

Diszkrét matematika 2.C szakirány

2. előadás

Nagy Gábor

nagygabr@gmail.com

nagy@compalg.inf.elte.hu

compalg.inf.elte.hu/~nagy

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Gráfok alapfogalmai

Állítás

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v -t v' -vel összekötő utat kapunk.

Bizonyítás

Legyen az állításban szereplő séta a következő:

$$v = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v'.$$

Ha valamely $i < j$ esetén $v_i = v_j$, akkor töröljük az

$$e_{i+1}, v_{i+1}, e_{i+2}, v_{i+2}, \dots, v_{j-1}, e_j, v_j$$

részt, és ismételjük ezt, amíg van csúcsismétlődés. Ha már nincs, akkor utat kaptunk. Mivel minden lépésben csökken a séta hossza, ezért az eljárás véges sok lépésben véget ér.

Fák

Definíció

Egy gráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő és körmentes.

Tétel

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa;
- (2) G összefüggő, de bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő;
- (3) ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan 1 út van v -ből v' -be;
- (4) G -nek nincs köre, de bármilyen új él hozzávételével kapott gráf már tartalmaz kört.

A bizonyítás menete

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

Fák

Bizonyítás

(1) \Rightarrow (2)

G összefüggősége következik a fa definíciójából. Az állítás másik részét indirekten bizonyítjuk.

Tfh. létezik egy olyan e él (a végpontjai legyenek v és v') a gráfban, aminek a törlésével kapott gráf összefüggő. Ekkor létezne út v -ből v' -be, amit kiegészítve a törölt éllel és a megfelelő csúccsal egy kört kapnánk:

$v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v', e, v.$

(2) \Rightarrow (3)

Legalább egy út létezik az összefüggőség miatt. Indirekten bizonyítjuk, hogy nem létezhet két különböző út:

Tfh. 2 út is létezik a különböző v és v' csúcsok között, legyenek ezek:

$v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v'$ és $v, e'_1, v'_1, e'_2, \dots, v'_{m-1}, e'_m, v'$. Legyen k a legkisebb olyan index, amelyre $v_k \neq v'_k$. (Miért létezik ilyen?) Az e_k élt törölve összefüggő gráfot kapunk, mert a v_{k-1}, e_k, v_k séta helyettesíthető a $v_{k-1}, e'_k, v'_k, \dots, e'_m, v', e_n, v_{n-1}, e_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}, e_{k+1}, v_k$ sétával.

Fák

Bizonyítás

(3) \Rightarrow (4)

Annak a bizonyítása, hogy nincs kör a gráfban indirekt:

tfh. létezik kör: $v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v$. Ekkor v_1 és v között két különböző út is van: $v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v$ illetve v_1, e_1, v .

Ha a hozzávett e él hurokél, és a v csúcsra illeszkedik, akkor v, e, v kör lesz. Ha a hozzávett e él a különböző v és v' csúcsokra illeszkedik, akkor a köztük lévő utat megfelelően kiegészítve kapunk kört:

$v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v', e, v$.

(4) \Rightarrow (1)

Az, hogy G -nek nincs köre triviálisan teljesül. Kell, hogy G összefüggő, vagyis tetszőleges v és v' csúcsa között van út. Vegyük a gráfhoz a v -re és v' -re illeszkedő e élet. Az így keletkező körben szerepel e (Miért?):

$v', e, v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v'$. Ekkor $v, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v'$ út lesz v és v' között.

Fák

Lemma

Ha egy G véges gráfban nincs kör, de van él, akkor G -nek van legalább 2 elsőfokú csúcsa.

Bizonyítás

A G -beli utak között van maximális hosszúságú (hiszen G véges), és a hossza legalább 1, így a végpontjai különbözőek. Megmutatjuk, hogy ezek elsőfokúak. Legyen az említett út: $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$. Ha lenne az e_1 -től különböző v_0 -ra illeszkedő e él, annak másik végpontja (v') nem lehet az útban szereplő csúcsoktól különböző, mert akkor $v', e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ út hossza nagyobb lenne, mint a maximális út hossza, ami ellentmondás. Ha viszont e másik végpontja az út valamely v_k csúcsa, akkor $v_k, e, v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ kör lenne, ami szintén ellentmondás.

Fák

Tétel

Egy G egyszerű gráfra, amelynek n csúcsa van ($n \in \mathbb{Z}^+$) a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa;
- (2) G -ben nincs kör, és $n - 1$ éle van;
- (3) G összefüggő, és $n - 1$ éle van.

Bizonyítás

$n = 1$ esetén az állítás triviális. (Miért?)

(1) \Rightarrow (2): n szerinti TI: tfh. $n = k$ -ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú G fát. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v -t. Az így kapott gráf, G' nyilván körmentes. Összefüggő is lesz, hiszen v egy G -beli útnak csak kezdő- vagy végpontja lehet, így a G' tetszőleges v' és v'' csúcsa közti G -beli út nem tartalmazhatja sem v -t, sem a rá illeszkedő élt, így G' -beli út is lesz egyben. Tehát G' fa, ezért alkalmazva az indukciós feltevést $k - 1$ éle van, és így G -nek k éle van.

Fák

Bizonyítás

(2) \Rightarrow (3): n szerinti TI: tfh. $n = k$ -ra igaz az állítás. Tekintsünk egy $k + 1$ csúcsú körmentes G gráfot, aminek k éle van. Ennek legyen v egy olyan csúcsa, aminek a foka 1. (Miért van ilyen?) Hagyjuk el a gráfból v -t. Az így kapott G' gráf az indukciós feltevés miatt összefüggő, tehát tetszőleges v' és v'' csúcsa között vezet út G' -ben, ami tekinthető G -beli útnak is. G' tetszőleges csúcsa és v közötti utat úgy kaphatunk, hogy az adott csúcs és a v -vel szomszédos csúcs közötti utat kiegészítjük az elhagyott éllel és v -vel.

