

TDK dolgozat

Párhuzamos folyamatok ütemezése

Szendrei Rudolf
ELTE Informatikai Kar
Budapest, 2006

Témavezető: Iványi Antal

1. Alapfogalmak

Egy $m \times n$ méretű bináris mátrix r -jó, ha minden oszlopában legfeljebb r egyes van; r -ütemezhető, ha nulla elemek törlésével jó mátrixszá alakítható; r -biztos, ha tetszőleges k -ra igaz, hogy a mátrix első k oszlopában legfeljebb kr darab egyes van.

Legyen \mathbf{Z} olyan $m \times n$ méretű mátrix, melynek elemei egymástól független valószínűségi változók, és mindegyik valószínűségi változó p valószínűséggel az 1 és $1 - p$ valószínűséggel a 0 értéket veszi fel. Az $m \geq 1$ esetben a jó mátrixok segítségével alsó, a biztos mátrixok segítségével felső korlátokat adunk annak aszimptotikus valószínűségére, hogy a \mathbf{Z} mátrix egy konkrét realizációja 2-ütemezhető, és megadjuk azt a kritikus valószínűséget, amelynél kisebb p -re a \mathbf{Z} mátrix pozitív valószínűséggel 2-biztos.

2. Bevezetés

A kombinatorikusok [3, 6, 7, 18, 19] és a fizikusok [1, 4, 13, 15] egyik népszerű kutatási témája a különböző gráfokon való bolyongás.

Ebben a dolgozatban egy olyan – a perkoláció [6, 7, 13, 15] vizsgálatából származó feladatot elemzünk, amely a kölcsönös kizárást igénylő erőforrásokat használó párhuzamos folyamatok ütemezésénél is érdekes.

A folyamatok ütemezhetőségi valószínűségének becslését egyenes mentén történő aszimmetrikus bolyongás vizsgálatára vezetjük vissza.

3. A feladat megfogalmazása

Legyenek m és n pozitív egészek, legyen r ($0 \leq r \leq m$) valós szám és

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

legyen olyan z_{ij} független valószínűségi változókat tartalmazó mátrix, melyek közös eloszlása

$$P(z_{ij}=k) = \begin{cases} p, & \text{ha } k=1 \text{ és } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, \\ q=1-p, & \text{ha } k=0 \text{ és } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

a \mathbf{Z} mátrix egy konkrét megvalósítása.

A jó, biztos és ütemezhető mátrixok definíciója a következő.

Az A mátrixot **r -jónak** nevezzük, ha minden oszlopa legfeljebb r darab egyest tartalmaz. A különböző $m \times n$ méretű r -jó mátrixok számát $G_r(m, n)$ -nel, a \mathbf{Z} mátrix jóságának valószínűségét $g_r(m, n, p)$ -vel jelöljük.

Az A mátrixot **r -biztosnak** nevezzük, ha

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{ij} \leq kr \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3.4)$$

A különböző $m \times n$ méretű r -biztos mátrixok számát $S_r(m, n)$ -nel, a \mathbf{Z} mátrix biztosságának valószínűségét pedig $s_r(m, n, p)$ -vel jelöljük.

Ha $a_{ij} = 0$, akkor az a_{ij} elem törölhető az A mátrixból. a_{ij} törlése azt jelenti, hogy az $a_{i,j+1}, \dots, a_{im}$ elemek második indexét eggyel csökkentjük és az $a_{im} = 0$ elemet hozzáírjuk az A mátrix i -edik sorának végéhez.

Az A mátrixot **Winkler r -ütemezhetőnek** (röviden **r -ütemezhetőnek** vagy **r -kompatibilisnek**) nevezzük, ha törlésekkel átalakítható r -jó mátrixszá. A különböző $m \times n$ méretű, r -ütemezhető mátrixok számát $W_r(m, n)$ -nel, a \mathbf{Z} mátrix r -ütemezhetőségének valószínűségét $w_r(m, n, p)$ -vel jelöljük. A $w_r(m, n, p)$ függvényt **r -ütemezhetőségi függvénynek** nevezzük.

A $g_r(m, n, r)$, $w_r(m, n, r)$ és $s_r(m, n, r)$ függvényeket **sűrűségfüggvényeknek** nevezzük. A jó, biztos és ütemezhető mátrixok **aszimptotikus sűrűségét** a

$$g_r(m, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_r(m, n, p), \quad (3.5)$$

$$s_r(m, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_r(m, n, p), \quad (3.6)$$

$$w_r(m, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_r(m, n, p), \quad (3.7)$$

határértékeként definiáljuk.

A következő, **kritikus valószínűségeknek** nevezett szuprémumok több alkalmazásban jelentős szerepet játszanak:

$$w_{crit,r}(m) = \sup \{ p \mid w_r(m, p) > 0 \}, \quad (3.8)$$

$$g_{crit,r}(m) = \sup \{ p \mid g_r(m, p) > 0 \}, \quad (3.9)$$

$$s_{crit,r}(m) = \sup \{ p \mid s_r(m, p) > 0 \}, \quad (3.10)$$

Ennek a dolgozatnak a célja az ütemezhető mátrixok különböző tulajdonságainak elemzése – elsősorban számítógépes szimuláció segítségével.

Vizsgálataink kiinduló pontja Gács Péter [7] cikke, amely szerint elég kis p értékre $w_1(2, p) > 0$. A tétel bizonyításából adódik, hogy $w_{crit,1}(2) \geq 10^{-400}$. Ebben a cikkben Gács polinomiális algoritmust javasol annak eldöntésére, hogy adott A mátrix ütemezhető-e.

