg. Lásd [6]. A 7.2.2.1. alpontbeli „táncoló mutatók” módszer egy csupán 360 csúcsú kereső fa bejárásával oldja meg ezt a feladatot egy 132 soros teljes lefedési problémát adva.

10. Legyen például $\mathtt{A} = 12$, $\mathtt{K} = 8$, $\mathtt{Q} = 4$, $\mathtt{J} = 0$, $\spadesuit = 4$, $\heartsuit = 3$, $\diamondsuit = 2$, $\clubsuit = 1$; összegezzünk.

Ebben az összefüggésben a 7.1. ábrán láthatóval ekvivalens ortogonális latin négyzetek már a középkori iszlám talizmánokban is megjelentek (lásd Ibn al-Hajj [38], ő adott egy 5×5-ös példát is); lásd Doutté [20]; Ahrens [1]. Lásd Andersen készülőben lévő cikkét is a latin négyzetek történetéről [2].

11.

$$\begin{pmatrix} d\gamma\,0 & a\delta\,1 & b\beta\,2 & c\alpha\,3 \\ c\beta\,1 & b\alpha\,0 & a\gamma\,3 & d\delta\,2 \\ a\alpha\,2 & d\beta\,3 & c\delta\,0 & b\gamma\,1 \\ b\delta\,3 & c\gamma\,2 & d\alpha\,1 & a\beta\,0 \end{pmatrix}$$

(ITT A HEBER BETUKET IDEIGLENESEN SZAMOK HELYETTESITIK)

Ilyen négyzetekre a legkorábbi ismert példát Sauveur mutatta meg [68].

12. Ha n páratlan, akkor választhatjuk $M_{ij} = (i-j) \mod n$-et. Ha azonban n páros, akkor nem létezik tranzverzális: Ha ugyanis $\{(t_0{+}0) \mod n, \ldots, (t_{n-1}{+}n{-}1) \mod n\}$ tranzverzális lenne, akkor $\sum_{k=0}^{n-1} t_k \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(t_k+k)$ (modulo n) teljesülne, amiből $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}n(n-1)$ többszöröse lenne n-nek.

13. Helyettesítsünk minden l elemet $\lfloor l/5 \rfloor$-vel, így olyan mátrixot kapunk, amelyik 0-kat és 1-eket tartalmaz. Nevezzük el a negyedeket: $\binom{A\ B}{C\ D}$; ekkor A és D pontosan k 1-est tartalmaz, miközben B-ben és C-ben pontosan k 0 van. Tegyük fel, hogy az eredeti mátrixnak tíz diszjunkt tranzverzálisa van. Ha $k \le 2$, közülük legfeljebb négy megy át egy 1-esen A-ban vagy D-ben, és legfeljebb négy megy át egy 0-n B-ben, vagy C-ben. Így közülük legalább kettő tartalmaz csak 0-t A-ban és D-ben, csak 1-est B-ben és C-ben. Egy ilyen tranzverzális azonban páros sok 0-t tartalmaz (nem pedig ötöt), mert A-n és D-n ugyanannyiszor megy át.

Hasonlóan egy $4m+2$ rendű latin négyzet, amelyiknek van ortogonális párja, m-nél több betolakodója kell legyen mind a $(2m+1)\times(2m+1)$ részmátrixában elemeinek átnevezése után. Lásd [52].

14. A (b) és (d) esetben nincs ilyen pár. Az (a), (c) és (e) esetekben rendre 2, 6, és 12 265 168(!)

ortogonális pár van, amelyek közül lexikografikus sorrendben az első és az utolsó alant látható:

$$
\begin{array}{c}\text{(a)}\\ 0456987213\\1305629847\\2043798165\\3289176504\\4518263790\\5167432089\\6894015372\\7920341658\\8731504926\\9672850431\end{array},
\begin{array}{c}\text{(a)}\\ 0691534782\\1308257964\\2169340578\\3250879416\\4587902631\\5412763890\\6945081327\\7836425109\\8723196045\\9074618253\end{array};
\begin{array}{c}\text{(c)}\\ 0362498571\\1408327695\\2673519408\\3521970846\\4890253167\\5736841920\\6259784013\\7915602384\\8147036259\\9084165732\end{array},
\begin{array}{c}\text{(c)}\\ 0986271435\\1354068792\\2741853960\\3572690814\\4630789251\\5218947306\\6095324178\\7869512043\\8407136529\\9123405687\end{array};
\begin{array}{c}\text{(e)}\\ 0214365897\\1025973468\\2690587143\\3857694201\\4168730925\\5473829016\\6942158730\\7309216584\\8531402679\\9786041352\end{array},
\begin{array}{c}\text{(e)}\\ 0987645321\\1795402638\\2506913874\\3154067289\\4231850967\\5348276190\\6820394715\\7069128543\\8412739056\\9673581402\end{array}.
$$

Megjegyzés: Az (a), (b), (c), és (d) négyzeteket a π, e, γ, és Φ decimális számjegyeiből kaptuk, elhagyva azokat a jegyeket, amelyek egy kitöltött latin négyzettel nem egyeztethetők össze. Jóllehet valójában nem véletlenek, valószínűleg jellemzőek a 10×10-es latin négyzetekre általában, amelyeknek nagyjából a fele rendelkezik ortogonális párral. Parker készítette az (e) négyzetet, hogy szokatlanul nagy számú tranzverzálishoz jusson; 5504 tranzverzálisa van. (Euler tanulmányozott hasonló 6-odrendű példát, így „éppen lemaradt” egy 10×10-es pár felfedezéséről.)

15. Parkert megdöbbentette a felfedezés, hogy a 14(e) egyik párja sem ortogonális egymásra. Brown és Hedayat talált később két 10×10-eset, amelyeknek volt négy közös diszjunkt tranzverzálisuk (de nem tíz) [10]. Lásd még [24]. Weisner ([82]) ötletét követve a szerző véletlenül észlelt olyan négyzeteket, amelyek egészen közel vannak egy kölcsönösen ortogonális hármashoz: Az alábbi négyzet ortogonális a transzponáltjaihoz; és van öt diagonálisan szimmetrikus tranzverzálisa a $(0, p_0), \ldots, (9, p_9)$ cellákban $p_0 \ldots p_9 = 0132674598$, 2301457689, 3210896745, 4897065312, és 6528410937, amelyek *majdnem* diszjunktak: 49 cellát fednek le.

$$
L = \begin{pmatrix} 0234567891\\3192708546\\6528139407\\8753241960\\1689473025\\4970852613\\5047986132\\9416320758\\7361095284\\2805614379 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0368145972\\2157690438\\3925874160\\4283907615\\5712489306\\6034758291\\7891326054\\8549061723\\9406213587\\1670532849 \end{pmatrix} = L^T.
$$

McKay, Meynert és Myrvold részletes számításai bizonyították [53], hogy nincs 10×10-es latin négyzet nem triviális szimmetriával, amelyiknek két párja ortogonális lenne egymásra.?? Három kölcsönösen ortogonális latin négyzet létezése ismert minden $n > 10$ esetben. Lásd [81] ; [79].

