Alkalmazott Matematikai Lapok

PÁRHUZAMOS FOLYAMATOK ÜTEMEZÉSE

Iványi Antal, Szendrei Rudolf
ELTE Informatikai Kar
Budapest, 2008

Egy $m \times n$ méretű bináris mátrix *r-jó,* ha minden oszlopában legfeljebb r egyes van; *r-ütemezhető,* ha nulla elemek törlésével jó mátrixszá alakítható; *r-biztos,* ha tetszőleges k-ra igaz, hogy a mátrix első k oszlopában legfeljebb kr darab egyes van.

Legyen $\mathbf{Z}$ olyan $m \times n$ méretű mátrix, melynek elemei egymástól független valószínűségi változók, és mindegyik valószínűségi változó p valószínűséggel az 1 és $1 - p$ valószínűséggel a 0 értéket veszi fel. Az $m \geq 1$ esetben a jó mátrixok segítségével alsó, a biztos mátrixok segítségével felső korlátokat adunk annak aszimptotikus valószínűségére, hogy a $\mathbf{Z}$ mátrix egy konkrét realizációja 2-ütemezhető, és megadjuk azt a kritikus valószínűséget, amelynél kisebb p-re a $\mathbf{Z}$ mátrix pozitív valószínűséggel 2-biztos.

Megadjuk a használt algoritmusok pszeudokódját és jellemezzük futási idejüket.

1. Bevezetés

A kombinatorikusok [?, 6, 7, 17, 18] és a fizikusok [?, 4, ?, ?, 14] egyik népszerű kutatási témája a különböző gráfokon való bolyongás. Ebben a cikkben egy olyan – a perkoláció [?, ?, ?, ?, ?, 13] vizsgálatából származó – feladatot elemzünk, amely a kölcsönös kizárást igénylő erőforrásokat használó párhuzamos folyamatok ütemezésénél is érdekes. A folyamatok ütemezhetőségi valószínűségének becslését egyenes mentén történő aszimmetrikus bolyongás vizsgálatára vezetjük vissza.

2. A feladat megfogalmazása

Legyenek m és n pozitív egészek, $r (0 \leq r \leq m)$ és p $(0 \leq p \leq 1)$ valós szám és Z olyan z_{ij} független valószínűségi változókat tartalmazó mátrix, melyek közös eloszlása $P(z_{ij} = 1) = p$ és $P(z_{ij} = 0) = 1 - p$

Legyen A a Z mátrix egy konkrét megvalósítása.

A jó, biztos és ütemezhető mátrixok definíciója a következő.

Az A mátrixot r**-jónak** nevezzük, ha minden oszlopa legfeljebb r darab egyest tartalmaz. A különböző $m \times n$ méretű r**-jó** mátrixok számát $G_r(m, n)$-nel, a Z mátrix jóságának valószínűségét pedig $g_r(m, n, p)$-vel jelöljük.

Az A mátrixot r**-biztosnak** nevezzük, ha

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} a_{ij} \leq kr \quad (1 \leq k \leq n).$$

A különböző $m \times n$ méretű r-biztos mátrixok számát $S_r(m,n)$-nel, a Z mátrix biztosságának valószínűségét pedig $s_r(m,n,p)$-vel jelöljük.

Ha $a_{ij} = 0$, akkor az a_{ij} elem törölhető az A mátrixból. a_{ij} törlése azt jelenti, hogy az $a_{i,j+1}, ..., a_{im}$ elemek második indexét eggyel csökkentjük és az $a_{im} = 0$ elemet hozzáírjuk az A mátrix i-edik sorának végéhez.

Az A mátrixot **Winkler r-ütemezhetőnek** (röviden **r-ütemezhetőnek** vagy r-kompatibilisnek) nevezzük, ha törlésekkel átalakítható r-jó mátrixszá. A különböző $m \times n$ méretű, r-ütemezhető mátrixok számát $W_r(m,n)$-nel, a Z mátrix r-ütemezhetőségének valószínűségét $w_r(m,n,p)$-vel jelöljük. A $w_r(m,n,p)$ függvényt **r-ütemezhetőségi függvénynek** nevezzük. A $g_r(m,n,r)$, $w_r(m,n,r)$ és $s_r(m,n,r)$ függvényeket *sűrűségfüggvényeknek* nevezzük. A jó, biztos és ütemezhető mátrixok **aszimptotikus sűrűségét** a

$$g_r(m,p) = \lim_{n\to\infty} g_r(m,n,p),$$

$$s_r(m,p) = \lim_{n\to\infty} s_r(m,n,p),$$

$$w_r(m,p) = \lim_{n\to\infty} w_r(m,n,p).$$

határértékekként definiáljuk.

A következő, kritikus valószínűségeknek nevezett szuprémumok több alkalmazásban jelentős szerepet játszanak:

$$w_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid w_r(m,p) > 0\}$$

$$g_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid g_r(m,p) > 0\}$$

$$s_{crit,r}(m) = \sup\{p \mid s_r(m,p) > 0\}.$$

Ennek a cikknek a célja az ütemezhető mátrixok különböző tulajdonságainak elemzése – elsősorban számítógépes szimuláció segítségével.

Vizsgálataink kiinduló pontja Gács Péter [7] cikke, amely szerint elég kis p értékre $w_1(2,p) > 0$. A tétel bizonyításából adódik, hogy $w_{crit,1}(2) \geq 10^{-400}$. Ebben a cikkben Gács polinomiális algoritmust javasol annak eldöntésére, hogy adott A mátrix ütemezhető-e.

Míg a két dimenziós perkolációnak gazdag irodalma van, kevés eredmény ismert több dimenzióban. A [10] cikkben szerepel a Winkler-modell kiterjesztése tetszőleges $m \geq 2$ dimenzióra.

Gács algoritmusánál gyorsabb algoritmust javasolunk a két dimenziós esetre, és ezt az algoritmust kiterjesztjük tetszőleges dimenziós mátrixok vizsgálatára.

