Diszkrét matematika 1. középszint

7. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Számok és rendezés

$\mathbb{Z}$-n a természetes módon definiálhatjuk a rendezést:

- Adott $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ esetén legyen $0 < n$.
- Legyen továbbá $n < m$, ha $0 < m - n$.

Ekkor a rendezés kompatibilis a műveletekkel:

Állítás

Ha k, m, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

- $k < m \Rightarrow k + n < m + n$,
- $m, n > 0 \Rightarrow m \cdot n > 0$.

Definíció

Egy R gyűrű rendezett gyűrű, ha van az R-en definiálva egy rendezés, mely kielégíti a fenti tulajdonságokat.

Rendezett testek

A $\mathbb{Z}$-n definiált rendezés kiterjeszthető $\mathbb{Q}$-ra: $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ $(0 < q, s)$, ha $ps < rq$.

A kiterjesztés azonban nem lesz ,,teljes'': $\mathbb{Q}$ nem lesz felső határ tulajdonságú.

Emlékeztető

Egy X halmaz felső határ tulajdonságú, ha minden $\emptyset \neq Y \subseteq X$ felülről korlátos részhalmaznak van supremuma.

Állítás

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Speciálisan $\mathbb{Q}$ nem felső határ tulajdonságú: $\{r \in \mathbb{Q} : r \leq \sqrt{2}\}$ felülről korlátos, de nincs supremuma ($\sup = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Bizonyítás

Indirekt tfh $\exists n, m \in \mathbb{N}^+$: $(m/n)^2 = 2$. Válasszuk úgy az m, n párt, hogy $(m, n) = 1$. Most $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 2 \mid m$. Legyen $m = 2k \Rightarrow$ $m^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2 \mid n \Rightarrow (m, n) \geq 2$. $\square$

Valós számok

Valós számok halmazának definíciója

Legyen $\mathbb{R}$ az $\mathbb{N}$-et tartalmazó legszűkebb felső határ tulajdonsággal rendelkező rendezett test.

Megjegyzés

- A valós számok halmaza lényegében egyértelmű.
- $\mathbb{R}$ megkonstruálható: legyen $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ kezdőszeleteinek halmaza: Egy $A \subseteq \mathbb{Q}$ kezdőszelet, ha $A \neq \mathbb{Q}$, és $r \in A$, $s < r \Rightarrow s \in A$; például $\sqrt{2} \leftrightarrow \{r \in \mathbb{Q} : r \leq \sqrt{2}\}$.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ definiálható $\mathbb{R}$ segítségével is:

- $\mathbb{N}$: a $0, 1 \in \mathbb{R}$ elemeket tartalmazó legszűkebb félcsoport;
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$;
- $\mathbb{Q} = \{r/s \in \mathbb{R} : r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0\}$.

Összefoglaló

Műveletek halmazokon

Struktúra	Példa
Peano axiómák	$\mathbb{N}$
félcsoport: van asszociatív művelet	$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$
csoport: van inverz	$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_m,+)$, $(\mathbb{Z}_p^*,\cdot)$
gyűrű: két művelet, $*$-ra kommutatív csoport, $\diamond$-ra félcsoport, disztributivitás	$(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_m,+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^{k\times k},+,\cdot)$
ferdetest: két művelet, $*$-ra kommutatív csoport, $\diamond$-ra a 0 kivételével csoport, disztributivitás	$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{Z}_p$

Összefoglaló

Műveletek és rendezés

Struktúra	**Példa**
rendezett gyűrű	$\mathbb{Z}$
rendezett test	$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
felsőhatár tulajdonságú test	$\mathbb{R}$

Kombinatorika

Kombinatorika fő célja:

- véges halmazok elemeinek elrendezése;
- elrendezések különböző lehetőségeinek megszámlálása.

Példák:

- Nyolc ember közül van legalább kettő, aki a hét ugyanazon napján született.
- Minimálisan hány ember esetén lesz legalább két embernek ugyanazon a napon a születésnapja?
- Mennyi a lehetséges rendszámok / telefonszámok / IP címek száma?
- Legalább hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan nyerjünk a lottón / totón?

Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani egy elemet $\mathcal{A}$-ból vagy $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$.

Számuk: $n + m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes vagy egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 + 2 = 5$.

Elemi leszámlálások

Adott két véges, diszjunkt halmaz:
$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \quad \mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

Hányféleképpen tudunk választani elemet $\mathcal{A}$-ból és $\mathcal{B}$-ből?

Lehetséges választások:

$$\begin{array}{c|cccc} & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ \hline a_1 & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_m) \\ a_2 & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \ldots & (a_n, b_m) \end{array}$$

Számuk: $n \cdot m$.