16. Lásd [12].

17. (a) Legyen $3n$ oszlop, r_j, c_j, v_j ahol $0 \le j < n$, és n^2 sor; az (i, j) sorban legyen 1 az r_i, c_j, és v_l, oszlopokban, ahol $l = L_{ij}$ ha $0 \le i, j < n$.

(b) Legyen $4n^2$ oszlop r_{ij}, c_{ij}, x_{ij}, y_{ij}, ahol $0 \le i, j < n$ és legyen $n^3 - n^2 + n$ sor; az (i, j, k) sorban legyen 1 az r_{ik}, c_{jk}, x_{ij} és y_{lk} oszlopokban, ahol $l = L_{ij}$, ha $0 \le i, j, k < n$ és ($i = k$ vagy $j > 0$).

18. Legyen adva egy A ortogonális mátrix A_i sorokkal, ahol $1 \le i \le m$, definiáljuk az $L_i = (L_{ijk})$ latin négyzetet, ahol $1 \le i \le m - 2$ a következő módon: $L_{ijk} = A_{iq}$, ha $A_{(m-1)q} = j$ és $A_{mq} = k$, ahol $0 \le j, k < n$. (q értékét j és k értékei egyértelműen meghatározzák.) A mátrix oszlopait permutálva nem változnak a megfelelő latin négyzetek.

Ez a konstrukció megfordítható, s így alkalmazható arra, hogy kölcsönösen ortogonális n-ed rendű latin négyzetekből n-ed rendű ortogonális mátrixokat állítsunk elő. A 11. gyakorlatban például legyen $a = \alpha = @ = 0$, $b = \beta = \ = 1$, $c = \gamma = \ = 2$, és $d = \delta = \ = 3$, így a következőt kapjuk:

HÉBER BETŰK

$$A = \begin{pmatrix} 3012210303211230 \\ 2310102301323201 \\ 0123103223013210 \\ 0000111122223333 \\ 0123012301230123 \end{pmatrix}.$$

(Az ortogonális mátrix fogalma „tisztább” matematikailag, mint az ortogonális latin négyzeteké, mert jobban magyarázza a rejtőzködő szimmetriákat. Figyeljük meg például, hogy egy $n \times n$-es L mátrix akkor és csak akkor latin négyzet, ha ortogonális két bizonyos nem latin négyzetre, nevezetesen

$$L \perp \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad L \perp \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Így latin négyzetek, görög-latin négyzetek, héber-görög-latin négyzetek, stb. ekvivalensek a 3, 4, 5, ... mélységű ortogonális mátrixokkal. Azonfelül az itt figyelembe vett ortogonális mátrixok csupán speciális esetei $t = 2$ és $\lambda = 1$ értékekkel a „t erejű??” és „λ mutatójú??” $m \times \lambda n^t$-es n-áris mátrixok egy sokkal általánosabb fogalmának, amit Rao vezetett be [64]; lásd [33] .)

19. Átrendezhetjük az oszlopokat úgy, hogy az első sor $0^n 1^n \dots (n-1)^n$ legyen. Ezután a többi sorban átszámozhatjuk az elemeket, úgy hogy $01 \dots (n-1)$-gyel kezdődjenek. A megmaradó oszlopokban minden sorban, kivéve az elsőt, az elemek különbözőek kell legyenek.

A felső határ eléréséhez ha $n = p$, indexeljük mindegyik oszlopot az x és y számokkal, ahol $0 \le x, y < p$, és helyezzük ebbe az oszlopba a y, x, $(x+y) \mod p$, $(x+2y) \mod p$, ..., $(x+(p-1)y) \mod p$ számokat. Ha például $p = 5$ a következő ortogonális mátrixot kapjuk, amelyik ekvivalens négy kölcsönösen ortogonális latin négyzettel:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&2&2&2&2&2&3&3&3&3&3&4&4&4&4&4 \\ 0&1&2&3&4&0&1&2&3&4&0&1&2&3&4&0&1&2&3&4&0&1&2&3&4 \\ 0&1&2&3&4&1&2&3&4&0&2&3&4&0&1&3&4&0&1&2&4&0&1&2&3 \\ 0&1&2&3&4&2&3&4&0&1&4&0&1&2&3&1&2&3&4&0&3&4&0&1&2 \\ 0&1&2&3&4&3&4&0&1&2&1&2&3&4&0&4&0&1&2&3&2&3&4&0&1 \\ 0&1&2&3&4&4&0&1&2&3&3&4&0&1&2&2&3&4&0&1&1&2&3&4&0 \end{pmatrix}.$$

Lényegében ugyanez az elv akkor is működik, ha n prímhatvány, ekkor a $\mathrm{GF}(p^e)$ véges testet használjuk; lásd [55, 56, &15.1.]. Ezek a mátrixok ekvivalensek a véges *projektív síkokkal*; lásd [30].

20. Legyen $\omega = e^{2\pi i/n}$, és tegyük fel, hogy $a_1 \dots a_{n^2}$ és $b_1 \dots b_{n^2}$ különböző sorokban lévő vektorok. Ekkor $a_1 b_1 + \dots + a_{n^2} b_{n^2} = \sum_{0 \le j,k < n} \omega^{j+k} = 0$, mert $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

21. (a) Ha meg akarjuk mutatni, hogy az egyenlőség vagy párhuzamosság ekvivalencia reláció, akkor igazolnunk kell a tranzitivitási szabályt: Ha $L \parallel M$ és $M \parallel N$ és $L \ne N$, akkor $L \parallel N$ kell teljesüljön. Ellenkező esetben (ii) szerint lenne olyan p pont, amelyre $L \cap N = \{p\}$; p pedig két különböző M-mel párhuzamos egyenesre illeszkedne, ami ellentmond (iii)-nek.