Megjegyezzük, hogy ezen cikk tartalmával szoros kapcsolatban vannak a következő dolgozatok: a vizsgált probléma a [7] cikkből származik, [9???] különböző, r-mátrixokra vonatkozó leszámlálási eredményeket tartalmaz, [10???] pedig bizonyos 2- és $(m/2)$-biztos mátrixok tulajdonságait foglalja össze.

3. A feladat értelmezése

Bár a Winkler-modellt a perkoláció leírására javasolták, a problémák egy-egy lehetséges informatikai értelmezését mutatjuk be. m folyamatnak időnként ugyanarra az erőforrásra van szüksége, amelyből r egység van.Az i-edik folyamat erőforrásigényét az $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}$ sorozattal adjuk meg. Ha ennek a sorozatnak az a_{ij} eleme egyes, akkor az i-edik folyamat $[j-1, j)$ intervallumban igényli az erőforrást. Ha $a_{ij} = 0$, akkor ugyanabban az intervallumban a folyamat nem igényli az erőforrást, mert későbbre halasztható háttérmunkát végez - ez magyarázza, hogy az ütemezhetőség érdekében a nullák törölhetők.

Az $m = 1$ és $r = 1$ speciális eset az ismert jegyváltási probléma [15] és szavazási probléma [5], az $m = 2$ és $r = 2$ speciális eset pedig a Winkler-féle perkolációs modell [7, 13, 18].

A jó mátrixok törlés nélkül ütemezhetők. A nem jó mátrixok egy része törlés(ek) segítségével jóvá alakítható, azaz ütemezhető. A biztosság az ütemezhetőség szükséges feltétele. Ezért a jó mátrixok száma alsó korlát, a biztos mátrixok száma pedig felső korlát az ütemezhető mátrixok számára.

Mivel a problémát informatikai problémaként kezeljük, ezért a továbbiakban elsősorban Feller [5] informatikai (tömegkiszolgálási) terminológiáját használjuk.

4. Algoritmusok

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges m, n és r mellett egy mátrix jó-e és hogy biztos-e.

4.1. Jó mátrixok. Csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az oszlopok elemeinek összege kisebb-e r-nél – és csak az első olyan oszlopig kell elmennünk, amelyre a feltétel nem teljesül.

```
Jó-e(m, n, r, A)
for i = 1 to n
    s ← 0
    for j = 1 to m
        s ← s + a[i, j]
    if s > 1
       then return the jth column is black
return "the matrix is good"
```

Rögzített m és r esetén ez az algoritmus legrosszabb esetben $\Theta(n)$ ideig fut, legjobb és várható esetben pedig $\Theta(1)$ ideig.

4.2. Biztos mátrixok. Itt oszlopfolytonosan számoljuk az egyeseket és számukat oszloponként összehasonlítjuk az adott oszlop indexének r-szeresével.

Rögzített m és r esetén ennek az algoritmusnak legrosszabb esetben $\Theta(mn)$, legjobb esetben pedig csak $\Theta(1)$ ideig. A várható futási idő rögzített $r > 0$ és $p > 0$, valamint növekvő m és n mellett szintén $\Theta(1)$.

A további vizsgálatokat az $r = 1$ speciális esetben tesszük.

5.3. Ütemezhetőség Adott A mátrix javíthatóságát nyers erővel például úgy vizsgálhatjuk, hogy a benne lévő nullák halmazának minden részhalmazát (külön-külön) töröljük, és az így kapott mátrixok jóságát vizsgáljuk. Ebből a legrosszabb esetre nézve $\theta(n*2^{2mn})$ ellenőrzési idő adódik. Ennél ismert sokkal jobb módszer is [7]. Rendeljük hozzá A-hoz azt a $G(A)$ irányított gráfot, melynek $(n+1)^2$ csúcsa van: a koordinátarendszer (i, j) koordinátájú pontjai, ahol $0 \leq i, j \leq n$. A gráf éleit a következőképpen definiáljuk:

1. ha $x_i = y_j = 1$, akkor az (i, j) csúcsból nem indul ki él;

2. ha $x_i = y_j = 0$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i + 1, j)$, a másik pedig az $(i, j + 1)$ csúcsban végződik;

3. ha $x_i = 0$ és $y_j = 1$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i + 1, j)$, a másik pedig az $(i + 1, j + 1)$ csúcsban végződik;

4. ha $x_i = 1$ és $y_j = 0$, akkor az (i, j) csúcsból két él indul ki: az egyik az $(i, j + 1)$, a másik pedig az $(i + 1, j + 1)$ csúcsban végződik.

Gács Péter cikkében [7] szerepel a következő állítás:

4.1. lemma. *Az A mátrix akkor és csak akkor ütemezhető, ha a $G(A)$ gráfban van az origóból induló és vagy egy (n, i) vagy pedig egy (i, n) pontban végződő irányított út.*

Ahhoz, hogy egy fent említett utat megtaláljunk, használhatjuk azt az algoritmust, ahol az origót betesszük egy sorba és egy halmazba. (A halmaz segít nekünk abban, hogy egy pontot legfeljebb egyszer terjesszünk ki, a sor pedig abban, hogy a pontokat átlósan terjesszük ki a futás során.)
Ismételjük a következő lépést, amíg a sor ki nem ürül, vagy olyan ponttal nem találkozunk, amelynek van legalább egy koordinátája, amely n.

Vegyük ki a sor első elemét. Vizsgáljuk meg, hogy a csúcsból hova vezet él és az esetleges csúcsok szerepelnek-e már a halmazban. Ha még nem szerepelnek, akkor tegyük bele a halmazba és a sorba is.

Ha a sor kiürül anélkül, hogy találkoztunk volna olyan csúccsal, amelynek legalább egyik koordinátája n, akkor nem létezik út. Ha futás közben találkozunk ilyen csúccsal, akkor kész vagyunk, találtunk utat.

Korábban említettük, hogy ennél az algoritmusnál jobbat fogunk mutatni. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a fenti bijektív megfeleltetésnél behúzott koordinátatengellyel párhuzamos éleket nem húzzuk be, amikor átlós élek indulnak ki egy csúcsból. Míg az eredeti megfeleltetésnél átlagosan 6/4 él indul ki egy csúcsból, addig jelen esetben csak 4/4. Az, hogy ezeknek az éleknek az elhagyása jogos, – azaz megtehető anélkül, hogy az ütemezhetőség eldöntését befolyásolná – bizonyítanunk kell.

