Diszkrét matematika 2.C szakirány

10. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/∼nagy

Komputeralgebra Tanszék

2017. tavasz

Hibakorlátozó kódolás

Definíció

Legyen A véges ábécé, továbbá $u, v \in A^n$. Ekkor u és v Hamming-távolsága alatt az azonos pozícióban lévő különböző betűk számát értjük:

$$d(u, v) = |\{i : 1 \leq i \leq n \wedge u_i \neq v_i\}|.$$

Példa

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
$\neq$	$\neq$	$=$	$\neq$	$\neq$

$d(01110,10101)=4$

A	L	M	A
A	N	N	A
$=$	$\neq$	$\neq$	$=$

$d(ALMA,ANNA)=2$

Hibakorlátozó kódolás

Állítás

A Hamming-távolság rendelkezik a távolság szokásos tulajdonságaival, vagyis tetszőleges u, v, w-re

1) $d(u, v) \geq 0$;
2) $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
3) $d(u, v) = d(v, u)$ (szimmetria);
4) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Bizonyítás

1), 2) és 3) nyilvánvaló.
4) Ha u és v eltér valamelyik pozicióban, akkor ott u és w, illetve w és v közül legalább az egyik pár különbözik.

Hibakorlátozó kódolás

Definíció

A K kód távolsága ($d(K)$) a különböző kódszópárok távolságainak a minimuma.

Példa (*)

$$\left.\begin{array}{l}(0,0)\mapsto (0,0,0,0,0)\\ (0,1)\mapsto (0,1,1,1,0)\\ (1,0)\mapsto (1,0,1,0,1)\\ (1,1)\mapsto (1,1,0,1,1)\end{array}\right\rceil \begin{array}{l}3\\4\\3\end{array}\Bigg\rceil 3\Bigg\rceil 3\Bigg\rceil 4$$

A kód távolsága 3.

Felmerül a kérdés, hogy vajon mi lehetett a kódszó, ha a (0,1,0,0,0) szót kapjuk.

Hibakorlátozó kódolás

Definíció

Minimális távolságú dekódolás esetén egy adott szóhoz azt a kódszót rendeljük, amelyik hozzá a legközelebb van. Több ilyen szó esetén kiválasztunk ezek közül egyet, és az adott szóhoz mindig azt rendeljük.

Megjegyzés

A dekódolás két részre bontható: a hibajavításnál megpróbáljuk meghatározni, hogy mi volt az elküldött kódszó, majd visszaállítjuk az üzenetet. Mivel az utóbbi egyértelmű, ezért hibajavító kódok dekódolásán legtöbbször csak a hibajavítást értjük.

Definíció

Egy kód t-hibajavító, ha minden olyan esetben helyesen javít, amikor egy elküldött szó legfeljebb t helyen változik meg.
Egy kód pontosan t-hibajavító, ha t-hibajavító, de van olyan $t+1$ hibával érkező szó, amit helytelenül javít, vagy nem javít.

Hibakorlátozó kódolás

Megjegyzés

Ha a kód távolsága d, akkor minimális távolságú dekódolással $t < \frac{d}{2}$ esetén t-hibajavító.

Példa

Az előző példában szereplő kód pontosan 1-hibajavító.
$(0,0,0,0,0) \rightsquigarrow (1,0,0,0,1) \rightarrow (1,0,1,0,1)$

Példa (ismétléses kód)

$a \mapsto (a,a,a)$ $d = 3$ 1-hibajavító,
$a \mapsto (a,a,a,a,a)$ $d = 5$ 2-hibajavító.

Hibakorlátozó kódolás

Tétel (Singleton-korlát)

Ha $K \subset A^n$, $|A| = q$ és $d(K) = d$, akkor $|K| \leq q^{n-d+1}$.

Bizonyítás

Ha minden kódszóból elhagyunk $d-1$ betűt (ugyanazokból a pozíciókból), akkor az így kapott szavak még mindig különbözőek, és $n-d+1$ hosszúak. Az ilyen hosszú szavak száma szerepel az egyenlőtlenség jobb oldalán.

Definíció

Ha egy kódra a Singleton-korlát egyenlőséggel teljesül, akkor azt maximális távolságú szeparábilis kódnak (MDS-kód) nevezzük.

Példa

Az n-szeri ismétlés kódja. Ekkor $d = n$, és $|K| = q$.