(b) Legyen $\{L_1, \dots, L_n\}$ párhuzamos egyenesek egy osztálya, és tegyük fel, hogy M egy másik osztály egyik egyenese. Ekkor mindegyik L_j egyetlen p_j pontban metszi M-et; és M mindegyik pontja egy ilyen találkozási pont, mert (iii) szerint a geometria mindegyik pontja mindegyik osztálynak pontosan egy egyenesén van rajta. Így M-nek pontosan n pontja van.

(c) Már megfigyeltük, hogy ha m osztály van, akkor mindegyik pont m egyeneshez tartozik hozzá. Ha az L, M, és N egyenesek három különböző osztályból valóak, akkor M-nek és N-nek ugyanannyi pontja van, mint ahány egyenese az L osztályának. Így van egy közös n méretű egyenes, és a pontok teljes száma valóban n^2. (n természetesen lehet végtelen.)

22. Adott n rendű és m mélységű ortogonális A mátrix esetén definiáljunk n^2 ponttal és párhuzamos egyenesekből álló m osztállyal egy geometriai hálót úgy, hogy A oszlopait pontoknak tekintjük; a k osztály j egyenese azoknak az oszlopoknak a halmaza, amelyekre az A mátrix k sorában megjelenik a j szimbólum.

Minden véges geometriai háló, amelyiknek $m \geq 3$ osztálya van, előáll ilyen módon. A csupán egyetlen osztályt tartalmazó geometriai háló nyilvánvalóan pontok diszjunkt halmazokba való szétosztása. Az $m = 2$ osztályú geometriai hálónak nn' (x, x') pontja van, ahol n számú '$x =$ konstans' egyenes van az egyik osztályban, és n' számú '$x' =$ konstans' a másikban. További információért lásd [13, 14].

23. (a) Ha $d(x, y) \leq t$ és $d(x', y) \leq t$ és $x \neq x'$, akkor $d(x, x') \leq 2t$. Így egy olyan kód, amelynél két kódszó között a távolság $> 2t$, lehetővé teszi a javítást egészen t-hibáig – legalábbis elvileg, jóllehet a számítás lehet bonyolult. Fordítva, ha $d(x, x') \leq 2t$ és $x \neq x'$, van olyan y elem, amelyre $d(x, y) \leq t$ és $d(x', y) \leq t$; így nem tudjuk egyértelműen rekonstruálni x-et, ha y érkezik be.

(b, c) Legyen $m = r + 2$, és figyeljük meg, hogy b^2 b-áris m-esek egy halmazának elempárjai között a Hamming-távolság akkor és csak akkor $\geq m - 1$, ha m mélységű b-áris ortogonális mátrix oszlopai alkotják a halmazt. Lásd [26]. A kódelmélet irodalmában gyakran jelölik a d távolságú $C(b, n, r)$ kódot az $(n+r, b^n, d)_b$ szimbólummal. Így a b-áris m mélységű ortogonális mátrix lényegében egy $(m, b^2, m-1)_b$ kód.

24. (a) Tegyük fel, hogy $x_j \neq x'_j$, ha $1 \leq j \leq l$ és $x_j = x'_j$ $l < j \leq N$. Ha $l = 0$, akkor $x = x'$. Egyébként tekintsük azokat a paritás biteket, amelyek az 1 ponton átmenő m egyenesnek felelnek meg. Ezek közül a bitek közül legfeljebb $l - 1$ felel meg azoknak az egyeneseknek, amelyek érintik a $\{2, \ldots, l\}$ pontokat. Így x' legalább $m-(l-1)$-szer vált paritást, és $d(x, x') \geq l+(m-(l-1)) = m+1$.

(b) Legyenek $l_{p1}, \ldots, l_{pm}$ a p ponton átmenő egyenesek indexei. Az $y_1 \ldots y_{N+R}$ üzenet fogadása után számoljuk ki x_p-t, ahol $1 \leq p \leq N$, felhasználva az $m + 1$ $\{y_{p0}, \ldots, y_{pm}\}$ tanú bit többségi értékét, ahol $y_{p0} = y_p$ és

$$y_{pk} = \bigl(y\_N + l_{pk} + \sum\{y_j \mid j \neq p \text{ és a } j \text{ pont az } l_{pk} \text{ egyenesen fekszik}\}\bigr) \mod 2, \quad \text{ha } 1 \leq k \leq m.$$

Ez a módszer működik, mert mindegyik y_j fogadott bit legfeljebb egy tanú bitre hat.

Nézzük például a 19. gyakorlatban a 25 pontos geometriát. Tegyük fel, hogy mindegyik kódszó $x_{26+5i+j}$ paritásbitje az i sor j egyenesének felel meg, ahol $0 \leq i \leq 5$ és $0 \leq j < 5$; így $x_{26} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5$, $x_{27} = x_6 \oplus x_7 \oplus x_8 \oplus x_9 \oplus x_{10}$, $\ldots$, $x_{55} = x_5 \oplus x_6 \oplus x_{12} \oplus x_{18} \oplus x_{24}$. Adott $y_1 \ldots y_{55}$ üzenet esetén, dekódoljuk az x_1 bitet (például) az alábbi hét érték többségének kiszámításával: y_1, $y_{26} \oplus y_2 \oplus y_3 \oplus y_4 \oplus y_5$, $y_{31} \oplus y_6 \oplus y_{11} \oplus y_{16} \oplus y_{21}$, $y_{36} \oplus y_{10} \oplus y_{14} \oplus y_{18} \oplus y_{22}$, $y_{41} \oplus y_9 \oplus y_{12} \oplus y_{20} \oplus y_{23}$, $y_{46} \oplus y_8 \oplus y_{15} \oplus y_{17} \oplus y_{24}$, $y_{51} \oplus y_7 \oplus y_{13} \oplus y_{19} \oplus y_{25}$. A 7.1.2. pont kifejti, hogyan lehet hatékonyan kiszámítani a többségi függvényeket. Figyeljük meg, hogy eltekinthetünk az utolsó 10 bittől, ha csupán két hibával bezárólag akarunk korrigálni, és az utolsó 20-tól, ha elegendő az 1-hiba javítás. Lásd [37].

25. Az $\{\texttt{l}, \texttt{e}, \texttt{a}, \texttt{s}, \texttt{t}\}$-ből alkotott anagrammákat vizsgálva (lásd az 5-21. gyakorlatot), az alábbi négyzetet, valamint sorainak ciklikus permutációit kapjuk.

```
stela
telas
elast.
laste
astel
```

Itt a `telas` spanyolul szöveteket?? jelent; az `elast` az elasztikus szó előtagja; és a `laste` egy Chaucer-féle ige felszólító módja. (Természetesen öt betű majdnem minden kiejthető kombinációja előfordult valamikor a történelem során, mint valaminek valahol a jól vagy rosszul leírt neve.)