TÉTEL. *Az eredetileg definiált gráfos megfeleltetésből elhagyott élek az út létezését nem befolyásolják.*

Bizonyítás. Az eldöntés ekvivalenciáját négy kisebb állításként írhatjuk fel, melyeket egyenként bizonyítunk.

1. segédállítás: *Ha az új gráfban létezik út, akkor az eredetiben is, amely az origó csúcsból indul és olyan csúcsba vezet melynek a koordinátája (i, n) vagy (n, i).* Az állítás triviális módón adódik, hiszen az új gráfot az eredetiből élelhagyással hoztuk létre.

2. segédállítás: *Ha az eredeti gráfban nincs az origó csúcsot (i, n) vagy (n, i) koordinátájú csúccsal összekötő út, akkor az új részgráfban sincs.* Ez triviálisan adódik a részgráf tulajdonságból.

3. segédállítás: *Ha az eredeti gráfban létezik az origó csúcsból induló (i, n) vagy (n, i) csúcsba vezető út, akkor az új gráfban is.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz élhalmazok egymásba skatulyázásának közrefogási elvét fogjuk alkalmazni. Ehhez a következő indukciós eljárást hajtsuk végre:

1. Vegyünk egy tetszőleges két soros, n oszlopos bináris mátrixot és állítsuk elő Gács javaslata alapján a neki megfeleltetett gráfot

2. Vegyük a gráf azon csúcsait, amelyeknek legalább egyik koordinátája n

3. Válasszuk ki közülük azokat, melyekbe vagy átlós él vezet, vagy olyan él, amelynek forráscsúcsából nem indul ki átlós él. Ez a csúcsra vonatkozóan nem kizáró vagyot jelent!

4. Most válasszuk ki ezeknek a csúcsoknak a szülőit és színezzük kékre az őket összekötő éleket. Ekkor minden olyan csúcsot kiválasztunk, melyeknek legalább egyik koordinátája $n - 1$ és belőlük el lehet jutni olyan pontba, melynek legalább egyik koordinátája n. Ez nyilvánvaló, hiszen ha egy csúcsból merőleges élek indulnak ki, akkor rá következő csúcsuk kiválasztásra került a 3. pontban. Ha pedig átlós él is indulna ki, akkor triviális, hogy az átlós él visz jobbra és felfele is. Azokat a pontokat, amelyeknek egyik koordinátája $n-1$ és a másik pedig legfeljebb $n - 1$, azok közül csak azokat hagyjuk meg, amelyeket a határpontok szülőcsúcsainak választottunk, a többit töröljük a hozzájuk vezető éllel együtt.

5. Csökkentsük n értékét egyel és ha még pozitív, akkor ugorjunk a 2. pontra.

A fent definiált eljárás jól látható módon visszavágja az eredeti gráfot úgy, hogy eltávolítja azokat a pontokat, melyekből zsákutcába futnánk, továbbá ha egy pontból indul ki átlós él, akkor csak ezt hagyja meg. Ez az eljárás tehát az új gráf éleinek csak egy részhalmazát hagyja meg a Gács szerinti gráfon. Mivel az általunk kékkel színezett út egyben egy lehetséges ütemezése is a mátrixnak, ezért az új gráfban is létezik legalább egy ütemezés, ha az eredetiben is létezett.

4. segédállítás: *Ha az új gráf szerint nem ütemezhető a mátrix, akkor az eredeti szerint sem.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az új gráf alapján nem ütemezhető a mátrix, de az eredeti szerint igen. Végezzük el a 3. állítás bizonyításához adott eljárást. Ekkor a visszavágott gráfban kellene lennie egy olyan kék éleket tartalmazó élsorozatnak, amely egy helyes ütemezés. Ugyanakkor az új gráfnak ezt az élsorozatot szükségszerűen tartalmaznia kellene, így ellentmondásra jutottunk.

A négy segédállítással lefedtük az ekvivalenciára adott állítás összes lehetséges esetét. Ezek bizonyításával pedig megadtuk az eredeti állítás bizonyítását is.
A Gács által adott lemma és az előbbiekben bizonyított állítás alapján megvalósítottuk azt a TERMÉSZETES algoritmust, amely csökkentett élszámmal dolgozik és $n = 1, 2, \ldots, 17$ értékekre meghatároztuk a jó $G_1(2, n)$, a biztos $S_1(2, n)$ és az ütemezhető mátrixok $W_1(2, n)$ számát, valamint – a $p = 0.5$, $p = 0.3$ és $p = 0.25$ értékek mellett – a $G_1(2, n, p)$, $S_1(2, n, p)$ és $W_1(2, n, p)$ valószínűségeket.

Természetes(m, n, p)
Oszlopos(m, n)
$G_1(m, n) \leftarrow jo\_matrix$
$S_1(m, n) \leftarrow biztos\_matrix$
$W_1(m, n) \leftarrow utem\_matrix$
$G_1(m, n, p) \leftarrow 0$
$S_1(m, n, p) \leftarrow 0$
$W_1(m, n, p) \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ **to** $n * m$
    $G_1(m, n, p) \leftarrow G_1(m, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * jo\_szam[i]$
    $S_1(m, n, p) \leftarrow S_1(m, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * biztos\_szam[i]$
    $W_1(m, n, p) \leftarrow W_1(m, n, p) + (p^i + (1-p)^{n*m-i}) * utem\_szam[i]$

jo_matrix, biztos_matrix és utem_matrix változók tárolják a jó, biztos, illetve ütemezhető mátrixok értékét. jo_szam[i], biztos_szam[i] és utem_szam[i] értéke megegyezik azon mátrixok számával, amelyben pontosan i darab egyes található és jó, biztos, illetve ütemezhető.

