Diszkrét matematika 1.

Nagy Gábor

nagy@compalg.inf.elte.hu
nagygabr@gmail.com
ELTE IK Komputeralgebra Tanszék

2014. ősz

Gyakorlat:

1. **ZH tervezett időpontja**: október 21.,
2. **ZH tervezett időpontja**: december 9.

Fontos információk az alábbi linken találhatók:
http://compalg.inf.elte.hu/~merai/Edu/DM1/index-dm1-gy.html
Ennek szerepét idővel átveszi:
http://compalg.inf.elte.hu/~burcsi
http://compalg.inf.elte.hu/~nagy

Előadás:
Fontos információk az alábbi linken találhatók:
http://compalg.inf.elte.hu/~ merai/Edu/DM1/index-dm1-ea.html

Harmadfokú egyenlet megoldása

Keressük meg az
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
egyenlet megoldásait ($a \neq 0$)!

Végigosztva a-val kapjuk az $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ egyszerűbb egyenletet.

Emlékeztető: másodfokú egyenlet megoldása: $x^2 + px + q = 0$.

Az $x = y - \frac{p}{2}$ helyettesítéssel eltűnik az x-es tag: $y^2 + q' = 0$.
Innen átrendezéssel és gyökvonással megkapjuk a lehetséges megoldásokat y-ra, ahonnan kiszámolhatóak az x_1, x_2 megoldások.

Hasonló helyettesítéssel a harmadfokú egyenlet $y^3 + py + q = 0$ alakra hozható.

Harmadfokú egyenlet

Keressük meg az $y^3 + py + q = 0$ egyenlet megoldásait!
Ötlet: keressük a megoldásokat $y = u + v$ alakban!
Most $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.
A harmadfokú egyenlet:

$$\begin{array}{cccc} (u+v)^3 & -3uv(u+v) & -(u^3+v^3) & = 0 \\ y^3 & +py & +q & = 0 \end{array}$$

Célunk olyan u, v találása, melyekre $-3uv = p$, $-(u^3 + v^3) = q$.
Ekkor $u + v$ megoldás lesz!
u, v megtalálása: $u^3v^3 = (-\frac{p}{3})^3$, $u^3 + v^3 = -q$, u^3, v^3 gyökei lesznek a $z^2 + qz + (\frac{-p}{3})^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. A gyökökből u, v köbgyökvonással kijön:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Harmadfokú egyenlet

Keressük meg az $x^3 - 21x + 20 = 0$ egyenlet megoldásait!
(Most $x = y$, és rögtön látszik, hogy az $x = 1$ gyök lesz.)
$p = -21, q = 20$ helyettesítéssel az

$$x = \sqrt[3]{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

képletbe azt kapjuk, hogy

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$$

A négyzetgyök alatt negatív!
Meg lehet-e menteni a megoldóképletet?

$x = \sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}$
Formálisan számolva, a $(\sqrt{-3})^2 = -3$ feltétellel:
$-10+\sqrt{-243} = -10+9\sqrt{-3} =$
$2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \sqrt{-3} + 3\cdot 2(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3 = (2+\sqrt{-3})^3.$

Hasonlóan $-10-\sqrt{-243} = (2-\sqrt{-3})^3.$

Ezzel a megoldás: $x = (2+\sqrt{-3}) + (2-\sqrt{-3}) = 4.$

Felmerülő kérdések

- Számolhatunk-e $\sqrt{-3}$-mal formálisan?
- Miért épp így kell számolni a $-10+\sqrt{-243}$ értékét?
- Hova tűnt az $x = 1$ megoldás?
- Mi a harmadik gyöke az egyenletnek?

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $x + 2 = 1$!
$\mathbb{N}$ halmazon a kivonás nem értelmezett!

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
A kivonás elvégezhető: $x = -1$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, melyre $x \cdot 2 = 1$!
$\mathbb{Z}$ halmazon az osztás nem értelmezett!

Racionális számok: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
Az osztás elvégezhető: $x = \frac{1}{2}$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre $x^2 = 2$!
$\mathbb{Q}$ halmazon a négyzetgyökvonás nem (mindig) elvégezhető!

Valós számok: $\mathbb{R}$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $x^2 = -1$!

U.i.: Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 \geq 0$.
Ha $x < 0$, akkor $x^2 = (-x)^2 > 0$.

Komplex számok körében az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható!

Komplex számok alkalmazása:

- egyenletek megoldása;
- geometria;
- fizika (áramlástan, kvantummechanika, relativitáselmélet);
- grafika, kvantumszámítógépek.

Komplex számok bevezetése

Legyen i az $x^2 = -1$ egyenlet megoldása.
A szokásos számolási szabályok szerint számoljunk az i szimbólummal formálisan, $i^2 = -1$ helyettesítéssel:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i.$$

Általában

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + i(ad+bc).$$

A komplex számok definíciója

Definíció

Az $a + bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk.
összeadás: $(a + bi) + (c + di) = a + c + i(b + d)$.
Szorzás: $(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc)$.
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám, valós része: $Re(z) = a$.
A $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám képzetes része: $Im(z) = b$.