26. „every night, young video buffs catch rerun fever forty years after those great shows first aired." Lásd [48].

27. $(0, 4, 163, 1756, 3834)$, ha $k = (1, 2, 3, 4, 5)$; mamma és esses „full house"-t alkotnak[5].

28. Igen, összesen 38 pár van. A „legismertebb" megoldás a needs (180 a rangja) és offer (384 a rangja). Csak három esetben különböznek következetesen +1-gyel, (adder beefs, sheer tiffs, sneer toffs). Más nevezetes példák a ghost hints és a strut rusts. A párok közül az egyik szó az s betűvel végződik négy eset kivételével, mint például a robed spade. Lásd [27].

29. 18 palindroma van a level-től (184 a rangja) a dewed-ig (5688 a rangja). Néhány a 34 tükör pár közül: 'devil lived', 'knits stink', 'smart trams', 'faced decaf'.

30. A 105 ilyen SGB szó közül a leggyakoribbak first, below, floor, begin, cells, empty, és hills; abbey és pssst az első illetve az utolsó lexikografikusan. (Ha Ön nem szereti a pssst-t, a következő visszafelé a mossy.) Csak 37 olyan szó van mecca-tól zoned-ig, amelyek betűi *fordított* sorrendben vannak; de ezek természetesen rossz (wrong) válaszok.

31. A középső szó átlaga a másik kettőnek, így a szélső szavak kongruensek kell legyenek mod 2; ez a megfigyelés a szótár keresések számát egy nagyjából 32-es tényezővel csökkenti. 119 ilyen hármas van WORDS(5757)-ben, de WORDS(2000)-ben csak kettő: marry, photo, solve; risky, tempo, vague. Lásd [54].

32. Úgy tűnik, hogy az egyetlen értelmes ismert példa a peopleless.

33. chief, fight, right, which, ouija, jokes, ankle, films, hymns, known, crops, pique, quart, first, first, study, mauve, vowel, waxes, proxy, crazy, pizza. (Az alapgondolat az, hogy keressük meg a legismertebb olyan szót, amelyikben x-et $(x+1) \mod 26$ követi, ha $x =$ a (0), $x =$ b (1), $\ldots$, $x =$ z (25). Minimalizáljuk is a közbülső távolságot, így előnyben részesítjük bacon-t a sokkal ismertebb black-kel szemben. Abban az egy esetben, ahol nincs ilyen szó, a crazy látszik a legértelmesebbnek. Lásd [57])

34. A felső kettő (és az összes száma) mindegyik kategóriában: pssst és pffft (2), schwa és schmo (2), threw és throw (36), three és spree (5), which és think (709), there és these (234), their és great (291), whooo és wheee (3), words és first (628), large és since (376), water és never (1313), value és radio (84), would és could (460), house és voice (101), quiet és queen (25), queue csak (1), ahhhh és ankhs (4), angle és extra (20), other és after (227), agree és issue (20), along és using (124), above és alone (92), about és again (58), adieu és aquae (2), earth és eight (16), eagle és ounce (8), outer és eaten (42), eerie és audio (4), (0), ouija és aioli (2), (0), (0); years és every a legismertebbek a 868 kihagyott szó közül. A három lyuk kitöltésére internet használók javasolják az ooops, ooooh, és ooooo szavakat. Lásd [17].

35. Tekintsük a WORDS(n) gyűjteményt $n = 1, 2, \ldots, 5757$ esetén. Az s-ből gyökerező szemléltetett vizsgálatot?? először akkor lehet megkapni, ha n eléri a 978-at (a stalk rangját). A következő olyan gyökér betű, amelyik ilyen próbálkozást lehetővé tesz a c, amelyiknek elég sok elágazása van a leszármazottaiban, ha $n = 2503$ (a craze rangja). A rákövetkező felbukkanás akkor következik be, ha $n = 2730$ (bulks), 3999 (ducky), 4230 (panty), 4459 (minis), 4709 (whooo), 4782 (lardy), 4824 (herem), 4840 (firma), 4924 (ridgy), 5343 (taxol).

(Egy felbukkanás akkor következik be, ha a felső szintű vizsgálatok Horton–Strahler száma 4; lásd a 7.2.1.6. alpont 124. gyakorlatát.A szavaknak egy igen szórakoztató halmaza kerül elő, amelyik a költészet új formáját sugallja, ha az elágaztatás jobbról balra halad ahelyett, hogy balról jobbra menne: black, slack, crack, track, click, slick, brick, trick, blank, plank, crank, drank, blink, clink, brink, drink. Valójában a jobbról balra történő elágaztatás teljes *ternáris* vizsgálatot eredményez 81 levéllel: males, sales, tales, files, miles, piles, holes, ..., tests,

[5]Pókerben. *A fordító.*

`costs`, `hosts`, `posts`.)

36. Jelöljük a kocka elemeit a_{ijk}-val, ha $1 \le i, j, k \le 5$, a szimmetria feltétele az, hogy $a_{ijk} = a_{ikj} = a_{jik} = a_{jki} = a_{kij} = a_{kji}$ legyen. Általában $n{\times}n{\times}n$ kockában $3n^2$ szó van, megkaphatjuk őket, ha két koordinátát rögzítünk, a harmadikat pedig az 1-től n-ig terjedő tartományban engedjük változni. A szimmetria feltétel szerint azonban csak $\binom{n+1}{2}$ szóra van szükségünk. Így, ha $n = 5$ a szükséges szavak 75-ről 15-re redukálódnak. Grant képes volt 75 megfelelő szót találni az *Oxford English Dictionary-ban*; lásd [28].

Ha (`stove`, `event`)-t (`store`, `erect`)-ra, vagy (`stole`, `elect`)-ra változtatjuk, akkor két további adódik.

37. A gráf legsűrűbb része, amelyet a „csupasz magjának” hívhatunk, tartalmaz két 25 fokú elemet, név szerint `bares`-t és `cores`-t.

38. `tears` $\to$ `raise` $\to$ `aisle` $\to$ `smile`; a második szó lehet `reals` is. (A `tears` szótól `smile`-ig haladva, mint (11)-ben Carroll egyik első ötbetűs példája volt. Örömmel töltötte el az a felismerés, hogy a fordított szabály bonyolultabbá teszi az eljutást `smile`-tól `tears`-g, mert *négy* lépésre van szükség ebben az irányban.)