Ezeket a következő Oszlopos algoritmussal számítjuk ki.

```
Oszlopos(m, n)
jo_matrix := 0
biztos_matrix := 0
utem_matrix := 0
for i ← 0 to n ∗ m do
    do jo_szam[i]← 0
    bizt_szam[i]← 0
    utem_szam[i]← 0
for i ← 0 to n − 1 do
    do oszlopok[i]← 0
    egy_oszlopban[i]← 0
    egy_eddig[i]← 0
STOP ← 0
for i ← 0 to m − 1
    do STOP ← (STOP¡¡1) + 1
while oszlopok[0]< STOP
      do biztos_matrix ← biztos_matrix + 1
         bizt_szam[egy_eddig[n − 1]]← bizt_szam[egy_eddig[n − 1]]+1
         jo ← igaz
         i ← 0
         while i < n and jo do
               if 1 < egy_oszlopban[i]
                  then jo ← hamis
               i ← i + 1
         if jo
           then utem_matrix ← utem_matrix + 1
                utem_matrix ← utem_matrix + 1
           jo_szam[egy_eddig[n − 1]]← jo_szam[egyesek_idaig[n − 1]]+1
           utem_szam[egy_eddig[n − 1]]← utem_szam[egy_eddig[n − 1]]+1
         else if Ütemezhetö(oszlopok, m, n)
           then utem_matrix ← utem_matrix + 1
                utem_szam[egy_eddig[n − 1]]← utem_szam[egy_eddig[n − 1]]+1
      for i ← n − 1 downto 0 do
          do BIZTOS ← hamis
             while oszlopok[i]< STOP
                   egyesek ← 0
                   oszlopok[i]← oszlopok[i]+1
                   oszlop ← oszlopok[i]
                   while oszlop > 0
                         if oszlop & 1
                           then egyesek ← egyesek + 1
                                oszlop ← oszlop + 1
      if egy_eddig[i]+egyesek − egy_oszlopban[i]≤ i + 1
```

```
            then BIZTOS ← igaz
                  egy_eddig[i]← egy_eddig[i]+egyesek − egy_oszlopban[i]
                  egy_oszlopban[i]← egyesek
                  for j = i + 1 to n − 1 do
                      do egy_eddig[j]← egy_eddig[i]
                  if i < n − 1
                    then for j = i + 1 to n do
                              oszlopok[j]← 0
                              egy_oszlopban[j]← 0
                  return
        if BIZTOS
          then return
```

A változók értelmezése:

oszlopok$[i]$: a mátrix i. oszlopa, 2-es számrendszerben felírt számként ábrázolva;
egy_oszlopban$[i]$: az i. oszlopban lévő egyesek száma;
egy_eddig$[i]$: egyesek száma a mátrix első $i+1$ oszlopában;
STOP: csupa egyest tartalmazó oszlopot reprezentáló szám;
jo: értéke igaz, ha az aktuális mátrix jó, különben pedig hamis;
BIZTOS: értéke igaz, ha az aktuális mátrix biztos, különben pedig hamis.

Az OSZLOPOS algoritmus lényege, hogy előállítja azokat a mátrixokat, amelyek biztosak, és csak ezek közül vizsgálja meg az ÜTEMEZHETŐ algoritmussal azt, hogy melyek azok, amelyek valóban Winkler-ütemezhetők.

Ütemezhető(*oszlopok*, m, n)

```
if m < 2
  then return Igaz
if n < 2
  then return Igaz
koord1 ← (0, . . . , 0)
H ← {}
H ← H ∪ koord1
while H ≠ {}
        do koord1 ← min(H)
           H ← H - koord1
           iranyok_szama ← 0
           hataron ← 0
           for i ← 0 to m − 1
               do leptetes = koord[i]
                  egyes = (oszlopok[leptetes] ?? i) & 1
                  if leptetes ≥ n
                    then hataron = hataron + 1
                  if egyes ≠ 0
                    then iranyok_szama ← iranyok_szama + 1
           if hataron > m − 2
             then return igaz
           if iranyok_szama = 0
             then for i ← 0 to m − 1
```

```
                        do if koord1[i] < n
                              then koord2 ← koord1
                                   koord2[i] ← koord2[i] + 1
                                   H ← H ∪ koord2
            else if iranyok_szama ← 1
                   then koord2 ← koord1
                        for i ← 0 to m − 1
                            do if koord2[i] + 1 < n
                                  then koord2[i] ← koord2[i] + 1
                                  else koord2[i] ← n
                        H ← H ∪ koord2
return HAMIS
```

A változók értelmezése:

koord1, koord2: m dimenziós koordináták;

H: halmaz, mely m dimenziós koordinátákat tartalmaz;

iranyok_szama: az adott koordinátapontból hány 1-es címkéjű él vezet ki;

hataron: *koord1* pontnak hány koordinátája n;

leptetes: hány bit lett feldolgozva az aktuális irányban;

egyes: ha a *koord1* pontból az i. koordinátatengely mentén vezet ki él, akkor 1, egyébként 0;

min: visszaadott értéke a megadott halmazban lévő legkisebb elem.

A lemma szerint a $G(A)$ gráf belső csúcsaiból átlagosan 1.5 él indul ki. Amikor azonban x_{i-1} és y_{j-1} különböző, nincs szükség a tengelyekkel párhuzamos élre, elegendő csak az (i, j) pontba vezető él. Az így kapott $H(A)$ gráf csúcsaiból másfél helyett csak 1 él indul ki. Vizsgáltuk a két dimenziós Winkler-modellnek a [10] cikkben javasolt m-dimenziós általánosítását is. Az m soros mátrixok ütemezhetőségének vizsgálatát így már a fentebb bemutatott algoritmusban megvalósítottuk. Mivel az algoritmus az $(n+2)^m$ térfogatú térrész rácspontjait legfeljebb egyszer terjeszti (és akkor legfeljebb m kimenő élet vizsgál), így futási ideje legrosszabb esetben $\mathrm{O}(m * n^m)$. Ha a vizsgált mátrix minden eleme nulla, akkor például három dimenzióban a $(0,0,0), (n+1,0,0), (0,n+1,0)$ és $(0,0,n+1)$ pontok által határolt hasábban lévő rácspontokat kell kiterjeszteni - ebből adódik, hogy legrosszabb esetben a futási idő $\theta(m * n^m)$.

