III. FOLYTONOS OPTIMALIZÁCIÓ

Előszó

Ebben a részben a folytonos optimalizáció néhány területét tekintjük át.

Az első kötetbe a *játékelmélettel* foglalkozó nyolcadik fejezet került: ebben a fejezetben a véges játékokat, a folytonos játékokat és az oligopol játékokat elemezzük.

A második kötetben fog megjelenni a *sorbanállási modellekkel és algoritmusokkal,* valamint a *belsőpontos lineáris programozási feladatokkal* foglalkozó rész.

8. Játékelmélet (Szidarovszky Ferenc)

A műszaki és a gazdasági életben gyakori az olyan helyzet, melyben több döntéshozó egymással ellentétes érdekeit kell figyelembe venni egyidejűleg, és a helyzet alakulása függ a döntéshozók döntéseitől. Az ilyen helyzetek elemzésére az egyik legnépszerűbb módszer és modell a játékelméleten alapul.

Jelölje N a döntéshozók (a továbbiakban ***játékosok***) számát, és minden $k = 1, 2, \ldots, N$ számra legyen $\mathcal{P}_k$ a k-adik játékos és S_k a $\mathcal{P}_k$ játékos ***megengedett akcióinak halmaza.*** Az $s_k \in S_k$ elemeket $\mathcal{P}_k$ ***stratégiáinak*** nevezzük. S_k a $\mathcal{P}_k$ játékos ***stratégiahalmaza.*** A játék tetszőleges lejátszásában minden játékos választ egy stratégiát, ekkor az $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ vektort a játékosok ***szimultán stratégiavektorának*** hívjuk, ahol $s_k \in S_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Minden játékos megfeleltet minden $\mathbf{s} \in S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N$ szimultán stratégiavektornak egy valós számot. Ez a valós szám minden játékos esetében tekinthető úgy, mint egy hasznossági függvény értéke, mely értéket a játékos a játék adott kimeneteléhez hozzárendeli. Ez a hasznossági függvény tükrözi az adott játékos értékelését a kimenetelekről. Legyen $\mathcal{P}_k$ tetszőleges játékos, ekkor ha $f_k(\mathbf{s})$ jelöli ezt az értéket, akkor az $f_k : S \to \mathbb{R}$ függvényt a $\mathcal{P}_k$ játékos ***kifizetőfüggvényének,*** az $f_k(\mathbf{s})$ értéket $\mathcal{P}_k$ ***kifizetésének,*** az $(f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), \ldots, f_N(\mathbf{s}))$ vektort pedig ***kifizetővektornak*** nevezzük. Az N szám, az S_k halmazok, az f_k kifizetőfüggvények $(k = 1, 2, \ldots, N)$ összessége teljes körűen meghatároz egy N személyes játékot. A továbbiakban az N személyes játék jelölésére a $G = \{N; S_1, S_2, \ldots, S_N; f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ jelölést fogjuk használni.

A G játék megoldása a ***Nash-egyensúly*** (a továbbiakban röviden egyensúly), amely egy olyan $\mathbf{s}^\star = (s_1^\star, \ldots, s_N^\star)$ stratégiavektor, hogy minden k-ra

1. $s_k^\star \in S_k$;
2. Minden $s_k \in S_k$-ra

$$f_k(s_1^\star, s_2^\star, \ldots, s_{k-1}^\star, s_k, s_{k+1}^\star, \ldots, s_N^\star) \le f_k(s_1^\star, s_2^\star, \ldots, s_{k-1}^\star, s_k^\star, s_{k+1}^\star, \ldots, s_N^\star) . \tag{8.1}$$

Az 1. feltétel szerint az egyensúly k-adik komponense megvalósítható stratégia $\mathcal{P}_k$ számára, míg a 2. feltétel szerint egyik játékos sem tudja növelni a kifizetését az által, hogy egyoldalúan eltér az egyensúlyi stratégiától. Más szavakkal, minden játékosnak az az érdeke, hogy tartsa az egyensúlyt, hiszen ha bármely játékos eltér (egyoldalúan) az egyensúlytól, akkor annak a kifizetése nem nő.

		$\mathcal{P}_2$	
		N	C
$\mathcal{P}_1$	N	$(-2,-2)$	$(-10,-1)$
	C	$(-1,-10)$	$(-5,-5)$

8.1. ábra. Fogoly dilemma.

8.1. Véges játékok

Egy G játékot ***végesnek*** nevezünk, ha minden S_k stratégiahalmaz véges sok stratégiát tartalmaz[1]. A legismertebb kétszemélyes játék a ***fogoly dilemma,*** mely a következő példa tárgya.

8.1. példa. *Fogoly dilemma.* A két játékos két fogoly, akiket egy súlyos bűntett elkövetésének gyanújával vett őrizetbe a rendőrség, de az ügyészségnek még nincs elég bizonyítéka a vádemeléshez. A két fogoly két különböző cellában van fogva tartva, így nem tudnak egymással kommunikálni. Az ügyészség célja, hogy rávegye a foglyokat a hatóságokkal való együttműködésre, abból a célból, hogy a szükséges bizonyítékok meglegyenek a vádemeléshez. Tehát $N = 2$, a stratégiahalmazok mindkét játékos esetén kételeműek: együttműködni (C), vagy nem együttműködni (N). Mindkét játékossal külön-külön közölték, hogy ha csak az egyikük tesz vallomást, akkor a vallomást tevő csak 1 éves, míg a másik 10 éves börtönbüntetést kap. Ha mind a ketten vallomást tesznek, akkor mindketten 5 éves börtönbüntetést kapnak, míg ha mindketten megtagadják a vallomást, akkor csak egy kevésbé súlyos bűncselekmény miatt ítélik el őket, és mindketten 2 éves börtönbüntetést kapnak. Mindkét játékosnak az a célja, hogy minimalizálja a börtönben töltött időt, vagy ami ezzel ekvivalens, maximalizálja a börtönben töltött idő ellentettjét. A kifizetésvektorokat a 8.1. ábra tartalmazza, ahol $\mathcal{P}_1$ stratégiáit a sorok, míg $\mathcal{P}_2$ stratégiáit az oszlopok tartalmazzák, és minden kifizetésvektorban az első érték $\mathcal{P}_1$ kifizetése, míg a második szám $\mathcal{P}_2$ kifizetése.
A kifizetéseket összehasonlítva világos, hogy csak a (C, C) stratégiapáros lehet egyensúly, mivel

$$\begin{aligned} f_2(\text{N,N}) = -2 &< -1 = f_2(\text{N,C}) \;, \\ f_1(\text{N,C}) = -10 &< -5 = f_1(\text{C,C}) \;, \\ f_2(\text{C,N}) = -10 &< -5 = f_2(C, C) \;. \end{aligned}$$

A (C, C) stratégiapáros tényleg egyensúly, mivel

$$\begin{aligned} f_1(\text{C,C}) = -5 > -10 = f_1(\text{N,C}) \;, \\ f_2(\text{C,C}) = -5 > -10 = f_2(\text{C,N}) \;. \end{aligned}$$

Ebben a játékban egyetlen egyensúly van.

Az egyensúly létezése általában nem garantált, és ha létezik egyensúly, akkor sem feltétlenül egyetlen.

[1] A játék definíciója szerint a játékosok száma is véges. *A fordító.*

		$\mathcal{P}_2$	
		N	C
$\mathcal{P}_1$	N	$(1,2)$	$(2,1)$
	C	$(2,4)$	$(0,5)$

8.2. ábra. Játék, melyben nincs egyensúly.

8.2. példa. *Játék, melyben nincs egyensúly.* Módosítsuk a 8.1. ábra kifizetéseit úgy, ahogy az a 8.2. ábrán látható. Könnyen látható, hogy a módosított játékban nincs egyensúly:

$$\begin{aligned} f_1(\text{N,N}) = 1 &< 2 = f_1(\text{C,N}) , \\ f_2(\text{C,N}) = 4 &< 5 = f_2(\text{C,C}) , \\ f_1(\text{C,C}) = 0 &< 2 = f_1(\text{N,C}) , \\ f_2(\text{N,C}) = 1 &< 2 = f_2(\text{N,N}) . \end{aligned}$$

Ha a kifizetések minden kimenetelre megegyeznek, akkor több egyensúly is van a játékban: minden stratégiapár egyensúly.

8.1.1. Leszámlálás

Jelölje továbbra is N a játékosok számát, és – a kényelmes jelölés kedvéért – jelölje $s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n_k)}$ a $\mathcal{P}_k$ játékos megengedett stratégiáit. Tehát $S_k = \{s_k^{(1)}, \dots, s_k^{(n_k)}\}$. Egy $\mathbf{s} = (s_1^{(i_1)}, \dots, s_N^{(i_N)})$ stratégiavektor pontosan akkor egyensúly, ha minden $k = 1, 2, \dots, N$ és minden $j \in \{1, 2, \dots, n_k\} \setminus i_k$ esetén

$$f_k(s_1^{(i_1)}, \dots, s_{k-1}^{(i_{k-1})}, s_k^{(j)}, s_{k+1}^{(i_{k+1})}, \dots, s_N^{(i_N)}) \le f_k(s_1^{(i_1)}, \dots, s_{k-1}^{(i_{k-1})}, s_k^{(i_k)}, s_{k+1}^{(i_{k+1})}, \dots, s_N^{(i_N)}) . \tag{8.2}$$

Vegyük észre, hogy véges játékok esetén (8.1) leegyszerűsödik (8.2)-re.

A leszámlálás alkalmazásakor ellenőrizzük a (8.2) egyenlőtlenséget az összes lehetséges $\mathbf{s}^\star = (s_1^{(i_1)}, \dots, s_N^{(i_N)})$ N-esre úgy, hogy megvizsgáljuk a (8.2) egyenlőtlenség érvényességét minden k-ra, minden j-re. Ha az ellenőrzés sikeres, akkor $\mathbf{s}^\star$ egyensúly, ellenkező esetben $\mathbf{s}^\star$ nem egyensúly. Ha az ellenőrzés alatt egy rögzített $\mathbf{s}^\star$-ra találunk olyan k-t és j-t, hogy (8.2) nem teljesül, akkor $\mathbf{s}^\star$ nem egyensúly, így elhagyhatjuk az ellenőrzést minden további k-ra és j-re. Ez egy nagyon egyszerű algoritmus, mely $N + 2$, egymásba ágyazott, az $i_1, i_2, \dots, i_N, k$ és j változókat használó ciklusból áll.

A szükséges összehasonlítások száma legfeljebb

$$\left(\prod_{k=1}^{N} n_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N} (n_k - 1)\right) .$$

A gyakorlatban azonban az összehasonlítások száma ennél sokkal kisebb lehet, hiszen ha (8.2) nem teljesül valamilyen j-re, akkor az adott stratégiavektor esetén nem kell további összehasonlításokat tenni.

Az algoritmus pszeudokódja a következő:

```
Leszámlál(s_1^(i_1), ..., s_N^(i_N))

1  for i_1 ← 1 to n_1
2      do * for i_2 ← 1 to n_2
                   ⋱
3                  do * for i_N ← 1 to n_N
4                     kulcs ← 0
5                     for k ← 1 to N
6                         for j ← 1 to n_k
7                             if  (8.2) nem teljesül *
8                                 then kulcs ← 1 *
9                                        folytassuk a 8-adik utasítással
10                    if  kulcs = 0 *
11                        then * (s_1^(i_1), ..., s_N^(i_N)) egyensúly
12                        print "A bemenet nem egyensúly"
```

A következőkben a kétszemélyes játékokat (N=2) vizsgáljuk, és bevezetjük az ($n_1 \times n_2$)-es $\mathbf{A}^{(1)}$ és $\mathbf{A}^{(2)}$ mátrixokat, melyek elemei $\mathbf{A}^{(1)}(i,j) = f_1(i,j)$, illetve $\mathbf{A}^{(2)}(i,j) = f_2(i,j)$. Az $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ mátrixokat ***kifizetőmátrixoknak*** nevezzük. Az $\left(s_1^{(i_1)}, s_2^{(i_2)}\right)$ stratégiavektor pontosan akkor egyensúly, ha az (i_1, i_2) elem az $\mathbf{A}^{(1)}$ mátrixban a saját oszlopában, és az $\mathbf{A}^{(2)}$ mátrixban a saját sorában a legnagyobb. Ha $f_1 = -f_2$, akkor a játékot ***zérusösszegű*** játéknak nevezzük, és $\mathbf{A}^{(1)} = -\mathbf{A}^{(2)}$, tehát a játékot teljes körűen leírja $\mathbf{A}^{(1)}$, a $\mathcal{P}_1$ játékos kifizetőmátrixa. Ebben a speciális esetben az $(s_1^{(i_1)}, s_2^{(i_2)})$ stratégiavektor pontosan akkor egyensúly, ha az (i_1, i_2) elem az $\mathbf{A}^{(1)}$ mátrixban a saját oszlopában a legnagyobb, és a saját sorában a legkisebb. A zérusösszegű játékok egyensúlyára a ***nyeregpont*** elnevezés is használatos. Világos, hogy ebben az esetben az egyensúly megtalálása a leszámlálás módszerével leegyszerűsödik, hiszen csak egy mátrixszal kell foglalkozni.

The simplified algorithm is as follows:

```
Nyeregpont

1  for i_1 ← 1 to n_1
2      do for i_2 ← 1 to n_2
3             kulcs ← 0
4             for j ← 1 to n_1
5                 if a^(1)_{j i_2} > a^(1)_{i_1 i_2}
6                   then kulcs ← 1
7                   folytassuk a 12-edik sorban
8             for j ← 1 to n_2
9                 do if a^(2)_{i_1 j} > a^(2)_{i_1 i_2}
10                     then kulcs ← 1
11                            folytassuk a 12-edik sorban
12            if kulcs = 0 then "(s^(1)_{i_1}, s^(2)_{i_2}) egyensúly"
```

8.1.2. Véges fákkal ábrázolt játékok

Számos véges játék rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy ábrázolható olyan irányított véges fával, melynek a következő tulajdonságai vannak:

1. a fa gyökeres, és a játék ennél a csúcsnál kezdődik;
2. a fa minden csúcsához tartozik egy játékos, és ha a játék elér egy csúcsot, akkor a csúcshoz tartozó játékos kiválaszt egy élt, mely az adott csúcsból indul ki, így dönt arról, hogy miként folytatódik a játék. Ekkor a játék a kiválasztott él végpontjánál folytatódik;
3. minden levélhez tartozik egy valós, N komponensű vektor, mely vektor tartalmazza az egyes játékosok kifizetéseit, ha a játék ebben a levélben ér véget;
4. minden játékos ismeri a fát, tudja, hogy mely csúcsokhoz van rendelve, és tudja, hogy milyen kifizetések tartoznak az egyes levelekhez.

Például a sakk játék rendelkezik a fenti tulajdonságokkal. A sakkot két játékos játssza ($N = 2$), a csúcsok a lehetséges állások a sakktáblán, egyszer a világossal játszó, egyszer a sötéttel játszó játékos szempontjából. Adott csúcsból kiinduló élek jelentik azokat a lépéseket, melyeket a csúcshoz rendelt játékos (aki lép) megtehet. A levél olyan állás a sakktáblán, mellyel a játék véget ér. A kifizetések az $\{1, 0, -1\}$ halmazból valók, ahol 1 azt jelenti, hogy világos győzelmével, 0 azt jelenti, hogy döntetlennel, -1 azt jelenti, hogy sötét győzelmével ért véget a játék.

8.1. tétel. *Minden, véges fával ábrázolható játéknak van legalább egy egyensúlya.*

Bizonyítás. Abból a célból bizonyítjuk itt be ezt a tételt, hogy egy praktikus algoritmust mutassunk az egyensúly megtalálására. A bizonyítás indukción alapul, melyet annyiszor ismétlünk, amennyi a játék csúcsainak száma. Ha a játéknak csak egyetlen csúcsa van, akkor értelemszerűen ez az egyetlen csúcs egyensúly.

Tegyük fel, hogy a tétel igaz minden olyan játékra, ahol a csúcsok száma kisebb, mint n ($n \geq 2$), és nézzük azt a T_0 játékot, melynek n csúcsa van. Legyen r_0 a T_0 játék gyökere, és legyenek $r_1, r_2, \ldots, r_m$ ($m < n$) azok a csúcsok, melyeket él köt össze r_0-lal (r_0 gyerekei). Jelölje $T_1, T_2, \ldots, T_m$ a T_0 olyan diszjunkt részfáit, melyek gyökerei $r_1, r_2, \ldots, r_m$ a sorrendnek megfelelően (tehát r_2 T_2 gyökere). Ekkor minden részfának kevesebb, mint n csúcsa van, így mindegyiknek van egyensúlya (indukciós feltevés). Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}_k$ tartozik az r_0 csúcshoz, legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_m$ az egyes részfákhoz tartozó egyensúlyoknak a $\mathcal{P}_k$ játékoshoz tartozó kifizetései (tehát a T_m részfa egy egyensúlyában $\mathcal{P}_k$-nak e_m a kifizetése), és legyen $e_j = \max\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Ekkor a $\mathcal{P}_k$ játékos az r_j csúcsba lép a gyökérből, és azután folytatódik a játék a T_j részfában létező egyensúllyal[2]. ■

Az előző tétel bizonyítása egy dinamikus programozás típusú algoritmust sugall, mely algoritmust ***visszafelé indukciónak*** nevezünk. Az algoritmus kiterjeszthető általánosabb esetre is, mely esetben a fának véletlen csúcsai vannak, melyekből a játék egy rögzített, diszkrét eloszlásnak megfelelően véletlenszerűen folytatódik.

A fenti algoritmus a következőképpen mutatható be formálisan. Tegyük fel, hogy a csúcsok úgy vannak megszámozva (természetes számokkal), hogy ha a j az i csúcs rákövetkezője, akkor $i < j$. A gyökérnek a legkisebb, az 1-es számot kell kapnia, a legnagyobb szám

[2]Nem minden egyensúly kapható meg ezzel a módszerrel, de az ezzel a módszerrel kapott egyensúlyok kifizetővektorai megegyeznek egymással. *A fordító.*

(n) az egyik levélhez tartozik. Jelölje $J(i)$ azon j csúcsok halmazát, melyekre van olyan él, mely i-ből j-be megy (i gyerekeinek halmaza). Minden i levél esetén $J(i)$ üres halmaz. Jelölje továbbá $\mathbf{p}^{(i)} = (p_1^{(i)}, \ldots, p_N^{(i)})$ a kifizetővektort, mely az i levélhez tartozik. Végül, k_i-vel jelöljük azt a játékost, aki az i csúcshoz tartozik. Az algoritmus az utolsó csúcsnál (n-nél) kezdődik, majd visszafelé lépeget $n, n-1, n-2, \ldots, 2$ és 1 sorrendben. Vegyük észre, hogy n egy levél, és rendeljük hozzá a $\mathbf{p}^{(n)}$ vektort. Ha az algoritmusban a következő csúcs (i) is levél, akkor rendeljük hozzá a $\mathbf{p}^{(i)}$ vektort, ha i nem levél, akkor keressük meg a legnagyobb értékeket a $\mathbf{p}_{k_i}^{(j)}$, $j \in J(i)$ számok közül. Tegyük fel, hogy a legnagyobb érték a j_i csúcsban van, ekkor hozzárendeljük a $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}^{(j_i)}$ vektort az i csúcshoz, és továbblépünk az $i-1$ csúcsba. Miután minden $\mathbf{p}^{(n)}$, $\mathbf{p}^{(n-1)}$, $\ldots, \mathbf{p}^{(2)}$ és $\mathbf{p}^{(1)}$ vektort meghatároztunk, a $\mathbf{p}^{(1)}$ vektor tartalmazza a kifizetéseket az egyensúlyban, és az egyensúlyi út a következő csúcsok mentén halad:

$$1 \to i_1 = j_1 \to i_2 = j_{i_1} \to i_3 = j_{i_2} \to \ldots ,$$

amíg egy levélbe el nem értünk. Így megkaptuk az egyensúlyi utat.

Minden csúcsnál az összehasonlítások száma a csúcsból kiinduló élek száma mínusz 1. Tehát az algoritmusban az összehasonlítások száma az élek száma mínusz n.

Az algoritmus pszeudokódja a következő.

