Diszkrét matematika 2.C szakirány

4. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/∼nagy

Komputeralgebra Tanszék

2017. tavasz

Irányított gráfok

Algoritmus (Dijkstra)

A $G = (\psi, E, V, w)$ élsúlyozott irányított gráfról tegyük fel, hogy az élsúlyok pozitívak, $s \in V$ és $T \subset V$.

(1) Legyen $S = \emptyset$, $H = \{s\}$ és $f(s) = 0$; minden más v csúcsra legyen $f(v) = \infty$.

(2) Ha $T \subset S$ vagy $H = \emptyset$, akkor az algoritmus véget ér.

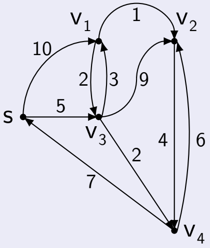
(3) Legyen $t \in H$ egy olyan csúcs, amelyre $f(t)$ minimális. Tegyük át t-t S-be, és minden e élre, aminek kezdőpontja t, végpontja pedig $v \in V \setminus S$ vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e $f(t) + w(e) < f(v)$. Ha igen, akkor legyen $f(v) := f(t) + w(e)$, és ha $v \notin H$, tegyük át v-t H-ba. Menjünk (2)-re.

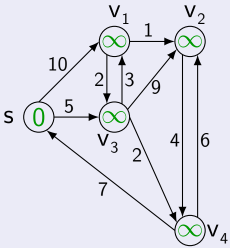
Tétel

A Dijkstra-algoritmus a csúcshalmazon értelmez egy $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényt, amely $t \in T$ esetén az adott s csúcsból a t csúcsba vezető irányított séták súlyainak a minimuma (∞, ha nincs ilyen séta).

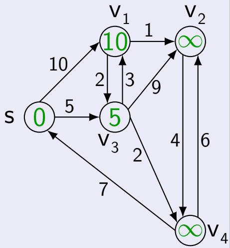
Irányított gráfok

Példa





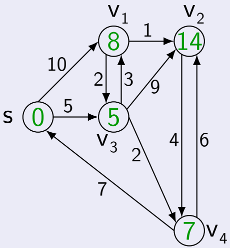
$S = \emptyset, H = \{s\}$



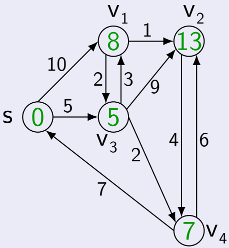
$S = \{s\}, H = \{v_1, v_3\}$

Irányított gráfok

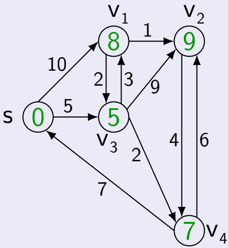
Példa



$S = \{s, v_3\}$
$H = \{v_1, v_2, v_4\}$



$S = \{s, v_3, v_4\}$
$H = \{v_1, v_2\}$



$S = \{s, v_3, v_4, v_1\}$
$H = \{v_2\}$

Síkgráfok

Definíció

Egy G gráfot síkgráfnak nevezünk, ha az felrajzolható a síkra anélkül, hogy az éleinek a csúcspontokon kívül lennének közös pontjai. Egy ilyen felrajzolását a G gráf síkbeli reprezentációjának is nevezzük.

Megjegyzés

Nem minden gráf ilyen, ellenben minden gráf $\mathbb{R}^3$-ben lerajzolható.

Definíció

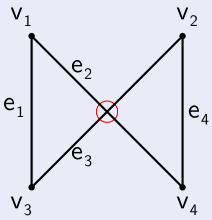
A G gráf egy síkbeli reprezentációja esetén tartománynak nevezzük az élek által határolt síkidomot. Ez nem feltétlenül korlátos, ilyenkor külső tartományról beszélünk, egyébként pedig belső tartományról.

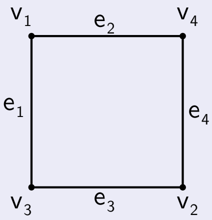
Megjegyzés

Egy belső tartomány valamely másik reprezentációban lehet külső tartomány is, de a tartományok száma nem függ a reprezentációtól.