39. Mindig feszítő, sosem feszített.

40. (a) 2^e, (b) 2^n, E vagy V mindegyik részhalmaza esetén egy-egy.

41. (a) $n = 1$ és $n = 2$; P_0 definiálatlan. (b) $n = 0$ és $n = 3$.

42. G-nek $65/2$ éle van (ezért nem létezik).

43. Igen: az első három izomorf a 7.2.(e) ábrán lévővel. A bal oldali ábra valójában azonos a Petersen-gráf legkorábbi ismert nyomtatásban megjelent alakjával: lásd [39]. A jobb oldali azonban kétségtelenül eltér tőle; ez síkba rajzolható, Hamilton-gráf, és 4 a kerülete.

44. Egy automorfizmus sarok pontot sarok pontba kell vigyen, mert három különböző 2-hosszú út csak nem sarok pontok bizonyos párjai között található. Így a gráfnak csak C_4 nyolc szimmetriája van meg.

45. Ennek a gráfnak mindegyik éle olyan csúcsokat köt össze, amelyek ugyanabban a sorban, vagy szomszédos sorokban vannak. Így felváltva használhatjuk a 0 és a 2 színeket a páros sorszámú sorokban, az 1 és a 3 színeket pedig felváltva a páratlan sorszámú sorokban. Az `NV` szomszédai 5-hosszú kört alkotnak, ezért szükség van a négy színre.

46. (a) Mindegyik csúcs foka ≥ 2, és szomszédaiknak a bejövő vonalaknak megfelelően van egy jól definiált ciklikus sorrendje. Ha $u — v$ és $u — w$, ahol v és w u-nak ciklikusan egymás után következő szomszédai, akkor $v — w$-nek is teljesülnie kell. Így mindegyik u csúcs környékén az összes pont egy háromszög tartományhoz tartozik.

(b) A képlet érvényes, ha $n = 3$. Ha $n > 3$, húzzuk össze valamelyik élt az egyik végpontjához; ez az átalakítás eltávolít egy csúcsot és három élt. (Ha $u — v$-t összehúzzuk, tegyük fel, hogy az $x — u — v — x$ és az $y — u — v — y$ háromszögek része volt. Ekkor megszűnik a v csúcs, és az $\{x — v, u — v, y — v\}$ élek; a többi $w — v$ formájú élből $w — u$ él lesz.)

47. Egy síkbeli ábra a síkot tartományokra osztaná, mindegyik tartomány határán 4 vagy 6 csúcs lenne ($K_{3,3}$-nak ugyanis nincs páratlan köre). Ha f_4 és f_6 van a két fajtából, akkor $4f_4 + 6f_6 = 18$ kell legyen, így 9 él van; ebből $(f_4, f_6) = (3, 1)$ vagy $(0, 3)$. $f_4 + 3f_6$ további él hozzáadásával háromszögesíthetnénk a gráfot; ekkor azonban legalább 15 éle lenne a 46. gyakorlattal ellentmondásban.

Az a tény, hogy $K_{3,3}$ nem síkba rajzolható, visszanyúlik egy rejtvényig, amelyik arra vonatkozik, hogy három házat össze kell kötni három közművel (víz, gáz és elektromosság) a vezetékek kereszteződése nélkül. [6] A származása ismeretlen; Dudeney „ősréginek” nevezte [22].

[6] Három ház-három kút probléma. *A fordító.*

48. Ha u, v, w csúcsok és u — v, akkor $d(w,u) \not\equiv d(w,v)$ (modulo 2) fenn kell álljon; különben ugyanis w-től u-ig és w-től v-ig a legrövidebb utak páratlan kört eredményeznének. Miután w-t 0-val színeztük, az eljárás így a $d(w,v) \mod 2$ színt rendeli mindegyik nem színezett v csúcshoz, amelyik szomszédos egy u színezett csúccsal; és mindegyik v csúcs, amelyikre $d(w,v) < \infty$ színezve van, mielőtt egy új w csúcsot választunk.

49. Csak három van: K_4, $K_{3,3}$, és  (amelyik $\overline{C}_6$).

50. A gráf összefüggő kell legyen, mert r komponens esetén a 3-színezések száma 3^r-rel osztható. Ez a gráf a $K_{m,n}$ teljes kétrészes gráf része kell legyen, amelyik $3\,(2^m + 2^n - 2)$-féle módon 3-színezhető. Ha $K_{m,n}$-ből éleket törlünk, nem csökken?? a színezések száma; így $2^m + 2^n - 2 \leq 8$, és azt kapjuk, hogy $\{m,n\} = \{1,1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, vagy $\{2,2\}$. Így a lehetséges gráfok csupán a $K_{1,3}$ karom és a P_4 út.

51. Egy p_1 — L_1 — p_2 — L_2 — p_1 4-hosszú kör felelne meg két $\{L_1, L_2\}$ egyenesnek és két közös $\{p_1, p_2\}$ pontjaiknak, ami (ii)-nek ellentmond. Így a kerület legalább 6.

Ha párhuzamos egyeneseknek csak egy osztálya van, akkor a kerület ∞; ha van két osztály $n \leq n'$ elemmel, akkor 8 a kerület, vagy ∞, ha $n = 1$. (Lásd a 22. megoldást.) Egyébként találhatunk 6-hosszú kört, ha három különböző osztályból választott egyenesből háromszöget készítünk.

52. Ha az átmérő d és a kerület g, akkor $d \geq \lfloor g/2 \rfloor$, kivéve, ha $g = \infty$.

53. A `happy` (amelyik össze van kötve a `tears` és a `sweat` szavakkal, de nincs összekötve a `world` szóval).

54. (a) Ez egyetlen nagyon összefüggő komponens. (Egyébként ez a gráf annak a kétrészes gráfnak a *vonalgráfja* amelyikben az egyik rész az $\{\mathtt{A}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{F}, \mathtt{G}, \ldots, \mathtt{W}\}$ kezdőbetűknek felel meg, a másik rész pedig a $\{\mathtt{A}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{H}, \ldots, \mathtt{Z}\}$ utolsó betűknek.)

(b) A `WY` csúcs izolált. A többi nulla fokú csúcsok, nevezetesen az `FL`, `GA`, `PA`, `UT`, `WA`, `WI`, és a `WV` erős komponenst képeznek saját magukkal; ezek mind megelőznek egy óriás komponenst, amelyiket pedig az összes többi egy csúcsú nulla ki-fokú erős komponens követi: `AZ`, `DE`, `KY`, `ME`, `NE`, `NH`, `NJ`, `NY`, `OH`, `TX`.