5. Matematikai eredmények

Ebben a részben elsősorban azt vizsgáljuk - különböző módszerekkel - hogyan függ a biztos mátrixok aszimptotikus sűrűsége az egyesek előfordulásának p valószínűségétől és a sorok m számától.

A vizsgált $g_r(m,n,p), w_r(m,n,p)$ és $s_r(m,n,p)$ függvények tulajdonságai:

1. $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ és $r \in [0,m], p \in \mathbb{R}$ és $p \in [0,1]$;
2. n szerint monoton csökkenők
3. p szerint monoton csökkenők

4. m szerint monoton csökkenők
5. r szerint monoton növekvők

A továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy $r = 1$, azaz a jó mátrixok oszlopaiban legfeljebb egy egyes, a biztos mátrixok k hosszúságú prefixeiben pedig legfeljebb k egyes lehet. Mivel r értéke mindenütt ugyanaz, a továbbiakban elhagyjuk az r indexet.

5.1. Előzetes eredmények. A későbbiekben felhasználjuk az alábbi állításokat.

Jelöljük C_n-nel ($n \in \mathbb{N}$) azon $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ bináris sorozatok számát, amelyekben n darab egyes és n darab nulla van úgy, hogy minden $a_1, a_2, \ldots, a_k (1 \le k \le 2n)$ kezdősorozatban legfeljebb annyi egyes van, mint nulla.

5.1. LEMMA. *Ha $n \ge 0$, akkor*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Megjegyezzük, hogy C_n az n-edik Catalan-szám, melynek explicit alakja számos tankönyvben és cikkben [2, 12, 14, 18] megtalálható.

5.2. LEMMA. *Ha $0 \le x \le 1$, akkor*

$$f(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(x(1-x))^k = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Bizonyítás.

Ha $m \ge 2$, akkor a csupa nullát tartalmazó oszlopot fehérnek nevezzük, a pontosan egy egyeset tartalmazót szürkének az ettől többel rendelkezőket pedig feketének hívjuk.

Ha $m \ge 2$, akkor az A mátrix minden oszlopa $q^m + mq$ valószínűséggel lehet fehér vagy szürke, ezért $g(m, n, p) = ((q^m + mq))^n$.

Ha $p > 0$, akkor

$$g(m, p) = \lim_{n \to \infty} (q^m + mq)^n = 0, \tag{1}$$

tehát az oszlopok számának növekedtével a jó mátrixok sűrűsége tart a nullához.

Ha az $m = 2$ esetben egy jó mátrixból töröljük a fehér oszlopokat, akkor csak szürke oszlopok maradnak, azaz a mátrix két sora egymásnak a komplementere.

Vizsgálataink szempontjából fontos szerepet játszik a következő egyszerű állítás.

5.4. LEMMA. *Ha $m \geq 2$, akkor a jó mátrixok ütemezhetők, az ütemezhető mátrixok pedig biztosak.*

Bizonyítás. Ha az A mátrix minden oszlopában legfeljebb egy egyes van, akkor a mátrix első k oszlopában összesen legfeljebb k egyes van.

Ha van olyan $k(1 \leq k \leq n)$, amelyre A mátrix első k oszlopában több egyes van, mint k, akkor a skatulyaelv szerint az első k oszlop között van olyan, amelyikben legalább két egyes van. Ha az A mátrixból törlünk egy nullát, ezzel az első k oszlopban lévő egyesek száma nem csökken - tehát A nem ütemezhető.

Az állításnak hasznos következménye az alábbi.

5.5. KÖVETKEZMÉNY. *Ha $m \geq 2$, akkor*

$$g(m,n,p) \leq w(m,n,p) \leq s(m,n,p),$$
$$g(m,p) \leq w(m,p) \leq s(m,p),$$
$$g_{crit}(m) \leq w_{crit}(m) \leq s_{crit}(mp).$$

Az $m \times n$ méretű biztos mátrixok elemzését az $m \geq 4$ esetben az $m = 3$ esethez hasonló módon végezhetjük el.

A bolyongó pont a legalább $b \geq 2$ egyest tartalmazó oszlop esetén $(b-2)$-t ugrik balra, két egyest tartalmazó oszlop esetén egyet lép balra, egy egyest tartalmazó oszlop esetén helyben marad és az m nullát tartalmazó oszlop esetén egyet lép jobbra.

A $(b-2)$-vel balra ugrás valószínűsége $\binom{m}{b} p^{b-2} q^{n-b+2}$, a balra lépésé $\binom{m}{2} p^{m-2} q^2$, a helyben maradásé $\binom{m}{1} p q^{m-1}$ és a jobbra lépésé $\binom{m}{0} q^m$, ezért a következő egyenleteket írhatjuk fel.

Az $m = 2$ és $m = 3$-ra kapott korábbi eredményeket is figyelembe véve ezzel a következő eredményt kaptuk.

5.6. TÉTEL. *Ha $m \geq 2$ és $0 \leq p \leq 1$, akkor*

$$s(m,p) = 1 - \sum_{i=2}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i (i-1) \tag{2}$$

és

$$s_{crit} = \frac{1}{m} \tag{3}$$

6. Szimulációs eredmények

6.1. Kétsoros mátrixok

Az egyszerűség kedvéért az $s(2,n,p)$ függvény helyett az $u(2,n,p) = 1 - s(2,n,p)$ függvényt elemezzük. Először megadunk egy zárt képletet $u(2,n,p)$ meghatározására.

6.2. LEMMA. *Ha $n \geq 1$, akkor*

$$u(2,n,p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{[(i-1)/2]} 2^{i-1-2j}\, C_j \binom{i-1}{2j} 4^{n-i} \tag{4}$$

Az $u(2,n,p)$-re kapott (7.1) képlet nehezen kezelhetőnek látszik. Ezért bemutatunk egy kombinatorikus és két bolyongásos módszert $s(2,p)$ explicit alakjának levezetésére.