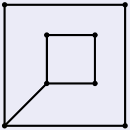
Síkgráfok

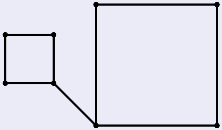
Példa





Példa





Síkgráfok

Tétel (Euler-formula)

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő síkgráf tetszőleges síkbeli reprezentációját tekintve, melyre t jelöli a tartományok számát, teljesül a következő összefüggés.

$$|E| + 2 = |V| + t$$

Bizonyítás (vázlat)

Ha a gráfban van kör, annak egy élét törölve az általa elválasztott két tartomány egyesül, így a tartományok és élek száma is (vagyis az egyenlet mindkét oldala) 1-gyel csökken. Az eljárás ismétlésével fát kapunk, aminek 1 tartománya van, így teljesül rá az összefüggés (Miért?).

Síkgráfok

Állítás

Ha a $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű, összefüggő síkgráfra $|V| \geq 3$, akkor

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Bizonyítás

$|V| = 3$ esetén 2 ilyen gráf van: P_2 és C_3, amelyekre teljesül az állítás. $|V| > 3$ esetén legalább 3 éle van a gráfnak (Miért?). Mivel G egyszerű, ezért minden tartományát legalább 3 él határolja, ezért a tartományok határán végigszámolva az éleket az így kapott érték legalább $3t$. Mivel minden él legfeljebb két tartományt választ el, ezért $3t \leq 2|E|$. Az Euler-formulát használva $3(|E| + 2 - |V|) \leq 2|E|$, amiből kapjuk az állítást.

Megjegyzés

A becslés nem összefüggő síkgráfok esetén is teljesül, hiszen élek hozzávételével összefüggő síkgráfot kaphatunk.

Síkgráfok

Állítás

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egyszerű síkgráf, akkor

$$\delta = \min_{v \in V} d(v) \leq 5.$$

Bizonyítás

Feltehető, hogy $|V| \geq 3$ (Miért?).
Indirekt tfh. $\delta \geq 6$. Ekkor $6|V| \leq 2|E|$ (Miért?), továbbá az előző állítást használva $2|E| \leq 6|V| - 12$, vagyis $6|V| \leq 6|V| - 12$, ami ellentmondás.

Megjegyzés

Létezik 5-reguláris egyszerű síkgráf.

Síkgráfok

Állítás

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

Bizonyítás

Indirekt tfh. $K_{3,3}$ síkgráf, és jelöljük t-vel a síkbeli reprezentációiban a tartományok számát. Ekkor $|E| = 9$ és $|V| = 6$ miatt az Euler-formula alapján $t = 5$. Mivel egyszerű, páros gráf, így minden tartomány határa legalább 4 élt tartalmaz (Miért?), és minden él legfeljebb két tartomány határán van, ezért $4t \leq 2|E|$, amiből $20 \leq 18$ adódik, ami ellentmondás.

Állítás

K_5 nem síkgráf.

Bizonyítás

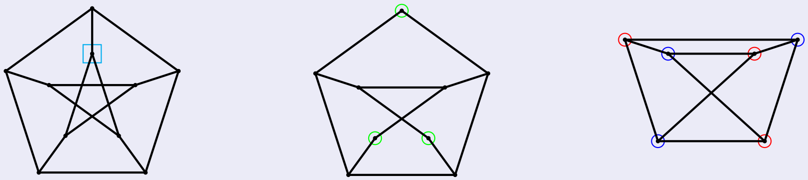
Indirekt tfh. K_5 síkgráf. $|E| = 10$ és $|V| = 5$, így az élszámra vonatkozó becslés alapján $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, ami ellentmondás.

Síkgráfok

Definíció

A G és G' gráfokat topologikusan izomorfnak nevezzük, ha az alábbi lépést, illetve a fordítottját alkalmazva, véges sok lépésben az egyikből a másikkal izomorf gráfot kaphatunk: egy másodfokú csúcsot törlünk, és a szomszédjait összekötjük egy éllel.

Példa



Tétel (Kuratowski) (NB)

Egy egyszerű gráf pontosan akkor síkgráf, ha nincs olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf K_5-tel vagy $K_{3,3}$-mal.

Gráfok színezése

Szeretnénk egy térképet kiszínezni úgy, hogy a szomszédos régiók különböző színűek legyenek.
A probléma megközelítése gráfokkal: a régióknak felelnek meg a csúcsok.
Két csúcs szomszédos, ha a megfelelő régióknak van közös határvonala.
A térképnek megfelelő gráf síkgráf lesz.

Tétel (Négyszíntétel) (NB)

Minden síkgráf 4 színnel színezhető.

Megjegyzés

1976-ban bizonyította Appel és Haken. Ez volt az első nevezetes sejtés, aminek a bizonyításához számítógépet is használtak. 1936 lehetséges ellenpéldát ellenőriztek, 1200 órán keresztül futott a program.