Míg a két dimenziós perkolációnak gazdag irodalma van, kevés eredmény ismert több dimenzióban. A [10] cikkben szerepel a Winkler-modell kiterjesztése tetszőleges $m \geq 2$ dimenzióra.

Gács algoritmusánál gyorsabb algoritmust javasolunk a két dimenziós esetre, és ezt az algoritmust kiterjesztjük tetszőleges dimenziós mátrixok vizsgálatára.

Megjegyezzük, hogy ezen dolgozat tartalmával szoros kapcsolatban vannak a következő dolgozatok: a vizsgált probléma a [10] cikkből származik, [9] különböző, r -mátrixokra vonatkozó leszámplálási eredményeket tartalmaz, [10] pedig bizonyos 2- és $(m / 2)$ -biztos mátrixok tulajdonságait foglalja össze.

4. A feladat értelmezése

Bár a Winkler-modellt a perkoláció leírására javasolták, a problémák egy-egy lehetséges informatikai értelmezését mutatjuk be. m folyamatnak időnként ugyanarra az erőforrásra van szüksége, amelyből $r/2$ egység van. Az i -edik folyamat erőforrásigényét az a_{i1}, a_{i2}, a_{im} sorozattal adjuk meg. Ha ennek a sorozatnak az a_{ij} eleme egyes, akkor az i -edik folyamat $[j - 1, j)$ intervallumban igényli az erőforrást. Ha $a_{ij} = 0$, akkor ugyanabban az intervallumban a folyamat nem igényli az erőforrást, mert későbbre halasztható háttér munkát végez – ez magyarázza, hogy az ütemezhetőség érdekében a nullák törölhetők.

Az $m = 1$ és $r = 1$ speciális eset az ismert jegyváltási probléma [14, 18] és szavazási probléma [5], az $m = 2$ és $r = 2$ speciális eset pedig a Winkler-féle perkolációs modell [7, 19].

A jó mátrixok törlés nélkül ütemezhetők. A nem jó mátrixok egy része törlés(ek) segítségével jóvá alakítható, azaz ütemezhető. A biztosság az ütemezhetőség szükséges feltétele. Ezért a jó mátrixok száma alsó korlát, a biztos mátrixok száma pedig felső korlát az ütemezhető mátrixok számára.

Mivel a problémát informatikai problémaként kezeljük, ezért a továbbiakban elsősorban Feller [5] informatikai (tömegkiszolgálási) terminológiáját használjuk.

5. Algoritmusok

Ha $m = 2$, akkor egyszerűen ellenőrizhető, hogy egy mátrix jó-e és hogy biztos-e.

5.1. Jó mátrixok

Csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az oszlopok elemeinek összege kisebb-e kettőnél – és csak az első olyan oszlopig kell elmennünk, amelyre a feltétel nem teljesül.

$JÓ(n)$

```
1 for i = 1 to n
2   s := 1
3   for j = 1 to m
4     s := s + a[i, j]
5     if s > 1
6       then return „the jth column is black”
7 return „the matrix is good”
```

Rögzített m esetén ez az algoritmus legrosszabb esetben $\Theta(n)$ ideig fut, legjobb és várható esetben pedig $\Theta(1)$ ideig.

5.2. Biztos mátrixok

Itt oszlopfolytonosan számoljuk az egyeseket és számukat oszloponként összehasonlítjuk az adott oszlop indexével.

$BIZTOS(n)$

```
1 s := 0
2 for i = 1 to n
3   for j = 1 to m
4     s := s + a[i, j]
5     if s > j
6       then return „there are too many 1's in the first j columns”
7 return „the matrix safe”
```

Ez az algoritmus legrosszabb esetben $\Theta(n)$ időben fut, legjobb esetben pedig $\Theta(1)$ a futási idő.

5.3. Ütemezhetség

Adott \mathbf{A} mátrix javíthatóságát nyers erővel például úgy vizsgálhatjuk, hogy a benne lévő nullák halmazának minden részalmazát (külön-külön) töröljük, és az így kapott mátrixok jóságát vizsgáljuk. Ebből a legrosszabb esetre nézve $\Theta(n2^{2n})$ ellenőrzési idő adódik.

Ennél ismert sokkal jobb módszer is [7]. Rendeljük hozzá \mathbf{A} -hoz azt a $G(\mathbf{A})$ irányított gráfot, melynek $(n+1)^2$ csúcsa van: a koordinátarendszer (i, j) koordinátájú pontjai, ahol $0 \leq i, j \leq n$. A gráf éleit a következőképpen definiáljuk:

1. ha $x_{i-1} = y_{j-1} = 1$, akkor az (i, j) csúcsból nem indul ki él;
2. ha $x_{i-1} = y_{j-1} = 0$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i+1, j)$, a másik pedig az $(i, j+1)$ csúcsban végződik;
3. ha $x_{i-1} = 0$ és $y_{j-1} = 1$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i+1, j)$, a másik pedig az $(i+1, j+1)$ csúcsban végződik;
4. ha $x_{i-1} = 1$ és $y_{j-1} = 0$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i, j+1)$, a másik pedig az $(i+1, j+1)$ csúcsban végződik.

Gács Péter cikkében [7] szerepel a következő állítás:

Lemma. Az A mátrix akkor és csak akkor ütemezhető, ha a $G(A)$ gráfban van az origóból induló és vagy egy (n, i) vagy pedig egy (i, n) pontban végződő irányított út.