Példa

Egy cukrászdában 3-féle édes sütemény (isler, zserbó, kókuszkocka) és 2-féle sós sütemény (pogácsa, perec) van. Hányféleképpen tudunk egy édes és egy sós sütemény enni? Megoldás: $3 \cdot 2 = 6$.

Permutáció

Tétel

Legyen $\mathcal{A}$ egy n elemű halmaz. Ekkor az $\mathcal{A}$ elemeinek lehetséges sorrendje: $P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (n faktoriális). Itt $0! = 1$.

Példa

Reggelire a
2 különböző szendvicset $2! = 2 \cdot 1 = 2$ -féle sorrendben lehet megenni.
3 különböző szendvicset $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féle sorrendben lehet megenni.
4 különböző szendvicset $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féle sorrendben lehet megenni.

A 200 fős évfolyam $200! = 200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \approx 7,89 \cdot 10^{374}$-féle sorrendben írhatja alá a jelenléti ívet.

Bizonyítás

Az n elemből az első helyre n-féleképpen választhatunk, a második helyre $n-1$-féleképpen választhatunk, ...
Így az összes lehetőségek száma $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. $\square$

Ismétléses permutáció

Példa

Egy vizsgán 5 hallgató vett részt, 2 darab 4-es, 3 darab 5-ös született. Hány sorrendben írhatjuk le az eredményeket?

Megoldás

Ha figyelembe vesszük a hallgatókat is: $(2+3)! = 5!$ lehetséges sorrend van.

Ha a hallgatókat nem tüntetjük fel, egy lehetséges sorrendet többször is figyelembe vettünk:

5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	...
4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	

Az 5-ösöket $3! = 6$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Hasonlóan a 4-eseket $2! = 2$-féleképpen cserélhetjük, ennyiszer vettünk figyelembe minden sorrendet.

Összes lehetőség: $\dfrac{5!}{2! \cdot 3!} = \dfrac{120}{2 \cdot 6} = 10$.

Ismétléses permutáció

Tétel

k_1 darab első típusú, k_2 második típusú, ..., k_m m-edik típusú elem lehetséges sorrendjét az elemek ismétléses permutációinak nevezzük, és számuk $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ esetén

$$^{i}P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Bizonyítás

Ha minden elem között különbséget teszünk: $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!$ lehetséges sorrend létezik.
Ha az i-edik típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_i!$-szor fordulnak elő a különböző sorrendek.
Ha az azonos típusú elemek között nem teszünk különbséget, akkor az előbb megkapott lehetséges sorrendek között $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$-szor fordulnak elő a különböző sorrendek. Így ekkor a lehetséges sorrendek száma: $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!/(k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!)$. $\square$

Variáció

Példa

Az egyetemen 10 tárgyunk van, ezek közül 3-at szeretnénk hétfőre tenni. Hányféleképpen tehetjük meg ezt?

Megoldás

Hétfőn az első óránk 10-féle lehet. A második 9-féle, a harmadik 8-féle lehet.
Így összesen $10 \cdot 9 \cdot 8$-féleképpen tehetjük meg.

Tétel

Adott egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz. Ekkor k elemet $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!/(n-k)!$-féleképpen választhatunk ki.

Bizonyítás

Az $\mathcal{A}$ halmazból először n-féleképpen választhatunk, második esetben $(n-1)$, ..., k-adik esetben $n-k+1$-féleképpen választhatunk. $\square$

Ismétléses variáció

Példa

A 0, 1, 2 számjegyekből hány legfeljebb kétjegyű szám képezhető?

Megoldás

Az első helyiértékre 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{c} \sqcup 0 \\ \sqcup 1 \\ \sqcup 2 \end{array}$$

A második helyiértékre szintén 3-féleképpen írhatunk számjegyet:

$$\begin{array}{ccc} 00 & 10 & 20 \\ 01 & 11 & 21 \\ 02 & 12 & 22 \end{array}$$

Összesen:

$$\overset{\sqcup}{3} \cdot \overset{\sqcup}{3} = 9$$

Ismétléses variáció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ${}^{i}V_n^k = n^k$ darab k hosszú sorozat készíthető.

Bizonyítás

A sorozat első elemét n-féleképpen választhatjuk, a második elemét n-féleképpen választhatjuk, ... $\square$

Példa

Egy totószelvényt ($13+1$ helyre 1, 2 vagy X kerülhet) $3^{14} = 4\,782\,969$-féleképpen lehet kitölteni.

