

Diszkrét matematika 2.C szakirány

1. előadás

Nagy Gábor

nagygabr@gmail.com

nagy@compalg.inf.elte.hu

compalg.inf.elte.hu/~nagy

Komputeralgebra Tanszék

2017. tavasz

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ hármast (irányítatlan) gráfnak nevezzük, ha E, V halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi: E \rightarrow \{\{v, v'\} \mid v, v' \in V\}$.

E -t az **élek halmazának**, V -t a **csúcsok (pontok) halmazának** és φ -t az **illeszkedési leképezésnek** nevezzük. A φ leképezés E minden egyes eleméhez egy V -beli rendezetlen párt rendel.

Elnevezés

$v \in \varphi(e)$ esetén e **illeszkedik** v -re, illetve v **végpontja** e -nek.

Megjegyzés

Az illeszkedési leképezés meghatározza az $I \subset E \times V$ **illeszkedési relációt**:
 $(e, v) \in I \Leftrightarrow v \in \varphi(e)$.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha E és V is véges halmazok, akkor a gráfot **véges gráfnak** nevezzük, egyébként **végtelen gráfnak**.

$E = \emptyset$ esetén **üres gráfról** beszélünk.

Megjegyzés

Az informatikában elsősorban a véges gráfok játszanak szerepet, így a továbbiakban mi is véges gráfokkal foglalkozunk.

Definíció

Ha egy él egyetlen csúcsra illeszkedik, azt **hurokélnek** nevezzük.

Ha $e \neq e'$ esetén $\varphi(e) = \varphi(e')$, akkor e és e' **párhuzamos élek**.

Ha egy gráfban nincs sem hurokél, sem párhuzamos élek, akkor azt **egyszerű gráfnak** nevezzük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Az $e \neq e'$ élek **szomszédosak**, ha van olyan $v \in V$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v \in \varphi(e')$ egyszerre teljesül. A $v \neq v'$ csúcsok **szomszédosak**, ha van olyan $e \in E$, amelyre $v \in \varphi(e)$ és $v' \in \varphi(e)$ egyszerre teljesül.

Definíció

A v csúcs **fokszámán** (vagy **fokán**) a rá illeszkedő élek számát értjük, a hurokéleket kétszer számolva.

Jelölése: $d(v)$ vagy $deg(v)$.

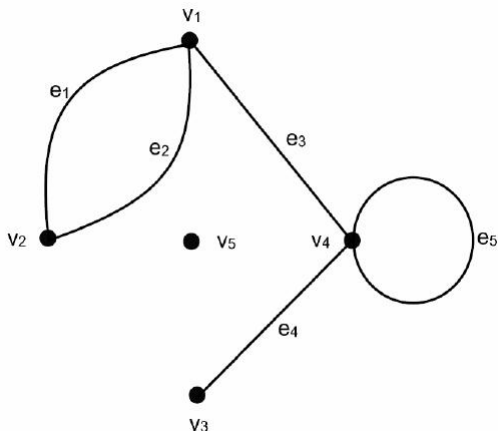
Definíció

Ha $d(v) = 0$, akkor v -t **izolált csúcsnak** nevezzük.

Definíció

Ha egy gráf minden csúcsának a foka n , akkor azt **n -reguláris** gráfnak hívjuk. Egy gráfot **regulárisnak** nevezünk, ha valamely n -re n -reguláris.

Példa



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\varphi = \{(e_1, \{v_1, v_2\}), (e_2, \{v_1, v_2\}), (e_3, \{v_1, v_4\}), (e_4, \{v_3, v_4\}), (e_5, \{v_4\})\}$$

A fokszámösszeg

Állítás

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfra

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Bizonyítás

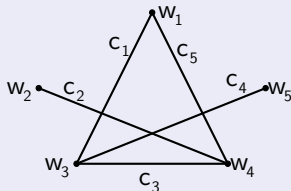
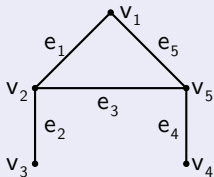
Élszám szerinti teljes indukció: $|E| = 0$ esetén mindkét oldal 0. Tfh. $|E| = n$ esetén igaz az állítás. Ha adott egy gráf, amelynek $n + 1$ éle van, akkor annak egy élét elhagyva egy n élű gráfot kapunk. Erre teljesül az állítás az indukciós feltevés miatt. Az elhagyott élt újra hozzávéve a gráfhoz az egyenlőség mindkét oldala 2-vel nő.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ és $G' = (\varphi', E', V')$ gráfok **izomorfa**k, ha léteznek $f: E \rightarrow E'$ és $g: V \rightarrow V'$ bijektív leképezések, hogy minden $e \in E$ -re és $v \in V$ -re e pontosan akkor illeszkedik v -re, ha $f(e)$ illeszkedik $g(v)$ -re.