Fa-egyensúlya

for $i \leftarrow n$ **to** 1
  $p_{K_i}^{(j_i)} \leftarrow \max\{p_{K_i}^{(l)}, l \in J(i)\}$
  $\mathbf{p}^{(i)} \leftarrow \mathbf{p}^{(j_i)}$
addig nyomtassuk az 1, $i_1(= j_1)$, $i_2(= j_{i_1})$, $i_3(= j_{i_2})$, … sorozatot,
  amíg a végpontot el nem érjük

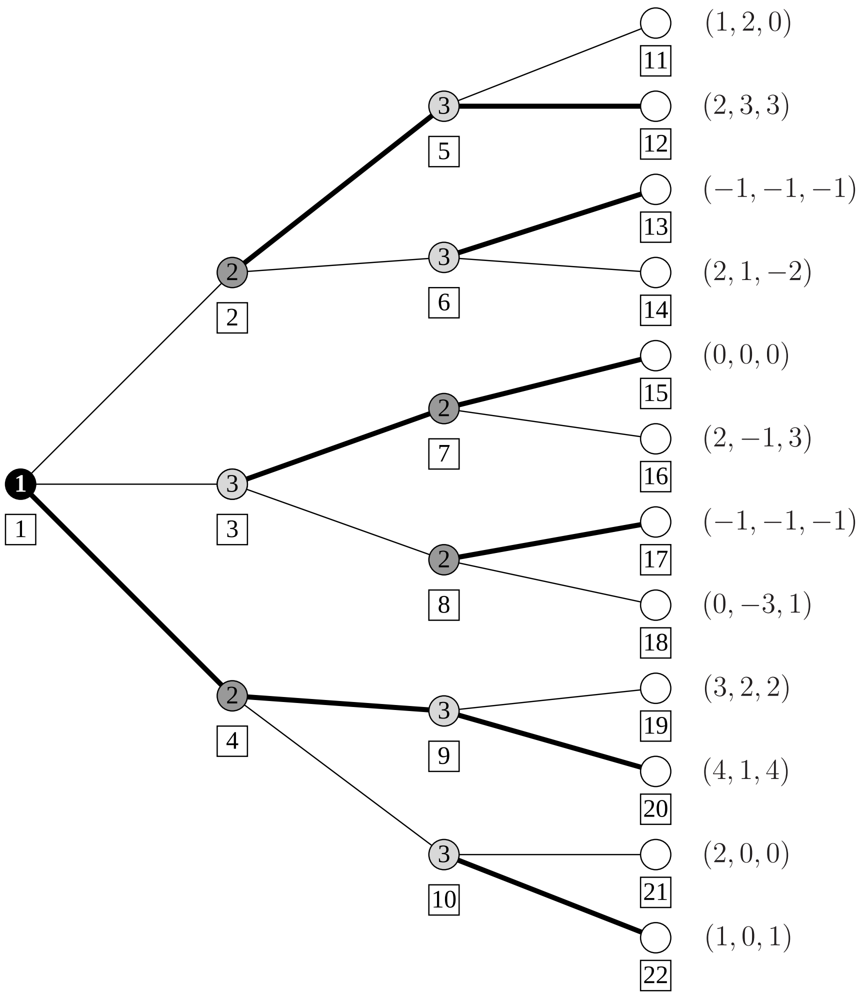
8.3. példa. *Véges fa.* A 8.3. ábrán egy véges fa látható. Minden belső csúcsnál egy kis kör látható, mely tartalmazza annak a játékosnak a jelét, aki az adott csúcshoz tartozik. A leveleknél láthatók a kifizetővektorok. Ebben a játékban három játékos van, tehát a kifizetővektoroknak három komponense van. Először megszámozzuk a csúcsokat úgy, hogy minden él kiindulópontjának kisebb legyen a száma, mint a végpontjának. Ezeket a számokat tartalmazzák a csúcsok alatt látható négyzetek. Minden i csúcs esetén igaz, hogy ha $i \geq 11$, akkor i levél, tehát a visszafelé indukciót a 10-es számú csúcsnál kezdjük. Mivel a 10-es csúcshoz $\mathcal{P}_3$ tartozik, így a $(2, 0, 0)$ és az $(1, 0, 1)$ kifizetővektorok harmadik komponenseit kell összehasonlítanunk, mivel ezen két kifizetővektor tartozik azokhoz a levelekhez, melyekbe megy él a 10-es csúcsból. Mivel $1 > 0$, ezért $\mathcal{P}_3$ legjobb választása a 22-es csúcs. Tehát $j_{10} = 22$, és $\mathbf{p}^{(10)} = \mathbf{p}^{(22)} = (1, 0, 1)$. Ezután a 9-es csúcsot vizsgáljuk meg. A $\mathbf{p}^{(19)}$ és a $\mathbf{p}^{(20)}$ vektorok harmadik komponensét összehasonlítva világos, hogy $\mathcal{P}_3$ a 20-as csúcsot választja, így $j_9 = 20$, és $\mathbf{p}^{(9)} = \mathbf{p}^{(20)} = (4, 1, 4)$. Az ábrán a játékosok választásait a vastagított élek jelzik. Az eljárást a fenti logika szerint folytatva a $8, 7, \ldots, 1$ csúcsokra, végül megkapjuk az 1-es csúcshoz tartozó $\mathbf{p}^{(1)} = (4, 1, 4)$ kifizetővektort, és az

$$1 \to 4 \to 9 \to 20$$

egyensúlyi utat.

Gyakorlatok

8.1-1. Egy vállalkozó (E) belép a piacra, amelyet egy áruházlánc (C) tart ellenőrzése alatt. A két szereplő vetélkedése egy kétszemélyes játék. Az áruházlánc stratégiái a megengedés



8.3. ábra. Egy játékfa.

(S), amikor az áruházlánc megengedi, hogy a vállalkozó működjön a piacon, és az elutasítás (T), amikor igyekszik kiszorítani a vállalkozót a piacról. A vállalkozó stratégiái a maradás (I), amikor a vállalkozó a piacon marad, és a kilépés (L), amikor a vállalkozó elhagyja a piacot. A kifizetések a 8.4. ábrán láthatók. Keressük meg az egyensúlyt.

8.1-2. Egy vásárló egy három darabból álló készüléket vásárol a következő feltételekkel: ha minden darab jó, akkor a vevő fizet az eladónak α forintot, egyébként az eladó fizet a vevőnek β forintot. Mielőtt az eladó eladná az árut, ellenőrizheti bármely darabot, de az ellenőrzés költsége darabonként γ forint. Tekintsünk egy kétszemélyes játékot, ahol az eladó a $\mathcal{P}_1$ játékos, stratégiái $0, 1, 2, 3$ (az ellenőrzött darabok száma), míg az áru a $\mathcal{P}_2$ játékos, stratégiái $0, 1, 2, 3$ (hány darab hibás). Mutassuk meg, hogy ha feltesszük, hogy minden darab azonos valószínűséggel hibás, akkor a 8.5. ábrán $\mathcal{P}_1$ kifizetőmátrixa látható.

	I	L
S	2	5
T	0	5

A C játékos kifizetései

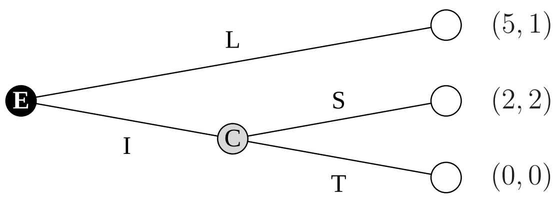
	I	L
S	2	1
T	0	1

Az E játékos kifizetései

8.4. ábra. A 8.1-1. gyakorlat adatai.

		2-es játékos			
		0	1	2	3
	0	α	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
1-es játékos	1	$\alpha-\gamma$	$-\frac{2}{3}\beta-\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\gamma$	$-\gamma$
	2	$\alpha-2\gamma$	$-\frac{1}{3}\beta-\frac{5}{3}\gamma$	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$
	3	$\alpha-3\gamma$	-2γ	$-\frac{4}{3}\gamma$	$-\gamma$

8.5. ábra. A 8.1-2. gyakorlat adatai.



8.6. ábra. A 8.1-5. gyakorlat játéka.

8.1-3. Tegyük fel, hogy a 8.1-2. gyakorlatban bevezetett játékot úgy módosítjuk, hogy $\mathcal{P}_2$ kifizetései $\mathcal{P}_1$ kifizetéseinek az ellentettjei. Adjuk meg az α, β, γ paraméterek függvényében az egyensúlyok számát. Határozzuk meg az egyensúlyt minden esetre.
8.1-4. Tegyük fel, hogy a 8.1-2. gyakorlatban bevezetett játékban $\mathcal{P}_2$ kifizetőfüggvénye az áru értéke (V, ha minden darab jó, egyébként 0). Van-e egyensúlya ennek a játéknak?
8.1-5. Nézzük a 8.6. ábrán látható fát, mely a 8.1-1. gyakorlatban bevezetett játék fája. Keressük meg a fenti játék egyensúlyát visszafelé indukcióval.
8.1-6. Mutassuk meg, hogy egy játékos esetében a visszafelé indukció a klasszikus dinamikus programozási módszerre egyszerűsödik.
8.1-7. Tegyük fel, hogy egy véges fával ábrázolt játékban néhány csúcs úgynevezett véletlen csúcs, ami azt jelenti, hogy a játék egy ilyen csúcsból egy következő csúcsba valamilyen rögzített valószínűséggel folytatódik. Mutassuk meg, hogy ebben az általánosabb esetben is létezik egyensúly.
8.1-8. Nézzük a 8.3. ábrán adott játékot. Kétszerezzük meg $\mathcal{P}_1$ kifizetéseit, változtassuk ellentettjeire $\mathcal{P}_2$ kifizetéseit, és ne változtassunk $\mathcal{P}_3$ kifizetésein. Keressük meg ennek a módosított játéknak az egyensúlyát.

8.2. Folytonos játékok

Azokat a játékokat, ahol az S_k stratégiahalmazok egy $\mathbb{R}^{n_k}$ euklideszi tér összefüggő részhalmazai, és a kifizetőfüggvények folytonosak, ***folytonos játékoknak*** nevezzük.

8.2.1. A legjobbválaszon alapuló fixpont módszerek

Algoritmikus szemszögből nagyon intuitív és nagyon hasznos a következőkben újrafogalmazni az egyensúly fogalmát. Minden $\mathcal{P}_k$ játékosra és minden $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_N) \in S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N$ stratégiavektorra definiáljuk a következő leképezést:

$$\begin{aligned} B_k(\mathbf{s}) = \{s_k \in S_k | f_k(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \ldots, s_N) \\ = \max_{t_k \in S_k} f_k(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, t_k, s_{k+1}, \ldots, s_N)\} , \end{aligned} \tag{8.3}$$

amely $\mathcal{P}_k$ legjobb választásainak halmaza, a többi játékos rögzített $(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_N)$ stratégiái mellett. Vegyük észre, hogy $B_k(\mathbf{s})$ nem függ s_k-tól, $B_k(\mathbf{s})$ csak a többi játékos stratégiáitól, s_l-től $(k \neq l)$ függ. Vegyük észre továbbá, hogy nincs garancia arra, hogy minden $\mathbf{s} \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_N$ esetén létezik a maximum (8.3)-ban. Legyen $\sum \subseteq S$ olyan részhalmaza S-nek, hogy $B_k(\mathbf{s})$ nemüres halmaz minden k-ra, minden $\mathbf{s} \in \sum$-ra. Az $\mathbf{s}^\star = (s_1^\star, s_2^\star, \ldots, s_N^\star)$ szimultán stratégiavektor pontosan akkor egyensúly, ha $\mathbf{s}^\star \in \sum$, és $s_k^\star \in B_k(\mathbf{s}^\star)$ minden k-ra. Bevezetve a $\mathbf{B}_k(\mathbf{s}) = (B_1(\mathbf{s}), \ldots, B_N(\mathbf{s}))$ ***legjobbválasz-leképezést,*** tovább egyszerűsíthető az egyensúly fogalmának formalizmusa.

8.2. tétel. *Egy $\mathbf{s}^\star$ stratégiavektor pontosan akkor egyensúly, ha $\mathbf{s}^\star \in \sum$ és $\mathbf{s}^\star \in \mathbf{B}(\mathbf{s}^\star)$.*

Tehát az N személyes játékok egyensúlyi problémája ekvivalens azzal a problémával, hogy megtaláljuk egy halmazértékű leképezés fixpontjait.

A fixpont feladat számítási költsége függ a fixpont feladat típusától, méretétől és a választott számítási módszertől.

Az egyensúlyra vonatkozó – leggyakrabban használt – egzisztencia tételek olyan fixponttételekre támaszkodnak, mint a Brouwer-, a Kakutani-, a Banach-, a Tarski-féle fixponttétel. Bármely fixpontkereső algoritmus sikeresen alkalmazható egyensúlyok meghatározására.

A legnépszerűbb egzisztencia tétel a Kakutani-féle fixponttétel egy nyilvánvaló alkalmazása.

8.3. tétel. *Ha egy N személyes játékra minden k-ra teljesül, hogy*

1. *az S_k stratégiahalmazok egy véges dimenziós euklideszi tér nemüres, zárt, korlátos, konvex részhalmazai;*
2. *az f_k kifizetőfüggvények folytonosak S-en;*
3. *az f_k függvény konkáv az s_k változó szerint, tehát rögzített $(s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_N)$ mellett f_k konkáv függvény,*

akkor a játéknak van legalább egy egyensúlya.

8.4. példa. *Első kétszemélyes játék.* Tekintsünk egy kétszemélyes játékot $(N = 2)$, ahol a stratégiahalmazok $S_1 = S_2 = [0, 1]$, a kifizetőfüggvények $f_1(s_1, s_2) = s_1 s_2 - 2s_1^2 + 5$, és $f_2(s_1, s_2) =$

$s_1 s_2 - 2s_2^2 + s_2 + 3$. Először mindkét játékos legjobbválasz-leképezéseit határozzuk meg. Mindkét kifizetőfüggvény lefelé nyitott parabola, melyek csúcspontjai:

$$s_1 = \frac{s_2}{4} \quad \text{és} \quad s_2 = \frac{s_1 + 1}{4} \ .$$

Minden $s_1, s_2 \in [0, 1]$ esetén ezek az értékek megvalósítható stratégiák, tehát

$$B_1(\mathbf{s}) = \frac{s_2}{4} \quad \text{és} \quad B_2(\mathbf{s}) = \frac{s_1 + 1}{4} \ .$$

Tehát az $(s_1^\star, s_2^\star)$ vektor pontosan akkor egyensúly, ha komponensei kielégítik a következő egyenlőségeket:

$$s_1^\star = \frac{s_2^\star}{4} \quad \text{és} \quad s_2^\star = \frac{s_1^\star + 1}{4} \ .$$

Könnyen látható, hogy az egyenlőségek egyetlen megoldása:

$$s_1^\star = \frac{1}{15} \quad \text{és} \quad s_2^\star = \frac{4}{15} \ ,$$

tehát $(s_1^\star, s_2^\star)$ a játék egyetlen egyensúlya.

8.5. példa. *Tengeri csatorna.* Tekintsük egy tengeri csatorna egy bizonyos részét a $[0, 1]$ intervallumnak. $\mathcal{P}_2$ egy tengeralattjáró, mely az $s_2 \in [0, 1]$ helyen rejtőzik. $\mathcal{P}_1$ egy repülőgép, mely bombázhat bármely $s_1 \in [0, 1]$ helyet. A bombázó a tengeralattjárónak $\alpha e^{-\beta(s_1 - s_2)^2}$ kárt okoz. Így egy speciális kétszemélyes játékot definiáltunk, ahol $S_1 = S_2 = [0, 1]$, $f_1(s_1, s_2) = \alpha e^{-\beta(s_1 - s_2)^2}$ és $f_2(s_1, s_2) = -f_1(s_1, s_2)$. Ha rögzítjük s_2-t, akkor $f_1(s_1, s_2)$ felveszi maximumát az $s_1 = s_2$ helyen, tehát $\mathcal{P}_1$ legjobbválasz-leképezése: $B_1(\mathbf{s}) = s_2$. $\mathcal{P}_2$ minimalizálni akarja $f_1(s_1, s_2)$-t, mely akkor következik be, ha $|s_1 - s_2|$ a lehető legnagyobb. Ebből következik, hogy

$$B_2(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } s_1 < 1/2 \ , \\ 0, & \text{ha } s_1 > 1/2 \ , \\ \{0, 1\}, & \text{ha } s_1 = 1/2 \ . \end{cases}$$

Világos, hogy nincs olyan $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$ vektor, hogy $s_1 = B_1(\mathbf{s})$ és $s_2 \in B_2(\mathbf{s})$, tehát nincs egyensúly.

8.2.2. A Fan-egyenlőtlenség alkalmazása

Definiáljuk a $H : S \times S \to \mathbb{R}$ ***összegzőfüggvényt*** a következőképpen:

$$H_{\mathbf{r}}(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{N} r_k f_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, z_k, s_{k+1}, \ldots, s_N) \tag{8.4}$$

minden $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_N), \mathbf{z}(z_1, \ldots, z_N) \in S$-re, ahol $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_N) > \mathbf{0}$ tetszőleges, rögzített.

8.4. tétel. *Az $\mathbf{s}^\star \in S$ vektor pontosan akkor egyensúly, ha*

$$H_{\mathbf{r}}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{z}) \le H_{\mathbf{r}}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star) \tag{8.5}$$

minden $\mathbf{z} \in S$-re.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^\star$ egyensúly. Ekkor a (8.1) egyenlőtlenség teljesül minden k-ra és minden $s_k \in S_k$ stratégiára. A (8.1) egyenlőtlenségeinek mindkét oldalát megszorozva az r_k együtthatókkal és összeadva őket a $k = 1, 2, \ldots, N$ értékekre, megkapjuk (8.5)-öt.

Most tegyük fel, hogy a (8.5) egyenlőtlenség teljesül minden $\mathbf{z} \in S$-re. Tetszőleges k-ra és tetszőleges $s_k \in S_k$-ra legyen $\mathbf{z} = (s_1^\star, \ldots, s_{k-1}^\star, s_k, s_{k+1}^\star, \ldots, s_N^\star)$, és alkalmazzuk (8.5)-öt. A k-adik tag kivételével minden tag egyenlő a két oldalon, így törölhetők, míg a megmaradó k-adik tag azt mutatja, hogy a (8.1) egyenlőtlenség teljesül. Tehát $\mathbf{s}^\star$ egyensúly. ■

Vezessük be a következő függvényt: $\phi(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = H_\mathbf{r}(\mathbf{s}, \mathbf{z}) - H_\mathbf{r}(\mathbf{s}, \mathbf{s})$. Világos, hogy $\mathbf{s}^\star$ pontosan akkor egyensúly, ha

$$\phi(\mathbf{s}^\star, \mathbf{z}) \le 0 \tag{8.6}$$

minden $\mathbf{z} \in S$-re. A (8.6) egyenlőtlenséget ***Fan-egyenlőtlenségnek*** nevezzük. A (8.6) egyenlőtlenség átírható variációs egyenlőtlenséggé (lásd később a 8.2.9. pontban) vagy fixpont feladattá. A második átírási lehetőséget mutatjuk be itt. Minden $\mathbf{s} \in S$-re legyen

$$\Phi(\mathbf{s}) = \{\mathbf{z} | \mathbf{z} \in S,\ \phi(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \max_{\mathbf{t} \in S} \phi(\mathbf{s}, \mathbf{t})\} . \tag{8.7}$$

Mivel $\phi(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 0$ minden $\mathbf{s} \in S$-re, így (8.6) egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{s}^\star \in \Phi(\mathbf{s}^\star)$, így $\mathbf{s}^\star$ fixpontja a $\Phi : S \to 2^S$ halmazértékű leképezésnek. Tehát minden fixpontkereső módszer alkalmazható egyensúly számításra.

A fixpont probléma számítási költsége függ a fixpont probléma típusától, méretétől és a választott számítási módszertől.