A lemma alapján megvalósítottuk az alábbi TERMÉSZETES algoritmust, és $n = 1, 2, \dots, 17$ értékekre meghatároztuk a jó $G_1(2, n)$, a biztos $S_1(2, n)$ és az ütemezhető mátrixok $W_1(2, n)$ számát, valamint – a $p = 0.5$, $p = 0.3$ és $p = 0.25$ értékek mellett a $G_1(2, n, p)$, $S_1(2, n, p)$ és $W_1(2, n, p)$ valószínűségeket.

TERMÉSZETES(m, n, p)

```
1 OSZLOPOSAN-ELLENŐRÍZ(  $m, n$  )
2  $G_1(2, n) := jo\_matrix$ 
3  $S_1(2, n) := biztos\_matrix$ 
4  $W_1(2, n) := komp\_matrix$ 
5  $G_1(2, n, p) := 0$ 
6  $S_1(2, n, p) := 0$ 
7  $W_1(2, n, p) := 0$ 
8 for  $i = 0$  to  $n*m$ 
9    $G_1(2, n, p) := G_1(2, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * jo\_szam[i]$ 
10   $S_1(2, n, p) := S_1(2, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * biztos\_szam[i]$ 
11   $W_1(2, n, p) := W_1(2, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * komp\_szam[i]$ 
```

jo_matrix , $biztos_matrix$ és $komp_matrix$ változók tárolják a jó, biztos, illetve kompatibilis mátrixok értékét. $jo_szam[i]$, $biztos_szam[i]$ és $komp_szam[i]$ értéke megegyezik azon mátrixok számával, amelyben pontosan i darab egyes található és jó, biztos, illetve kompatibilis. Ezek kiszámításához az OSZLOPOSAN-ELLENŐRÍZ algoritmust készítettük el, amely a következőképpen adódik:

OSZLOPOSAN-ELLENŐRÍZ(m, n)

```

1  jo_matrix      := 0
2  biztos_matrix := 0
3  komp_matrix   := 0
4  for i := 0 to n*m
5      do jo_szam[i] := 0
6          bizt_szam[i] := 0
7          komp_szam[i] := 0
8  for i = 0 to n - 1
9      do oszlopok[i] := 0
10         egyesek_az_oszlopban[i] := 0
11         egyesek_idaig[i] := 0
12  STOP := 0
13  for i = 0 to m - 1
14      do STOP := (STOP << 1) + 1
15      while oszlopok[0] < STOP
16          do biztos_matrix := biztos_matrix + 1
17              bizt_szam[egyesek_idaig[n-1]] := bizt_szam[egyesek_idaig[n-1]] + 1
18              JO := igaz
19              i := 0
20              while i < n és JO
21                  do if 1 < egyesek_az_oszlopban[i]
22                      then JO ← hamis
23                          i := i + 1
24                  if JO
25                      then jo_matrix := jo_matrix + 1
26                          komp_matrix := komp_matrix + 1
27                          jo_szam[egyesek_idaig[n-1]] := jo_szam[egyesek_idaig[n-1]] + 1
28                          komp_szam[egyesek_idaig[n-1]] := komp_szam[egyesek_idaig[n-1]] + 1
29                  else if Ütemezhető( oszlopok, m, n )
30                      then komp_matrix := komp_matrix + 1
31                          komp_szam[egyesek_idaig[n-1]] := komp_szam[egyesek_idaig[n-1]] + 1
32          for i = n - 1 downto 0
33              do BIZTOS := hamis
34                  while oszlopok[i] < STOP
35                      do egyesek := 0
36                          oszlopok[i] := oszlopok[i] + 1
37                          oszlop := oszlopok[i]
38                          while oszlop ≠ 0
39                              do if oszlop & 1
40                                  then egyesek := egyesek + 1
41                                      oszlop = oszlop >> 1
42                              if egyesek_idaig[i] + egyesek - egyesek_az_oszlopban[i] <= i + 1
43                                  then BIZTOS := igaz
44                                      egyesek_idaig[i] := egyesek_idaig[i] + egyesek -
45                                          egyesek_az_oszlopban[i]
46                                      egyesek_az_oszlopban[i] := egyesek
47                                      for j = i + 1 to n - 1
48                                          do egyesek_idaig[j] := egyesek_idaig[i]
49                                      if i < n - 1
50                                          then for j = i + 1 to n
51                                              do oszlopok[j] := 0
52                                                  egyesek_az_oszlopban[j] := 0
53                                  exit do
54          if BIZTOS
55              then exit for

```

A változók értelmezése:

<i>oszlopok</i> [<i>i</i>]	a mátrix <i>i</i> . oszlopa, 2-es számrendszerben felírt számként ábrázolva
<i>egyesek_az_oszlopban</i> [<i>i</i>]	az <i>i</i> . oszlopban lévő egyesek száma
<i>egyesek_idaig</i> [<i>i</i>]	egyesek száma a mátrix első <i>i</i> +1 oszlopában
<i>STOP</i>	csupa egyest tartalmazó oszlopot reprezentáló szám
<i>JO</i>	értéke igaz, ha az aktuális mátrix jó, különben pedig hamis
<i>BIZTOS</i>	értéke igaz, ha az aktuális mátrix biztos, különben pedig hamis

Az OSZLOPOSAN-ELLENŐRÍZ algoritmus lényege, hogy előállítja azokat a mátrixokat, amelyek biztosak, és csak ezek közül vizsgálja meg az ÜTEMEZHETŐ algoritmussal azt, hogy melyek azok, amelyek valóban Winkler-ütemezhetők.