6.3. LEMMA. Ha $0 \leq p \leq 1$, akkor

$$u(2,p) = \begin{cases} \frac{p^2}{q^2}, & \text{ha } 0 \leq p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \end{cases} \tag{5}$$

Mátrixaink vizsgálatának hasznos módszere, ha minden mátrixhoz hozzárendelünk egy – az x-tengelyen való – bolyongást.

A bolyongó pont a k-adik időpontban a $P_k(b_k, 0)$ pontban van, ahol b_k a mátrix első k oszlopában előfordult nullák és egyesek számának különbségét jellemzi.

Ha a bolyongás az origóból indul, akkor

$$b_k = \begin{cases} -1, & \text{ha } \exists k \text{ úgy, hogy } k < \sum_{i=1}^{k}(a_{i1} + a_{i2}), \\ k - \sum_{i=1}^{k}(a_{i1} + a_{i2}) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Bemutatunk egy olyan módszert, amelyet az $r = 1$ esetben tetszőleges $m \geq 2$ értékre alkalmazni tudunk.

Bizonyítás. Jelöljük x_k-val ($k = -1, 0, 1, 2, \ldots$) annak a valószínűségét, hogy a k pontból induló bolyongó pont elnyelődik az $x = -1$ helyen. A két egyest tartalmazó, p^2 valószínűséggel előforduló oszlopnak feleltessünk meg balra lépést, a $2pq$ valószínűséggel előforduló vegyes oszlopokhoz tartozzon helyben maradás és a két nullát tartalmazó, q^2 valószínűséggel előforduló oszlopoknak feleljen meg jobbra lépés.

Ekkor a következő egyenleteket írhatjuk fel.

$$\begin{array}{l} x_0 = q^2 x_1 + 2qpx_0 + p^2 \\ x_1 = q^2 x_2 + 2qpx_1 + p^2 x_0 \\ x_2 = q^2 x_3 + 2qpx_2 + p^2 x_1 \\ x_3 = q^2 x_4 + 2qpx_3 + p^2 x_2 \end{array} \quad \vdots \tag{6}$$

Legyen

$$G(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \; z^i \tag{7}$$

az $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozat generátorfüggvénye. Az (7.4) egyenletrendszer x_i-vel kezdődő egyenleteit rendre $z - i$-vel beszorozva és az egyenleteket összeadva a

$$G(z) = q\frac{G(z) - x_0}{z} \; + \; 2pqG(z) \; + \; p^2 \; (1 \; + \; z \; G(z)). \tag{8}$$

Innen $G(z)$ kifejezhető

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{9}$$

alakban, ahol

$$P(z) = q^2 - p^2 z \tag{10}$$

és

$$Q(z) = p^2 z^2 \; + \; 2pq \; + \; p^3 \; - \; z. \tag{11}$$

A $Q(z)$ polinom legfeljebb egy abszolút értékű zérushelyein a Cauchy-Hadamard-tétel [17] szerint a $P(z)$ polinomnak a nulla értéket kell felvennie. A $Q(z) = 0$ egyenletet

$$(pz \; + \; q)^2 = 1 \tag{12}$$

alakban felírva közvetlenül adódik, hogy $z = 1$ gyöke a $Q(z)$ polinomnak. A $P(1) = 0$ egyenletből az

$$x_0 = \frac{p^2}{q^2} \tag{13}$$

megoldást kapjuk.

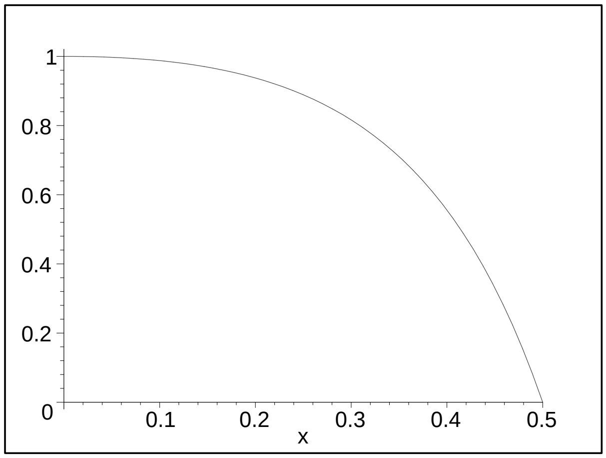
Az 1. ábra mutatja a $[0, 1]$ intervallumban értelmezett $s(2, p)$ függvény görbéjének a $[0, \frac{1}{2}]$ intervallumhoz tartozó részét. A $g(2, p)$ és $s(2, p)$ függvények alapján az $m = 2$ értékhez tartozó kritikus valószínűségekre fennáll

$$0 = g_{crit}(2) \; \leq \; w_{crit}(2) \; \leq \; s_{crit}(2) = \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Emlékeztetünk Gács eredményére, amely szerint $w_{crit}(2) \geq 10^{-400}$.

A 2. ábrán megadjuk a jó, ütemezhető és biztos mátrixok számát és részarányát – ami megfelel a $p = 0.5$ értéknek. A táblázatban jellemzett mátrixok oszlopainak száma $1, 2, \ldots, 15$. Jelöljük a $m \times n$ méretű bináris mátrixok számát $T(m, n)$-nel. Ekkor $T(m, n) = 2^{mn}$.

Az eddigi eredmények alapján mind a $G(m, n)/T(m, n)$, mind pedig a $W(m, n)/T(m, n)$ és $S(m, n)/T(m, n)$ értékeknek nullához kell tartani n növekedtével.