8.6. példa. *Második kétszemélyes játék.* Tekintsük a 8.4. példát. A mostani esetben:

$$f_1(z_1, s_2) = z_1 s_2 - 2z_1^2 + 5 ,$$

$$f_2(s_1, z_2) = s_1 z_2 - 2z_2^2 + z_2 + 3 ,$$

így az összegzőfüggvény formája $r_1 = r_2 = 1$ esetén:

$$H_\mathbf{r}(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = z_1 s_2 - 2z_1^2 + s_1 z_2 - 2z_2^2 + z_2 + 8 .$$

Tehát

$$H_\mathbf{r}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = 2s_1 s_2 - 2s_1^2 - 2s_2^2 + s_2 + 8 ,$$

és

$$\phi(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = z_1 s_2 - 2z_1^2 + s_1 z_2 - 2z_2^2 + z_2 - 2s_1 s_2 + 2s_1^2 + 2s_2^2 - s_2 .$$

Vegyük észre, hogy a ϕ függvény szigorúan konkáv mind z_1 szerint, mind z_2 szerint, és ϕ szétválasztható változójú függvény. ϕ stacionárius pontja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_1} = s_2 - 4z_1 = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_2} = s_1 - 4z_2 + 1 = 0 .$$

Mivel mindkét jobb oldal megvalósítható, így az optimum

$$z_1 = \frac{s_2}{4} \quad \text{és} \quad z_2 = \frac{s_1 + 1}{4} .$$

A fixpontban:

$$s_1 = \frac{s_2}{4} \text{ és } s_2 = \frac{s_1+1}{4} ,$$

melyből az egyetlen megoldás:

$$s_1 = \frac{1}{15} \text{ és } s_2 = \frac{4}{15} .$$

8.2.3. A Kuhn–Tucker-feltételek megoldása

Tegyük fel, hogy minden k-ra

$$S_k = \{s_k | \mathbf{g}_k(s_k) \geq \mathbf{0}\} ,$$

ahol $\mathbf{g}_k : \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}^{m_k}$ az $O_k \supseteq S_k$ nyílt halmazon folytonosan differenciálható, vektor változójú és vektor értékű függvény. Tegyük fel továbbá, hogy az f_k függvény s_k szerint folytonosan parciálisan deriválható O_k-n minden k-ra, tetszőleges rögzített $s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, s_N$ esetén.

Ha $\mathbf{s}^\star = (s_1^\star, \ldots, s_N^\star)$ egyensúly, akkor minden k-ra $s_k^\star$ optimális megoldása a következő feladatnak:

$$\begin{aligned} f_k(s_1^\star, \ldots, s_{k-1}^\star, s_k, s_{k+1}^\star, \ldots, s_N^\star) &\to \max \\ \mathbf{g}_k(s_k) &\geq \mathbf{0} . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Feltéve, hogy a Kuhn–Tucker regularitási feltételek s_k esetén teljesülnek, a megoldásnak teljesítenie kell a Kuhn–Tucker-féle szükséges feltételeket ($k = 1, 2, \ldots, N$):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_k(s_k) &\geq \mathbf{0} \\ \nabla_k f_k(\mathbf{s}) + \mathbf{u}_k^T \nabla_k \mathbf{g}_k(s_k) &= \mathbf{0}^T \\ \mathbf{u}_k^T \mathbf{g}_k(s_k) &= 0 , \end{aligned} \tag{8.9}$$

ahol $\mathbf{u}_k$ egy m_k komponensű oszlopvektor, $\mathbf{u}_k^T$ jelöli $\mathbf{u}_k$ transzponáltját, $\nabla_k f_k$ az f_k s_k szerinti gradiens függvénye (mint sorvektor), és $\nabla_k \mathbf{g}_k$ a $\mathbf{g}_k$ függvény Jacobi-függvénye.

8.5. tétel. *Ha $\mathbf{s}^\star$ egyensúly, akkor léteznek olyan $\mathbf{u}_k^\star$ vektorok, hogy (8.9) teljesül.*

A (8.9) relációi minden $k = 1, 2, \ldots, N$-re feltételek (általában nagy) rendszerét adja az ismeretlen s_k-ra és $\mathbf{u}_k$-ra. Ha létezik egyensúly, akkor az egyensúlynak teljesítenie kell (8.9)-et. Ha ráadásul minden k-ra $\mathbf{g}_k$ minden komponense szerint konkáv és f_k konkáv s_k szerint, akkor a Kuhn–Tucker-feltételek elégségesek is, tehát (8.9) minden megoldása egyensúly.

A (8.9) megoldásának számítási költsége (8.9) típusától, és a választott módszertől függ. Ha például (8.9) lineáris programozási feladat, melyet szimplex módszerrel oldunk meg, akkor a műveletek száma legrosszabb esetben exponenciális. Egyedi esetekben azonban a megoldás sokkal kevesebb művelettel is meghatározható.

8.7. példa. *Harmadik kétszemélyes játék.* Tekintsük ismét a 8.4. példa kétszemélyes játékát. Világos, hogy

$$S_1 = \{s_1 | s_1 \geq 0,\ 1 - s_1 \geq 0\} ,$$

$$S_2 = \{s_2 | s_2 \geq 0,\ 1 - s_2 \geq 0\} ,$$

amiből kapjuk, hogy

$$\mathbf{g}_1(s_1) = \begin{pmatrix} s_1 \\ 1 - s_1 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{g}_2(s_2) = \begin{pmatrix} s_2 \\ 1 - s_2 \end{pmatrix} .$$

Deriválás után

$$\nabla_1 \mathbf{g}_1(s_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_2 \mathbf{g}_2(s_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\nabla_1 f_1(s_1, s_2) = s_2 - 4s_1, \quad \nabla_2 f_2(s_1, s_2) = s_1 - 4s_2 + 1 ,$$

tehát a Kuhn–Tucker-feltételek a következő formában írhatók fel:

$$\begin{array}{rcl} u_1^{(1)}, u_2^{(1)} & \geq & 0 \\ s_1 & \geq & 0 \\ s_1 & \leq & 1 \\ s_2 - 4s_1 + u_1^{(1)} - u_2^{(1)} & = & 0 \\ u_1^{(1)} s_1 + u_2^{(1)}(1 - s_1) & = & 0 \\ u_1^{(2)}, u_2^{(2)} & \geq & 0 \\ s_2 & \geq & 0 \\ s_2 & \leq & 1 \\ s_1 - 4s_2 + 1 + u_1^{(2)} - u_2^{(2)} & = & 0 \\ u_1^{(2)} s_2 + u_2^{(2)}(1 - s_2) & = & 0 . \end{array}$$

Vegyük észre, hogy f_1 konkáv s_1 szerint, f_2 konkáv s_2 szerint, és minden feltétel lineáris, tehát ennek a feltételrendszernek minden megoldása egyensúly. Módszeresen vizsgálva az egyes lehetőségek kombinációit, azt kapjuk, hogy

$$s_1 = 0, \quad 0 < s_1 < 1, \quad s_1 = 1 ,$$

és

$$s_2 = 0, \quad 0 < s_2 < 1, \quad s_2 = 1 .$$

Könnyen látható, hogy egyetlen megoldás van:

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = 0 , \quad s_1 = \frac{1}{15}, \quad s_2 = \frac{4}{15} .$$

Túlcsordulás és többlet változókat bevezetve a Kuhn–Tucker-feltételek átírhatók, mint egy nemnegatív rendszer. A nemnegativitási feltételek elhagyhatók, ha a változókat úgy tekintjük, mint valamely új változók négyzeteit, így a végeredmény egy plusz feltételek nélküli, (általában) nemlineáris egyenletrendszer. Számos numerikus módszer áll rendelkezésre az ilyen egyenletrendszerek megoldására.

8.2.4. Visszavezetés optimumszámítási feladatra

Tegyük fel, hogy az előző alfejezet (8.9) feltételei teljesülnek. Tekintsük a következő optimumszámítási feladatot, ahol $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^T \mathbf{g}_k(s_k) & \to & \min \\ \mathbf{u}_k & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_k(s_k) & \geq & \mathbf{0} \\ \nabla_k f_k(\mathbf{s}) + \mathbf{u}_k^T \nabla_k \mathbf{g}_k(s_k) & = & 0 . \end{array} \tag{8.10}$$

A két első feltétel miatt a célfüggvény nem negatív, így az optimális érték sem negatív. Ebből következik, hogy (8.9)-nek pontosan akkor van megengedett megoldása, ha (8.10)-ben a célfüggvény zéró. Ebben az esetben bármely optimális megoldás teljesíti (8.9)-t.

8.6. tétel. *Egy N személyes játéknak csak akkor van egyensúlya, ha* (8.10)*-ben a célfüggvény optimális értéke nulla. Ha ráadásul $\mathbf{g}_k$ minden komponense szerint konkáv, és f_k s_k szerint konkáv minden k-ra, akkor* (8.10) *minden optimális megoldása egyensúly.*

Tehát egy N személyes játék egyensúlyának meghatározása visszavezethető a (8.10) (általában) nemlineáris optimumszámítási feladat megoldására. Bármely nemlineáris programozási módszer használható ennek a problémának a megoldására.

(8.10) megoldásának számítási költsége (8.10) típusától, és a választott módszertől függ. Például, ha (8.10) egy lineáris programozási feladat, melyet a szimplex módszerrel oldunk meg, akkor a műveletek maximális száma exponenciális. Egyedi esetekben azonban a megoldás sokkal kevesebb művelettel is meghatározható.

8.8. példa. *Negyedik kétszemélyes játék.* A 8.7. példa esetén az optimumszámítási feladat a következő formában írható fel:

$$\begin{array}{rcl} u_1^{(1)}s_1 + u_2^{(1)}(1-s_1) + u_1^{(2)}s_2 + u_2^{(2)}(1-s_2) & \to & \min \\ u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)} & \geq & 0 \\ s_1 & \geq & 0 \\ s_1 & \leq & 1 \\ s_2 & \geq & 0 \\ s_2 & \leq & 1 \\ s_2 - 4s_1 + u_1^{(1)} - u_2^{(1)} & = & 0 \\ s_1 - 4s_2 + 1 + u_1^{(2)} - u_2^{(2)} & = & 0. \end{array}$$

Vegyük észre, hogy az $u_1^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = 0$, $s_1 = 1/15$ és $s_2 = 4/15$ megoldás megengedett, a célfüggvény értéke zéró, így egyben optimális megoldás is. Ebből következik, hogy megoldása (8.9)-nek, így a 8.6. tétel miatt egyensúly.

Véges játékok kevert bővítése

Korábban láttuk, hogy egy véges játéknak nem feltétlenül van egyensúlya. Még ha egy véges játéknak van is egyensúlya, és sokszor játsszuk le az adott játékot, akkor is a játékosok szeretnek bevezetni némi véletlenszerűséget az akcióikba, abból a célból, hogy a többi játékost összezavarják, illetve azért, hogy keressenek egy sztochasztikus értelemben vett egyensúlyt. Ez a gondolat úgy modellezhető, hogy a játékosok stratégiáit valószínűség eloszlásokként vezetjük be, és a várható kifizetések lesznek a kifizetőfüggvények.

A 8.1. alfejezet jelöléseit megtartjuk: N játékosunk van, az $S_k = \{s_k^{(1)}, \ldots, s_k^{(n_k)}\}$ halmaz a $\mathcal{P}_k$ játékos véges stratégiahalmaza. Ennek a véges játéknak a ***kevert bővítésében*** minden játékos egy – a saját stratégiahalmazán értelmezett – diszkrét valószínűségeloszlást vesz, továbbá S_k elemeit a játék minden lejátszásában az adott diszkrét eloszlás szerint választja. Tehát $\mathcal{P}_k$ új stratégiahalmaza:

$$\overline{S}_k = \{\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n_k)}),\ \sum_{i=1}^{n_k} x_k^{(i)} = 1,\ x_k^{(i)} \geq 0 \text{ minden } i\text{-re}\}\ , \tag{8.11}$$

mely halmaz elemei n_k komponensű valószínűségi vektorok. $\mathcal{P}_k$ új kifizető függvénye várható érték függvény:

$$\overline{f}_k(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_N) = \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\ldots\sum_{i_N=1}^{n_N} f_k(s_1^{(i_1)}, s_2^{(i_2)},\ldots,s_N^{(i_N)})x_1^{(i_1)}x_2^{(i_2)}\ldots x_N^{(i_N)} . \tag{8.12}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k$ természetes bázisvektor választással az eredeti „tiszta” stratégiához ($s_k^{(i)}$) tartozó kifizetés kapható meg. A kevert bővítéssel kapott játék folytonos játék, és a 8.2. tétel szerint van legalább egy egyensúlya. Tehát ha adott egy véges játék, melynek nincs egyensúlya, akkor a kevert bővítésének mindig van legalább egy egyensúlya, mely egyensúly az előző alfejezetben ismertetett módszerekkel megkapható.

8.9. példa. *Ötödik kétszemélyes játék.* Tekintsünk egy kétszemélyes játékot ($N = 2$), ahol a 8.1. alfejezetben bevezetett $\mathbf{A}^{(1)}$ és $\mathbf{A}^{(2)}$ mátrixok (i, j) elemei $f_1(s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$ és $f_2(s_1^{(i)}, s_2^{(j)})$. Ebben a speciális esetben

$$\overline{f}_k(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} a_{ij}^{(k)}x_i^{(1)}x_j^{(2)} = \mathbf{x}_1^T\mathbf{A}^{(k)}\mathbf{x}_2 \quad (k = 1,2) . \tag{8.13}$$

Az $\overline{S}_k$ feltételei a következő formába írhatók át:

$$\begin{aligned} x_k^{(i)} &\geq 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n_k) , \\ -1 + \sum_{i=1}^{n_k} x_k^{(i)} &\geq 0 , \\ 1 - \sum_{i=1}^{n_k} x_k^{(i)} &\geq 0 . \end{aligned}$$

Tehát választhatjuk $\mathbf{g}_k$-t a következőképpen:

$$\mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ \vdots \\ x_k^{(n_k)} \\ \sum_{i=1}^{n_k} x_k^{(i)} - 1 \\ -\sum_{i=1}^{n_k} x_k^{(i)} + 1 \end{pmatrix} . \tag{8.14}$$

A (8.10)-ben adott optimumszámítási feladat a következő feladatra egyszerűsödik:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{2}[\sum_{i=1}^{n_k} u_k^{(i)}x_k^{(i)} + u_k^{(n_k+1)}(\sum_{j=1}^{n_k} x_k^{(j)} - 1) + u_k^{(n_k+2)}(-\sum_{j=1}^{n_k} x_k^{(i)} + 1)] & \to & \min \\ u_k^{(i)} & \geq & 0 \quad (1 \leq i \leq n_k + 2) \\ x_k^{(i)} & \geq & 0 \quad (1 \leq i \leq n_k) \\ \mathbf{1}^T\mathbf{x}_k & = & 1 \\ \mathbf{x}_2^T(\mathbf{A}^{(1)})^T + \mathbf{v}_1^T + (u_1^{(n_1+1)} - u_1^{(n_1+2)})\mathbf{1}_1^T & = & \mathbf{0}_1^T \\ \mathbf{x}_1^T(\mathbf{A}^{(2)}) + \mathbf{v}_2^T + (u_2^{(n_2+1)} - u_2^{(n_2+2)})\mathbf{1}_2^T & = & \mathbf{0}_2^T , \end{array} \tag{8.15}$$

ahol $\mathbf{v}_k^T = (u_k^{(1)},\ldots.u_k^{(n_k)})$, $\mathbf{1}_k^T = (1^{(1)},\ldots,1^{(n_k)})$ és $\mathbf{0}_k^T = (0^{(1)},\ldots,0^{(n_k)})$, $k = 1,2$.

Vegyük észre, hogy a fenti feladat egy kvadratikus programozási feladat. A számítási költség a választott módszertől függ. Azt is vegyük észre, hogy a fenti probléma általában nem konvex, így lehetséges, hogy az optimum keresése során beragadunk egy lokális optimumba.

Bimátrix-játékok

A kétszemélyes véges játékok kevert kiterjesztéseit ***bimátrix-játékoknak*** nevezzük. A 8.9. példában már vizsgáltunk ilyen játékot. A jelölés egységesítése érdekében a következő egyszerűsítő jelöléseket vezetjük be:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{B} = \mathbf{A}^{(2)}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \mathbf{y} = \mathbf{x}_2, m = n_1 \text{ és } n = n_2 .$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a (8.15) feladat átírható olyan kvadratikus programozási feladattá, melyben csak lineáris feltételek vannak.

Tekintsük először a célfüggvényt. Legyenek

$$\alpha = u_1^{(m+2)} - u_1^{(m+1)}, \text{ és } \beta = u_2^{(n+2)} - u_2^{(n+1)} ,$$

ekkor a célfüggvény a következő formába írható át:

$$\mathbf{v}_1^T\mathbf{x} + \mathbf{v}_2^T\mathbf{y} - \alpha(\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} - 1) - \beta(\mathbf{1}_n^T\mathbf{y} - 1) . \tag{8.16}$$

(8.15)-ben az utolsó két feltétel szintén egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{v}_1^T - \alpha\mathbf{1}_m^T &= \mathbf{0}_m^T , \\ \mathbf{x}^T\mathbf{B} + \mathbf{v}_2^T - \beta\mathbf{1}_n^T &= \mathbf{0}_n^T , \end{aligned}$$

amiből következik:

$$\mathbf{v}_1^T = \alpha\mathbf{1}_m^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T \text{ és } \mathbf{v}_2^T = \beta\mathbf{1}_n^T - \mathbf{x}^T\mathbf{B} . \tag{8.17}$$

Mivel

$$\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} = \mathbf{1}_n^T\mathbf{y} = 1 ,$$

felírhatjuk a célfüggvényt egy újabb formában:

$$(\alpha\mathbf{1}_m^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{x} + (\beta\mathbf{1}_n^T - \mathbf{x}^T\mathbf{B})\mathbf{y} - \alpha(\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} - 1) - \beta(\mathbf{1}_n^T\mathbf{y} - 1) = \alpha + \beta - \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{y} .$$

Tehát a következő kvadratikus programozási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{y} - \alpha - \beta &\to \max \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_m^T\mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{1}_n^T\mathbf{y} &= 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{y} &\leq \alpha\mathbf{1}_m \\ \mathbf{B}^T\mathbf{x} &\leq \beta\mathbf{1}_n , \end{aligned} \tag{8.18}$$

ahol a két utolsó feltétel a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vektorok nemnegativitásából és (8.17)-ből következik.

8.7. tétel. *Az $\mathbf{x}^\star$, $\mathbf{y}^\star$ vektorpár pontosan akkor egyensúlya az $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ bimátrix-játéknak, ha valamilyen $\alpha^\star$-ra és $\beta^\star$-ra $(\mathbf{x}^\star, \mathbf{y}^\star, \alpha^\star, \beta^\star)$ optimális megoldása a (8.18) feladatnak. Ekkor az optimumban a célfüggvény értéke nulla.*

Ez kvadratikus programozási feladat, ahol a számítási költség a választott módszertől függ. Általában nem konvex a feladat, így benneragadhatunk egy lokális optimumban. Mivel tudjuk, hogy a globális optimumban a célfüggvény értéke nulla, így ellenőrizni tudjuk az optimalitást. Ha $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ negatív szemidefinit, akkor a feladat konvex, tehát minden lokális optimum globális is.

8.10. példa. *Első bimátrix-játék.* Válasszuk $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t a következőképpen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

tehát (8.18) a következő formát ölti:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 - \alpha - \beta & \to & \max \\ x_1, x_2, y_1, y_2 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \\ y_1 + y_2 & = & 1 \\ 2y_1 - y_2 & \leq & \alpha \\ -y_1 + y_2 & \leq & \alpha \\ x_1 - x_2 & \leq & \beta \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & \beta \, , \end{array}$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$. A 8.7. tételből tudjuk, hogy az optimális célfüggvényérték nulla, így minden megengedett megoldás, melyre a célfüggvény értéke nulla, szükségszerűen optimális. Könnyen látható, hogy

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha = 2, \beta = 1 \ ,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha = 1, \ \beta = 2 \ ,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \ \alpha = 0.2, \ \beta = 0.2$$

mind optimumok, tehát mindegyik meghatároz egy egyensúlyt.

Alkalmazhatjuk (8.9)-et egyensúly keresésre. Ahelyett, hogy megoldjuk a (8.18) optimumszámítási feladatot, megoldjuk az (8.9) feltételrendszert. A bimátrix-játékok esetén a (8.9) feladat a következő formára egyszerűsödik:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} & = & \alpha \\ \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y} & = & \beta \\ \mathbf{A}\mathbf{y} & \leq & \alpha\mathbf{1}_m \\ \mathbf{B}^T\mathbf{x} & \leq & \beta\mathbf{1}_n \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_m^T\mathbf{x} = \mathbf{1}_n^T\mathbf{y} & = & 1 \, , \end{array} \tag{8.19}$$

mely feltételrendszer a kvadratikus programozási feladatnál látottakkal analóg módon vezethető le.

A (8.19) feladat számítási költsége a választott módszertől függ.