ÜTEMEZHETŐ(*oszlopok*, *m*, *n*)

```
1 if m < 2
2   then return igaz
3 if n < 2
4   then return igaz
5 koord1 := (0, ..., 0)
6 H := {}
7 H := H U koord1
8 while H ≠ {}
9   do koord1 := min(H)
10  H := H \ koord1
11  iranyok_szama := 0
12  hataron := 0
13  for i = 0 to m - 1
14    do leptetes = koord1[i]
15        egyesek = (oszlopok[leptetes] >> i) & 1
16        if leptetes >= n
17          then hataron = hataron + 1
18        if egyesek ≠ 0
19          then iranyok_szama = iranyok_szama + 1
20  if hataron > m - 2
21    then return igaz
22  if iranyok_szama = 0
23    then for i = 0 to m - 1
24      do if koord1[i] < n
25        then koord2 := koord1
26              koord2[i] := koord2[i] + 1
27              H := H U koord2
28  else if iranyok_szama = 1
29    then koord2 := koord1
30        for i = 0 to m - 1
31          do if koord2[i] + 1 < n
32            then koord2[i] := koord2[i] + 1
33            else koord2[i] := n
34        H := H U koord2
35 return hamis
```


A változók értelmezése:

$koord1, koord2$	m dimenziós koordináták
H	halmaz, mely m dimenziós koordinátákat tartalmaz, a halmazon a rendezés koordináták szerint lexikografikus
$iranyok_szama$	az adott koordinátrapontból hány 1-es címkéjű él vezet ki
$hataron$	$koord1$ pontnak hány koordinátája n
$leptetes$	hány bit lett feldolgozva az aktuális irányban
$egyed$	$koord1$ pontból az i . koordinátatengely mentén vezető-e ki él 1, ha nem és 0, ha igen
min	visszaadott értéke a megadott halmazban lévő legkisebb elem

A lemma szerint a $G(A)$ gráf belső csúcaiból átlagosan másfél él indul ki. Amikor azonban x_{i-1} és y_{j-1} különböző, nincs szükség a tengelyekkel párhuzamos élre, elegendő csak az (i, j) pontba vezető él. Az így kapott $H(A)$ gráf csúcaiból másfél helyett csak $4/3$ él indul ki.

Vizsgáltuk a két dimenziós Winkler-modellnek a [10] cikkben javasolt m -dimenziós általánosítását is. Az m soros mátrixok ütemezhetőségének vizsgálatát így már a fentebb bemutatott algoritmusban megvalósítottuk.

Mivel az algoritmus az $(n + 2)^m$ térfogatú térrész rácspontjait legfeljebb egyszer terjeszti (és akkor legfeljebb m kimenő élet vizsgál), így futási ideje legrosszabb esetben $O(mn^m)$. Ha a vizsgált mátrix minden eleme nulla, akkor például három dimenzióban a $(0, 0, 0)$, $(n + 1, 0, 0)$, $(0, n + 1, 0)$ és $(0, 0, n + 1)$ pontok által határolt hasámban lévő rácspontokat kell kiterjeszteni – ebből adódik, hogy legrosszabb esetben a futási idő $\Theta(mn^m)$.

6. Matematikai eredmények

Ebben a részben elsősorban azt vizsgáljuk – különböző módszerekkel – hogyan függ a biztos mátrixok aszimptotikus sűrűsége az egyesek előfordulásának p valószínűségétől és a sorok m számától.

A vizsgált $g_r(m, n, p)$, $w_r(m, n, p)$ és $s_r(m, n, p)$ függvények tulajdonságai:

1. $n \in \mathbb{N}^+$, $r \in \mathbb{R}$ és $r \in [0, m]$, $p \in \mathbb{R}$ és $p \in [0, 1]$;
2. n szerint monoton csökkenők;
3. p szerint monoton csökkenők;
4. m szerint csökkenők,
5. r szerint monoton növekvők.

A továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy $r = 1$, azaz a jó mátrixok oszlopaiban legfeljebb egy egyes, a biztos mátrixok k hosszúságú prefixeiben pedig legfeljebb k egyes lehet. Mivel r értéke mindenütt ugyanaz, a továbbiakban elhagyjuk az r indexet.

6.1. Előzetes eredmények

A későbbiekben felhasználjuk az alábbi állításokat.

Jelöljük C_n -nel ($n \in \mathbb{N}^+$) azon a_1, a_2, \dots, a_{2n} bináris sorozatok számát, amelyekben n darab egyes és n darab nulla van úgy, hogy minden a_1, a_2, \dots, a_k ($1 \leq k \leq 2n$) kezdősorozatban legfeljebb annyi egyes van, mint nulla.

6.2. lemma. *Ha $n \geq 0$, akkor*

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy C_n az n -edik Catalan-szám, melynek explicit alakja számos tankönyvben és cikkben [2, 12, 14, 18] megtalálható.

6.3. lemma. *Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor*

$$f(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} (x(1-x))^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Bizonyítás.

Ha $m \geq 2$, akkor a csupa nullát tartalmazó oszlopot fehérnek nevezzük, a pontosan egy egyeset tartalmazót szürkének az ettől többel rendelkezőket pedig feketének hívjuk.

Ha $m \geq 2$, akkor az A mátrix minden oszlopa $q^m + mq$ valószínűséggel lehet fehér vagy szürke, ezért $g(m, n, p) = ((q^m + mq))^n$. Ha $p > 0$, akkor

$$g(m, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} (q^m + mq)^n = 0, \quad (6.2)$$

tehát az oszlopok számának növekedtével a jó mátrixok sűrűsége tart a nullához.