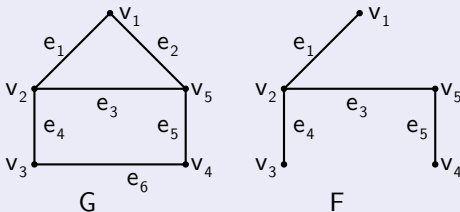
(3) \Rightarrow (1): Ha a feltételnek eleget tevő gráfban van kör, akkor az abban szereplő tetszőleges él elhagyásával összefüggő gráfot kapunk. (Miért?) Folytassuk az élek törlését, amíg már nincs több kör a kapott gráfban, tehát fa lesz. Ha k élt hagytunk el, akkor a kapott gráfnak $n - 1 - k$ éle van, ugyanakkor az (1) \Rightarrow (2) rész miatt a kapott fának $n - 1$ éle van, így $k = 0$, tehát a gráfunkban nem volt kör, így fa.

Feszítőfa

Definíció

A G gráf egy F részgráfját a **feszítőfájának** nevezzük, ha a csúcsainak halmaza megegyezik G csúcsainak halmazával, és fa.

Példa



Feszítőfa

Állítás

Minden összefüggő véges gráfnak létezik feszítőfája.

Bizonyítás

Amíg van kör a gráfban, hagyjuk el annak egy élét. A kapott gráf összefüggő marad. Véges sok lépésben fát kapunk.

Feszítőfa

Állítás

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|E| - |V| + 1$ kör, amelyek élhalmaza különböző.

Bizonyítás

Tekintsük G -nek egy F feszítőfáját. Ennek $|V| - 1$ éle van. Jelöljük E' -vel G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F -nek. $e \in E'$ -t hozzávéve F -hez keletkezik egy K_e kör (Miért?), ami kör G -ben. A K_e kör tartalmazza e -t (Miért?), és $e \neq e' \in E'$ esetén $K_{e'}$ nem tartalmazza e -t. Így kapunk $|E| - |V| + 1$ kört, amiknek az élhalmaza különbözők.

Megjegyzés

Előfordulhat, hogy a becslés nem pontos ($3 > 7 - 6 + 1 = 2$).



Feszítőfa

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$, $v, v' \in V$ és $E' \subset E$. Azt mondjuk, hogy E' **elvágja** a v és v' csúcsokat, ha minden v -ből v' -be menő út tartalmaz E' -beli éleket.

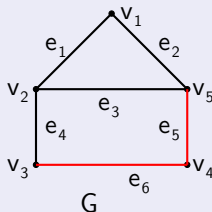
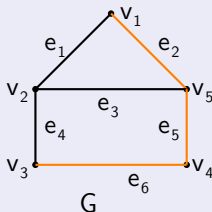
Ha léteznek olyan csúcsok, amelyeket E' elvág, akkor E' -t **elvágó élhalmaznak** nevezzük.

Definíció

Ha egy elvágó élhalmaznak nincs olyan valódi részhalmaza, amely maga is elvágó élhalmaz, akkor **vágásnak** nevezzük.

Feszítőfa

Példa



$\{e_2, e_5, e_6\}$ elvágó élhalmaz, mert elvágja v_4 -et és v_2 -t, hiszen mindhárom v_4 kezdőpontú és v_2 végpontú útban van olyan él, ami eleme:

$v_4, e_6, v_3, e_4, v_2,$

$v_4, e_5, v_5, e_3, v_2,$

$v_4, e_5, v_5, e_2, v_1, e_1, v_2.$

Ugyanakkor nem vágás, mert $\{e_5, e_6\}$ olyan valódi részhalmaza, ami szintén elvágó.

Utóbbi vágás, hiszen sem $\{e_5\}$, sem $\{e_6\}$, sem \emptyset nem elvágó élhalmaz.

Feszítőfa

Állítás

Egy $G = (\varphi, E, V)$ összefüggő véges gráfban létezik legalább $|V| - 1$ különböző vágás.

Bizonyítás

Tekintsük G -nek egy F feszítőfáját. Jelöljük E' -vel F éleinek halmazát, E'' -vel pedig G azon éleinek halmazát, amelyek nem élei F -nek. Ekkor E'' nem elvágó halmaz (Miért?), de tetszőleges $e \in E'$ esetén $E'' \cup \{e\}$ már az (Miért?). Legyen E_e az a vágás, amit $E'' \cup \{e\}$ tartalmaz (Miért van ilyen?). E_e tartalmazza e -t (Miért?), de $e \neq e' \in E'$ esetén nem tartalmazza e' -t, így kaptunk $|V| - 1$ különböző vágást.

Megjegyzés

Ebben az esetben is előfordulhat, hogy a becslés nem pontos.

Erdő, fészítőerdő

Definíció

Egy körmentes gráfot **erdőnek** nevezünk.

Egy gráfnak olyan részgráfját, ami minden komponensből egy fészítőfát tartalmaz, **fészítőerdőnek** nevezzük.

Állítás

Tetszőleges gráfnak létezik fészítőerdeje.

Állítás

Egy véges erdő éleinek száma a csúcsainak és komponenseinek számának különbsége.

Megjegyzés

A nem összefüggő gráfoknál az erdők, illetve fészítőerdők azt a szerepet töltik be, mint összefüggő gráfok esetén a fák, illetve fészítőfák.