Figyelem! $Im(z) \neq bi$
Az $a + i0$ alakú komplex számok a valós számok.
A $0 + ib$ alakú komplex számok a tisztán képzetes számok.
Az $a + bi$ és a $c + di$ komplex számok egyenlőek: $a + bi = c + di$, ha

$$a = c \quad \text{és} \quad b = d.$$

A komplex számok definíciója

Megjegyzés

A komplex számok alternatív definíciója:
$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párok halmaza, ahol az
összeadás koordinátánként: $(a, b) + (c, d) = (a + c, d + b)$;
szorzás $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A két definíció ekvivalens: $i \leftrightarrow (0, 1)$.
Az $a + bi$ formátum kényelmesebb számoláshoz.
Az (a, b) formátum kényelmesebb ábrázoláshoz
(grafikusan, számítógépen).
További formális számokra nincs szükség:

Tétel(Algebra alaptétele, NB)

Minden $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ kifejezés esetén, ahol
$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, akkor létezik olyan $z \in \mathbb{C}$ komplex szám,
hogy $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0$.

Definíció

Egy x szám ellentettje az az $\hat{x}$ szám, melyre $x + \hat{x} = 0$.

Egy $r \in \mathbb{R}$ szám ellentettje: $-r$.

Állítás (HF)

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám ellentettje a $-z = -a - bi$ komplex szám.

Definíció

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám abszolút értéke:
$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Valós számok esetében ez a hagyományos abszolút érték:
$|a| = \sqrt{a^2}$.

Állítás(HF)

$|z| = |a + bi| \geq 0, \qquad |z| = |a + bi| = 0 \Leftrightarrow z = a + bi = 0.$

Definíció

Egy x szám reciproka az az $\hat{x}$ szám, melyre $x \cdot \hat{x} = 1$.

Egy $r \in \mathbb{R}$ nemnulla szám reciproka: $\frac{1}{r}$.
Mi lesz $\frac{1}{1+i}$?
Ötlet: gyöktelenítés, kunjugálttal való bővítés:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1+\sqrt{2}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ szám.

Állítás(HF)

Egy z nemnulla komplex szám reciproka $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$

A definíció értelmes, hiszen a nevezőben:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Nullosztómentesség: $z \cdot w = 0 \rightarrow z = 0$ vagy $w = 0$.

Két komplex szám hányadosa:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

Tétel (HF)

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$;
5. $z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z)$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ esetén $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$;
8. $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (háromszög egyenlőtlenség).

Számolás komplex számokkal

Tétel(HF)

$\vdots$

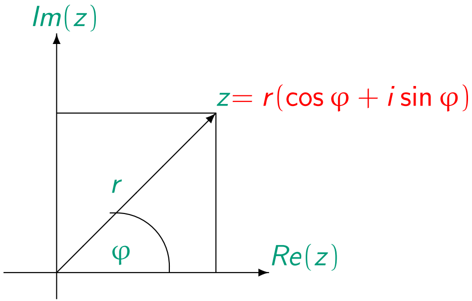
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

$\vdots$

Bizonyítás

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

A komplex számok a komplex számsíkon:



Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$, akkor $Re(z) = a$, $Im(z) = b$.
A $(Re(z), Im(z))$ vektor hossza: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|z|^2}$.
A z nemnulla szám argumentuma $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$
A koordináták trigonometrikus függvényekkel kifejezve:

$$Re(z) = a = r \cdot \cos\varphi, \; Im(z) = b = r \cdot \sin\varphi.$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció

$z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám trigonometrikus alakja a
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
ahol $r > 0$ a szám abszolút értéke.

Figyelem! A 0-nak nem használjuk a trigonometrikus alakját.
A trigonometrikus alak nem egyértelmű:
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$.

Definíció

Egy $z \in \mathbb{C}$ nemnulla argumentuma: az a $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$, melyre $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

- $z = a + bi$ algebrai alak;
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alak.

Itt $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi).$
A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \end{aligned}$$

addíciós képletek: $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$
$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

$$= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
A szorzat argumentuma:

- ha $0 \le arg(z) + arg(w) < 2\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w)$;
- ha $2\pi \le arg(z) + arg(w) < 4\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w) - 2\pi$.

A sin, cos függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásánál redukálni kell az argumentumok összegét.

Moivre-azonosságok

Tétel HF

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$,
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i(\sin(\varphi+\psi));$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi));$$

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Geometriai jelentés

Egy $z \in \mathbb{C}$ komplex szám a komplex számsíkon mint nyújtva forgatás hat. $|z|$-kel nyújt, $arg(z)$ szöggel forgat.