Ha az $m = 2$ esetben egy jó mátrixból töröljük a fehér oszlopokat, akkor csak szürke oszlopok maradnak, azaz a mátrix két sora egymásnak a *komplementere*.

Vizsgálataink szempontjából fontos szerepet játszik a következő egyszerű állítás.

6.4. lemma. *Ha $m \geq 2$, akkor a jó mátrixok ütemezhetőek, az ütemezhető mátrixok pedig biztosak.*

Bizonyítás. Ha az A mátrix minden oszlopában legfeljebb egy egyes van, akkor a mátrix első k oszlopában összesen legfeljebb k egyes van.

Ha van olyan k ($1 \leq k \leq n$), amelyre A mátrix első k oszlopában több egyes van, mint k , akkor a skatulyaelv szerint az első k oszlop között van olyan, amelyikben legalább két egyes van. Ha az A mátrixból törölünk egy nullát, ezzel az első k oszlopban lévő egyesek száma nem csökken – tehát A nem ütemezhető. ■

Az állításnak hasznos következménye az alábbi.

6.5. következmény. *Ha $m \geq 2$, akkor*

$$g(m, n, p) \leq w(m, n, p) \leq s(m, n, p), \quad (6.3)$$

$$g(m, p) \leq w(m, p) \leq s(m, p), \quad (6.4)$$

$$g_{crit}(m) \leq w_{crit}(m) \leq s_{crit}(m), \quad (6.5)$$

Az $m \times n$ méretű biztos mátrixok elemzését az $m \geq 4$ esetben az $m = 3$ esethez hasonló módon végezhetjük el.

A bolyongó pont a legalább $b \geq 2$ egyest tartalmazó oszlop esetén $(b-2)$ -t ugrik balra, két egyest tartalmazó oszlop esetén egyet lép balra, egy egyest tartalmazó oszlop esetén helyben marad és az m nullát tartalmazó oszlop esetén egyet lép jobbra.

A $(b-2)$ -vel balra ugrás valószínűsége $\binom{m}{b} p^{b-2} q^{n-b+2}$, a balra lépésé $\binom{m}{2} p^{m-2} q^2$, a helyben maradásé $\binom{m}{1} p q^{m-1}$ és a jobbra lépésé $\binom{m}{0} q^m$, ezért a következő egyenleteket írhatjuk fel.

Az $m = 2$ és $m = 3$ -ra kapott korábbi eredményeket is figyelembe véve ezzel a következő eredményt kaptuk.

6.6. tétel. *Ha $m \geq 2$ és $0 \leq p \leq 1$, akkor*

$$s(m, p) = 1 - \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i (i-1) \quad (6.6)$$

és

$$s_{crit} = \frac{1}{m} \quad (6.7)$$

7. Szimulációs eredmények

7.1. Kétsoros mátrixok

Az egyszerűség kedvéért az $s(2, n, p)$ függvény helyett az $u(2, n, p) = 1 - s(2, n, p)$ függvényt elemezzük. Először megadunk egy zárt képletet $u(2, n, p)$ meghatározására.

7.2. lemma. *Ha $n \geq 1$, akkor*

$$u(2, n, p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\lfloor (i-1)/2 \rfloor} 2^{i-1-2j} C_j \binom{i-1}{2j} 4^{n-i}. \quad (7.1)$$

Az $u(2, n, p)$ -re kapott (7.1) képlet nehezen kezelhetőnek látszik. Ezért bemutatunk egy kombinatorikus és két bolyongós módszert $s(2, p)$ explicit alakjának levezetésére.

7.3. lemma. Ha $0 \leq p \leq 1$, akkor

$$u(2, p) = \begin{cases} \frac{p^2}{q^2}, & \text{ha } 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \end{cases} \quad (7.2)$$

Mátrixaink vizsgálatának hasznos módszere, ha minden mátrixhoz hozzárendelünk egy – az x -tengelyen való – bolyongást.

A bolyongó pont a k -adik időpontban a $P_k(b_k, 0)$ pontban van, ahol b_k a mátrix első k oszlopában előfordult nullák és egyesek számának különbségét jellemzi.

Ha a bolyongás az origóból indul, akkor

$$b_k = \begin{cases} -1, & \text{ha } \exists k \text{ úgy, hogy } k < \sum_{i=1}^k (a_{i1} + a_{i2}), \\ k - \sum_{i=1}^k (a_{i1} + a_{i2}) & \text{egyébként} \end{cases}$$

Bemutatunk egy olyan módszert, amelyet az $r = 1$ esetben tetszőleges $m \geq 2$ értékre alkalmazni tudunk.

Bizonyítás. Jelöljük x_k -val ($k = -1, 0, 1, 2, \dots$) annak a valószínűségét, hogy a k pontból induló bolyongó pont elnyelődik az $x = -1$ helyen. A két egyest tartalmazó, p^2 valószínűséggel előforduló oszlopoknál feleltessünk meg balra lépést, a $2pq$ valószínűséggel előforduló vegyes oszlopokhoz tartozzon helybenmaradás és a két nullát tartalmazó, q^2 valószínűséggel előforduló oszlopoknál feleljen meg jobbra lépés.

Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel.

$$\begin{aligned} x_0 &= q^2 x_1 + 2qpx_0 + p^2, \\ x_1 &= q^2 x_2 + 2qpx_1 + p^2 x_0, \\ x_2 &= q^2 x_3 + 2qpx_2 + p^2 x_1, \\ x_3 &= q^2 x_4 + 2qpx_3 + p^2 x_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.3)$$

Legyen

$$G(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i \quad (7.4)$$

az x_0, x_1, x_2, \dots sorozat generátorfüggvénye. Az (7.3) egyenletrendszer x_i -vel kezdődő egyenleteit rendre z^i -vel beszorozva és az egyenleteket összeadva a

$$G(z) = q \frac{G(z) - x_0}{z} + 2pqG(z) + p^2(1 + zG(z)). \quad (7.5)$$

Innen $G(z)$ kifejezhető

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (7.6)$$

alakban, ahol

$$P(z) = q^2 - p^2 z \quad (7.7)$$

és

$$Q(z) = p^2 z^2 + 2pq + p^3 - z. \quad (7.8)$$

A $Q(z)$ polinom legfeljebb egy abszolút értékű zérushelyeina Cauchy-Hadamard-tétel [17] szerint a $P(z)$ polinomnak a nulla értéket kell felvennie. A $Q(z) = 0$ egyenletet

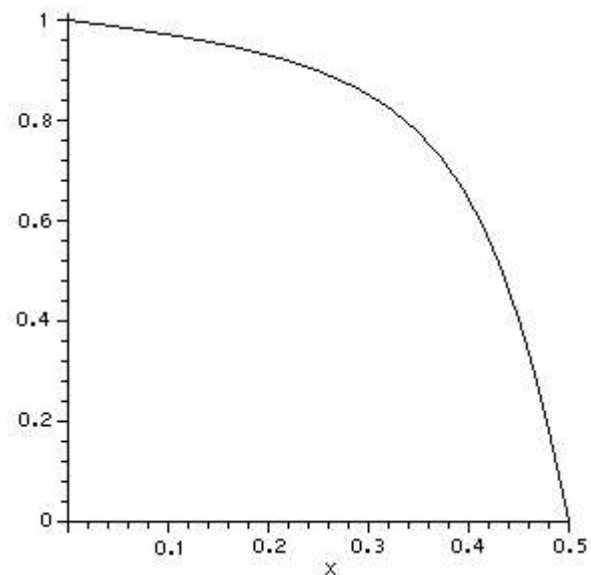
$$(pz + q)^2 = 1 \quad (7.9)$$

alakban felírva közvetlenül adódik, hogy $z = 1$ gyöke a $Q(z)$ polinomnak. A $P(1) = 0$ egyenletből az

$$x_0 = \frac{p^2}{q^2} \quad (7.10)$$

megoldást kapjuk. ■

A 7.1 ábra mutatja a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett $s(2, p)$ függvény görbéjének a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumhoz tartozó részét.



7.1. ábra. Az $s(2, p)$ ütemezhetőségi függvény görbéje.

A $g(2, p)$ és $s(2, p)$ függvények alapján az $m = 2$ értékhez tartozó kritikus valószínűségekre fennáll

$$0 = g_{crit}(2) \leq w_{crit}(2) \leq s_{crit}(2) = \frac{1}{2}. \quad (7.11)$$

n	$G(2, n)$	$\frac{G(2, n)}{T(2, n)}$	$W(2, n)$	$\frac{W(2, n)}{T(2, n)}$	$S(2, n)$	$\frac{S(2, n)}{T(2, n)}$	$\frac{W(2, n)}{S(2, n)}$
1	3	0.750	3	0.750	3	0.750	1
2	9	0.562	10	0.625	10	0.625	1
3	27	0.452	35	0.547	35	0.547	1
4	81	0.316	124	0.484	126	0.492	0.984
5	243	0.237	444	0.434	462	0.451	0.961
6	729	0.178	1592	0.389	1716	0.419	0.927
7	2187	0.133	5731	0.350	6435	0.393	0.890
8	6561	0.100	20671	0.315	24310	0.371	0.850
9	19683	0.075	74722	0.285	92378	0.352	0.808
10	59049	0.056	270521	0.258	352716	0.336	0.767
11	177147	0.042	980751	0.234	1352078	0.322	0.725
12	531441	0.032	3559538	0.212	5200300	0.310	0.684
13	1594323	0.022	12931155	0.193	20058300	0.299	0.646
14	4782969	0.018	47013033	0.175	77558760	0.289	0.606
15	14348907	0.013	171036244	0.159	300540195	0.280	0.568

7.2. ábra. A $p = \frac{1}{2}$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

Emlékeztetünk Gács eredményére, amely szerint $w_{crit}(2) \geq 10^{-400}$.

A 7.2. táblázatban megadjuk a jó, ütemezhető és biztos mátrixok számát és részarányát – ami megfelel a $p = 0.5$ értéknek. A táblázatban jellemzett mátrixok oszlopainak száma 1, 2, ..., 15.

Jelöljük a $m \times n$ méretű bináris mátrixok számát $T(m, n)$ -nel. Ekkor $T(m, n) = 2^{mn}$.

Az eddigi eredmények alapján mind a $G(m, n) / T(m, n)$, mind pedig a $W(m, n) / T(m, n)$ és $S(m, n) / T(m, n)$ értékeknek nullához kell tartani n növekedtével.

Nyitott kérdés a $W(2, n) / S(2, n)$ hányados viselkedése.

Az 7.3. táblázat $s(2, n, 0.4)$ oszlopában a számoknak az $5/9$ határértékhez kell tartaniuk – ami még messze van.