Mennyi egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma?
Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden részhalmaz megfelel egy n hosszú $0-1$ sorozatnak: ha a sorozat i-edik eleme 1, akkor a_i benne van a részhalmazban.
$\emptyset \leftrightarrow (0,0,\ldots,0)$, $\{a_1, a_3\} \leftrightarrow (1,0,1,0,\ldots,0)$, ..., $\mathcal{A} \leftrightarrow (1,1,\ldots,1)$
Hány n hosszú $0-1$ sorozat van: 2^n.

Kombináció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaznak a k elemű részhalmazainak száma

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Bizonyítás

Először válasszunk $\mathcal{A}$ elemei közül k darabot a sorrendet figyelembevéve. Ezt $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$-féleképpen tehetjük meg. Ha a sorrendtől eltekintünk, akkor az előző leszámlálásnál minden k elemű részhalmaz pontosan $k!$-szor szerepel. Ezzel leosztva kapjuk a k elemű részhalmazok számát. □

Példa

Egy lottószelvény (90 számból 5) lehetséges kitöltéseinek száma:

$$\binom{90}{5} = \frac{90!}{5! \cdot 85!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\,949\,268.$$

Ismétléses kombináció

Tétel

Egy n elemű $\mathcal{A}$ halmaz elemeiből ha k-szor választunk úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk, akkor a lehetséges választások száma

$$^{i}C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ekkor minden egyes lehetőségnek megfeleltetünk egy $0-1$ sorozatot:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1\text{-ek száma}}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2\text{-k száma}}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_n\text{-ek száma}}.$$

Ekkor a sorozatban k darab 1-es van (választott elemek száma), $n-1$ darab 0 van (szeparátorok száma). Összesen $n-1+k$ pozíció, ezekből k-t választunk. Ilyen sorozat $\binom{n+k-1}{k}$ darab van. $\square$

Ismétléses kombináció

Példa

5-féle sütemény van a cukrászdában, 8 darabot szeretnénk vásárolni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
Itt $n = 5$, $k = 8$:

$$\binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495.$$

Hányféleképpen dobhatunk 5 dobókockával?

Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazból 5-ször választunk (sorrend nem számít, egy elemet többször is választhatunk). Ismétléses kombináció $n = 6$, $k = 5$ választással:

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Összefoglaló

Ismétlés nélküli permutáció $n!$, n elem lehetséges sorrendje (sorrend számít, egy elem (pontosan) egyszer).

Ismétléses permutáció $\dfrac{(k_1+k_2+\ldots+k_m)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$, $n=k_1+k_2+\ldots+k_m$ elem lehetséges sorrendje, ahol az i típusú elemet k_i-szer választjuk (sorrend számít, egy elem többször).

Ismétlés nélküli variáció $n!/(n-k)!$, n elemből k-t választunk (sorrend számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses variáció n^k, n elemből k-szor választunk (sorrend számít, egy elem többször is).

Ismétlés nélküli kombináció $\binom{n}{k}$, n elemből k-t választunk (sorrend nem számít, egy elem legfeljebb egyszer).

Ismétléses kombináció $\binom{n+k-1}{k}$, n elemből k-szor választunk (sorrend nem számít, egy elem többször is).

Binomiális tétel

Tétel

Adott $x, y \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Bizonyítás

$$(x+y)^n = (x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$$

Ha elvégezzük a beszorzást, akkor $x^k y^{n-k}$ alakú tagokat kapunk, és ezen tagot annyiszor kapjuk meg, ahányszor az n tényezőből k darab x-et választunk. □

Definíció

Az $\binom{n}{k}$ alakú számokat $(n, k \in \mathbb{N})$ binomiális együtthatónak nevezzük.

Binomiális együttható

Tétel

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Bizonyítás

$\binom{n}{k}$ azon n hosszú $0-1$ sorozatok száma, melyben k darab 1-es van.

1. Az n hosszú $0-1$ sorozatok közül azok száma, melyek k darab 1-est tartalmaznak megegyezik azok számával, melyek $n-k$ darab 1-est tartalmaznak.
2. Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 1: $\binom{n-1}{k-1}$.
   Azon n hosszú, k darab 1-est tartalmazó $0-1$ sorozatok száma, melynek első tagja 0: $\binom{n-1}{k}$.

$\square$

Binomiális együttható

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}: \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n	$\binom{n}{k}$	$(x+y)^n$
0	1	1
1	1 1	$x+y$
2	1 2 1	$x^2+2xy+y^2$
3	1 3 3 1	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4	1 4 6 4 1	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$
5	1 5 10 10 5 1	$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$