8.11. példa. *Második bimátrix-játék.* Tekintsük ismét a 8.10. példát. Helyettesítsük a (8.19) feltételrendszer első és a második feltétele alapján α-t és β-t a harmadik és a negyedik feltételbe, ekkor

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 - y_2 & \le & 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \\ -y_1 + y_2 & \le & 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \\ x_1 - x_2 & \le & x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \\ -x_1 + 2x_2 & \le & x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 & \ge & 0 \\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2 & = & 1\,. \end{array}$$

Könnyen látható, hogy a 8.10. példában kapott megoldások kielégítik a fenti feltételrendszert, tehát egyensúlyok.

A bimátrix-játék egyensúlyi feladatát átírhatjuk kevert változós feltételrendszerbe is. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ minden eleme 0 és 1 között van. Ez a feltevés nem túl erős, hiszen lineáris transzformációk használatával

$$\overline{\mathbf{A}} = a_1\mathbf{A} + b_1\mathbf{1} \ \text{ és } \ \overline{\mathbf{B}} = a_2\mathbf{B} + b_2\mathbf{1}\,,$$

ahol $a_1, a_2 > 0$, $\mathbf{1}$ a csupa egyesekből álló $m \times n$-es mátrix. Ekkor az egyensúly nem változik, és – megfelelő a_1, b_1, a_2 és b_2 értékek választásával – az $\overline{\mathbf{A}}$ és $\overline{\mathbf{B}}$ mátrixok minden eleme a $[0, 1]$ intervallumba esik.

8.8. tétel. *Az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorpár pontosan akkor egyensúly, ha valamilyen α, β számokra és $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nulla-egy vektorokra teljesül, hogy*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \le & \alpha\mathbf{1}_m - \mathbf{A}\mathbf{y} & \le & \mathbf{1}_m - \mathbf{u} & \le & \mathbf{1}_m - \mathbf{x} \\ 0 & \le & \beta\mathbf{1}_n - \mathbf{B}^T\mathbf{x} & \le & \mathbf{1}_n - \mathbf{v} & \le & \mathbf{1}_n - \mathbf{y} \\ & & & & \mathbf{x} & \ge & \mathbf{0}_m \\ & & & & \mathbf{y} & \ge & \mathbf{0}_n \\ & & \mathbf{1}_m^T\mathbf{x} & = & \mathbf{1}_n^T\mathbf{y} & = & 1\,. \end{array} \tag{8.20}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorpár egyensúly, ekkor valamilyen α-ra, β-ra (8.19) teljesül. Legyen

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } x_i > 0\,, \\ 0, & \text{ha } x_i = 0\,, \end{cases} \quad \text{és} \quad v_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } y_j > 0\,, \\ 0, & \text{ha } y_j = 0\,. \end{cases}$$

Mivel az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok elemei $[0, 1]$-ből valók, így $\alpha = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ és $\beta = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ szintén nulla és egy közöttiek. Vegyük észre, hogy

$$0 = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{1}_m - \mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\beta\mathbf{1}_n - \mathbf{B}^T\mathbf{x})\,,$$

melyből következik, hogy (8.20) teljesül.

Most tegyük fel, hogy (8.20) teljesül. Ekkor

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{1}_m \quad \text{és} \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{1}_n \ .$$

Ha $u_i = 1$, akkor $\alpha - \mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\mathbf{y} = 0$, és ha $u_i = 0$, akkor $x_i = 0$. Tehát

$$\mathbf{x}^T(\alpha \mathbf{1}_m - \mathbf{A}\mathbf{y}) = 0 \ ,$$

melyből következik, hogy $\alpha = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$. A $\beta = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ egyenlőség érvényessége hasonlóan mutatható meg, így (8.19) teljesül, tehát az $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorpár egyensúly. ■

A (8.20) feladat számítási költsége a választott módszertől függ.

8.12. példa. *Harmadik bimátrix-játék.* A 8.10. példában bevezetett bimátrix-játék esetén (8.20) a következő formát ölti:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \leq & \alpha - 2y_1 + y_2 & \leq & 1 - u_1 & \leq & 1 - x_1 \\
0 & \leq & \alpha + y_1 - y_2 & \leq & 1 - u_2 & \leq & 1 - x_2 \\
0 & \leq & \beta - x_1 + x_2 & \leq & 1 - v_1 & \leq & 1 - y_1 \\
0 & \leq & \beta + x_1 - 2x_2 & \leq & 1 - v_2 & \leq & 1 - y_2 \\
 & & x_1 + x_2 & = & y_1 + y_2 & = & 1 \\
 & & & & x_1, x_2, y_1, y_2 & \geq & 0 \\
 & & & & u_1, u_2, v_1, v_2 & \in & \{0, 1\} \ .
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy a 8.10. példában adott három megoldás teljesíti a fenti feltételrendszert az $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$, $\mathbf{u} = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$, és $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektorpárokkal.

Mátrixjátékok

Azokat a bimátrix-játékokat, ahol $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, ***mátrixjátékoknak*** nevezzük, és egy $\mathbf{A}$ mátrixszal jelöljük. Az ilyen játékokra néha $\mathbf{A}$ *mátrixjátékként* fogunk hivatkozni. Mivel $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{0}$, a (8.18)-bani kvadratikus programozási feladat lineáris:

$$\begin{array}{rcl}
\alpha + \beta & \to & \min \\
\mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{1}_m\mathbf{x} & = & 1 \\
\mathbf{1}_n\mathbf{y} & = & 1 \\
\mathbf{A}\mathbf{y} & \leq & \alpha\mathbf{1}_m \\
\mathbf{A}^T\mathbf{x} & \geq & -\beta\mathbf{1}_n \ .
\end{array} \tag{8.21}$$

A fenti feladatból látható, hogy az egyensúlyok halmaza konvex poliéder. Vegyük észre, hogy $(\mathbf{x}, \beta)$ és $(\mathbf{y}, \alpha)$ szétválasztható, amiből a következő eredmény vezethető le.

8.9. tétel. *Az* $\mathbf{x}^\star$, $\mathbf{y}^\star$ *vektorpár pontosan akkor egyensúlya az* $\mathbf{A}$ *mátrixjátéknak, ha valamilyen* $\alpha^\star$*-ra,* $\beta^\star$*-ra* $(\mathbf{x}^\star, \beta^\star)$ *és* $(\mathbf{y}^\star, \alpha^\star)$ *optimális megoldásai a következő lineáris programozási feladatpárnak:*

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & \to & \min \\
\mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}_n \\
\mathbf{1}_n^T\mathbf{y} & = & 1 \\
\mathbf{A}\mathbf{y} & \leq & \alpha\mathbf{1}_m
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rcl}
\beta & \to & \min \\
\mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}_m \\
\mathbf{1}_m^T\mathbf{x} & = & 1 \\
\mathbf{A}^T\mathbf{x} & \geq & -\beta\mathbf{1}_n \ .
\end{array} \tag{8.22}$$

Vegyük észre, hogy az optimumban $\alpha + \beta = 0$. Az α optimális értékét a mátrixjáték ***értékének*** nevezzük.

Ha a szimplex módszert alkalmazzuk (8.22) megoldására, akkor a műveletek száma exponenciális. Polinomiális algoritmussal (mint amilyen a belső pont módszer) a műveletek száma csak polinomiális.

8.13. példa. *Első mátrixjáték.* Tekintsük a következő mátrixjátékot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

A (8.22)-t erre a feladatra felírva:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \to & \min \\ y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 & = & 1 \\ 2y_1 + y_2 - \alpha & \leq & 0 \\ 2y_1 + 3y_3 - \alpha & \leq & 0 \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 - \alpha & \leq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \beta & \to & \min \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + \beta & \geq & 0 \\ x_1 + 3x_3 + \beta & \geq & 0 \\ 3x_2 + 3x_3 + \beta & \geq & 0 . \end{array}$$

A szimplex módszerrel megkaphatjuk a fenti feladatpár megoldását: $\alpha = 9/7$, $\mathbf{y} = (3/7, 3/7, 1/7)$, $\beta = -9/7$, és $\mathbf{x} = (4/7, 4/21, 5/21)$.

A (8.21) megoldását úgy is megkaphatjuk, hogy lineáris feltételek bizonyos halmazának megengedett megoldását keressük meg. Mivel (8.21)-ben az optimumban $\alpha + \beta = 0$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorok és α, β skalárok pontosan akkor alkotnak optimális megoldást, ha

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}, \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_m^T \mathbf{x} & = & 1 \\ \mathbf{1}_n^T \mathbf{y} & = & 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{y} & \leq & \alpha \mathbf{1}_m \\ \mathbf{A}^T \mathbf{x} & \geq & \alpha \mathbf{1}_n . \end{array} \tag{8.23}$$

A (8.23) megoldásához a szimplex módszer első fázisa szükséges, mely a legkedvezőtlenebb esetben exponenciális számú műveletet igényel. A gyakorlatban általában sokkal kevesebb művelet szükséges.

8.14. példa. *Második mátrixjáték.* Nézzük megint a 8.13. példában bevezetett mátrixjátékot. Ha erre a játékra (8.23)-at felírjuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 & = & 1 \\ 2y_1 + y_2 & \leq & \alpha \\ 2y_1 + 3y_3 & \leq & \alpha \\ -y_1 + 3y_2 + 3y_3 & \leq & \alpha \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & \geq & \alpha \\ x_1 + 3x_3 & \geq & \alpha \\ 3x_2 + 3x_3 & \geq & \alpha . \end{array}$$

Könnyen látható, hogy $\alpha = 9/7$, $\mathbf{x} = (4/7, 4/21, 5/21)^T$, $\mathbf{y} = (3/7, 3/7, 1/7)^T$ kielégíti a (8.9) feltételrendszert, tehát az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektorpár egyensúly.

8.2.5. A fiktív lejátszás módszere

Tekintsünk most egy $\mathbf{A}$ mátrixjátékot. Az ezen alfejezetben tárgyalt módszer fő gondolata az, hogy lépésenként minden játékos meghatározza a saját legjobbválasz tiszta stratégiáját a másik játékos – az előzőekben választott – stratégiáinak átlaga mellett. Formálisan a módszer a következőképpen írható fel.

Legyen $\mathbf{x}_1$ a $\mathcal{P}_1$ játékos kezdeti (kevert) stratégiája. Válasszuk úgy $\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_{j_1}$-t, hogy teljesüljön

$$\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{e}_{j_1} = \min_j\{\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j\} \ . \tag{8.24}$$

Bármely további $k \geq 2$ lépéskor legyen

$$\overline{\mathbf{y}}_{k-1} = \frac{1}{k-1}((k-2)\overline{\mathbf{y}}_{k-2} + \mathbf{y}_{k-1}) \ , \tag{8.25}$$

és válasszuk $\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_{i_k}$-t úgy, hogy teljesüljön

$$\mathbf{e}_{i_k}^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{y}}_{k-1} = \max_i\{\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}\overline{\mathbf{y}}_{k-1}\} \ . \tag{8.26}$$

Ekkor legyen

$$\overline{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{k}((k-1)\overline{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{x}_k) \ , \tag{8.27}$$

és válasszuk $\mathbf{y}_k = \mathbf{e}_{j_k}$-t úgy, hogy

$$\overline{\mathbf{x}}_k^T\mathbf{A}\mathbf{e}_{j_k} = \min_j\{\overline{\mathbf{x}}_k^T\mathbf{A}\mathbf{e}_j\} \ . \tag{8.28}$$

A fenti általános lépés megismétlése ($k = 2, 3, \ldots$)-ra két sorozatot eredményez: $\{\overline{\mathbf{x}}_k\}$-t, és $\{\overline{\mathbf{y}}_k\}$-t. Ekkor a következő eredményt kapjuk:

8.10. tétel. *Az $(\{\overline{\mathbf{x}}_k\}, \{\overline{\mathbf{y}}_k\})$ sorozatpár tetszőleges torlódási pontja az $\mathbf{A}$ mátrixjáték egy egyensúlya.*

Bizonyítás. Mivel $\{\overline{\mathbf{x}}_k\}$ és $\{\overline{\mathbf{y}}_k\}$ valószínűségi vektorok, így korlátos, valós sorozatok, tehát van legalább egy torlódási pontjuk[3]. ■

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix $m \times n$-es. (8.24)-ben mn szorzásra van szükségünk. (8.25)-ben és (8.27)-ben $m + n$ szorzás és osztás van. (8.26)-ban és (8.28)-ban mn szorzás van. Ha L iterációs lépést teszünk, akkor az osztások és szorzások száma:

$$mn + L[2(m + n) + 2mn] = \Theta(Lmn) \ .$$

Az algoritmus pszeudokódja a következő (az algoritmusban $\varepsilon > 0$ a felhasználó által

[3]Nem minden egyensúly kapható meg ezzel a módszerrel, illetve van olyan egyensúlyi pont, amit csak akkor talál meg ez a módszer, ha az egyensúlyból indul. *A fordító.*

megválasztott hibatűrés).

Fiktív-lejátszás

```
1  k ← 1
2  legyen j_1 olyan, hogy teljesüljön x_1^T A e_{j_1} = min_j {x_1^T A e_j}
3  y_1 ← e_{j_1}
4  k ← k + 1
5  ȳ_{k−1} ← 1/(k−1) ((k − 2) ȳ_{k−2} + y_{k−1})
6  legyen i_k olyan, hogy teljesüljön e_{i_k}^T A ȳ_{k−1} = max_i {e_i^T A ȳ_{k−1}}
7  x_k ← e_{i_k}
8  x̄_k ← 1/k ((k − 1) x̄_{k−1} + x_k)
9  legyen j_k olyan, hogy teljesüljön x̄_k^T A e_{j_k} = min_j {x̄_k^T A e_j}
10 y_k ← e_{j_k}
11 if ||x̄_k − x̄_{k−1}|| < ε and ||ȳ_{k−1} − x̄_{k−2}|| < ε
12    then (x̄_k, ȳ_{k−1}) egyensúly
13    else folytassuk a 4-edik sorban
```

8.15. példa. *Harmadik mátrixjáték.* A fent tárgyalt módszert alkalmazzuk a 8.14. példában tárgyalt mátrixjátékra. A módszer kezdő állapota: $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)^T$. 100 lépés után: $\overline{\mathbf{x}}_{101} = (0.446, 0.287, 0.267)^T$ és $\overline{\mathbf{y}}_{101} = (0.386, 0.436, 0.178)^T$. Ha ezeket az értékeket az egyensúlyhoz hasonlítjuk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az eltérés kisebb, mint 0.126, tehát a módszer lassan konvergál.

8.2.6. Szimmetrikus mátrixjátékok

Az $\mathbf{A}$ mátrixjátékot, ahol $\mathbf{A}$ ferdén-szimmetrikus, ***szimmetrikus mátrixjátéknak*** nevezzük. Ebben az esetben $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ és a két lineáris programozási feladat (8.22)-ben megegyezik. Ebből következik, hogy $\alpha = \beta = 0$ (a játék értéke 0), és tetszőleges egyensúlyban a két játékos stratégiái megegyeznek. Tehát a következő eredmény adódik.

8.11. tétel. *Az $\mathbf{x}^\star$ vektor pontosan akkor egyensúlya az $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrixjátéknak, ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^T\mathbf{x} &= 1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{8.29}$$

(8.29) megoldásához a szimplex módszer első fázisa szükséges, ahol a legkedvezőtlenebb esetben a műveletek száma exponenciális. A gyakorlatban azonban általában sokkal kisebb számú műveletre van szükség (8.29) megoldásához.

8.16. példa. *Szimmetrikus mátrixjáték.* Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixjátékot. Ekkor (8.29) a következő formát ölti:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 &\leq 0 \\ -x_1 &\leq 0\,. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy az egyetlen megoldás: $x_1 = 1$ és $x_2 = 0$, ami az első tiszta stratégia.

A következő fejezetben látni fogjuk, hogy egy lineáris programozási feladat ekvivalens egy szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyi problémájával, tehát tetszőleges módszer, amely egy szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyi problémájának megoldására alkalmas, alkalmas lineáris programozási feladat megoldására is, ezért az ilyen módszerek a szimplex módszer alternatíváiként szolgálnak. A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a szimmetria nem túlságosan erős feltétel, mert tetszőleges mátrixjáték megfeleltethető egy vele ekvivalens szimmetrikus mátrixjátéknak.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrixjátékot, és szerkesszük meg a következő ferdén-szimmetrikus $\mathbf{P}$ mátrixot:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{m\times m} & \mathbf{A} & -\mathbf{1}_m \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{1}_m^T & -\mathbf{1}_n^T & 0 \end{pmatrix} .$$

Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{P}$ mátrixjátékok a következő értelemben ekvivalensek. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, ami nem túl erős feltétel, hiszen $\mathbf{A}$ elemeihez egy megfelelő konstanst hozzáadva $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ elérhető, és az egyensúlyok nem változnak.

8.12. tétel. *Legyen* $\mathbf{P}$ *szimmetrikus mátrixjáték, melyet* $\mathbf{A}$ *mátrixjátékból kaptunk, ekkor igaz a következő két állítás:*

1. *Ha* $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix}$ *egyensúlyi stratégiája a* $\mathbf{P}$ *szimmetrikus mátrixjátéknak, akkor az* $\mathbf{x} = (1/a)\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = (1/a)\mathbf{v}$ *vektorpár egyensúlya az* $\mathbf{A}$ *mátrixjátéknak, és az* $\mathbf{A}$ *mátrixjáték értéke:* $v = \lambda/a$, *ahol* $a = (1-\lambda)/2$.
2. *Ha az* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *vektorpár egyensúlya az* $\mathbf{A}$ *mátrixjátéknak, és* v *az* $\mathbf{A}$ *mátrixjáték értéke, akkor a*

$$\mathbf{z} = \frac{1}{2+v}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ v \end{pmatrix}$$

vektor egyensúlya a $\mathbf{P}$ *szimmetrikus mátrixjátéknak.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{z}$ egyensúly a $\mathbf{P}$ szimmetrikus mátrixjátékban (1. pont). Ekkor $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$, és $\mathbf{Pz} \leq \mathbf{0}$, tehát

$$\begin{aligned} \mathbf{Av} - \lambda\mathbf{1}_m &\leq \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{u} + \lambda\mathbf{1}_n &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_m^T\mathbf{u} - \mathbf{1}_n^T\mathbf{v} &\leq 0 . \end{aligned} \tag{8.30}$$

Először megmutatjuk, hogy $\lambda \in (0,1)$, tehát $a \neq 0$. Tegyük fel, hogy $\lambda = 1$, ekkor (mivel $\mathbf{z}$ valószínűségi vektor) $\mathbf{u} = \mathbf{0}_m$ és $\mathbf{v} = \mathbf{0}_n$, ami ellentmond (8.30) második egyenlőtlenségének. Ha $\lambda = 0$, akkor $\mathbf{1}_m^T\mathbf{u} + \mathbf{1}_n^T\mathbf{v} = 1$, és (8.30) harmadik egyenlőtlensége miatt $\mathbf{v}$-nek van legalább egy pozitív komponense, mely ellentmond (8.30) első egyenlőtlenségének.

Most megmutatjuk, hogy $\mathbf{1}_m^T\mathbf{u} = \mathbf{1}_n^T\mathbf{v}$. (8.30)-ból azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T\mathbf{Av} - \lambda\mathbf{u}^T\mathbf{1}_m &\leq 0 , \\ -\mathbf{v}^T\mathbf{A}^T\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}^T\mathbf{1}_n &\leq 0 . \end{aligned}$$

A két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$\mathbf{v}^T\mathbf{1}_n - \mathbf{u}^T\mathbf{1}_m \le 0\,.$$

Ezt (8.30) harmadik egyenlőtlenségével kombinálva kapjuk, hogy $\mathbf{1}_m^T\mathbf{u} - \mathbf{1}_n^T\mathbf{v} = 0$.

Legyen $a = (1-\lambda)/2 \ne 0$, ekkor $\mathbf{1}_m^T\mathbf{u} = \mathbf{1}_n^T\mathbf{v} = a$, így mind $\mathbf{x} = \mathbf{u}/a$, mind $\mathbf{y} = \mathbf{v}/a$ valószínűségi vektor, és (8.30)-ból következik, hogy:

$$\begin{array}{rcccl} \mathbf{A}^T\mathbf{x} & = & \frac{1}{a}\mathbf{A}^T\mathbf{u} & \ge & \frac{\lambda}{a}\mathbf{1}_n\,, \\ \mathbf{A}\mathbf{y} & = & \frac{1}{a}\mathbf{A}\mathbf{v} & \le & \frac{\lambda}{a}\mathbf{1}_m\,. \end{array}$$

Legyenek $\alpha = \lambda/a$ és $\beta = -\lambda/a$, ekkor $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorpár megoldása (8.22)-nek és $\alpha + \beta = 0$, tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektorpár egyensúlya az $\mathbf{A}$ mátrixjátéknak.