Az 7.4. táblázatban az $s(2, n, 0.35)$ oszlop számainak a $120/169 \sim 0.7101$ határértékhez kell tartaniuk.

n	$T(2, n)$	$g(2, n, 0.4)$	$w(2, n, 0.4)$	$s(2, n, 0.4)$	$\frac{w(2, n, 0.4)}{s(2, n, 0.4)}$
1	4	0.8400	0.8400	0.8400	1
2	16	0.7056	0.7632	0.7632	1
3	64	0.5927	0.7171	0.7171	1
4	256	0.4979	0.6795	0.6862	0.9902
5	1024	0.4182	0.6487	0.6639	0.9771
6	4096	0.3513	0.6206	0.6470	0.9592
7	16384	0.2951	0.5957	0.6339	0.9397
8	65536	0.2479	0.5731	0.6234	0.9193
9	262144	0.2082	0.5524	0.6149	0.8984
10	1048576	0.1749	0.5332	0.6078	0.8773
11	4194304	0.1469	0.5155	0.6019	0.8565
12	16777216	0.1234	0.4988	0.5967	0.8359
13	67108864	0.1037	0.4832	0.5924	0.8157
14	268435456	0.0871	0.4685	0.5886	0.7960
15	1073741824	0.0731	0.4545	0.5854	0.7764
16	4294967296	0.0644	0.4412	0.5825	0.7574
17	17179869184	0.0516	0.4286	0.5800	0.7390

7.3. ábra. A $p = 0.4$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok

n	$T(2, n)$	$g(2, n, 0.35)$	$w(2, n, 0.35)$	$s(2, n, 0.35)$	$\frac{w(2, n, 0.35)}{s(2, n, 0.35)}$
1	4	0.8775	0.8775	0.8775	1
2	16	0.7700	0.8218	0.8218	1
3	64	0.6757	0.7901	0.7901	1
4	256	0.5929	0.7645	0.7699	0.9930
5	1024	0.5203	0.7441	0.7561	0.9841
6	4096	0.4565	0.7255	0.7462	0.9723
7	16384	0.4006	0.7094	0.7389	0.9601
8	65536	0.3515	0.6949	0.7334	0.9475
9	262144	0.3085	0.6817	0.7291	0.9350
10	1048576	0.2707	0.6696	0.7258	0.9226
11	4194304	0.2375	0.6585	0.7231	0.9107
12	16777216	0.2084	0.6481	0.7210	0.8989
13	67108864	0.1839	0.6383	0.7192	0.8875
14	268435456	0.1605	0.6291	0.7178	0.8764
15	1073741824	0.1401	0.6204	0.7166	0.8658
16	4294967296	0.1236	0.6122	0.7156	0.8555

7.4. ábra. A $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok

n	$T(3, n)$	$G(3, n)$	$g(3, n, 0.5)$	$W(3, n)$	$w(3, n, 0.5)$	$S(3, n)$	$s(2, n, 0.5)$	$\frac{w(3, n, 0.5)}{s(3, n, 0.5)}$
1	8	4	0.5000	4	0.5000	4	0.5000	1
2	64	16	0.2500	19	0.2969	19	0.2969	1
3	512	64	0.1250	98	0.1914	98	0.1914	1
4	4096	256	0.0625	525	0.1282	531	0.1296	0.9892
5	32768	1024	0.0312	2884	0.0880	2974	0.0907	0.9702
6	262144	4096	0.0156	16043	0.0612	17060	0.0651	0.9401
7	2097152	16384	0.0078	90091	0.0429	99658	0.0475	0.9032
8	16777216	65536	0.0039	507520	0.0303	590563	0.0352	0.8594

7.5. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.5$ paraméterekhez tartozó kerekített adatok.

n	$T(3, m)$	$g(3, n, 0.3)$	$w(3, n, 0.3)$	$s(3, n, 0.3)$	$\frac{w(3, n, 0.3)}{s(3, n, 0.3)}$
1	8	0.7840	0.7840	0.7840	1
2	64	0.6147	0.6795	0.6795	1
3	512	0.4819	0.6153	0.6153	1
4	4096	0.3778	0.5682	0.5710	0.9951
5	32768	0.2962	0.5313	0.5380	0.9875
6	262144	0.2322	0.5004	0.5125	0.9764
7	2097152	0.1821	0.4739	0.4919	0.9634

7.6. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.3$ értékekhez tartozó kerekített adatok.

n	$T(3, m)$	$g(3, n, 0.25)$	$w(3, n, 0.25)$	$s(3, n, 0.25)$	$\frac{w(3, n, 0.25)}{s(3, n, 0.25)}$
1	8	0.8437	0.8437	0.8437	1
2	64	0.7119	0.7712	0.7712	1
3	512	0.6007	0.7286	0.7286	1
4	4096	0.5068	0.6981	0.7004	0.9967
5	32768	0.4276	0.6748	0.6804	0.9917

7.7. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.25$ értékekhez tartozó kerekített adatok

7.4. Háromsoros mátrixok

Az $m = 3$ esetben 3:0, 2:1, 1:2 és 0:3 lehet a nullák és egyesek aránya. A vizsgált mátrixhoz olyan bolyongást rendelünk, amelyikben a csupa egyes oszlop p^3 valószínűségével ugrunk balra kettővel, a két egyest tartalmazó oszlop $3p^2q$ valószínűségével lépünk balra, az egy egyest tartalmazó oszlopok $3p^2$ valószínűségével maradunk helyben és a három nullát tartalmazó oszlop q^3 valószínűségével lépünk jobbra.