Hibakorlátozó kódolás

Tétel (Hamming-korlát)

Ha $K \subset A^n$, $|A| = q$ és K t-hibajavító, akkor

$$|K| \sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} (q-1)^j \leq q^n.$$

Bizonyítás

Mivel a kód t-hibajavító, ezért bármely két kódszóra a tőlük legfeljebb t távolságra lévő szavak halmazai diszjunktak (Miért?). Egy kódszótól pontosan j távolságra lévő szavak száma $\binom{n}{j}(q-1)^j$ (Miért?), így egy kódszótól legfeljebb t távolságra lévő szavak száma $\sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j}(q-1)^j$. A jobb oldalon az n hosszú szavak száma szerepel (Miért?).

Hibakorlátozó kódolás

Definíció

Ha egy kódra a Hamming-korlát egyenlőséggel teljesül, akkor azt perfekt kódnak nevezzük.

Példa (nem perfekt kódra)

A (*) kód esetén $|K| = 4$, $n = 5$, $q = 2$ és $t = 1$.
B.O.$= 4\left(\binom{5}{0}(2-1)^0 + \binom{5}{1}(2-1)^1\right) = 4(1+5) = 24$,
J.O.$= 2^5 = 32$.
Nem perfekt kód.

A kód távolságának és hibajelző képességének kapcsolata

Tekintsünk egy kódot, aminek a távolsága d.

Ha egy elküldött kódszó legalább 1, de d-nél kevesebb helyen sérül, akkor az így kapott szó biztosan nem kódszó, mivel két kódszó legalább d helyen különbözik. Tehát legfeljebb $d-1$ hiba esetén a kód jelez.

A kódban van két olyan kódszó, amelyek távolsága d, és ha az egyiket küldik, és ez úgy változik meg, hogy éppen a másik érkezik meg, akkor d hiba történt, de nem vesszük észre. Tehát van olyan d hiba, amit a kód nem tud jelezni.
Ezáltal a kód pontosan $d-1$-hibajelző.

A kód távolságának és hibajavító képességének kapcsolata

Legyen a kód távolsága továbbra is d, és tegyük fel, hogy minimális távolságú dekódolást használunk.

$t < \frac{d}{2}$ hiba esetén biztosan jól javítunk, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség miatt az eredetileg elküldött kódszótól különböző bármely kódszó biztosan $\frac{d}{2}$-nél több helyen tér el a vett szótól (Miért?).

Másrészt legyenek u és w olyan kódszavak, amelyek távolsága d, és legyen v az a szó, amit úgy kapunk u-ból, hogy azon d pozícióból, amelyekben eltérnek, $t \geq \frac{d}{2}$ helyre a w megfelelő pozíciójában lévő betűt írjuk.
Ekkor v az u-tól t helyen, míg w-től $d - t \leq \frac{d}{2} \leq t$ helyen különbözik.
Ha a kód t-hibajavító lenne, akkor v-t egyrészt u-ra, másrészt w-re kellene javítania.
Ezáltal a kód pontosan $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$-hibajavító.

Lineáris kódok

Definíció

Legyen $\mathbb{F}$ véges test. Ekkor az $\mathbb{F}$ elemeiből képzett rendezett n-esek a komponensenkénti összeadással, valamint az n-es minden elemének ugyanazzal az $\mathbb{F}$-beli elemmel való szorzásával egy $\mathbb{F}$ feletti n-dimenziós $\mathbb{F}^n$ lineáris teret alkotnak. Ennek a térnek egy tetszőleges altere egy lineáris kód.

Megjegyzés

Itt $\mathbb{F}$ elemei a betűk, és $\mathbb{F}^n$ elemei a szavak, az altér elemei a kódszavak.

Jelölés

Ha az altér k-dimenziós, a kód távolsága d, a test elemeinek a száma pedig q, akkor $[n, k, d]_q$ kódról beszélünk.
Ha nem lényeges d és q értéke, akkor elhagyjuk őket a jelölésből, és $[n, k]$-t írunk.

Lineáris kódok

Megjegyzés

Egy $[n, k, d]_q$ kód esetén a Singleton-korlát alakja egyszerűsödik:

$$q^k \leq q^{n-d+1} \iff k \leq n - d + 1.$$

Példa

1) A (*) kód egy $[5, 2, 3]_2$ kód:
   (0,0) $\mapsto$ (0,0,0,0,0)
   (0,1) $\mapsto$ (0,1,1,1,0)
   (1,0) $\mapsto$ (1,0,1,0,1)
   (1,1) $\mapsto$ (1,1,0,1,1)

Lineáris kódok

Példa folyt.

2) $\mathbb{F}_q$ felett az ismétléses kód:
pl. a háromszori ismétlés kódja: $a \mapsto (a, a, a)$.
Ez egy $[3, 1, 3]_q$ kód.