1. ábra. Az $s(2,p)$ ütemezhetőségi függvény görbéje.

n	$G(2,n)$	$\frac{G(2,n)}{T(2,n)}$	$W(2,n)$	$\frac{W(2,n)}{T(2,n)}$	$S(2,n)$	$\frac{S(2,n)}{T(2,n)}$	$\frac{W(2,n)}{S(2,n)}$
1	3	0.750	3	0.750	3	0.750	1.000
2	9	0.562	10	0.625	10	0.625	1.000
3	27	0.452	35	0.547	35	0.547	1.000
4	81	0.316	124	0.484	126	0.492	0.984
5	243	0.237	444	0.434	462	0.451	0.961
6	729	0.178	1 592	0.389	1 716	0.419	0.927
7	2 187	0.133	5 731	0.350	6 435	0.393	0.890
8	6 561	0.100	20 671	0.315	24 310	0.371	0.850
9	19 683	0.075	74 722	0.285	92 378	0.352	0.808
10	59 049	0.056	270 521	0.258	352 716	0.336	0.767
11	177 147	0.042	980 751	0.234	1 352 078	0.322	0.725
12	531 441	0.032	3 559 538	0.212	5 200 300	0.310	0.684
13	1 594 323	0.022	12 931 155	0.193	20 058 300	0.299	0.646
14	4 782 969	0.018	47 013 033	0.175	77 558 760	0.289	0.606
15	14 348 907	0.013	171 036 244	0.159	300 540 195	0.280	0.568

2. ábra. A $p = 1/2$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

Nyitott kérdés a $W(2,n)/S(2,n)$ hányados viselkedése.

A 3. táblázat $s(2,n,0.4)$ oszlopában a számoknak az $5/9$ határértékhez kell tartaniuk – ami még messze van.

A 4. táblázatban az $s(2,n,0.35)$ oszlop számainak a $120/169 \sim 0.7101$ határértékhez kell tartaniuk.

6.4. Háromsoros mátrixok

n	$T(2,n)$	$g(2,n,0.4)$	$w(2,n,0.4)$	$s(2,n,0.4)$	$\dfrac{w(2,n,0.4)}{s(2,n,0.4)}$
1	4	0.8400	0.8400	0.8400	1.0000
2	16	0.7056	0.7632	0.7632	1.0000
3	64	0.5927	0.7171	0.7171	1.0000
4	256	0.4979	0.6795	0.6862	0.9902
5	1 024	0.4182	0.6487	0.6639	0.9771
6	4 096	0.3513	0.6206	0.6470	0.9592
7	16 384	0.2951	0.5957	0.6339	0.9397
8	65 536	0.2479	0.5731	0.6234	0.9193
9	262 144	0.2082	0.5524	0.6149	0.8984
10	1 048 576	0.1749	0.5332	0.6078	0.8773
11	4 194 304	0.1469	0.5155	0.6019	0.8565
12	16 777 216	0.1234	0.4988	0.5967	0.8359
13	67 108 864	0.1037	0.4832	0.5924	0.8157
14	268 435 456	0.0871	0.4685	0.5886	0.7960
15	1 073 741 824	0.0731	0.4545	0.5854	0.7764
16	4 294 967 296	0.0644	0.4412	0.5825	0.7574
17	17 179 869 184	0.0516	0.4286	0.5800	0.7390

3. ábra. A $p = 0.4$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

Az $m = 3$ esetben $3 : 0, 2 : 1, 1 : 2$ és $0 : 3$ lehet a nullák és egyesek aránya. A vizsgált mátrixhoz olyan bolyongást rendelünk, amelyikben a csupa egyes oszlop p^3 valószínűségével ugrunk balra kettővel, a két egyest tartalmazó oszlop $3p^2q$ valószínűségével lépünk balra, az egy egyest tartalmazó oszlopok $3p^2$ valószínűségével maradunk helyben és a három nullát tartalmazó oszlop q^3 valószínűségével lépünk jobbra.

7. Általános eset

Ha $r = 1$ és $m \geq 2$, akkor a biztos mátrixok vizsgálata olyan aszimmetrikus bolyongásra vezet, amely az origóból indul, az $x = -1$ pontban van egy nyelő, és a mozgás a mátrix oszlopainak felel meg: ha az oszlopban egy egyes van – ennek valószínűsége $\binom{m}{1} pq^{m-1}$ – akkor a pont helyben marad; ha az oszlopban $k > 1$ egyes van – ennek valószínűsége $\binom{m}{k} p^k q^{m-q}$ – akkor $k - 1$ helyet ugrunk jobbra; ha pedig az oszlopban csupa nulla van – ennek valószínűsége q^m – akkor egyet lépünk balra.

A [10] cikkben (amely az interneten is elérhető) megtalálható a következő tétel.

n	$T(2,n)$	$g(2,n,0.35)$	$w(2,n,0.35)$	$s(2,n,0.35)$	$\dfrac{w(2,n,0.35)}{s(2,n,0.35)}$
1	4	0.8775	0.8775	0.8775	1.0000
2	16	0.7700	0.8218	0.8218	1.0000
3	64	0.6757	0.7901	0.7901	1.0000
4	256	0.5929	0.7645	0.7699	0.9930
5	1 024	0.5203	0.7441	0.7561	0.9841
6	4 096	0.4565	0.7255	0.7462	0.9723
7	16 384	0.4006	0.7094	0.7389	0.9601
8	65 536	0.3515	0.6949	0.7334	0.9475
9	262 144	0.3085	0.6817	0.7291	0.9350
10	1 048 576	0.2707	0.6696	0.7258	0.9226
11	4 194 304	0.2375	0.6585	0.7231	0.9107
12	16 777 216	0.2084	0.6481	0.7210	0.8989
13	67 108 864	0.1839	0.6383	0.7192	0.8875
14	268 435 456	0.1605	0.6291	0.7178	0.8764
15	1 073 741 824	0.1401	0.6204	0.7166	0.8658
16	4 294 967 296	0.1236	0.6122	0.7156	0.8555

4. ábra. A $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó kerekített adatok.

n	$T(3,n)$	$G(3,n)$	$g(3,n,0.5)$	$W(3,n)$	$w(3,n,0.5)$	$S(3,n)$	$s(3,n,0.5)$	$\frac{w(3,n,0.5)}{s(3,n,0.5)}$
1	8	4	0.5000	4	0.5000	4	0.5000	1.0000
2	64	16	0.2500	19	0.2969	19	0.2969	1.0000
3	512	64	0.1250	98	0.1914	98	0.1914	1.0000
4	4 096	256	0.0625	525	0.1282	531	0.1296	0.9892
5	32 768	1 024	0.0312	2 884	0.0880	2 974	0.0907	0.9702
6	262 144	4 096	0.0156	16 043	0.0612	17 060	0.0651	0.9401
7	2 097 152	16 384	0.0078	90 091	0.0429	99 658	0.0475	0.9032
8	16 777 216	65 536	0.0039	507 520	0.0303	590 563	0.0352	0.8594

5. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.5$ paraméterekhez tartozó kerekített adatok.