Példa



Megfelelő f és g bijekciók:

$$f = \{(e_1, c_5), (e_2, c_2), (e_3, c_3), (e_4, c_4), (e_5, c_1)\}$$

$$g = \{(v_1, w_1), (v_2, w_4), (v_3, w_2), (v_4, w_5), (v_5, w_3)\}$$

Gráfok alapfogalmai

Példa

Ha egy egyszerű gráfban bármely két különböző csúcs szomszédos, akkor **teljes gráfról** beszélünk.

Teljes gráfok esetén, ha a csúcsok halmazai között létezik bijektív leképezés, akkor a két teljes gráf a csúcsok és élek elnevezésétől eltekintve megegyezik. Ebben az értelemben beszélünk bármely $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén az n csúcsú teljes gráfról.

Megjegyzés

Az n csúcsú teljes gráfnak $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ éle van, és K_n -nel jelöljük.

További példák

Definíció

A C_n **ciklus** csúcsai egy szabályos n -szög csúcspontjai, és pontosan a szomszédos csúcspontoknak megfelelő csúcsok szomszédosak.

A P_n **ösvény** C_{n+1} -ből valamely él törlésével adódik.

Az S_n **csillagban** egy szabályos n -szög csúcspontjainak és középpontjának megfelelő csúcsok közül a középpontnak megfelelő csúcs szomszédos az összes többivel.

Példák

 K_4  C_4  P_3  S_4

Gráfok alapfogalmai

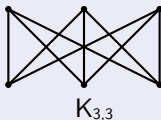
Definíció

A $G = (\varphi, E, V)$ gráfot **páros gráfnak** nevezzük, ha V -nek létezik V' és V'' diszjunkt halmazokra való felbontása úgy, hogy minden él egyik végpontja V' -nek, másik végpontja pedig V'' -nek eleme.

Definíció

Azt az egyszerű páros gráfot, amelyben $|V'| = m$, $|V''| = n$ és minden V' -beli csúcs minden V'' -beli csúccsal szomszédos, $K_{m,n}$ -nel jelöljük.

Példa

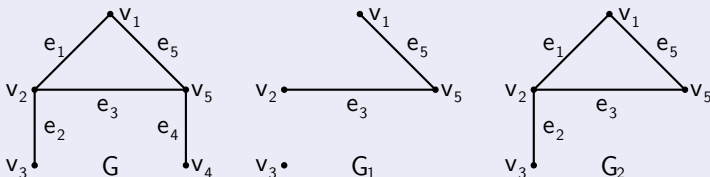


Gráfok alapfogalmai

Definíció

A $G' = (\varphi', E', V')$ gráfot a $G = (\varphi, E, V)$ gráf **részgráfjának** nevezzük, ha $E' \subset E$, $V' \subset V$ és $\varphi' \subset \varphi$. Ekkor G -t a G' **szupergráfjának** hívjuk. Ha E' pontosan azokat az éleket tartalmazza, melyek végpontjai V' -ben vannak, akkor G' -t a V' által meghatározott **feszített** (vagy **telített**) részgráfnak nevezzük.

Példa



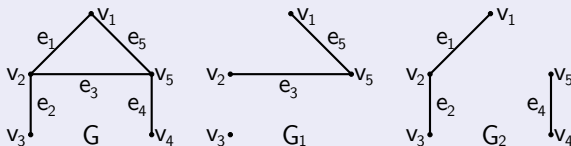
G -nek G_1 részgráfja, de nem feszített részgráfja, míg G_2 feszített részgráfja.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G' = (\varphi', E', V')$ részgráfja a $G = (\varphi, E, V)$ gráfnak, akkor a G' -nek a G -re vonatkozó **komplementerén** a $(\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráfot értjük.