A 2. pont hasonlóan látható be, itt nem részletezzük. ■

8.2.7. Lineáris programozás és mátrixjátékok

Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy egy lineáris programozási feladatot meg lehet oldani úgy, hogy egy szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyi stratégiáit keressük meg. Tehát tetszőleges olyan módszer, mely alkalmas egy szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyainak meghatározására, alkalmas a szimplex módszer kiváltására.

Tekintsük a következő primál-duál lineáris programozási feladatpárt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \max \\ \mathbf{x} & \ge & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \le & \mathbf{b} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \to & \min \\ \mathbf{y} & \ge & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \ge & \mathbf{c}\,. \end{array} \tag{8.31}$$

Szerkesszük meg a következő ferdén-szimmetrikus mátrixot:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & \mathbf{0} & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

8.13. tétel. *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \lambda \end{pmatrix}$ *egyensúlya a* $\mathbf{P}$ *szimmetrikus mátrixjátéknak, és* $\lambda > 0$. *Ekkor*

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v} \quad \textit{és} \quad \mathbf{y} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{u}$$

optimális megoldásai a (8.31) *primál-duál feladatpárnak (*$\mathbf{x}$ *a primálnak,* $\mathbf{y}$ *a duálnak).*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{z}$ egyensúly, akkor $\mathbf{P}\mathbf{z} \le \mathbf{0}$, azaz

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda\mathbf{b} & \le & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{u} + \lambda\mathbf{c} & \le & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{u} - \mathbf{c}^T\mathbf{v} & \le & \mathbf{0}\,. \end{array} \tag{8.32}$$

Mivel $\mathbf{z} \ge \mathbf{0}$ és $\lambda > 0$, így mind az $\mathbf{x} = (1/\lambda)\mathbf{v}$, mind az $\mathbf{y} = (1/\lambda)\mathbf{u}$ vektor nemnegatív.

Osszuk el (8.32) első két egyenlőtlenségét λ-val, ekkor

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c}\ ,$$

ahonnan következik, hogy $\mathbf{x}$ megengedett megoldása a primál feladatnak, és $\mathbf{y}$ megengedett megoldása a duál feladatnak. (8.32) harmadik egyenlőtlenségéből azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}\ .$$

Tudjuk azonban

$$\mathbf{b}^T\mathbf{y} \ge (\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{y}) \ge \mathbf{x}^T\mathbf{c} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}\ ,$$

tehát $\mathbf{b}^T\mathbf{y} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, melyből az következik, hogy a primál feladat célfüggvénye $\mathbf{x}$-ben és a duál feladat célfüggvénye $\mathbf{y}$-ban egyenlő. Ekkor az erős dualitási tétel miatt $\mathbf{x}$ optimális megoldása a primál feladatnak és $\mathbf{y}$ optimális megoldása a duál feladatnak. ■

8.17. példa. *Lineáris programozás.* Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max \\ x_1 &\ge 0 \\ -x_1 + x_2 &\ge 1 \\ 5x_1 + 7x_2 &\le 25\ . \end{aligned}$$

Először fel kell írnunk a feladatot mint primál feladatot. Vezessünk be két új változót:

$$x_2^+ = \begin{cases} x_2, & \text{ha } x_2 \ge 0\ , \\ 0 & \text{különben}\ , \end{cases}$$

$$x_2^- = \begin{cases} -x_2, & \text{ha } x_2 < 0\ , \\ 0 & \text{különben}\ . \end{cases}$$

és szorozzuk meg a második egyenlőtlenséget -1-gyel. Ekkor a következő feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- &\to \max \\ x_1, x_2^+, x_2^- &\ge 0 \\ x_1 - x_2^+ + x_2^- &\le -1 \\ 5x_1 + 7x_2^+ - 7x_2^- &\le 25\ . \end{aligned}$$

Így

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 7 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = (1, 2, -2)\ .$$

A $\mathbf{P}$ mátrix pedig a következő lesz:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 5 & 7 & -7 & \vdots & -25 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & -7 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ -1 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 25 & \vdots & -1 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

8.2.8. A Neumann-módszer

A fiktív lejátszás módszere egy iterációs algoritmus, ahol a játékosok minden lépésben hozzáigazítják stratégiáikat a többi játékos stratégiáihoz. Ez a módszer tehát úgy tekinthető, mint egy diszkrét rendszer megvalósulása, ahol a játékosok stratégiaválasztásai az állapotváltozók. Neumann János a szimmetrikus játékok esetére bevezetett egy folytonos megközelítést, ahol a játékosok folyamatosan módosítják a stratégiáikat. Ez a módszer alkalmazható tetszőleges mátrixjátékra, hiszen – amint korábban láttuk – bármely mátrixjáték ekvivalens egy szimmetrikus mátrixjátékkal. Ez a módszer szintén használható lineáris programozási feladatok megoldására, hiszen korábban láttuk, hogy minden primál-duál feladatpár visszavezethető egy szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyi problémájára.

Legyen a továbbiakban $\mathbf{P}$ n-edrendű ferdén-szimmetrikus mátrix. A $\mathcal{P}_2$ játékos $\mathbf{y}(t)$ stratégiája egy függvény, mely a $t \ge 0$ idő változótól függ. Mielőtt a rendszer dinamikáját felírnánk, bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{llllrcl} u_i: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, & u_i(\mathbf{y}(t)) & = & \mathbf{e}_i^T\mathbf{P}\mathbf{y}(t) \quad (i=1,2,\ldots,n)\,, \\ \phi: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, & \phi(u_i) & = & \max\{0,u_i\}\,, \\ \Phi: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, & \Phi(\mathbf{y}(t)) & = & \sum_{i=1}^n \phi(u_i(\mathbf{y}(t)))\,. \end{array} \tag{8.33}$$

Oldjuk meg a következő nemlineáris kezdetiérték-feladatot tetszőleges $\mathbf{y}_0$-ra:

$$y_j'(t) = \phi(u_j(\mathbf{y}(t))) - \Phi(\mathbf{y}(t))y_j(t), \quad y_j(0) = y_{j0} \quad (1 \le j \le n)\,. \tag{8.34}$$

Mivel a jobb oldalon lévő kifejezés folytonos, így (8.34)-nek van legalább egy megoldása. A jobb oldalon lévő kifejezés a következőképpen értelmezhető. Tegyük fel, hogy $\phi(u_j(\mathbf{y}(t))) > 0$. Ekkor ha $\mathcal{P}_2$ az $\mathbf{y}(t)$ stratégiát választja, akkor $\mathcal{P}_1$ pozitív kifizetést tud elérni az $\mathbf{e}_j$ stratégia választásával, mely választás negatív kifizetést eredményez a $\mathcal{P}_2$ játékosnak. Ha azonban $\mathcal{P}_2$ egyre úgy növeli $y_j(t)$-t, hogy $\mathbf{e}_j$ stratégiát választ ő is, akkor az $\mathbf{e}_j^T\mathbf{P}\mathbf{e}_j$ kifizetése nullává válik, tehát megnő. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_2$ érdeke $y_j(t)$ növelése. Pontosan ezt fejezi ki a jobb oldali kifejezés első tagja. A második tag azt biztosítja, hogy $\mathbf{y}(t)$ valószínűségi vektor maradjon minden $t \ge 0$-ra.

(8.34) jobb oldalának kiszámításához minden t-re N^2+N szorzásra van szükség. A teljes számítási költség függ a megoldás intervallumának a hosszától, a választott lépésnagyságtól, és a differenciálegyenletet megoldó módszer megválasztásától.

8.14. tétel. *Tegyük fel, hogy $t_1, t_2, \ldots$ egy szigorúan növekedő nemkorlátos sorozat. Ekkor az $\mathbf{y}(t_n)$ sorozat minden torlódási pontja egyensúlyi stratégia, és létezik egy olyan c konstans, hogy*

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{P}\mathbf{y}(t_k) \le \frac{\sqrt{n}}{c+t_k} \quad (i=1,2,\ldots,n)\,. \tag{8.35}$$

Bizonyítás. Először azt kell megmutatnunk, hogy $\mathbf{y}(t)$ valószínűségi vektor minden $t \ge 0$-ra. Tegyük fel, hogy valamilyen j-re és $t_1 > 0$-ra $y_j(t_1) < 0$. Legyen

$$t_0 = \sup\{t | 0 < t < t_1, y_j(t) \ge 0\}\,.$$

Ekkor $y_j(t)$ folytonossága és $y_j(0) \geq 0$ miatt $y_j(t_0) = 0$, és minden $\tau \in (t_0, t_1)$-re, $y_j(\tau) < 0$. Az előzőekből következik, hogy minden $\tau \in (t_0, t_1]$-re

$$y_j'(\tau) = \phi(u_j(\mathbf{y}(\tau))) - \Phi(\mathbf{y}(\tau))y_j(\tau) \geq 0 \ .$$

A Lagrange-középérték tétel miatt létezik $\tau \in (t_0, t_1)$, hogy

$$y_j(t_1) = y_j(t_0) + y_j'(\tau)(t_1 - t_0) \geq 0 \ ,$$

ami ellentmondás. Tehát $y_j(t)$ nemnegatív minden $t \geq 0$-ra. A következőkben megmutatjuk, hogy $\sum_{j=1}^n y_j(t) = 1$ minden $t \geq 0$-ra. Legyen $f(t) = 1 - \sum_{j=1}^n y_j(t)$, ekkor

$$f'(t) = -\sum_{j=1}^n y_j'(t) = -\sum_{j=1}^n \phi(u_j(\mathbf{y}(t))) + \Phi(\mathbf{y}(t))(\sum_{j=1}^n y_j(t)) = \Phi(\mathbf{y}(t))(1 - \sum_{j=1}^n y_j(t)) \ ,$$

tehát $f(t)$ megoldása a következő homogén rendszernek:

$$f'(t) = -\Phi(\mathbf{y}(t))f(t)$$

az $f(0) = 1 - \sum_{j=1}^n y_{j0} = 0$ kezdetiérték mellett. Tehát, minden $t \geq 0$-ra $f(t) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{y}(t)$ valószínűségi vektor minden $t \geq 0$-ra.

Tegyük fel, hogy valamilyen $t \geq 0$ mellett $y_i(u_i(\mathbf{y}(t))) > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(u_i(\mathbf{y}(t))) &= \sum_{j=1}^n p_{ij}y_j'(t) = \sum_{j=1}^n p_{ij}[\phi(u_j(\mathbf{y}(t))) - \Phi(\mathbf{y}(t))y_j(t)] \\ &= \sum_{j=1}^n p_{ij}\phi(u_j(\mathbf{y}(t))) - \Phi(\mathbf{y}(t))\phi(u_i(\mathbf{y}(t))) \ . \end{aligned} \tag{8.36}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\phi(u_i(\mathbf{y}(t)))$-vel, és adjuk össze az így kapott egyenlőségeket $i = 1, 2, \ldots, n$-re:

$$\sum_{i=1}^n \phi(u_i(\mathbf{y}(t)))\frac{d}{dt}\phi(u_i(\mathbf{y}(t))) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij}\phi(u_i(\mathbf{y}(t)))\phi(u_j(\mathbf{y}(t))) - \Phi(\mathbf{y}(t))(\sum_{i=1}^n \phi^2(u_i(\mathbf{y}(t)))) \ . \tag{8.37}$$

Mivel $\mathbf{P}$ ferdén-szimmetrikus, így az első tag nulla. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség a töréspont (ahol $\phi(u_i(\mathbf{y}(t)))$ deriváltja nem létezik) kivételével akkor is érvényes marad, ha $\phi(u_i(\mathbf{y}(t))) = 0$, így (8.36) igaz marad.

Most tegyük fel, hogy valamilyen pozitív t-re $\Phi(\mathbf{y}(t)) = 0$. Ekkor minden i-re $\phi(u_i(\mathbf{y}(t))) = 0$. Mivel (8.37) átírható

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{y}(t)) = -\Phi(\mathbf{y}(t))\Psi(\mathbf{y}(t)) \tag{8.38}$$

formába, ahol

$$\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \Psi(\mathbf{y}(t)) = \sum_{i=1}^n \phi^2(u_i(\mathbf{y}(t))) \ ,$$

így látható, hogy $\Psi(\mathbf{y}(t))$ kielégíti a homogén egyenletet nulla kezdetiérték mellett, tehát a megoldás nulla marad minden $\tau \geq t$-re. Ebből következik, hogy $\phi(u_i(\mathbf{y}(\tau))) = 0$ megoldásra $\mathbf{Py}(\tau) \leq \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{y}(\tau)$ egyensúly.

Ha $\Phi(\mathbf{y}(\mathbf{t})) > 0$ minden $t \geq 0$-ra, akkor $\Psi(\mathbf{y}(t)) > 0$, és könnyen látható, hogy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{y}(t)) \leq -\sqrt{\Psi(\mathbf{y}(t))}\Psi(\mathbf{y}(t)) \ ,$$

azaz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{y}(t))(\Psi(\mathbf{y}(t)))^{-\frac{3}{2}} \leq -1 \ .$$

Mindkét oldalt a $[0, t]$ intervallumon integrálva azt kapjuk, hogy

$$-\Psi(\mathbf{y}(t))^{-(1/2)} + c \leq -t \ ,$$

ahol $c = (\Psi(\mathbf{y}(0)))^{-(1/2)}$, melyből következik

$$(\Psi(\mathbf{y}(t)))^{1/2} \leq \frac{1}{c+t} \ . \tag{8.39}$$

A Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{Py}(t) = u_i(\mathbf{y}(t)) \leq \phi(u_i(\mathbf{y}(t))) \leq \Phi(\mathbf{y}(t)) \leq \sqrt{n\Psi(\mathbf{y}(t))} \leq \frac{\sqrt{n}}{c+t} \ , \tag{8.40}$$

mely egyenlőtlenség az u_i folytonossága miatt még a töréspontokban is igaz. Végül vegyük a következő sorozatot: $\{\mathbf{y}(t_k)\}$, ahol t_k monoton növekedő nem korlátos sorozat. Mivel $\mathbf{y}(t_k)$-k valószínűségi vektorok, így korlátosak, tehát van legalább egy $\mathbf{y}^\star$ torlódási pontjuk. (8.40)-ből t_k-val a végtelenbe tartva azt kapjuk, hogy $\mathbf{Py}^\star \leq \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{y}^\star$ egyensúly. ■

8.18. példa. *Negyedik mátrixjáték.* Tekintsük a 8.13. példában bevezetett mátrixjátékot. A Neumann-módszer alkalmazásához először fel kell írni az ekvivalens szimmetrikus mátrixjátékot. Az átírás módszere, mely a 8.12. tételben található, megköveteli, hogy a mátrix elemei pozitívak legyenek. Anélkül, hogy az egyensúlyok megváltoznának, az $\mathbf{A}$ mátrix minden eleméhez hozzáadhatunk 2-t, ekkor a következő mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} ,$$

és a fent említett módszer segítségével

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 & 3 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 & 2 & 5 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 5 & 5 & \vdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -4 & -4 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -3 & -2 & -5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -2 & -5 & -5 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} .$$

A (8.34) differenciálegyenletet a negyedrendű Runge–Kutta-módszerrel oldottuk meg a $[0, 100]$ intervallumon, $h = 0.01$ lépésnagysággal az $\mathbf{y}(0) = (1, 0, \ldots, 0)^T$ kezdetiérték mellett. $\mathbf{y}(100)$-ra kaptuk a következő közelítő értékeket:

$$\mathbf{x} \approx (0.563619, 0.232359, 0.241988) \ ,$$

$$\mathbf{y} \approx (0.485258, 0.361633, 0.115144) \ .$$

Ezen közelítés az eredeti játék egy egyensúlyának becslése. Hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az egyensúlyi vektorpárral:

$$\mathbf{x} = \left(\frac{4}{7}, \frac{4}{21}, \frac{5}{21}\right) \quad \text{és} \quad \mathbf{y} = \left(\frac{3}{7}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right) \ .$$

Látható, hogy a maximális hiba 0.067.

8.2.9. Átlósan szigorúan konkáv játékok

Tekintsünk egy N személyes folytonos játékot, és tegyük fel, hogy a 8.2.3. pont feltevései teljesülnek. Tegyük fel továbbá, hogy minden S_k korlátos minden k-ra, $\mathbf{g}_k$ minden komponense szerint konkáv, és f_k konkáv s_k-ban tetszőlegesen rögzített $s_1, \ldots, s_{k-1}, s_{k+1}, \ldots, N$ mellett. A 8.3. tétel miatt a fenti feltételek mellett a játéknak van legalább egy egyensúlya. Általában az egyensúly unicitása még akkor sem biztosított, ha minden f_k szigorúan kvázi-konkáv s_k szerint. A következő példa ezt a tényt mutatja be.

8.19. példa. *Ellenpélda.* Tekintsük a következő kétszemélyes játékot: $S_1 = S_2 = [0, 1]$ és $f_1(s_1, s_2) = f_2(s_1, s_2) = 1 - (s_1 - s_2)^2$. Világos, hogy mindkét kifizetőfüggvény szigorúan konkáv, és mégis végtelen sok egyensúly van: $s_1^\star = s_2^\star \in [0, 1]$.

Válasszunk egy nemnegatív $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ vektort, és definiáljuk a következő függvényt:

$$\mathbf{h} : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} r_1 \nabla_1 f_1(\mathbf{s})^T \\ r_2 \nabla_2 f_2(\mathbf{s})^T \\ \vdots \\ r_N \nabla_N f_N(\mathbf{s})^T \end{pmatrix} , \tag{8.41}$$

ahol $M = \sum_{k=1}^{N} n_k$, és $\nabla_k f_k$ az f_k függvény s_k szerinti gradiens(sor)vektora. Egy játékot ***átlósan szigorúan konkávnak*** hívunk, ha minden $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)} \in S$, $\mathbf{s}^{(1)} \neq \mathbf{s}^{(2)}$-re, és valamilyen $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$-ra

$$(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})^T (\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{r})) < 0 \; . \tag{8.42}$$

8.15. tétel. *Egy átlósan szigorúan konkáv játéknak pontosan egy egyensúlya van.*

Bizonyítás. A 8.3. tétel miatt létezik egyensúly. Az egyértelműség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^{(1)}$ és $\mathbf{s}^{(2)}$ két egyensúly, melyek kielégítik (8.9) feltételeket és $\mathbf{s}^{(1)} \neq \mathbf{s}^{(2)}$. Ekkor $l = 1, 2$-re

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k^{(l)T} \mathbf{g}_k(s_k^{(l)}) &= 0 \\ \nabla_k f_k(\mathbf{s}^{(l)}) + \mathbf{u}_k^{(l)T} \nabla_k \mathbf{g}_k(s_k^{(l)}) &= \mathbf{0}^T \; . \end{aligned}$$

A második egyenlőséget a következő formába lehet átírni:

$$\nabla_k f_k(\mathbf{s}^{(l)}) + \sum_{j=1}^{m_k} u_{kj}^{(l)} \nabla_k g_{kj}(s_k^{(l)}) = 0 \; , \tag{8.43}$$

ahol $u_{kj}^{(l)}$ a $\mathbf{u}_k^{(l)}$-nak, és g_{kj} a $\mathbf{g}_k$ j-edik komponense. Szorozzuk meg (8.43)-at $(r_k(s_k^{(2)} - s_k^{(1)})^T)$-tal $l = 1$ esetén, és $r_k(s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^T$-tal $l = 2$ esetén. Adjuk össze az így kapott egyenlőségeket $k = 1, 2, \ldots, N$-re. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 0 = \{(\mathbf{s}^{(2)} - \mathbf{s}^{(1)})\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{r}) + (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{r})\} \\ + \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} r_k [u_{kj}^{(1)} (s_k^{(2)} - s_k^{(1)})^T \nabla_k g_{kj}(s_k^{(1)}) + u_{kj}^{(2)} (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^T \nabla_k g_{kj}(s_k^{(2)})] \; . \end{aligned} \tag{8.44}$$

Vegyük észre, hogy az átlósan szigorú konkavitás miatt az első két tag összege pozitív, $\mathbf{g}_k$ komponenseinek a konkavitása miatt pedig

$$(s_k^{(2)} - s_k^{(1)})^T \nabla_k g_{kj}(s_k^{(1)}) \geq g_{kj}(s_k^{(2)}) - g_{kj}(s_k^{(1)})$$

és

$$(s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^T \nabla_k g_{kj}(s_k^{(2)}) \geq g_{kj}(s_k^{(1)}) - g_{kj}(s_k^{(2)}) \; .$$

Tudjuk, hogy minden k-ra, l-re

$$0 = \mathbf{u}_k^{(l)T} \mathbf{g}_k(s_k^{(l)}) = \sum_{j=1}^{m_k} u_{kj}^{(l)} g_{kj}(s_k^{(l)}) \; ,$$

ekkor (8.44)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} r_k [u_{kj}^{(1)} (g_{kj}(s_k^{(2)}) - g_{kj}(s_k^{(1)})) + u_{kj}^{(2)} (g_{kj}(s_k^{(1)}) - g_{kj}(s_k^{(2)}))] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_k} r_k [u_{kj}^{(1)} g_{kj}(s_k^{(2)}) + u_{kj}^{(2)} g_{kj}(s_k^{(1)})] \geq 0 \; , \end{aligned}$$

ami nyilvánvaló ellentmondás, tehát $\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{s}^{(2)}$. ■

Az egyensúly egyértelműségének ellenőrzése

A következő tételben egy olyan, a gyakorlati esetekben nagyon hasznos módszert mutatunk be, melynek segítségével ellenőrizhetjük egy N személyes játék átlósan szigorúan konkavitását.