3) Paritásbites kód (ha páros sok egyesre egészítünk ki):
$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \mapsto (b_1, b_2, \ldots, b_k, \sum_{j=1}^{k} b_j)$.
Ez egy $[n, n-1, 2]_2$ kód.

Definíció

Az $\mathbb{F}$ ábécé feletti n hosszú $u \in \mathbb{F}^n$ szó súlya alatt a nem-nulla koordinátáinak a számát értjük, és $w(u)$-val jelöljük.
Egy K kód súlya a nem-nulla kódszavak súlyainak a minimuma:

$$w(K) = \min_{u \neq 0} w(u).$$

Lineáris kódok

Megjegyzés

Egy szó súlya megegyezik a 0-tól vett távolságával: $w(u) = d(u, (0, 0, \ldots, 0))$.

Állítás

Ha K lineáris kód, akkor $d(K) = w(K)$.

Bizonyítás

$d(u, v) = w(u - v)$ (Miért?), és mivel K linearitása miatt $u, v \in K$ esetén $u - v \in K$, ezért a minimumok is megegyeznek (Miért?).

Lineáris kódok

Lineáris kód esetén a kódolás elvégezhető mátrixszorzással.

Definíció

Legyen $G : \mathbb{F}_q^k \to \mathbb{F}_q^n$ egy teljes rangú lineáris leképzés, illetve $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_q^{n \times k}$ a hozzá tartozó mátrix. $K = \mathrm{Im}(G)$ esetén $\mathbf{G}$-t a K kód generátormátrixának nevezzük.

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Példa

1) A (*) kód egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) A háromszori ismétlés kódjának egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Példa folyt.

3) A paritásbites kód egy generátormátrixa:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Definíció

Egy $[n, k, d]_q$ kódnak $\mathbf{H} \in \mathbb{F}_q^{(n-k)\times n}$ mátrix az ellenőrző mátrixa, ha $\mathbf{H}v = 0 \iff v$ kódszó.

Megjegyzés

A $\mathbf{G}$ mátrixhoz tartozó kódolásnak $\mathbf{H}$ pontosan akkor ellenőrző mátrixa, ha $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}) = \mathrm{Im}(\mathbf{G})$

Példa

1) A (*) kód egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Példa folyt.

2) A háromszori ismétlés kódjának egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) A paritásbites kód egy ellenőrző mátrixa:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Lineáris kódok

Definíció

Ha a kódszavak első k betűje megfelel az eredeti kódolandó szónak, akkor szisztematikus kódolásról beszélünk.
Ekkor az első k karakter az üzenetszegmens, az utolsó $n-k$ pedig a paritásszegmens.

Példa

1) A háromszori ismétlés kódja:
$$(\underbrace{a}_{\text{üz.sz.}}, \underbrace{a, a}_{\text{par.sz.}})$$
2) A paritásbites kód:
$$(\underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}}_{\text{üz.sz.}}, \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} b_j}_{\text{par.sz.}})$$

Lineáris kódok

Megjegyzés

Szisztematikus kódolás esetén könnyen tudunk dekódolni: a paritásszegmens elhagyásával megkapjuk a kódolandó szót.

Megjegyzés

Egy szisztematikus kód generátormátrixa speciális alakú:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{I}_k \in \mathbb{F}_q^{k \times k}$ egységmátrix, továbbá $\mathbf{P} \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times k}$.

Lineáris kódok

Állítás

Legyen $\mathbf{G} \in \mathbb{F}_q^{n \times k}$ egy szisztematikus kód generátormátrixa:
$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix}$. Ekkor $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix}$ ellenőrző mátrixa a kódnak.

Bizonyítás

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = -\mathbf{P} + \mathbf{P} = \mathbf{0} \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times k}$$

$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G})_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (-\mathbf{P})_{il} \cdot (\mathbf{I}_k)_{lj} + \sum_{l=1}^{n-k} (\mathbf{I}_{n-k})_{il} \cdot (\mathbf{P})_{lj} = -p_{ij} + p_{ij} = 0.$
Tehát bármely u kódolandó szóra $\mathbf{H}(\mathbf{G}u) = (\mathbf{H}\mathbf{G})u = \mathbf{0}u = \underline{0}$,
vagyis $\mathrm{Im}(\mathbf{G}) \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{H})$, amiből $\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) \leq \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H}))$.
$\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) = k$ és $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H})) \leq k$ miatt viszont
$\dim(\mathrm{Im}(\mathbf{G})) \geq \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{H}))$ is teljesül, így $\mathrm{Im}(\mathbf{G}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{H})$.

Példa

Ld. korábban.