Példa



G_2 a G_1 gráf G -re vonatkozó komplementere.

Megjegyzés

Ha G' egyszerű gráf, és külön nem mondjuk, akkor a V' -beli csúcspontokkal rendelkező teljes gráfra vonatkozó komplementert értjük G' komplementere alatt.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $E' \subset E$, akkor a G -ből az E' élhalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ részgráfot értjük.

Definíció

Ha $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf, és $V' \subset V$, akkor legyen E' az összes olyan él halmaza, amelyek illeszkednek valamely V' -beli csúcsra. A G -ből a V' csúcshalmaz törlésével kapott gráfon a $G' = (\varphi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V')$ részgráfot értjük.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Legyen $G = (\varphi, E, V)$ egy gráf. A

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

sorozatot **sétának** nevezzük v_0 -ból v_n -be, ha

- $v_j \in V \quad 0 \leq j \leq n,$
- $e_k \in E \quad 1 \leq k \leq n,$
- $\varphi(e_m) = \{v_{m-1}, v_m\} \quad 1 \leq m \leq n.$

A **séta hossza** a benne szereplő élek száma (n).

Ha $v_0 = v_n$, akkor **zárt sétáról** beszélünk, különben **nyílt sétáról**.

Definíció

Ha a sétában szereplő élek mind különbözőek, akkor **vonalnak** nevezzük. Az előzőeknek megfelelően beszélhetünk zárt vagy nyílt vonalról.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Ha a sétában szereplő csúcsok mind különbözőek, akkor **útnak** nevezzük.

Megjegyzés

Egy út mindig vonal.

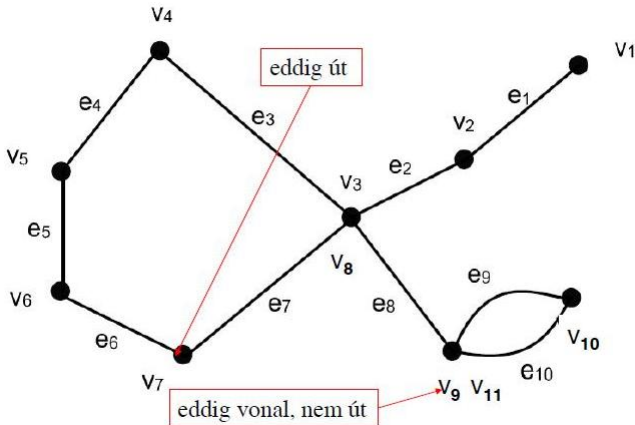
A nulla hosszú séták mind utak, és egyetlen csúcsból állnak.

Egy egy hosszú séta pontosan akkor út, ha a benne szereplő él nem hurokél.

Definíció

Egy legalább egy hosszú zárt vonalat **körnek** nevezünk, ha a kezdő- és végpont megegyeznek, de egyébként a vonal pontjai különböznek.

Példa



út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_6, e_6, v_7$;

vonat, de nem út: $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_8, e_8, v_9$;

kör: $v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_8 (= v_3)$.

Gráfok alapfogalmai

Állítás

Egy G gráfban a különböző v és v' csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve éleket és csúcsokat a v -t v' -vel összekötő utat kapunk.

Bizonyítás

Később...

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot **összefüggőnek** nevezünk, ha bármely két csúcsa összeköthető sétával.

A $G = (\varphi, E, V)$ gráf esetén V elemeire vezessük be a \sim relációt: $v \sim v'$ pontosan akkor, ha G -ben vezet út v -ből v' -be.

A \sim ekvivalenciareláció (Miért?), így meghatároz egy osztályozást V -n.

A csúcsok egy adott ilyen osztálya által meghatározott feszített részgráf a gráf egy **komponense**.

Megjegyzés

Bármely él két végpontja azonos osztályba tartozik (Miért?), így a gráf minden éle hozzátartozik egy komponenshez.

Megjegyzés

Egy gráf akkor és csak akkor összefüggő, ha minden csúcs ugyanabba az osztályba tartozik, azaz ha csak egyetlen komponense van.

Gráfok alapfogalmai

Definíció

Egy gráfot **fának** nevezünk, ha összefüggő és körmentes.