8.16. tétel. *Tegyük fel, hogy S konvex, f_k kétszer folytonosan differenciálható minden k-ra, és létezik $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$, hogy $\mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{r})^T$ negatív definit, ahol $\mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ a $\mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ Jakobi-mátrixa. Ekkor a játék átlósan szigorúan konkáv.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)} \in S$ és $\mathbf{s}^{(1)} \neq \mathbf{s}^{(2)}$. Ekkor minden $\alpha \in [0, 1]$-re $\mathbf{s}(\alpha) = \alpha\mathbf{s}^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbf{s}^{(2)} \in S$ és

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{h}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r})(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)}) \ .$$

Mindkét oldalt $[0, 1]$-en integrálva

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{J}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r})(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})d\alpha \ ,$$

és mindkét oldalt újra megszorozva $(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})^T$-tal

$$\begin{aligned}(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})^T(\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{r})) &= \int_0^1 (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})^T \mathbf{J}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r})(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})d\alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})^T(\mathbf{J}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{s}(\alpha), \mathbf{r})^T)(\mathbf{s}^{(1)} - \mathbf{s}^{(2)})d\alpha < 0 \ ,\end{aligned}$$

tehát a bizonyítást befejeztük. ■

8.20. példa. *Egyszerű kétszemélyes játék.* Tekintsük a következő egyszerű kétszemélyes játékot, ahol $S_1 = S_2 = [0, 1]$, és a kifizetőfüggvények:

$$f_1(s_1, s_2) = -s_1^2 + s_1 - s_1 s_2$$

és

$$f_2(s_1, s_2) = -s_2^2 + s_2 - s_1 s_2 \ .$$

Könnyen látható, hogy – az átlósan szigorú konkavitáson kívül – minden tulajdonság, amit ebben az alfejezetben feltettünk, teljesül. A 8.16. tételt használjuk a hiányzó tulajdonság megmutatására. Ebben az esetben

$$\nabla_1 f_1(s_1, s_2) = -2s_1 + 1 - s_2, \quad \nabla_2 f_2(s_1, s_2) = -2s_2 + 1 - s_1 \ ,$$

így

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} r_1(-2s_1 + 1 - s_2) \\ r_2(-2s_2 + 1 - s_1) \end{pmatrix} .$$

A Jakobi-mátrix:

$$\mathbf{J}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -2r_1 & -r_1 \\ -r_2 & -2r_2 \end{pmatrix} .$$

Megmutatjuk, hogy valamilyen $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$-ra a

$$\mathbf{J}(\mathbf{s},\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{s},\mathbf{r})^T = \begin{pmatrix} -4r_1 & -r_1 - r_2 \\ -r_1 - r_2 & -4r_2 \end{pmatrix}$$

mátrix negatív definit. Legyen például $r_1 = r_2 = 1$, ekkor a fenti mátrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix},$$

a karakterisztikus polinom:

$$\phi(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -2 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 8\lambda + 12\,,$$

mely polinomnak a két gyöke $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -6$.

Az egyensúly iteratív kiszámítása

A 8.4. tételben láttuk, hogy $\mathbf{s}^\star \in S$ pontosan akkor egyensúly, ha

$$\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}^\star) \geq \mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}) \tag{8.45}$$

minden $\mathbf{s} \in S$-re, ahol $\mathbf{H_r}$ a (8.4)-ben definiált összegzőfüggvény. A következőkben feltesszük, hogy az alfejezet elején feltett tulajdonságok érvényesek, és létezik olyan $\mathbf{r} \geq \mathbf{0}$, hogy (8.42) érvényes.

Először a variációs egyenlőtlenség és (8.45) ekvivalenciáját mutatjuk meg.

8.17. tétel. *Egy $\mathbf{s}^\star \in S$ vektor pontosan akkor elégíti ki (8.45)-öt, ha*

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{r})^T(\mathbf{s}-\mathbf{s}^\star) \leq 0 \tag{8.46}$$

minden $\mathbf{s} \in S$ stratégiára, ahol $\mathbf{h}(\mathbf{s},\mathbf{r})$-et (8.41)-ben definiáltuk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^\star$ kielégíti (8.45)-öt. Ekkor $\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s})$ – mint $\mathbf{s}$ argumentumú függvény – felveszi a maximumát $\mathbf{s} = \mathbf{s}^\star$-ban, tehát

$$\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}^\star)(\mathbf{s}-\mathbf{s}^\star) \leq 0$$

minden $\mathbf{s} \in S$ stratégiára. Mivel $\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}^\star) = \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{r})$, így $\mathbf{s}^\star$ kielégíti (8.46)-t.

Most tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^\star$ kielégíti (8.46)-ot. $\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}^\star)$ $\mathbf{s}$ szerinti konkavitása, és a játék átlósan szigorú konkavitása miatt

$$\mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}^\star) - \mathbf{H_r}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{s}) \geq \mathbf{h}(\mathbf{s},\mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star-\mathbf{s}) \geq \mathbf{h}(\mathbf{s},\mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star-\mathbf{s}) + \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star,\mathbf{r})^T(\mathbf{s}-\mathbf{s}^\star) > 0\,,$$

tehát $\mathbf{s}^\star$ kielégíti (8.45)-öt. ■

Látható, hogy bármely – a variációs egyenlőtlenség megoldására alkalmas – módszer használható a játék egyensúlyi problémájának megoldására.

A következőkben definiálunk egy olyan speciális kétszemélyes, zérusösszegű-játékot, melynek egyensúlyi problémája ekvivalens az eredeti N személyes játék egyensúlyi problémájával.

8.18. tétel. *Az* $\mathbf{s}^\star \in S$ *vektor pontosan akkor elégíti ki* (8.46)*-ot, ha* $(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star)$ *egyensúlya egy olyan kétszemélyes játéknak, ahol mindkét stratégiahalmaz* S*, a kifizetőfüggvények pedig* $f_1(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{s}, \mathbf{z})$ *és* $f_2(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = -f(\mathbf{s}, \mathbf{z})$*, ahol* $f(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s} - \mathbf{z})$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{s}^\star \in S$ kielégíti (8.45)-t. Ekkor kielégíti (8.46)-t is, így

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^\star) \le 0 = f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star) \; .$$

Még azt kell megmutatnunk, hogy

$$-f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}) \le 0 = -f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star) \; .$$

Indirekt módon tegyük el, hogy valamilyen $\mathbf{s}$-re $f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}) < 0$. Ekkor (8.42) és (8.46) miatt

$$\begin{aligned} 0 > f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}) &= \mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}) > \mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}) + (\mathbf{s} - \mathbf{s}^\star)^T(\mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{r})) \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}) \ge 0 \; , \end{aligned}$$

ami ellentmondás. Most tegyük fel, hogy $(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star)$ egyensúlya a tételben bevezetett játéknak. Ekkor tetszőleges $\mathbf{s}, \mathbf{z} \in S$-re

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^\star) \le f(\mathbf{s}^\star, \mathbf{s}^\star) = 0 \le f(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \; .$$

Az első egyenlőtlenség átírható a következő formába:

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{r})^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}^\star) \le 0 \; ,$$

tehát (8.46) teljesül, így teljesül (8.45) is. ■

Tekintsük a következő iterációs eljárást.

Legyen $\mathbf{s}^{(1)} \in S$ tetszőleges, és oldjuk meg a következő feladatot:

$$\begin{array}{rcl} f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{(1)}) & \to & \max \\ \mathbf{s} & \in & S \; . \end{array} \tag{8.47}$$

Jelöljük $\mathbf{s}^{(2)}$-vel (8.47) feladat megoldását, és legyen $\mu_1 = f(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)})$. Ha $\mu_1 = 0$, akkor minden $\mathbf{s} \in S$-re

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{(1)}) = \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(1)}) \le 0 \; ,$$

így 8.17. tétel miatt $\mathbf{s}^{(1)}$ egyensúly. Mivel $f(\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(1)}) = 0$, így feltesszük, hogy $\mu_1 > 0$. $k \ge 2$ általános lépésben már van k vektorunk $\mathbf{s}^{(1)}, \mathbf{s}^{(2)}, \ldots, \mathbf{s}^{(k)}$, és $k-1$ skalárunk $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-1} > 0$. Ekkor a következő $\mathbf{s}^{(k+1)}$ vektor és μ_k skalár megoldása a következő feladatnak:

$$\begin{array}{rcll} \mu & \to & \max & \\ f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^{(i)}) & \ge & \mu & (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \mathbf{s} & \in & S \; . & \end{array} \tag{8.48}$$

Vegyük észre, hogy

$$f(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{s}^{(i)}) \ge \mu_{k-1} \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

és

$$f(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)}) = 0.$$

Ekkor tudjuk, hogy $\mu_k \geq 0$.

Az algoritmus pszeudokódja a következő.

Iterál

1 $k \leftarrow 1$
2 oldjuk meg a (8.47) feladatot és legyen $\mathbf{s}^{(2)}$ egy optimális megoldás
3 **if** $f(\mathbf{s}^{(2)}, \mathbf{s}^{(1)}) = 0$
4 **then return** "$\mathbf{s}^{(1)}$ egyensúly"
4 $k \leftarrow k + 1$
5 oldjuk meg a (8.48) feladatot, legyen $\mathbf{s}^{(k+1)}$ egy optimális megoldás
6 **if** $\|\mathbf{s}^{(k+1)} - \mathbf{s}^{(k)}\| < \varepsilon$
7 **then** $\mathbf{s}^{(k+1)}$ egyensúly
8 **else** folytassuk a 4-edik sorban

A fenti algoritmus konvergencia tételének tárgyalása előtt megjegyezzük, hogy abban a speciális esetben, amikor a stratégiahalmazok lineáris egyenlőtlenségekkel vannak megadva (tehát a $\mathbf{g}_k$ függvények lineárisak), a (8.48) feladat minden feladata lineáris, tehát minden iterációs lépésben egy lineáris programozási feladatot kell megoldanunk.

Ha lineáris esetben a szimplex módszert alkalmazzuk minden iterációs lépésben, akkor a számítási költség exponenciális, tehát az egész eljárás számítási költsége exponenciális (rögzített lépésszám mellett).

8.19. tétel. *Az $\{\mathbf{s}^{(k)}\}$ fenti módszer által generált sorozatnak van olyan $\{\mathbf{s}^{(k_i)}\}$ részsorozata, mely az N személyes játék egyetlen egyensúlyához konvergál.*

Bizonyítás. A bizonyítás több lépésből áll.

Először azt mutatjuk meg, hogy $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$. Mivel (8.48) minden iterációban egy új feltétellel bővül, tehát $\{\mu_k\}$ nem lehet növekvő. Tudjuk azt is, hogy $\{\mu_k\}$ nemnegatív, tehát konvergens. Az $\{\mathbf{s}^{(k)}\}$ sorozat korlátos, hiszen minden tagja a korlátos S halmazból való, így van egy $\{\mathbf{s}^{(k_i)}\}$ konvergens részsorozata. Vegyük észre, hogy

$$0 \leq \mu_{k_i - 1} = \min_{1 \leq k \leq k_i - 1} \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T (\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^{(k)}) \leq \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k_{i-1})}, \mathbf{r})^T (\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^{(k_{i-1})}) ,$$

ahol az egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart. Tehát $\mu_{k_i - 1} \to 0$. Mivel $\{\mu_k\}$ monoton, így $\{\mu_k\} \to 0$.

Most legyen $\mathbf{s}^\star$ az N-személyes játék egyensúlya, és legyen

$$\delta(t) = \min\{(\mathbf{h}(\mathbf{s}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{z}, \mathbf{r}))^T (\mathbf{z} - \mathbf{s}) \| \|\mathbf{s} - \mathbf{z}\| \geq t,\ \mathbf{z}, \mathbf{s} \in S\} . \qquad (8.49)$$

(8.42) miatt $\delta(t) > 0$ minden $(t > 0)$-ra. Definiáljuk a k_i indexeket a következőképpen:

$$\delta(\|\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^\star\|) = \min_{1 \leq k \leq i} \delta(\|\mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{s}^\star\|) \quad (i = 1, 2, \ldots) .$$

Ekkor minden $k = 1, 2, \ldots, i$-re

$$\begin{aligned}
\delta(\|\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^\star\|) &\leq (\mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{r}))^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}^{(k)}) \\
&= \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}^{(k)}) - \mathbf{h}(\mathbf{s}^\star, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}^{(k)}) \\
&\leq \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}^{(k)}) \ ,
\end{aligned}$$

melyből (8.48) miatt következik:

$$\begin{aligned}
\delta(\|\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^\star\|) &\leq \min_{1\leq k\leq i} \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^\star - \mathbf{s}^{(k)}) \\
&\leq \max_{\mathbf{s}\in S} \min_{1\leq k\leq i} \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s} - \mathbf{s}^{(k)}) \\
&= \min_{1\leq k\leq i} \mathbf{h}(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{r})^T(\mathbf{s}^{(i+1)} - \mathbf{s}^{(k)}) \\
&= \mu_i \ .
\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\lim_{i\to\infty} \delta(\|\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^\star\|) \to 0$. Végül vegyük észre azt, hogy $\delta(t)$ rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. $\delta(t)$ folytonos;
2. ha $t > 0$, akkor $\delta(t) > 0$ (ezt mutatja (8.49));
3. ha egy $\{t^{(k)}\}$ konvergens sorozatra $\delta(t^{(k)}) \to 0$, akkor szükségszerűen $t^{(k)} \to 0$.

A 3. tulajdonság miatt $\|\mathbf{s}^{(k_i)} - \mathbf{s}^\star\| \to 0$, így $\mathbf{s}^{(k_i)} \to \mathbf{s}^\star$. ■

Gyakorlatok

8.2-1. Tekintsünk egy kétszemélyes játékot, ahol a stratégiahalmazok $S_1 = S_2 = [0, 1]$, a kifizetőfüggvények: $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2$ és $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Mutassuk meg, hogy a játéknak egyetlen egyensúlya van, és számítsuk ki ezt az egyensúlyt. Mutassuk meg, hogy ebben a játékban a 8.3. tétel nem alkalmazható az egyensúly létezésének bizonyítására.

8.2-2. Tekintsük az „árháború” játékot, melyben két vállalat ármeghatározó. Tegyük fel, hogy p_1 a $\mathcal{P}_1$, p_2 pedig a $\mathcal{P}_2$ játékos egy stratégiája, ahol $p_1, p_2 \in [0, p_{max}]$ (p_{max} egy rögzített pozitív valós szám), és a kifizetőfüggvények:

$$f_1(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1, & \text{ha } \ p_1 \leq p_2 \ , \\ p_1 - c, & \text{ha } \ p_1 > p_2 \ , \end{cases}$$

$$f_2(p_1, p_2) = \begin{cases} p_2, & \text{ha } \ p_2 \leq p_1 \ , \\ p_2 - c, & \text{ha } \ p_2 > p_1 \ , \end{cases}$$

ahol $c < p_{max}$ rögzített. Van-e ennek a játéknak egyensúlya? Ha van egyensúlya, akkor hány van?

8.2-3. Egy tengeralattjáró rejtőzik a tenger egy részében. A tenger ezen része az egységnégyzettel modellezhető. A tengeralattjáró stratégiája az $\mathbf{x} \in [0, 1] \times [0, 1]$ rejtőzködési helye. Egy repülőgép bombázza az $\mathbf{y} = [0, 1] \times [0, 1]$-t, a tenger egy bizonyos helyét. A bombázott hely megválasztása ezen játékos stratégiája. A repülőgép kifizetése a tengeralattjárónak okozott kár nagysága: $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha e^{-\beta\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$, míg a tengeralattjáró kifizetése a neki okozott kár ellentettje: $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Van-e ennek a kétszemélyes játéknak egyensúlya?

8.2-4. A második-legjobb ár aukcióban egy áru kerül eladásra az N licitálók valamelyikének. A licitálók különbözőképpen értékelik a árut: $v_1 < v_2 < \cdots < v_N$. A licitálók egyidejűleg ajánlatot tesznek a árura úgy, hogy közben nem ismerik a többiek ajánlatát. A legmagasabb ajánlatot tevő kapja meg a árut, de a áruért csak a második legmagasabb ajánlatot kell fizetnie. Tehát a $\mathcal{P}_k$ játékos stratégiahalmaza $[0, \infty]$, stratégiája $x_k \in [0, \infty]$, és a kifizetőfüggvénye:

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \begin{cases} v_k - \max_{j \neq k} x_j, & \text{ha } \ x_k = \max_j x_j \ , \\ 0 & \text{különben} \ . \end{cases}$$

Határozzuk meg a $\mathcal{P}_k$ játékos legjobbválasz-leképezését. Van-e a játéknak egyensúlya?

8.2-5. Írjuk fel a Fan-egyenlőtlenséget a 8.2-1. gyakorlatra.

8.2-6. Írjuk fel és oldjuk meg a Fan-egyenlőtlenséget a 8.2-2. gyakorlatra.

8.2-7. Írjuk fel és oldjuk meg a Fan-egyenlőtlenséget a 8.2-4. gyakorlatra.

8.2-8. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a stratégiahalmazok $S_1 = S_2 = [0, 1]$, a kifizetőfüggvények pedig

$$f_1(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2)^2 + 2x_1 - x_2 + 1$$

$$f_2(x_1, x_2) = -(x_1 - 2x_2)^2 - 2x_1 + x_2 - 1$$

Írjuk fel a Fan-egyenlőtlenséget.

8.2-9. Legyenek $N = 2$, $S_1 = S_2 = [0, 10]$, $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - (x_1 + x_2)^2$. Írjuk fel a Kuhn–Tucker-feltételeket, és keressük meg az egyensúlyokat. Oldjuk meg az így kapott feltételrendszert.

8.2-10. Tekintsünk egy háromszemélyes játékot, ahol $S_1 = S_2 = S_3 = [0, 1]$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + x_3$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3)^2 + x_1$ és $f_3(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_1)^2 + x_2$. Írjuk fel a Kuhn–Tucker-feltételeket.

8.2-11. Írjuk fel és oldjuk meg (8.9)-et a 8.2-1. és a 8.2-8. gyakorlatokban bevezetett játékokra.

8.2-12. Írjuk át 8.2-8. gyakorlat Kuhn–Tucker-feltételeit (8.10) formába, és oldjuk meg őket.

8.2-13. Írjuk fel a 8.1-1. gyakorlatban bevezetett véges játék kevert bővítését.

8.2-14. Írjuk fel és oldjuk meg (8.10)-et a 8.2-13. gyakorlatban bevezetett játékra.

8.2-15. Írjuk fel a 8.1-3. gyakorlatban bevezetett játék kevert bővítését. Írjuk fel és oldjuk meg az erre a játékra vonatkozó (8.22)-őt, ha $\alpha = 5$ és $\beta = 3$.

8.2-16. Oldjuk meg a 8.2-15. gyakorlatban bevezetett mátrixjáték egyensúlyi problémáját a fiktív lejátszás módszerével.