(c) Most a {`GU`} erős komponens megelőzi {`UT`}-t; `NH`, `OH`, `PA`, `WA`, `WI` és `WV` összekötik az óriás erős komponenst; {`FM`} megelőzi őt; {`AE`} és {`WY`} pedig követi.

55. $\binom{N}{2} - \binom{n_1}{2} - \cdots - \binom{n_k}{2}$, ahol $N = n_1 + \cdots + n_k$.

56. Igaz. Figyeljük meg, hogy J_n egyszerű, de nem tartozik semelyik multigráfhoz sem.

57. Hamis az $u \to w \leftarrow v$ összefüggő irányított gráfban. (Azonban u és v akkor és csak akkor vannak ugyanabban az *erősen összefüggő* komponensben, ha $d(u,v) < \infty$ és $d(v,u) < \infty$; lásd a 2.3.4.2. alpontot)

58. Mindegyik komponens egy kör, amelyik rendje legalább (a) 3 (b) 1.

59. (a) n szerinti indukcióval használhatjuk az egyszerű beszúró rendezést: Tegyük fel, hogy $v_1 \to j \cdots \to v_{n-1}$. Ekkor vagy $v_n \to v_1$ vagy $v_{n-1} \to v_n$ vagy $v_{k-1} \to v_n \to v_k$, ahol k a legkisebb olyan érték, melyre $v_n \to v_k$. Lásd [65].

(b) 15: 01234, 02341, 02413, és a ciklikus eltoltjuk. Az ilyen irányított utak száma mindig páratlan; lásd [76].

(c) Igen. (Indukcióval: Ha csak egy hely van a v_n beszúrására, mint az (a) részben, akkor a verseny tranzitív.)

60. Legyen $A = \{x \mid u \to x\}$, $B = \{x \mid x \to v\}$, $C = \{x \mid v \to x\}$. Ha $v \notin A$ és $A \cap B = \emptyset$, akkor $|A| + |B| = |A \cup B| \leq n - 2$, mert $u \notin A \cup B$ és $v \notin A \cup B$. De $|B| + |C| = n - 1$; így $|A| < |C|$. Lásd [45].

61. $1 \to 1$, $1 \to 2$, $2 \to 2$; ekkor $A = \binom{1\,1}{0\,1}$ és $A^k = \binom{1\,k}{0\,1}$ minden egész k esetén.

62. (a) Tegyük fel, hogy $\{1,\ldots,n\}$ csúcsok. A permanens kifejtésében az $n!$ $a_{1p_1}\ldots a_{np_n}$ tag mindegyike azoknak a feszítő permutációs digráfoknak a száma, amelyeknek van $j \to p_j$ irányított élük.

(b) Hasonló érvelés mutatja, hogy $\det A$-t úgy kapjuk, hogy a páros feszítő permutációs digráfok számából kivonjuk a páratlanok számát. Lásd [31], ahol a permutációs digráf neve „lineáris részgráf".

63. Legyen v valamelyik csúcs. Ha $g = 2t+1$, akkor legalább $d(d-1)^{k-1}$ x csúcs elégíti ki $d(v,x) = k$-t, ha $1 \le k < t$. Ha $g = 2t+2$ és v' v-nek valamelyik szomszédja, akkor van legalább $(d-1)^t$ x csúcs, amelyre $d(v,x) = t+1$ és $d(v',x) = t$.

64. A 63. megoldásban az alsó határt elérve *mindegyik* v csúcsnak d kell legyen a fokszáma, és v d szomszédja mind szomszédos kell legyen a maradék $d-1$ csúccsal. Ez a gráf valójában a $K_{d,d}$.

65. (a) A 63. megoldás szerint G d fokú reguláris gráf kell legyen, és bármely két különböző csúcs között pontosan egy ≤ 2 hosszú út kell legyen.

(b) Feltehetjük, hogy $\lambda_1 = d$, $x_1 = (1\ldots1)^T$-tal. Az összes többi sajátvektor kielégíti $Jx_j = (0\ldots0)^T$-t; így $\lambda_j^2 + \lambda_j = d-1$, ha $1 < j \le N$.

(c) Ha $\lambda_2 = \cdots = \lambda_m = (-1+\sqrt{4d-3}\,)/2$ és $\lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_N = (-1-\sqrt{4d-3}\,)/2$, akkor $m-1 = N-m$. Ezzel az értékkel azt kapjuk, hogy $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = d - d^2/2$.

(d) Ha $4d-3 = s^2$ és m ugyanaz, mint (c)-ben, a sajátértékeket összeadjuk az alábbi értékig

$$\frac{s^2+3}{4} + (m-1)\frac{s-1}{2} - \Big(\frac{(s^2+3)^2}{16} + 1 - m\Big)\frac{s+1}{2},$$

ami $15/32$ plussz s-nek egy többszöröse. Így s osztója kell legyen 15-nek.

(Ezt az eredményt Hoffman és Singleton kapták, lásd [35], ahol azt is bebizonyították, hogy a $d = 7$ értékre a gráf egyértelmű.)

66. Jelöljük az 50 csúcsot $[a,b]$-vel és (a,b)-vel, ahol $0 \le a,b < 5$, és definiáljunk háromféle élt mod 5 aritmetikát használva:

$$[a,b] \text{---} [a+1,b]; \qquad (a,b) \text{---} (a+2,b); \qquad (a,b) \text{---} [a+bc,c], \quad \text{ha } 0 \le a,b,c < 5.$$

(Lásd [11]. Az első kétféle él nélkül a gráf kerülete 6, és megfelel az 51. gyakorlatban lévő geometriai hálónak, ha a 19. megoldás ortogonális mátrixát használjuk.)