Gráfok színezése

Definíció

Egy gráf egy csúcsszínezését jólszínezésnek nevezzük, ha a szomszédos csúcsok színe különböző.

Definíció

Egy gráf kromatikus száma az a legkisebb n természetes szám, amelyre jólszínezhető n színnel.

Megjegyzés

A kromatikus szám pontosan akkor 1, ha nincs éle a gráfnak, és ha 2 a kromatikus szám, akkor a gráf páros. A síkgráfok kromatikus száma legfeljebb 4.

Gráfok mátrixai

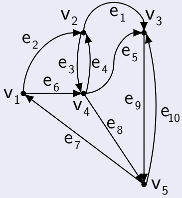
Definíció

Ha egy $G = (\psi, E, V)$ irányított gráf élei $e_1, e_2, \ldots, e_n$, csúcsai pedig $v_1, v_2, \ldots, v_m$, akkor az alábbi illeszkedési mátrix (vagy élmátrix) egyértelműen megadja a gráfot:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, ha } e_j\text{-nek } v_i \text{ kezdőpontja;} \\ -1 & \text{, ha } e_j \text{ nem hurokél, és } v_i \text{ a végpontja;} \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

A megfelelő irányítatlan gráf élmátrixa az $|a_{ij}|$ elemekből áll.

Példa



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gráfok mátrixai

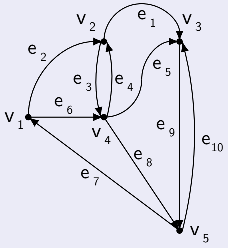
Definíció

A G irányított gráf csúcsmátrixában legyen b_{ij} a v_i kezdőpontú és v_j végpontú élek száma.

A megfelelő irányítatlan gráf csúcsmátrixának elemeire:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{a } v_i\text{-re illeszkedő hurokélek száma} & \text{, ha } i = j; \\ \text{a } v_i\text{-re és } v_j\text{-re is illeszkedő élek száma} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Példa



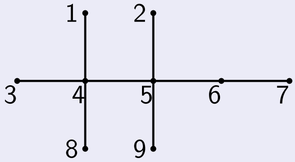
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prüfer-kód

Definíció

Legyen adott egy $F = (\varphi, E, V, w)$ csúcscímkézett fa, az egyes csúcsok címkéi 1 és n közötti különböző egész számok, ahol $n = |V|$. Töröljük az elsőfokú csúcsok közül a legkisebb sorszámút, és írjuk fel ennek szomszédjának a számát. A kapott fára (Miért fa?) folytassuk az eljárást, amíg már csak egy csúcs marad, mégpedig az n címkéjű (Miért?). A sorozat $n-1$-edik tagja szükségképpen n, ezért ez elhagyható.
A kapott $n-2$ hosszú sorozat az F fa Prüfer-kódja.

Példa



A Prüfer-kód: 4546545(9).

Prüfer-kód

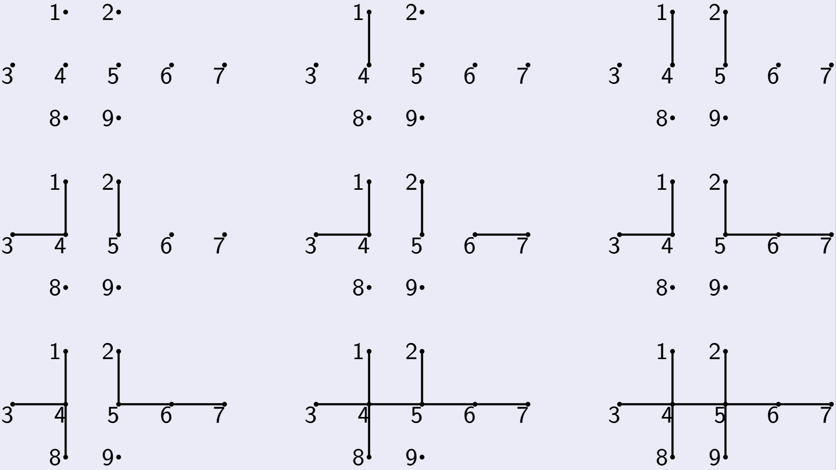
Algoritmus (Prüfer-kódból fa készítése)

Legyen a Prüfer-kód $p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Legyen a kódban nem szereplő legkisebb sorszám s_1. Ha s_i-t már meghatároztuk, akkor legyen s_{i+1} az a legkisebb sorszám, amely különbözik az alábbiaktól: $s_1, s_2, \ldots, s_i; p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} = n$. Ilyennek mindig lennie kell, mert n lehetőségből legfeljebb $n-1$ számút nem engedünk meg. Az n csúcsot tartalmazó üres gráfból kiindulva minden i-re $(1 \leq i \leq n-1)$ megrajzoljuk az s_i és p_i csúcsokra illeszkedő élt.