8.2-17. Vegyük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixokkal adott bimátrix-játékot. Oldjuk meg ezt a bimátrix-játékot a 8-1. gyakorlatban meghatározott módszerrel.

8.2-18. Oldjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ szimmetrikus mátrixjáték egyensúlyi problémáját lineáris programozással.

8.2-19. Oldjuk meg 8.2-18. gyakorlatot a fiktív lejátszás módszerével.

8.2-20. Írjuk fel a (8.9) Kuhn–Tucker-feltételeket a 8.2-18. gyakorlatra.

8.2-21.⋆ Tekintsük az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixjátékot. Oldjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrixjáték egyensúlyi problémáját lineáris programozással, a fiktív lejátszás módszerével, és írjuk fel a Kuhn–Tucker-feltételeket. *Útmutatás.* Először határozzuk meg az ekvivalens szimmetrikus mátrixjátékot.

8.2-22. Írjuk fel lineáris programozási feladatként az $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixjáték egyensúlyi problémáját.

8.2-23. Írjuk fel egy lineáris programozási feladat megoldását a fiktív lejátszás módszerével, és oldjuk meg az így kapott módszerrel a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \max \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 4\,. \end{aligned}$$

8.2-24. Oldjuk meg a 8.2-21. gyakorlat lineáris programozási feladatát a fiktív lejátszás módszerével.

8.2-25. Oldjuk meg a 8.2-18. gyakorlatot a Neumann-módszerrel.

8.2-26. Oldjuk meg a 8.2-21. gyakorlatot a Neumann-módszerrel.

8.2-27. Oldjuk meg a 8.2-16. gyakorlatot a Neumann-módszerrel.

8.2-28.⋆ Ellenőrizzük a 8.2-25., 8.2-26. és 8.2-27. gyakorlatok eredményeit úgy, hogy a (8.21) lineáris programozási feladat feltételrendszerének érvényességét megvizsgáljuk nulla célfüggvényérték mellett. *Útmutatás.* Minek válasszuk α-t és β-t?

8.2-29. Ismételjük meg a 8.2-23. gyakorlatot a Neumann-módszerrel.

8.2-30. Legyenek $N = 2$, $S_1 = S_2 = [0, 10]$, $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 - (x_1 + x_2)^2$. Mutassuk meg, hogy mindkét kifizetőfüggvény szigorú konkáv (x_1 szerint f_1, és x_2 szerint f_2). Bizonyítsuk be, hogy ennek a játéknak végtelen sok egyensúlya van, tehát a kifizetőfüggvények szigorú konkavitásából nem következik az egyensúly egyértelműsége.

8.2-31. Lehet-e egy mátrixjáték átlósan szigorúan konkáv?

8.2-32. Tekintsük azt a kétszemélyes játékot, ahol a stratégiahalmazok $S_1 = S_2 = [0, 1]$, a kifizetőfüggvények $f_1(x_1, x_2) = -2x_1^2 + x_1(1 - x_2)$, $f_2(x_1, x_2) = -3x_2^2 + x_2(1 - x_1)$. Mutassuk meg, hogy ez a játék kielégíti a 8.16. tétel feltételeit.

8.2-33. Oldjuk meg a 8.2-32. gyakorlatot a (8.47)–(8.48)-ban adott algoritmussal.

8.3. Az oligopol feladat

Az eddigiekben általános módszereket mutattunk be az egyensúlyi probléma megoldására. Majdnem minden speciális játékosztályra vannak azonban olyan speciális módszerek, melyek az adott játékosztály tagjaira alkalmazhatók. Ezen fejezet további részében egy speciális játékot, az ***oligopol játékot*** vesszük górcső alá. Az oligopol játék egy olyan valós helyzetet ír le, amikor N vállalat azonos terméket gyárt vagy azonos szolgáltatást kínál. Ez a modell a ***klasszikus Cournot-modellként*** ismert. A játékosok stratégiái az x_k gyártási mennyiségek, melyek az $S_k = [0, L_k]$ stratégiahalmazokból valók, ahol L_k az adott játékos (vállalat) gyártási kapacitásának felső határa. Feltesszük, hogy a $p(s)$ piaci ár az összesen gyártott $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ mennyiségtől függ, és minden játékos $c_k(x_k)$ gyártási költsége csak a saját gyártási szintjétől függ. A vállalatok profitfüggvényei:

$$f_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p\left(\sum_{l=1}^{N} x_l\right) - c_k(x_k) \; . \tag{8.50}$$

Tehát definiáltuk a $G = \{N; S_1, \ldots, S_N; f_1, \ldots, f_N\}$ játékot.

Fel szokás tenni, hogy a p és c_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) függvények kétszer folytonosan differenciálhatók, továbbá

1. $p'(s) < 0$;
2. $p'(s) + x_k p''(s) \le 0$;
3. $p'(s) - c_k''(x_k) < 0$;

minden k-ra, $x_k \in [0, L_k]$-ra, és $s \in [0, \sum_{l=1}^{N} L_l]$-re.

Az 1–3. feltételek mellett 8.3. tétel feltételei teljesülnek, tehát G-nek van legalább egy egyensúlya.

Legjobbválasz-leképezések

Vegyük észre, hogy az $s_k = \sum_{l \ne k} x_l$ jelölés mellett a k játékos kifizetőfüggvénye átírható a következő formába:

$$x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) \; . \tag{8.51}$$

Mivel S_k kompakt halmaz, és a kifizetőfüggvény szigorúan konkáv x_k szerint, így rögzített s_k mellett a $\mathcal{P}_k$ játékos profitmaximalizáló gyártási szintje egyértelmű, mely a k játékos legjobbválasza – jelöljük ezt $B_k(s_k)$-val.

Könnyen látható, hogy három eset lehetséges: $B_k(s_k) = 0$, ha $p(s_k) - c_k'(0) \le 0$, $B_k(s_k) = L_k$, ha $p(s_k + L_k) + L_k p'(s_k + L_k) - c_k'(L_k) \ge 0$, egyébként $B_k(s_k)$ az egyetlen megoldása a következő monoton egyenletnek:

$$p(s_k + x_k) + x_k p'(s_k + x_k) - c_k'(x_k) = 0 \; .$$

Tegyük fel, hogy $x_k \in (0, L_k)$. Ekkor s_k szerinti implicit deriválással

$$p'(1 + B_k') + B_k' p' + x_k p''(1 + B_k') - c_k'' B_k' = 0 \; ,$$

ahonnan

$$B_k'(s_k) = -\frac{p' + x_k p''}{2p' + x_k p'' - c_k''} \; .$$

Vegyük észre, hogy a 2–3. feltevések miatt

$$-1 < B_k'(s_k) \le 0 \; , \tag{8.52}$$

mely egyenlőtlenség a töréspontok kivételével a másik két esetben is igaz.

A 8.2.1. pontnak megfelelően vezessük be a legjobbválasz-leképezést:

$$\mathbf{B}(x_1, \ldots, x_N) = \left(B_1\left(\sum_{l \ne 1} x_l\right), \ldots, B_N\left(\sum_{l \ne N} x_l\right)\right) \; . \tag{8.53}$$

A feladat a fenti leképezés fixpontjának megkeresése. Másik lehetőség, hogy bevezetünk egy dinamikus folyamatot, amely konvergál az egyensúlyhoz.

A fiktív lejátszás diszkrét módszeréhez hasonló módszert dolgozunk ki, melyben minden vállalat kiválasztja a legjobb válaszát a versenytársai előző periódusban tett lépéseire:

$$x_k(t+1) = B_k(\sum_{l \neq k} x_l(t)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N) \ . \tag{8.54}$$

(8.52) miatt látható, hogy $(N = 2)$-re a jobb oldalon lévő leképezés $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kontrakció, tehát konvergens. Azonban, ha $N > 2$, akkor a konvergenciát nem lehet garantálni. Tekintsük most a fenti rendszer nyilvánvaló módosítását valamilyen $K_k > 0$-val:

$$x_k(t+1) = x_k(t) + K_k(B_k(\sum_{l \neq k} x_l(t)) - x_k(t)) \tag{8.55}$$

minden $k = 1, 2, \ldots, N$-re. Világos, hogy a fenti rendszer minden stabil állapota egyensúly, és bizonyítható, hogy ha K_k megfelelően kicsi, akkor az $x_k(0), x_k(1), x_k(2), \ldots$ sorozatok konvergensek minden $k = 1, 2, \ldots, N$-ra, és az egyensúlyhoz konvergálnak.

Tekintsük most a (8.55) modell folytonos alkalmazását, ahol (a Neumann-módszerhez hasonlóan) folytonos időskálát tételezünk fel:

$$\dot{x}_k(t) = K_k(B_k(\sum_{l \neq k} x_l(t)) - x_k(t)) \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \ . \tag{8.56}$$

A következő eredmény a fenti rendszer konvergenciájáról szól.

8.20. tétel. *Az 1–3. feltevések mellett a (8.56) rendszer aszimptotikusan stabil, azaz ha az $x_k(0)$ kezdetiértéket az egyensúlyhoz elég közelre választjuk, ekkor $x_k(t)$ tart az egyensúlyhoz minden k-ra.*

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy a (8.56) rendszer Jakobi-mátrixának sajátértékei negatív valós számok. Látható, hogy a Jakobi-mátrix a következő:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -K_1 & K_1 b_1 & \cdots & K_1 b_1 \\ K_2 b_2 & -K_2 & \cdots & K_2 b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_N b_N & K_N b_N & \cdots & -K_N \end{pmatrix} , \tag{8.57}$$

ahol $b_k = B'_k(\sum_{l \neq k} x_l)$ az egyensúlyban. (8.52)-ből tudjuk, hogy $-1 < b_k \leq 0$ minden k-ra. A $\mathbf{J}$ sajátértékeinek kiszámítása céljából szükségünk van egy nagyon egyszerű, ám annál hasznosabb tényre. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ N valós komponensű vektorok. Ekkor

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) = 1 + \mathbf{b}^T \mathbf{a} \ , \tag{8.58}$$

ahol $\mathbf{I}$ az N-edrendű egységmátrix. (8.58) egyenlőtlenség teljes indukcióval könnyen bizonyítható. (8.58)-at felhasználva, a $\mathbf{J}$ mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{D} + \mathbf{a}\mathbf{b}^T - \lambda\mathbf{I}) \\ &= \det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{I} + (\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}\mathbf{b}^T) \\ &= \det(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})[1 + \mathbf{b}^T(\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{a}] \\ &= \Pi_{k=1}^N(-K_k(1 + b_k) - \lambda)[1 + \sum_{k=1}^N \frac{K_k b_k}{-K_k(1 + b_k) - \lambda}] \ , \end{aligned}$$

ahol a következő jelöléseket használtuk:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} K_1 b_1 \\ K_2 b_2 \\ \vdots \\ K_N b_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = (1, 1, \ldots, 1), \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -K_1(1+b_1) & & \\ & \ddots & \\ & & K_N(1+b_N) \end{pmatrix} .$$

Az első tényező gyökei negatívak: $\lambda = -K_k(1 + b_k)$, a következő egyenlet gyökei adják a többi sajátértéket:

$$1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{K_k b_k}{-K_k(1+b_k) - \lambda} = 0 .$$

Vegyük észre, hogy közös nevezőre hozva és a tagokat összeadva az

$$1 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\beta_k + \lambda} = 0 \tag{8.59}$$

egyenlőség adódik, ahol $\alpha_k, \beta_k > 0$, és $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_m$. Ha $g(\lambda)$ jelöli a bal oldalt, akkor a $\lambda = -\beta_k$-k a póIushelyek és

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} g(\lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda \to -\beta_k \pm 0} g(\lambda) = \pm\infty ,$$

$$g'(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \frac{-\alpha_l}{(\beta_l + \lambda)^2} < 0 ,$$

így $g(\lambda)$ az értelmezési tartományának tetszőleges intervallumán szigorúan monoton fogyó. A függvény grafikonja a 8.7. ábrán látható. Vegyük észre, hogy (8.59) ekvivalens egy m-edfokú polinom egyenletével, tehát m komplex (esetleg) valós gyöke van. A $g(\lambda)$ függvény tulajdonságai miatt egy gyök kisebb mint $-\beta_1$, és egy-egy gyök van $-\beta_k$ és $-\beta_{k+1}$ között minden $k = 1, 2, \ldots, m-1$ esetén. Tehát minden gyök negatív valós szám. ■

(8.55) – az általános diszkrét modell – azonos módon vizsgálható. Ha $K_k = 1$ minden k-ra, akkor (8.55) visszavezethető a (8.54) egyszerű dinamikus rendszerre.

8.21. példa. *Első oligopol játék.* Tekintsünk egy háromszemélyes oligopol játékot, ahol az árfüggvény

$$p(s) = \begin{cases} 2 - 2s - s^2, & \text{ha} \quad 0 \le s \le \sqrt{3} - 1 , \\ 0 & \text{egyébként} , \end{cases}$$

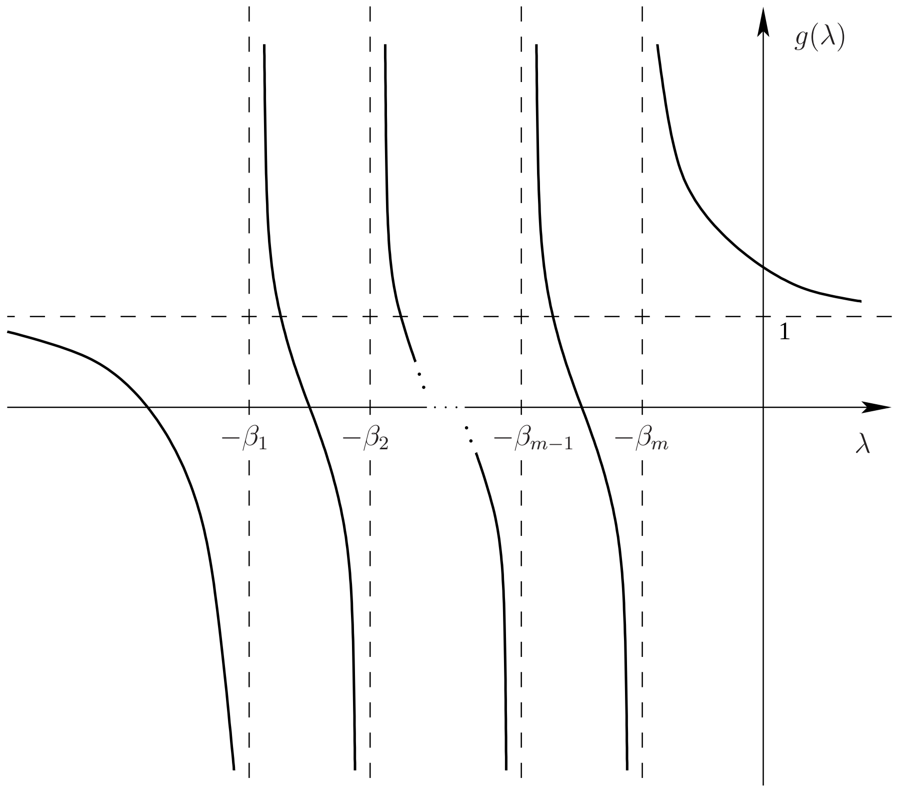
a stratégiahalmazok $S_1 = S_2 = S_3 = [0, 1]$, a költségfüggvények

$$c_k(x_k) = k x_k^3 + x_k \qquad (k = 1, 2, 3) .$$

A $\mathcal{P}_k$ vállalat profitja a következő:

$$x_k(2 - 2s - s^2) - (k x_k^3 + x_k) = x_k(2 - 2x_k - 2s_k - x_k^2 - 2x_k s_k - s_k^2) - k x_k^3 - x_k .$$

A $\mathcal{P}_k$ vállalat legjobbválasz-függvényét a következőképpen kapjuk. A 8.3. alfejezet elején vázolt módszert követve, a következő három esetet különböztetjük meg. Ha $1 - 2s_k - s_k^2 \le 0$, akkor $x_k = 0$ a



8.7. ábra. A $g(\lambda)$ függvény görbéje.

legjobbválasz. Ha $(-6-3k)-6s_k-s_k^2 \geq 0$, akkor $x_k = 1$ a legjobbválasz. Egyébként a legjobbválaszt a következő egyenlet adja meg:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}[x_k(2-2x_k-2s_k-s_k^2-2s_kx_k-x_k^2)-kx_k^3-x_k]$$
$$= 2-4x_k-2s_k-s_k^2-4s_kx_k-3x_k^2-3kx_k^2-1=0\ ,$$

ahol az egyetlen pozitív megoldás

$$x_k = \frac{-(4+4s_k)+\sqrt{(4+4s_k)^2-12(1+k)(s_k^2+2s_k-1)}}{6(1+k)}\ .$$

Miután a legjobbválaszokat megtaláltuk, könnyedén megkonstruálhatjuk bármelyik korábban bemutatott módszert.

Visszavezetés egydimenziós fixpont feladatra

Tekintsünk egy N vállalatos (N személyes) oligopol játékot, ahol p az árfüggvény, és a c_k függvények a költségfüggvények $k = 1, 2, \ldots, N$ esetén. Vezessük be a

$$\Psi_k(s, x_k, t_k) = t_k p(s - x_k + t_k) - c_k(t_k)\ , \tag{8.60}$$

függvényt és definiáljuk az

$$X_k(s) = \{x_k | x_k \in S_k, \ \ \Psi_k(s, x_k, x_k) = \max_{t_k \in S_k} \Psi_k(s, x_k, t_k)\} \tag{8.61}$$

leképezést minden $k = 1, 2, \ldots, N$-re. Legyen továbbá

$$X(s) = \{u | u = \sum_{k=1}^{N} x_k, \ \ x_k \in X_k(s), \ \ k = 1, 2, \ldots, N\} . \tag{8.62}$$

Vegyük észre, hogy ha $s \in [0, \sum_{k=1}^{N} L_k]$, akkor $X(s)$ minden komponense ebbe az intervallumba esik, tehát X egy egydimenziós pont-halmaz leképezés. Világos, hogy $(x_1^\star, \ldots, x_N^\star)$ pontosan akkor egyensúlya az N vállalatos oligopol játéknak, ha $s^\star = \sum_{k=1}^{N} x_k^\star$ fixpontja X-nek, és minden k-ra $x_k^\star \in X_k(s^\star)$. Tehát az egyensúlyi problémát leegyszerűsítettük egy egydimenziós pont-halmaz leképezés fixpont problémájára. Ez jelentős egyszerűsítés, hiszen a legjobbválaszok N dimenziós leképezések.

Ha az 1–3. feltételek teljesülnek, akkor $X_k(s)$ értéke egy egyelemű halmaz minden s-re, k-ra:

$$X_k(s) = \begin{cases} 0, & \text{ha } p(s) - c_k'(0) \le 0 , \\ L_k, & \text{ha } p(s) + L_k p_k'(s) - c_k'(L_k) \ge 0 , \\ z^\star & \text{egyébként} , \end{cases} \tag{8.63}$$

ahol $z^\star$ a következő monoton egyenlet egyetlen megoldása a $[0, L_k]$ intervallumon:

$$p(s) + z p'(s) - c_k'(z) = 0 . \tag{8.64}$$

A harmadik esetben a bal oldali kifejezés pozitív $z = 0$-ban, és negatív $z = L_k$-ban, a 2–3. feltételek miatt szigorúan fogyó, tehát egyetlen megoldás van.

Az egész $[0, \sum_{k=1}^{N} L_k]$ intervallumon $X_k(s)$ nemnövekvő konstans az első két esetben, és szigorúan fogyó a harmadik esetben. Tekintsük végül az egydimenziós egyenletet:

$$\sum_{k=1}^{N} X_k(s) - s = 0 . \tag{8.65}$$

$s = 0$-ban a bal oldal nemnegatív, $s = \sum_{k=1}^{N} L_k$-ban nempozitív, szigorúan fogyó. Tehát egyetlen megoldás van (az X fixpontja), mely megoldás bármely egydimenziós egyenletmegoldó módszerrel megkapható.

Legyen $[0, S_{max}]$ a (8.65) megoldásának értelmezési tartománya. K felező lépés után a pontosság $s_{max}/2^K$, mely kisebb, mint az $\epsilon > 0$ hibahatár, ha $K > \log_2(S_{max}/\epsilon)$.