67. Bizonyos lehetőségeket kizárt Aschbacher, lásd [4].

68. Ha G-nek s automorfizmusa van, akkor $n!/s$ szomszédsági mátrixa van, mert s darab P permutációs mátrix van, amelyre $P^{-}AP = A$.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] W. Ahrens, N. Cai. Isoperimetric theorems in the binary sequences of finite lengths. *Applied Mathematical Letters*, 11(5):121–126, 1998. MR1638794 (99c:05018). 26

[2] L. D. Andersen. Chapter on the history of Latin square. Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, 2007. Research Report Series; R-2007-32, 31 oldal. 26

[3] K. I. Appel, W. Haken, J. A. Koch. Every planar map is four colorable. II. Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21:429–567, 1977. MR0543793 (58 #27598b). 18

[4] M. B. Aschbacher. The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57. *Journal of Algebra*, 19:538–540, 1971. MR0291266 (45 #360). 33

[5] R. Barnard. *Corpse in a Gilded Cage*. Felony & Mayhem (July 25, 2008), 2008 (első kiadás 1984). 11

[6] G. Baron. Über Verallgemeinerungen des Langfordschen Problems. In P. Erdős A. Rényi, T. Sós Vera (szerkesztők), *Combinatorial Theory and its Applications*, 81–92. o. North-Holland, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai* **4**, Amsterdam, 1970. MR0295919 (45 #4981). 26

[7] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson. *Graph Theory 1736–1936*. Clarendon Press, Oxford, 1998. MR0444418 (56 #2771). 16

[8] R. Bose, S. Shrikande. On the falsity of Euler's conjecture about the non-existence of two orthogonal latin squares of order $4t + 2$. *Proceedings of the National Academy of United States of America*, 45(5):734–737, 1959. Letölthető a http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=222625 címről. 6

[9] R. Bose, S. Shrikande, E. T. Parker. Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. *Canadian Journal of Mathematics*, 12:189–203, 1960. MR0122729 (23 #A69). 6

[10] J. W. Brown, A. Hedayat. A pair of orthogonal Latin squares of order 10 with four shared parallel transversals. *Journal of Combinatorics, Information and System Science*, 18(1–2):113–115, 1993. MR1317694 (95m:05043). 27

[11] W. G. Brown. On the non-existence of a type of regular graphs of girth 5. *Canadian Journal of Mathematics*, 19:644–648, 1967. MR0214499 (35 #5349). 33

[12] R. A. Brualdi, H. Ryser. *Combinatorial matrix Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. MR1130611 (93a:05087). 27

[13] R. H. Bruck. Finite nets. I. *Canadian Journal of Mathematics*, 3:94–107, 1951. MR0039678 (12,580i). 29

[14] R. H. Bruck. Finite nets. II. Uniqueness and imbedding. *Canadian Journal of Mathematics*, 13:421–457, 1963. MR0154824 (27 #4768). 29

[15] L. E. Carroll. *Doublets: A World-Puzzle*. 1879. A szójáték leírása megtalálható a http://thinks.com/words/doublets.htm című honlapon. 11

[16] V. Chvátal. The smallest triangle-free 4-chromatic 4-regular graph. *Journal of Combinatorial Theory Ser. A*, 9:93–94, 1970. MR0263691 (41 #8292). 15

[17] J. Cook. Toroidal tilings from de Bruijn-Good cyclic sequences. *Discrete Mathematics*, 70(2):209–210, 1988. MR0949780 (89f:05057). 30

[18] T. M. Cover. 1990 Shannon lecture. *IEEE Information Theory Society Newsletter*, 42(4):2–6, 1992. 14

[19] R. O. Davies. On Langford's problem. II. *Mathematical Gazette*, 43:253–255, 1959. MR0114762 (22 #5581). 24

[20] E. Doutté. *Magie et Religion dans l'Afrique du Nord.* Algir, 1909. 26

[21] A. C. Doyle. *The Adventure of the Blue Carbuncle.* Strand Magazine, 1892. A regény magyarul a *Scherlock Holmes kalandjai* című kötetben jelent meg 2002-ben a Teuro Kiadónál. A könyv letölthető a MEK honlapjáról (http://mek.oszk.hu/01700/01769/index.phtml). Ebben a VII. történet címe *A kék karbunkulus.* 2

[22] H. E. Dudeney. Water, gas, and electricity: Connect a, b, c to w, g, e; no pipes cross. *Strand*, 46:110–110, 1913. 31

[23] L. Euler. Recherches sur une nouvelle espece de quarres magiques. *Verhandelingen uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappente Vlissingen*, 9:85–239, 1782. 5, 7

[24] B. Ganter, R. A. Mathon, A. Rosa. A complete census of (10, 3, 2)-block designs and of Mendelsohn triple systems of order ten. I. Mendelsohn triple systems without repeated blocks. *Congressus Numerantium*, XX:383–398, *Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing* (University of Manitoba, Winnipeg, 1977), 1978. MR0535020 (81b:05020a). 27

[25] M. Gardner. http://www.copernicusbooks.com/ Books, New York, 1996. MR1391239. 12

[26] S. Golomb, E. Ch. Posner. Rook domains, latin squares, affine planes, and error-distributing codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-10:196–208, 1964. MR0168394 (29 #5657). 29

[27] J. Gordon. Two theorems on multipartite partitions. *Word Ways*, 23:59–61, 1990. 30

[28] J. Grant. *Word Ways*, 11:156–157, 1978. 31

[29] E. Groth. Langford pairs in the design of circuits for multiplication. Martin Gardner's column in *Mathematical Gazette*, 1968 márciusában a 124. oldalon. 9

[30] M. Hall, Jr.. *Combinatorial Theory.* Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, 1967. MR0224481 (37 #80). 28

[31] F. Harary, A. J. Schwenk. Trees with Hamiltonian square. *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, 4:202–210, 1972. 33

[32] V. Havel. The end of the modern era. *International Herald Tribune*, 1992. 9

[33] A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane. *Orthogonal Arrays. Theory and Applications.* Springer-Verlag, *Springer Series in Statistics*, New York, 1999. MR1693498 (2000h:05042). 28

[34] F. Heinen. *Über Systeme von Kräften.* G. D. Bädecker Verlag, Essen, 1834. 17

[35] A. J. Hoffman, R. R. Singleton. On Moore graphs with diameter 2 and 3. *IBM Journal of Research and Development*, 4:497–504, 1960. MR0080391 (18,240f). 33

[36] C. Homérosz. *Iliász.* I.e. 8. század. Magyarul Karsai György szerkesztésében 1998-ban jelent meg az Akkord Kiadónál *Iliász* címen. 10

[37] B. M. Hsiao, D. C. Bossen, R. Chien. Orthogonal Latin square codes. *IBM Journal of Research and Development*, 14:390–394, 1970. MR0278820 (43 #4548). 29

[38] M. Ibn al-Hajj. *Kitab Shumus al-Anwar.* Kairó, 1322. 26

[39] A. Kempe. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 177:1–70, 1886. 31

[40] T. P. Kirkman. *Philosophical Transactions*, 148:145–161, 1858. 16

[41] D. Kőnig. *Mathematische Annalen*, 77(4):453–454, 1916. 18

[42] D. E. Knuth, R. L. Graham, O. Patashnik. *Selected Papers on Computer Science.* Cambridge University Press/Macmillan Company, *CSLI Lecture Notes*, **59**, Cambridge, 1996. MR1415389 (98c:68001). 10

