Diszkrét matematika 1. középszint

5. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/∼ nagy
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Részbenrendezés, rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, ...)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

Ha egy részbenrendezés esetén bármely két elem összehasonlítható, akkor az rendezés.

Példa

- $\mathbb{R}$-en a $\leq$ reláció rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ vagy $y \leq x$.
- $\mathbb{N}$-en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés: $4 \nmid 5$, $5 \nmid 4$.
- Az X halmaz összes részhalmazán a $\subseteq$ reláció részbenrendezés $X = \{a, b, c\}$, $\{a\} \not\subseteq \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subseteq \{a\}$.

Szigorú és gyenge reláció

Definíció

Az X-beli R relációhoz tartozó szigorú reláció, az az S reláció, melyre $xSy \iff xRy \land x \neq y$.
Az X-beli R relációhoz tartozó gyenge reláció, az a T reláció, melyre $xTy \iff xRy \lor x = y$.

Másképpen megfogalmazva:
$S = R \setminus \mathbb{I}_X$, $T = R \cup \mathbb{I}_X$, ahol $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

Példa

- $\leq$ relációhoz tartozó szigorú reláció: $<$.
- $\subseteq$ relációhoz tartozó szigorú reláció: $\subsetneq$.
- $\mathbb{N}$-en az osztója relációhoz tartozó szigorú reláció: valódi osztója.

Szigorú és gyenge rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett tranzitív és irreflexív relációt szigorú részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $<$, $\prec$, $\ldots$)

Megjegyzések

- A tranzitivitásból és az irreflexivitásból következik a szigorú antiszimmetria: ha $x \prec y$ és $y \prec x$, akkor a tranzitivitás miatt $x \prec x$, ami ellentmondás.
- Egy részbenrendezés relációnak szigorú változata szigorú részbenrendezés, és fordítva: $\prec = \preceq \setminus \mathbb{I}_X$, $\preceq = \prec \cup \mathbb{I}_X$.

Állítás

Egy $\preceq$ részbenrendezés pontosan akkor rendezés, ha $\prec$ trichotóm.

Bizonyítás

$\Longrightarrow$ $x = y$ esetén $x \prec y$ és $y \prec x$ sem teljesülhet. Az antiszimmetria miatt $x \neq y$ esetén $x \preceq y$ és $y \preceq x$ nem teljesülhet egyszerre.
$\Longleftarrow$ $x \neq y$ esetén $x \prec y$ és $y \prec x$ közül pontosan az egyik teljesül, ezért x és y összehasonlítható $\preceq$ szerint.

Intervallumok

Definíció

Legyen $(X; \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz. Ha $x \preceq z$ és $z \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy z az x és y közé esik, ha $x \prec z$ és $z \prec y$, akkor azt mondjuk, hogy z szigorúan az x és y közé esik. Az összes ilyen elem halmazát $[x, y]$, ill. (x, y) jelöli. Az $[x, y)$, ill. $(x, y]$ jelölések definíciója analóg.

Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval.
Ekkor $[\{a\}, \{a, b, c\}] = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$;
$(\{a\}, \{a, b, c\}) = \big\{\{a, b\}, \{a, c\}\big\}$.

Legyen X a pozitív egész számok halmaza az osztója relációval.
Ekkor $[2, 12] = \big\{2, 4, 6, 12\big\}$;
$(2, 12) = \big\{4, 6\big\}$.

Intervallumok

Definíció

Ha $x \prec y$, de nem létezik szigorúan x és y közé eső elem, akkor x megelőzi y-t.

Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval. Ekkor az $\{a\}$ megelőzi $\{a, b\}$-t, illetve $\{a, c\}$-t.

Legyen X a pozitív egész számok halmaza az osztója relációval. Ekkor 2 megelőzi a 4, 6, 10, 14 elemeket.

Definíció

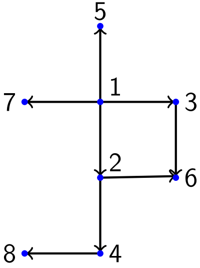
Az $\{y \in X : y < x\}$ részhalmazt az x elemhez tartozó kezdőszeletnek nevezzük.

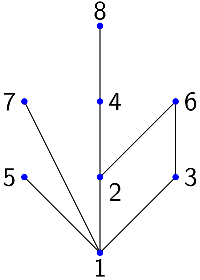
Példa

Legyen X az $\{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza a részhalmaz relációval. Ekkor az $\{a, b\}$ elemhez tartozó kezdőszelet: $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$.

Részbenrendezések Hasse-diagramja

Ha egy részbenrendezett halmaz elemeit pontokkal ábrázoljuk, és csak azon x, y párok esetén rajzolunk irányított élt, amelyre x megelőzi y-t, akkor a részbenrendezett halmaz Hasse-diagramját kapjuk. Néha irányított élek helyett irányítatlan élt rajzolunk, és a kisebb elem kerül lejjebb.