Prüfer-kód

45465459 1;5465459 12;465459 123;65459 1237;5459 12376;459 123768;59 1237684;9

Példa



Műveletek

Definíció

Egy X halmazon értelmezett művelet alatt egy $* : X^n \to X$ függvényt értünk.
Egy X halmazon értelmezett binér (kétváltozós) művelet egy $* : X \times X \to X$ függvény. Gyakran $*(x, y)$ helyett $x * y$-t írunk.

Példa

- $\mathbb{C}$ halmazon az $+$, $\cdot$ binér művelet.
- $\mathbb{C}$ halmazon az $\div$ (osztás) nem művelet, mert $\mathrm{dmn}(\div) \neq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazon az $\div$ binér művelet.

Műveleti tulajdonságok

Definíció

A $* : X \times X \to X$ művelet:
- asszociatív, ha $\forall a, b, c \in X : (a * b) * c = a * (b * c)$;
- kommutatív, ha $\forall a, b \in X : a * b = b * a$.

Példa

- $\mathbb{C}$-n az $+$ ill. a $\cdot$ műveletek asszociatívak, kommutatívak.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete asszociatív: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- A függvények halmazán a kompozíció művelete nem kommutatív: $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$: $x^2 + 1 = (f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.
- A kivonás az egész számok halmazán nem asszociatív: $-1 = (1 - 1) - 1 \neq 1 - (1 - 1) = 1$.

Algebrai struktúrák

Definíció

A $(H; M)$ pár algebrai struktúra, ha H egy halmaz, M pedig H-n értelmezett műveletek halmaza.
Az egy binér műveletes struktúrát grupoidnak nevezzük.

Példa

- $(\mathbb{N}; +)$ algebrai struktúra, mert természetes számok összege természetes szám (ld. Diszkrét matematika 1.), és grupoid is.
- $(\mathbb{N}; -)$ nem algebrai struktúra, mert például $0 - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$.
- $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ algebrai struktúra, mert egész számok összege és szorzata egész szám (ld. Diszkrét matematika 1.), de nem grupoid.
- $(\mathbb{Z}_m; +, \cdot)$ algebrai struktúra (ld. Diszkrét matematika 1.), de nem grupoid.

Félcsoportok

Definíció

A $(G;*)$ grupoid félcsoport, ha $*$ asszociatív G-n.
Ha létezik $s \in G$: $\forall g \in G : s * g = g * s = g$,
akkor az s semleges elem (egységelem), $(G;*)$ pedig semleges elemes félcsoport (egységelemes félcsoport, monoid).

Példa

- $\mathbb{N}$ az $+$ művelettel egységelemes félcsoport $n = 0$ egységelemmel.
- $\mathbb{Q}$ a $\cdot$ művelettel egységelemes félcsoport $n = 1$ egységelemmel.
- $\mathbb{C}^{k \times k}$ a mátrixszorzással egységelemes félcsoport az egységmátrixszal mint egységelemmel.

Csoportok

Definíció

Legyen $(G;*)$ egy egységelemes félcsoport e egységelemmel. A $g \in G$ elem **inverze** a $g^{-1} \in G$ elem, melyre $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.
Ha minden $g \in G$ elemnek létezik inverze, akkor $(G;*)$ **csoport**.
Ha ezen felül $*$ kommutatív is, akkor $(G;*)$ **Abel-csoport**.

Példa

- $(\mathbb{Q};+)$ a 0 egységelemmel.
- $(\mathbb{Q}^*;\cdot)$ az 1 egységelemmel, ahol $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- $(\mathbb{Z}_m;+)$ a $\overline{0}$ egységelemmel.
- $(\mathbb{Z}_p^*;\cdot)$ az $\overline{1}$ egységelemmel.
- $\{M \in \mathbb{C}^{k\times k} : \det M \neq 0\}$ a mátrixszorzással, és az egységmátrixszal mint egységelemmel.
- $X \to X$ bijektív függvények a kompozícióval, és az $id_X : x \mapsto x$ identikus leképzéssel mint egységelemmel.