8.22. példa. *Második oligopol játék.* Tekintsük megint a 8.21. példában látott háromszemélyes oligopol játékot. (8.63)-ból

$$X(s) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad 1 - 2s - s^2 \le 0 , \\ 1, & \text{ha} \quad - (1 + 3k) - 4s - s^2 \ge 0 , \\ z^\star & \text{egyébként} , \end{cases}$$

ahol $z^\star$ a

$$3kz^2 + z(2s + 2) + (-1 + 2s + s^2) = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása. Az első eset akkor következik be, ha $s \ge \sqrt{2} - 1$, a második eset soha nem következik be, míg a harmadik eset az egyetlen pozitív megoldás:

$$z^\star = \frac{-(2s+2) + \sqrt{(2s+2)^2 - 12k(-1+2s+s^2)}}{6k} \ . \tag{8.66}$$

Végül (8.65) speciális formája

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{-(s+1) + \sqrt{(s+1)^2 - 3k(-1+2s+s^2)}}{3k} - s = 0 \ .$$

Az intervallumfelezéses módszeren alapuló program a következő megoldást adja: $s^\star \approx 0.2982$. (8.66)-ból az egyensúlyi stratégiák: $x_1^\star \approx 0.1077$, $x_2^\star \approx 0.0986$, $x_3^\star \approx 0.0919$.

A Kuhn–Tucker-feltételeken alapuló módszerek

Vegyük észre, hogy az N személyes oligopol játékok esetében $S_k = \{x_k | x_k \ge 0,\ L_k - x_k \ge 0\}$, tehát választhatjuk a

$$\mathbf{g}_k(x_k) = \begin{pmatrix} x_k \\ L_k - x_k \end{pmatrix} \tag{8.67}$$

függvényeket. Mivel a kifizetőfüggvények

$$f_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k p(x_k + s_k) - c_k(x_k) \ , \tag{8.68}$$

a (8.9) Kuhn–Tucker-feltételek a következő formát öltik, ahol a két komponensű vektor $\mathbf{u}_k$ komponensei $u_k^{(1)}$ és $u_k^{(2)}$, és minden $k = 1, 2, \ldots, N$ indexre

$$\begin{array}{rcl} u_k^{(1)}, u_k^{(2)} & \ge & 0 \\ x_k & \ge & 0 \\ L_k - x_k & \ge & 0 \\ p(\sum_{l=1}^N x_l) + x_k p'(\sum_{l=1}^N x_l) - c_k'(x_k) + (u_k^{(1)}, u_k^{(2)})\binom{1}{-1} & = & 0 \\ u_k^{(1)} x_k + u_k^{(2)}(L_k - x_k) & = & 0 \ . \end{array} \tag{8.69}$$

Két lehetőségünk van: vagy megkeressük (8.69) egy megengedett megoldását, vagy átírjuk (8.69)-et (8.10) alakú optimumszámítási feladattá, mely ebben a speciális esetben

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^N (u_k^{(1)} x_k + u_k^{(2)}(L_k - x_k)) & \to & \min \\ u_k^{(1)}, u_k^{(2)} & \ge & 0 \ (k = 1, 2, \ldots, N) \\ x_k & \ge & 0 \ (k = 1, 2, \ldots, N) \\ L_k - x_k & \ge & 0 \ (k = 1, 2, \ldots, N) \\ p(\sum_{l=1}^N x_l) + x_k p'(\sum_{l=1}^N x_l) - c_k'(x_k) + u_k^{(1)} - u_k^{(2)} & = & 0 \ (k = 1, 2, \ldots, N) \ . \end{array} \tag{8.70}$$

A (8.69) vagy (8.70) számítási költsége a p és a c_k függvények típusától függ. Nem adható általános jellemzés.

8.23. példa. *Harmadik oligopol játék.* A 8.21. példában bevezetett játék esetén (8.70) alakja

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{3}(u_k^{(1)}x_k + u_k^{(2)}(1-x_k)) & \to & \min \\ u_k^{(1)}, u_k^{(2)} & \geq & 0 \\ x_k & \geq & 0 \\ 1-x_k & \geq & 0 \\ 1-2s-s^3-2x_k-2x_ks-3kx_k^2+u_k^{(1)}-u_k^{(2)} & = & 0 \\ x_1+x_2+x_3 & = & s\ . \end{array}$$

Egy professzionális optimalizációs program használatával a következő megoldást kaptuk:

$$x_1^\star \approx 0.1077, \quad x_2^\star \approx 0.0986, \quad x_3^\star \approx 0.0919\ ,$$

és $u_k^{(1)} = u_k^{(2)} = 0$.

Visszavezetés komplementer feladatokra

Ha $(x_1^\star, \ldots, x_N^\star)$ egyensúly egy N személyes oligopol játékban, akkor rögzített $x_1^\star, \ldots, x_{k-1}^\star, x_{k+1}^\star, \ldots, x_N^\star$ esetén $x_k = x_k^\star$ maximumhelye a $\mathcal{P}_k$ játékos f_k kifizetőfüggvényének. Tegyük fel, hogy az 1–3. feltételek teljesülnek, f_k konkáv x_k-ban, így $x_k^\star$ pontosan akkor maximumhelye f_k-nak, ha az egyensúlyban

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}^\star) = \begin{cases} \leq 0, & \text{ha} \quad x_k^\star = 0\ , \\ = 0, & \text{ha} \quad 0 < x_k^\star < L_k\ , \\ \geq 0, & \text{ha} \quad x_k^\star = L_k\ . \end{cases}$$

Vezessük be a

$$z_k = \begin{cases} = 0, & \text{ha} \quad x_k > 0\ , \\ \geq 0, & \text{ha} \quad x_k = 0 \end{cases}$$

és a

$$v_k = \begin{cases} = 0, & \text{ha} \quad x_k < L_k\ , \\ \geq 0, & \text{ha} \quad x_k = L_k \end{cases}$$

túlcsordulás változókat és legyen

$$w_k = L_k - x_k\ . \tag{8.71}$$

(8.71) az egyensúlyban átírható, mint

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}) - v_k + z_k = 0\ . \tag{8.72}$$

A túlcsordulás változók definíciója miatt

$$z_k x_k = 0\ , \tag{8.73}$$

$$v_k w_k = 0\ . \tag{8.74}$$

A nemnegativitási feltételt hozzávéve

$$x_k, z_k, v_k, w_k \geq 0\ , \tag{8.75}$$

mely esetben a (8.71)–(8.75) nemlineáris egyenlőtlenségrendszert kapjuk, mely ekvivalens az egyensúlyi feladattal.

A következőkben megmutatjuk, hogy (8.71)–(8.75) átírható nemlineáris komplementer feladattá. Az ilyen feladatok megoldására vannak közismert módszerek. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} -\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \\ \mathbf{L} - \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Ekkor a (8.72)–(8.75) rendszer átírható, mint

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{t}) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^T\mathbf{g}(\mathbf{t}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{8.76}$$

A fenti feladat a ***nemlineáris komplementer feladatok*** szokásos formája. Vegyük észre, hogy az utolsó feltétel azt követeli meg, hogy komponensenként vagy $\mathbf{t}$, vagy $\mathbf{g}(\mathbf{t})$, vagy mindkettő nulla legyen.

(8.76) számítási költsége a benne lévő függvények típusától, és a választott módszertől függ.

8.24. példa. *Negyedik oligopol játék.* A 8.21. példában bevezetett háromszemélyes oligopol játék elemzéséből kapjuk:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} -1 + 2\sum_{l=1}^3 x_l + (\sum_{l=1}^3 x_l)^2 + 2x_1 + 2x_1\sum_{l=1}^3 x_l + 3x_1^2 + v_1 \\ -1 + 2\sum_{l=1}^3 x_l + (\sum_{l=1}^3 x_l)^2 + 2x_2 + 2x_2\sum_{l=1}^3 x_l + 6x_2^2 + v_2 \\ -1 + 2\sum_{l=1}^3 x_l + (\sum_{l=1}^3 x_l)^2 + 2x_3 + 2x_3\sum_{l=1}^3 x_3 + 9x_3^2 + v_3 \\ 1 - x_1 \\ 1 - x_2 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Lineáris oligopol játékok és kvadratikus programozás

Ebben a részben olyan N személyes oligopol játékokat fogunk vizsgálni, ahol mind az árfüggvény, mind a költségfüggvények lineárisak:

$$p(s) = As + B, \quad c_k(x_k) = b_k x_k + c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, N)\,,$$

ahol $B, b_k, c_k > 0$, de $A < 0$. Tegyük fel megint, hogy a stratégiahalmazok intervallumok: $[0, L_k]$. Ebben az esetben

$$f_k(x_1, \ldots, x_N) = x_k(Ax_1 + \cdots + Ax_N + B) - (b_k x_k + c_k) \tag{8.77}$$

minden k-ra, így

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = 2Ax_k + A\sum_{l\neq k} x_l + B - b_k\ . \tag{8.78}$$

A (8.71)–(8.75) feltételek ebben az esetben (nem az eredeti sorrendben):

$$\begin{aligned} 2Ax_k + A\sum_{l\neq k} x_l + B - b_k - v_k + z_k &= 0 \\ z_k x_k = v_k w_k &= 0 \\ x_k + w_k &= L_k \\ x_k, v_k, z_k, w_k &\geq 0\ . \end{aligned}$$

Vezessük be a következő mátrixot és vektorokat:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2A & A & \cdots & A \\ A & 2A & \cdots & A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A & A & \cdots & 2A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B \\ B \\ \vdots \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_N \end{pmatrix}.$$

Foglaljuk össze a definiált egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} \mathbf{Qx} + \mathbf{B} - \mathbf{b} - \mathbf{v} + \mathbf{z} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} + \mathbf{w} &= \mathbf{L} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}\ . \end{aligned} \tag{8.79}$$

A következőkben azt látjuk be, hogy $\mathbf{Q}$ negatív definit. Tetszőleges $\mathbf{a} = (a_i)$ nemnulla vektorra

$$\mathbf{a}^T\mathbf{Qa} = 2A\sum_i a_i^2 + A\sum_i\sum_{j\neq i} a_i a_j = A(\sum_i a_i^2 + (\sum_i a_i)^2) < 0\ ,$$

ahonnan következik a feltevésünk.

Vegyük észre, hogy (8.79)-ben a következő, szigorúan konkáv kvadratikus feladat Kuhn–Tucker-feltételei vannak:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} + (\mathbf{B} - \mathbf{b})\mathbf{x} &\rightarrow \max \\ \mathbf{0} \leq \mathbf{x} &\leq \mathbf{L}\ . \end{aligned} \tag{8.80}$$

Mivel a megengedett megoldások halmaza korlátos poliéder, és a célfüggvény szigorúan konkáv, így a Kuhn–Tucker-feltételek szükségesek és elégségesek is egyben. Következésképpen, az $\mathbf{x}^\star$ vektor pontosan akkor egyensúly, ha (8.80) egyetlen optimális megoldása. (8.80) megoldására közismert módszerek találhatók az irodalomban.

Mivel (8.79) egy konvex kvadratikus feladat, így annak megoldására ismeretesek módszerek. A módszerek költsége különböző, tehát (8.79) számítási költsége a választott módszertől függ.

8.25. példa. *Kétszemélyes oligopol játék.* Tekintsünk egy duopol játékot (kétszemélyes oligopol játékot), ahol az árfüggvény $p(s) = 10 - s$, a költségfüggvények $c_1(x_1) = 4x_1 + 1$ és $c_2(x_2) = x_2 + 1$, a kapacitáskorlátok $L_1 = L_2 = 5$. Azaz

$$B = 10,\ \ A = -1,\ \ b_1 = 4,\ \ b_2 = 1,\ \ c_1 = c_2 = 1\ .$$

Tehát,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

A kvadratikus programozási feladat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(-2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2) + 6x_1 + 9x_2 &\to \max \\ 0 \le x_1 &\le 5 \\ 0 \le x_2 &\le 5\ . \end{aligned}$$

Egyszerű deriválással látható, hogy a célfüggvény feltételek nélküli globális maximumát az $(x_1^\star, x_2^\star)^T = (1,4)^T$ pontban veszi fel. Mivel ez a pont benne van a megengedett megoldások halmazában, így optimális megoldása a feladatnak, tehát a duopol játék egyetlen egyensúlya.

Gyakorlatok

8.3-1. Tekintsünk egy duopol játékot, ahol $S_1 = S_2 = [0,1]$, $p(s) = 2 - s$ és $c_1(x) = c_2(x) = x^2 + 1$. Vizsgáljuk meg az (8.55)-ben megadott iterációs eljárás konvergenciáját.

8.3-2. Legyen $N = 2$, $S_1 = S_2 = [0, 1.5]$, $c_k(x_k) = 1.5x_k$ $(k = 1,2)$ és

$$p(s) = \begin{cases} 1.75 - 0.5s, & \text{ha} \quad 0 \le s \le 1.5\ , \\ 2.5 - s, & \text{ha} \quad 1.5 \le s \le 2.5\ , \\ 0, & \text{ha} \quad 2.5 < s\ . \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy végtelen sok egyensúly van:

$$\{(x_1^\star, x_2^\star) | 0.5 \le x_1 \le 1,\ \ 0.5 \le x_2 \le 1,\ \ x_1 + x_2 = 1.5\}\ .$$

8.3-3. Tekintsük a 8.3-1. gyakorlatban bevezetett duopol játékot.

a. Írjuk fel a legjobbválasz-függvényeket, és határozzuk meg az egyensúlyt. *b.* Tekintsük a (8.62)-ben bevezetett egydimenziós fixpont feladatot, és határozzuk meg segítségével az egyensúlyt. *c.* Írjuk fel a (8.69) Kuhn–Tucker-feltételeket.

d. Írjuk fel a (8.76) komplementer feladatot.

Feladatok

8-1. Fiktív lejátszás bimátrix-játékokra

Általánosítsuk a fiktív lejátszás módszerét bimátrix-játékokra.

8-2. Fiktív lejátszás véges játékokra

Általánosítsuk a fiktív lejátszás módszerét véges játékokra.

Megjegyzések a fejezethez

A játékelmélet témakörében eddig csak 1994-ben osztottak (közgazdasági) Nobel-díjat. A díjazottak között volt John Nash, aki a róla elnevezett Nash-egyensúly fogalmáért kapta a díjat. Ezt a fogalmat Nash 1951-ben vezette be [14].

Egy másik, szűkebb egyensúlyfogalmat alkalmaz a visszafelé indukció algoritmusa. Ezen algoritmus Kuhn nevéhez köthető és megtalálható Kuhn és Tucker cikkében [9]. Mivel ezen algoritmus a Nash-egyensúlynál szigorúbb feltételű egyensúlyt határoz meg, az ezen módszerrel kapott egyensúly egyben Nash-egyensúly is.

Az egyensúly megtalálásának problémája, illetve magának az egyensúly létezésének problémája matematikailag a fixpontproblémának feleltethető meg. A különböző fixponttételek – mint a Brouwer-féle [2], a Kakutani-féle [5], a Tarski-féle [25] – segítségével bizonyítható az egyensúly létezése bizonyos játékosztályokban. Az egyensúly létezésének bizonyítására Kakutani-féle fixponttétellel lásd a [16] cikket. Magának a fixpontnak (vagy fixpontoknak) a megkeresésére is ismertek módszerek, lásd például a [24] és [3] könyveket. A legnépszerűbb létezési eredmény Nikaido és Isoda nevéhez fűződik [16].

A Fan-egyenlőtlenséget, mely szerepet játszik a folytonos játékok egyensúlyának jellemzésében, részletesen tárgyalja könyvében Aubin [1]. A Kuhn–Tucker-feltételek leírása megtalálható Martos Béla könyvében [11]. A Kuhn–Tucker-feltételek eltérésváltozókkal átírhatók nemnegatív egyenletrendszerré, mely rendszerek megoldására [24] és [11] tartalmaznak numerikus módszereket.

A bimátrix-játékok egyensúlyi problémájának átírása kevert változós feladattá megtalálható Mills [12] és Shapiro [21] cikkében. A bimátrix-játékok egyensúlyi problémája felírható kvadratikus programozási feladatként is (lásd Mangasarian cikkét [10]).

A fiktív lejátszás módszere megtalálható részletesen Robinson cikkében [19]. A Neumann-módszer alkalmazásakor differenciálegyenletet kell megoldanunk – ehhez a Runge–Kutta-módszert használtuk. Ennek a módszernek a leírása megtalálható a [24] könyvben.

Az átlósan szigorú konkáv játékok leírása Rosen cikkében [20] található meg. Az N személyes játékok egyensúlyának numerikus meghatározására Zuhovitzky, Polyak és Primak [26] javasoltak numerikus módszert.

A klasszikus Cournot-modell általánosítására nézve lásd Okuguchi és Szidarovszky könyveit [17, 18]. A 8.20. tétel bizonyítása a [22] cikkben található meg. A (8.58) lemma bizonyítására lásd a [18] monográfiát. Az intervallumfelezéses módszer leírását [24] tartalmazza. [6] olyan módszereket ír le, melyek alkalmasak nemlineáris komplementaritási feladatok megoldására. A (8.80) feladat megoldása megtalálható Hadley monográfiájában [4]. A nemlineáris programozással foglalkozik magyar nyelven Kovács Margit könyve [8].

A játékelmélet klasszikus tankönyve Neumann János és Oscar Morgenstern műve [15]. Magyar nyelven 1986-ban Szidarovszky Ferenc és Molnár Sándor [23], 1999-ben Kiss Béla és Krebsz Anna [7], 2004-ben pedig Mészáros József [13] adtak közre tankönyvet.

Irodalomjegyzék

[1] J-P. Aubin. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. North-Holland, 1979. 361

[2] L. E. J. Brouwer. Über Abbildung von Manningfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 97–115. o., 1912. 361

[3] F. Forgó, J. Szép, F. Szidarovszky. *Introduction to the Theory of Games: Concepts, Methods and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999. 361

[4] G. Hadley. *Nonlinear and Dynamic Programming*. Addison-Wesley, 1964. 361

[5] S. Kakutani. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8:457–459, 1941. 361

[6] S. Karamardian. The nonlinear complementarity problems with applications. I, II. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4:87–98 and 167–181, 1969. 361

[7] B. Kiss, A. Krebsz. *Játékelmélet (Game Theory)*. Széchenyi István Főiskola, 1999. 361

[8] M. Kovács. *Nemlineáris programozás* (*Nonlinear Programming*). Typotex, 1997. 361

[9] H. W. Kuhn, A. Tucker (szerkesztők). *Contributions to the Theory of Games. II*. Princeton University Press, 1953. 361

[10] O. Mangasarian, H. Stone. Two-person zero-sum games and quadratic programming. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 9:348–355, 1964. 361

[11] B. Martos. *Nonlinear Programming Theory and Methods*. Akadémiai Kiadó, 1975. 361

[12] H. Mills. Equilibrium points of finite games. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 8:397–402, 1976. 361

[13] J. Mészáros. *Játékelmélet (Game Theory)*. Gondolat Kiadó, 2004. 361

[14] J. Nash. Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, 54:286–295, 1951. 361

[15] J. Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economical Behaviour*. Princeton University Press, 1947 (2. kiadás). 361

[16] H. Nikaido, K. Isoda. Note on noncooperative games. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:807–815, 1955. 361

[17] K. Okuguchi. *Expectation and Stability of Oligopoly Models*. Springer, 1976. 361

[18] K. Okuguchi, F. Szidarovszky. *The Theory of Oligopoly with Multi-Product Firms*. Springer, 1999 (2. kiadás). 361

[19] J. Robinson. An iterative method of solving a game. *Annals of Mathematics*, 154:296–301, 1951. 361

[20] J. Rosen. Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. *Econometrica*, 33:520–534, 1965. 361

[21] H. N. Shapiro. Note on a computation method in the theory of games. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11:587–593, 1958. 361

[22] F. Szidarovszky, C. Chiarella. Dynamic oligopolies, stability and bifurcation. *Cubo Mathemática Educational*, 3(2):267–284, 2001. 361

[23] F. Szidarovszky, S. Molnár. *Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal: Többcélú programozás, klasszikus és differenciáljátékok (Game Theory with Technical Applications: Programming with Multiple Aims, Classical and Differential Games)*. Műszaki Könyvkiadó, 1986. 361

[24] F. Szidarovszky, S. Yakowitz. *Principles and Procedures of Numerical Analysis*. Plenum Press, 1998. 361

[25] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:285–308, 1955. 361

[26] S. I. Zuhovitsky, R. A. Polyak, M. E. Primak. Concave n-person games (numerical methods). *Ékonomika i Matematicheskie Methody*, 7:888–900, 1971 (oroszul). 361

Tárgymutató

Névmutató

Z

Tartalomjegyzék