[43] D. E. Knuth. Dancing links. In J. Gravies, B. Roscoe, J. Woodcock (szerkesztők), *Millenial Perspectives in Computer Science.* Palgrave Publisher, Houndmills, 2000, 187–214. oldal. 3

[44] M. Krajecki, C. A. G. Jaillet, A. Bui. Parallel tree search for combinatorial problems: a comparative study between OpenMP and MPI. *Studia Informatica Universalis*, 4(2–3):269–274, 1995. MR1370962 (96j:05037). 3

[45] H. G. Landau. On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 15:143–148, 1953. MR0054933 (14,1000e). 32

[46] C. D. Langford. Problem. *The Mathematical Gazette*, 42(228–228), 1958. 26

[47] F. T. Leahy. Armed Forces Security Agency report 343. Kézirat, 1952. január 23. 24

[48] R. E. Leighton. *Games*, 16(6):34 és 47, 1992. 30

[49] L. Leonardo. Mona Lisa, 1506 (festmény). 10

[50] S. Loyd. *Tricks and Puzzles*. Experimenter Publ. Co., New York, 1927. Az idézet a cikkgyűjtemény *A talk on puzzles* című részéből származik. 2

[51] H. MacNeish. Euler squares. *Annals of Mathematics*, 23(3):221–227, 1922. MR1502613. 6

[52] H. Mann. On orthogonal Latin squares. *Bulletin of American Mathematical Society*, 50(2):249–257, 1944. MR0010401 (6,14a). 26

[53] B. D. McKay, A. Meynert, W. J. Myrwold. Small Latin squares, quasigroups, and loops. *Journal of Combinatorial, Designs*, 15(2):98–119, 2007. MR2291523 (2007j:05030). 27

[54] C. McManus. *Word Ways*, 25:13–15, 1992. 30

[55] E. H. Moore. Tactical memoranda I-III. *The American Journal of Mathematics*, 18(3):264–290, 1996. MR1505714. 28

[56] E. H. Moore. Tactical memoranda I-III. *The American Journal of Mathematics*, 18(4):291–303, 1996. MR1505717. 28

[57] S. Morris. *Omni*, 16(8):94–94, 1994 május. 30

[58] J. Ozanam. *Recreations mathematiques et physiques*. Jombert, Párizs, 1694. Az első kiadást számos további kiadás követte. Jean Étienne Montucla 1778-ban átdolgozott és lényegesen kibővített formában adta közre. 4

[59] L. Paige, J. Tompkins. The size of the $10 \times \times 10$ orthogonal latin square problem. *Proceedings of the Symposia on Applied Mathematics*, 10:71–83, 1960. MR0115927 (22 #6724). 6

[60] F. Palluel. *Mémoires d'Agriculture*, Paris, Société Royale d'Agriculture, trimestre d'été, 1788, 17–23. oldal. 9

[61] E. Parker. Computer investigation of orthogonal Latin squares of order ten. *Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics*, XV:73–81, 1963. MR0180910 (31 #5140). 6

[62] J. Petersen. In *Annuaire des mathématiciens*. 1902, 413–427. oldal. 6, 15

[63] C. Polignac. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 27:142–145, 1899. 16

[64] C. Rao. On a class of arrangements. *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society*, 8(02):119–125, 1949. 28

[65] L. Rédei. Ein kombinatorischer Satz. *Acta litterarum ac scientiarum*, 7:39–43, 1949. 32

[66] N. G. Robertson, D. P. Sanders, P. D. Seymour R. Thomas. Efficiently four-coloring planar graphs. In *Proceedings of the Twenty-eighth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*. 28. kötet, 571–575. oldal. ACM Press, New York, 1996, (Philadelphia, 1996). MR1427555. 18

[67] P. Roget. *Roger's Thesaurus, 6. javított kiadás*. Collins, New York, 2002. A könyv 1805-ben készült el és először 1852-ben jelent meg. Az új kiadást B. A. Kipfer szerkesztette. 10

[68] J. Sauveur. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*. Párizs, 1710. 26

[69] H. C. Schumacher. Levél C. F. Gaussnak, 1942. augusztus 10. 6

[70] W. Shakespeare. *The Merchant of Venice*. 1623. A könyv magyarul *Machbeth + A velencei kalmár* címen jelent meg 2001-ben a Magvető Kiadónál. A könyvet Szabó Imre fordította. 2

[71] J. E. Simpson. Langford sequences: perfect and hooked. *Discrete Mathematics*, 44(1):97–104, 1983. MR0632865 (83e:05008). 24

[72] T. A. T. Skolem, T. S. V. Bang. On certain distributions of integers in pairs with given differences. *Mathematica Skandinavica*, 5:57–58, 1957. 24

[73] T. W. Skolem. Some remarks on the triple systems of Steiner. *Mathematica Skandinavica*, 6:273–280, 1958. 9

[74] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics. Volume 1*. Cambridge University Press, 2000 (1. edition: Blackwell, 1986). 14

[75] J. Steiner. Euclidean plane. *Crelle*, 13:362–363. oldal, 1835. 17

[76] T. J. Szele. Irányított teljes gráfok kombinatorikai vizsgálata. *Matematikai és fizikai lapok*, 50:223–256, 1943. MR0018404 (8,284i). 32

[77] R. E. Tarjan. Complexity of combinatorial algorithms. *SIAM Review*, 20(3):457–491, 1978. Az idézett szöveget R. E. Tarjan 1976-ban mondta. MR0483708 (58 #3688). 2

[78] G. Tarry. *Comptes rendus, Association française pour l'avancement des sciences*, 29(2):170–203, 1901. 6

[79] D. T. Todorov. Three mutually orthogonal Latin squares of order 14. *Ars Combinatoria*, 20:45–47, 1985. MR0824847 (87d:05045). 27

[80] L. Tolsztoj. *Karenina Anna.* 1877. Magyarul többek között az Európa Könyvkiadó adta ki 2006-ban *Karenina Anna. I, II* címen. Fordította Németh László. 10

[81] S. P. Wang, R. M. Wilson. *Congressus Numerantium*, 21:688–688, 1978. 27

[82] L. Weisner. Special orthogonal Latin squares of order 10. *Canadian Mathematical Bulletin*, 31:61–63, 2003. 27

[83] P. Wernicke. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verenigung*, 19:264–267, 1910. 6

TÁRGYMUTATÓ

NÉVMUTATÓ

MAGYAR NÉVMUTATÓ