8. Általános eset

Ha $r = 1$ és $m \geq 2$, akkor a biztos mátrixok vizsgálata olyan aszimmetrikus bolyongásra vezet, amely az origóból indul, az $x = -1$ pontban van egy nyelő, és a mozgás a mátrix oszlopainak felel meg: ha az oszlopban egy egyes van – ennek valószínűsége $\binom{m}{1}pq^{m-1}$ – akkor a pont helyben marad; ha az oszlopban $k > 1$ egyes van – ennek valószínűsége $\binom{m}{k}p^kq^{m-k}$ – akkor $k - 1$ helyet ugrunk jobbra; ha pedig az oszlopban csupa nulla van – ennek valószínűsége q^m – akkor egyet lépünk balra.

A [10] cikkben (amely az interneten is elérhető) megtalálható a következő tétel.

TÉTEL. Ha $m \geq 2$ és $0 \leq p \leq 1$, akkor

$$s(m, p) = 1 - \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i (i-1) \quad (8.1)$$

$$s_{crit} = \frac{1}{m} \quad (8.2)$$

9. Összefoglalás

Az $m \geq 2$ sort tartalmazó mátrixokra megadtuk az ütemezhetőségi függvény explicit alakját és meghatároztuk az $s_{crit}(m)$ kritikus valószínűségeket. $s_{crit}(2)$ értéke a több perkolációs modellre jellemző $\frac{1}{2}$, a további kritikus valószínűségek értéke m növekedtével csökken.

A szimulációs vizsgálatok szerint a kritikus ütemezhetőségi valószínűségek közel vannak a kapott felső korlátokhoz: az 7.2. táblázat a $p = 0.5$, az 1.3. táblázat a $p = 0.4$, az 7.4. táblázat pedig a $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó adatokat mutatja.

A táblázatok adatai alapján azt sejtjük, hogy a [7] cikkben szereplő korlátnál jobb is adható: ha $p < 0.4$, akkor $w(2, p) > 0$.

A $w(m, p) / s(m, p)$ hányadosok viselkedése még további elemzést kíván.

A cikkben szereplő alsó korlátnál nagyobbakat is meg tudunk adni, de azokból is csak a természetes nulla alsó korlát adódik. A kritikus valószínűségek pontosabb jellemzéséhez a jó mátrixoknál hasznosabb mátrixokra van szükség.

Köszönetnyilvánítás. Köszönöm Gács Péternek (Bostoni Egyetem) a probléma felvetését, László Lajosnak (ELTE IK Numerikus analízis Tanszék) és Móri Tamásnak (ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszék) pedig a hasznos tanácsait.

Irodalomjegyzék

- [1] P. Balister, B. Bollobás, M. Walters (2004), Continuum percolation with steps in an annulus. *Ann. Appl. Probab.* **14/4** 1869–1879. <http://arxiv.org/find>. 1
- [2] A. Bege and Z. Kása (2001), Coding objects related to Catalan numbers, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica*, Volume XLVI (1), 31–39. <http://www.cs.ubbcluj.ro/~studia-i/contents.php>. 7
- [3] B. Bollobás, O. Riordan (2005), A short proof of the Harris-Kesten theorem. Electronic manuscript, <http://arxiv.org/find>. 1
- [4] I. Derényi, G. Palla, T. Vicsek (2005), Clique percolation in random networks. *Phys. Rev. Lett.* **94** 160–202. <http://arxiv.org/find>. 1
- [5] W. Feller, (1968), An Introduction to Probability Theory and its Applications. *John Wiley and Sons*, New York. 3
- [6] P. Gács (2002), Clairvoyant scheduling of random walks (submitted to *Electronic Journal of Probability*). Short version: Clairvoyant scheduling of random walks. In: *Proc. of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. <http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html>. 1
- [7] P. Gács (2004), Compatible sequences and a slow Winkler percolation. *Combin. Probab. Comput.* **13/6**, 815–856. <http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html>. 1, 3, 5, 14
- [8] T. E. Harris (1960), A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* **56** 13–20
- [9] A. Iványi, Cs. Láng, Általánosított Catalan számok. (manuscript). 3
- [10] A. Iványi, 2-biztos mátrixok sűrűsége (manuscript). 3, 5, 14
- [11] Z. Kása (2003), Combinatorică cu aplicații. *Presa Universitară Clujeană*, Cluj-Napoca.
- [12] Z. Kása (2004), Rekurzív egyenletek. *Informatikai algoritmusok. I* (Szerk. A. Iványi). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 14–37. <http://elek.inf.elte.hu/>. 7
- [13] H. Kesten (1982), Percolation Theory for Mathematicians. Birkhäuser, Boston. 1
- [14] Cs. Láng (1994), *Bevezető fejezetek a matematikába I*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest. 3, 7
- [15] D. Schauffer (1985), *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, London, 1985. 1
- [16] R. P. Stanley (1999), Enumerative Combinatorics, Volume 2. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 62. Cambridge University Press, Cambridge.
- [17] P. Szász (1951), *A differenciál- és integrálszámítás elemei*. Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest. 10
- [18] N. J. Vilenkin (1972), *Combinatorial Mathematics for Recreation*. Mir Publisher, Moscow. 1, 3, 7
- [19] P. Winkler (2000), Dependent percolation and colliding random walks, *Random Structures & Algorithms* 16/1 58–84. <http://www.math.dartmouth.edu/~pw/papers/pubs.html>. 1, 3
- [20] A. Hunt (2005), Percolation Theory for Flow in Porous Media. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 674.