Példa

Számoljuk ki a $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$-t:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 =$$
$$= \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$$

További komplex számok, melyeknek a 8-adik hatványa 1:

- 1;
- -1;
- $i : i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$;
- $-i$;
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}; -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
- sőt: $\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} : \left(i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^8\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1\cdot 1 = 1.$

Gyökvonás

A $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ számok egyenlőek:

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

ha

- $|z| = |w|$
- $\varphi = \psi + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ szám esetén.

n-edik gyökvonás: Legyen $z^n = w$:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Ekkor

- $|z|^n = |w| \to |z| = \sqrt[n]{|w|}$
- $n\varphi = \psi + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén

  $\to \varphi = \frac{\psi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén

ha $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, akkor ezek mind különböző komplex számot adnak.

Gyökvonás

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a z n-edik gyökei $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Gyökvonás

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right): k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Példa

Számítsuk ki a $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ értékét!

$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Mivel $\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$

$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)} =$

$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi+2k\pi}{72} + i\sin\frac{19\pi+2k\pi}{72}\right) : k = 0, 1, \ldots, 5.$

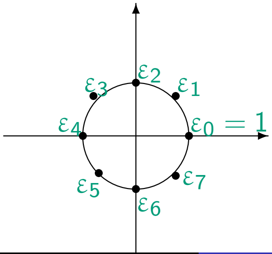
Komplex egységgyökök

Definíció

Az $\varepsilon^n = 1$ feltételnek eleget tevő komplex számok az *n-edik* egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(n)} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nyolcadik komplex egységgyökök



Gyökvonás

Pozitív valós számok négyzetgyöke: legyen $r > 0$ valós.
Ekkor az $x^2 = r$ megoldása: $\pm\sqrt{r}$.

Tétel

Legyen $z \in \mathbb{C}$ nem-nulla komplex szám. $n \in \mathbb{N}$ és $w \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $w^n = z$. Ekkor az n-edik gyökök: $w\varepsilon_k : k = 0, 1, \ldots n-1$.

Bizonyítás

A $w\varepsilon_k$ számok mind n-edik gyökök: $(w\varepsilon_k)^n = w^n\varepsilon_k^n = w^n = z$.
Ez n különböző szám, így az összes gyököt megkaptuk.

Rend

Bizonyos komplex számok hatványai periodikusan ismétlődnek:

- $1, 1, 1 \dots$
- $-1, 1, -1, 1 \dots$
- $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i \dots$

Általában:

$\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$-nek n darab különböző hatványa van.

Definíció

Egy z komplex szám különböző (egész kitevős) hatványainak számát a z rendjének nevezzük és $o(z)$-vel jelöljük.

Példa

- 1 rendje 1
- 2 rendje $\infty : 2, 4, 8, 16, \dots$
- -1 rendje 2: $1, -1$
- i rendje 4: $1, i, -1, -i$

Rend

Tétel

Egy z komplex számnak vagy bármely két egész kitevős hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek. A rend a legkisebb olyan pozitív d szám, melyre $z^d = 1$.
Továbbá $z^k = z^l \Leftrightarrow o(z)|k - l$. Speciálisan $z^k = 1 \Leftrightarrow o(z)|k$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy z rendje véges. Ekkor léteznek olyan k, l különböző egészek, melyekre $z^k = z^l$. Legyen $k > l$. Ekkor $z^{k-l} = 1$.
Legyen d legkisebb olyan pozitív szám, melyre $z^d = 1$. Ha $z^n = 1$, akkor osszuk el maradékosan n-et d-vel: $n = q \cdot d + r$, ahol $0 \leq r < d$. Tehát $1 = z^n = z^{q \cdot d + r} = (z^d)^q z^r = 1^q z^r = z^r$. A d minimalitása miatt $r = 0$ azaz $d|n$. Visszafelé is igaz: $d|n \Rightarrow z^n = 1$. Beláttuk: $d|n \Leftrightarrow z^n = 1$.

Primitív gyökök

Az n-edik egységgyökök rendje nem feltétlenül n:
4-edik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

- 1 rendje 1;
- -1 rendje 2;
- i rendje 4.

Definíció

Az n-ed rendű n-edik egységgyökök a primitív n-edik egységgyökök.

A tétel következményei:

Következmény(HF)

- Egy primitív n-edik egységgyök hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.
- Egy primitív n-edik egységgyök pontosan akkor k-adik egységgyök, ha $n|k$.

Példa

- Primitív 1. egységgyök: 1;
- Primitív 2. egységgyök: -1;
- Primitív 3. egységgyökök: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$;
- Primitív 4. egységgyökök: $\pm i$;
- Primitív 5. egységgyökök: $\ldots$ (HF)
- Primitív 6. egységgyökök: $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$;

Állítás(HF)

Egy $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ n-edik egységgyök pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha $(n, k) = 1$.