TÉTEL. *Ha $m \geq 2$ és $0 \leq p \leq 1$, akkor*

$$s(m,p) = 1 - \sum_{i=2}^{m} \binom{m}{i} \left(\frac{p}{1-p} \right)^i (i-1)$$

$$s_{crit} = \frac{1}{m} \ .$$

n	$T(3,m)$	$g(3,n,0.3)$	$w(3,n,0.3)$	$s(3,n,0.3)$	$\frac{w(3,n,0.3)}{s(3,n,0.3)}$
1	8	0.7840	0.7840	0.7840	1.0000
2	64	0.6147	0.6795	0.6795	1.0000
3	512	0.4819	0.6153	0.6153	1.0000
4	4 096	0.3778	0.5682	0.5710	0.9951
5	32 768	0.2962	0.5313	0.5380	0.9875
6	262 144	0.2322	0.5004	0.5125	0.9764
7	2 097 152	0.1821	0.4739	0.4919	0.9634

6. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.3$ értékekhez tartozó kerekített adatok.

n	$T(3,m)$	$g(3,n,0.25)$	$w(3,n,0.25)$	$s(3,n,0.25)$	$\frac{w(3,n,0.25)}{s(3,n,0.25)}$
1	8	0.8437	0.8437	0.8437	1.0000
2	64	0.7119	0.7712	0.7712	1.0000
3	512	0.6007	0.7286	0.7286	1.0000
4	4 096	0.5068	0.6981	0.7004	0.9967
5	32 768	0.4276	0.6748	0.6804	0.9917

7. ábra. Az $m = 3$ és $p = 0.25$ értékekhez tartozó kerekített adatok.

8. Összefoglalás

Az $m \geq 2$ sort tartalmazó mátrixokra megadtuk az ütemezhetőségi függvény explicit alakját és meghatároztuk az $s_{crit}(m)$ kritikus valószínűségeket. $s_{crit}(2)$ értéke a több perkolációs modellre jellemző 1, a további kritikus valószínűségek értéke m növekedtével csökken.

A szimulációs vizsgálatok szerint a kritikus ütemezhetőségi valószínűségek közel vannak a kapott felső korlátokhoz: az 7.2. táblázat a $p = 0.5$, az 7.3. táblázat a $p = 0.4$, az 7.4. táblázat pedig a $p = 0.35$ valószínűséghez tartozó adatokat mutatja.

A táblázatok adatai alapján azt sejtjük, hogy a [7] cikkben szereplő korlátnál jobb is adható: ha $p < 0.4$, akkor $w(2,p) > 0$.

A $w(m,p)/s(m,p)$ hányadosok viselkedése még további elemzést kíván.

A cikkben szereplő alsó korlátnál nagyobbakat is meg tudunk adni, de azokból is csak a természetes nulla alsó korlát adódik. A kritikus valószínűségek pontosabb jellemzéséhez a jó mátrixoknál hasznosabb mátrixokra van szükség.

References

[1] P. Balister, B. Bollobás, M. Walters, *Continuum percolation with steps in an annulus. Ann. Appl. Probab.* **14** (4) (2004) 1869–1879. http://arxiv.org/find.

[2] A. Bege and Z. Kása, *Coding objects related to Catalan numbers*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, Volume XLVI (1) (2001) 31–39. http://www.cs.ubbcluj.ro/∼studia-i/contents.php.

[3] B. Bollobas, O. Riordan: *A short proof of the Harris-Kesten theorem.* Electronic manuscript, 2005: http://arxiv.org/find.

[4] I. Derényi, G. Palla, T. Vicsek, *Clique percolation in random networks. Phys. Rev. Lett* **94** 160–202 (2005). http://arxiv.org/find.

[5] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Applications.* John Wiley and Sons, New York, 1968. Magyarul: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[6] P. Gács: *Clairvoyant scheduling of random walks* (submitted to Electronic Journal of Probability). Short version: *Clairvoyant scheduling of random walks.* In: Proc. of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 99–108 (electronic), ACM, New York, 2002. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html.

[7] P. Gács: *Compatible sequences and a slow Winkler percolation.* Combin. Probab. Comput. **13** (6) (2004) 815–856. http://www.cs.bu.edu/fac/gacs/recent-publ.html.

[8] T. E. Harris: *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **56** (1960) 13–20.

[9] Z. Kása (2003), *Combinatorică cu aplicaţii.* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.

[10] Kása Zoltán: *Rekurzív egyenletek.* In: Informatikai algoritmusok. 1 (szerk. Iványi Antal). ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004. 14–37. Elektronikus formában: http://compalg.inf.elte.hu/ tony/Elektronikus/Informatikai/Infalg1E.pdf.

[11] H. Kesten: *Percolation Theory for Mathematicians.* Birkhäuser, Boston, 1982.

[12] Járai Antal (szerkesztő): *Bevezetés a matematikába.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2007.

[13] E. R. Moseman and P. Winkler, *On a Form of Coordinate Percolation.* Combinatorics, Probability and Computing, **17**, 06 (November 2008) 837–845.

[14] D. Schauffer: *Introduction to Percolation Theory.* Taylor & and Francis, London, 1985.

[15] R. P. Stanley: *Enumerative Combinatorics, Volume 2.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 62. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[16] Szász Pál: *A differenciál- és integrálszámítás elemei.* Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951. .

[17] N. J. Vilenkin: *Combinatorial Mathematics for Recreation.* Mir Publisher, Moscow, 1972.

[18] P. Winkler: *Dependent percolation and colliding random walks,* Random Structures & Algorithms **16** (1) (2000) 58–84. http://www.math.dartmouth.edu/∼pw/papers/pubs.html.