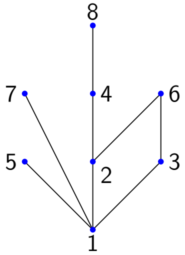
Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Definíció

Az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz
legkisebb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ x \preceq y$;
legnagyobb eleme: olyan $x \in X : \forall y \in X,\ y \preceq x$;
minimális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ y \preceq x$;
maximális eleme: olyan $x \in X : \neg\exists y \in X, x \neq y,\ x \preceq y$.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:



legkisebb elem: 1,
legnagyobb elem: nincs,
minimális elem: 1,
maximális elemek: 5, 6, 7, 8.

Legkisebb, legnagyobb, minimális, maximális elem

Megjegyzések

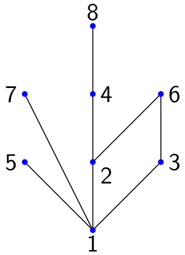
- Minimális és maximális elemből több is lehet.
- Ha a halmaz rendezett, akkor a minimális, és legkisebb elem, továbbá a maximális és legnagyobb elem egybeesik.
- Ha X-nek létezik egyértelmű minimális, ill. maximális eleme, akkor azt $\min X$, ill. $\max X$ jelöli.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

$\min X = 1$,

$\max X$ nincs.



Korlátok

Definíció

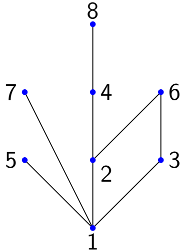
Egy $(X; \preceq)$ részbenrendezett halmaz x eleme az $Y \subseteq X$
alsó korlátja, ha $\forall y \in Y : x \preceq y$;
felső korlátja, ha $\forall y \in Y : y \preceq x$.
Ha az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor ez az Y infimuma: $\inf Y$, ha a felső korlátok halmazában van legkisebb elem, akkor ez az Y supremuma: $\sup Y$.

Példa

Legyen $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$ az oszthatósággal:

$\{1, 2, 3\}$ alsó korlátja: 1,
felső korlátja: 6,
infimuma: 1,
supremuma: 6.

$\{4, 6\}$ alsó korlátjai: 1, 2,
felső korlátja: nincs,
infimuma: 2,
supremuma: nincs.



Korlátok

Definíció

Ha az X részbenrendezett halmaz bármely nem üres, felülről korlátos részhalmazának van supremuma, akkor felső határ tulajdonságúnak nevezzük, ha bármely nem üres, alulról korlátos részhalmazának van infimuma, akkor X-et alsó határ tulajdonságúnak nevezzük.

Példa

- A természetes számok halmaza az oszthatóságra nézve alsó és felső határ tulajdonságú:
  Ha $Y = \{a_1, a_2, \dots\}$, akkor $\inf Y = lnko(a_1, a_2, \dots)$, felső határa $lkkt(a_1, a_2, \dots)$.
- A racionális számok halmaza a szokásos rendezésre nézve sem alsó sem felső határ tulajdonságú:
  $Y = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 \leq 2\}$ halmaznak van felső korlátja (pl.: 1000, 999, 2, $1,42$, ...), de nincs (racionális) supremuma (a supremum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ lenne).

Függvények

Definíció

Egy $f \subseteq X \times Y$ relációt függvénynek (leképezésnek, transzformációnak, hozzárendelésnek, operátornak) nevezünk, ha $\forall x, y, y' : (x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. Az $(x, y) \in f$ jelölés helyett ilyenkor az $f(x) = y$ (vagy $f : x \mapsto y$, $f_x = y$) jelölést használjuk. Az y az f függvény x helyen (argumentumban) felvett értéke.

Példa

- $f = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ reláció függvény: $f(x) = x^2$.
- Az $f^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$ inverz reláció nem függvény: $(4, 2), (4, -2) \in f^{-1}$.
- Legyen F_n a Fibonacci sorozat: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$
  Ekkor az $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció függvény, n helyen az értéke $F(n) = F_n$.

Függvények

Definíció

Az $f \subseteq X \times Y$ függvények halmazát $X \to Y$ jelöli, így használható az $f \in X \to Y$ jelölés. Ha $\mathrm{dmn}(f) = X$, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

Megjegyzés

Ha $f : X \to Y$, akkor $\mathrm{dmn}(f) = X$ és $\mathrm{rng}(f) \subseteq Y$.

Példa

Legyen $f(x) = \sqrt{x}$. Ekkor

- $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de nem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$.
- $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$.

Függvények

Definíció

Az $f : X \to Y$ függvény

- injektív, ha $\forall x, x', y : (f(x) = y \land f(x') = y) \Rightarrow x = x'$;
- szürjektív, ha $\mathrm{rng}(f) = Y$;
- bijektív, ha injektív és szürjektív.

Megjegyzés Egy f függvény pontosan akkor injektív, ha f^{-1} reláció függvény.

- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, és nem szürjektív: $f(-1) = f(1)$, $\mathrm{rng}(f) = \mathbb{R}_0^+$.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény nem injektív, de szürjektív.
- Az $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f : x \mapsto x^2$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív.

Megjegyzés

Az, hogy egy $f : X \to Y$ függvény szürjektív-e, függ Y-tól. Ha $Y \subsetneq Y'$, akkor $f \subseteq X \times Y \subseteq X \times Y'$, így az $f : X \to Y'$ függvény biztos nem szürjektív.

Függvények

Definíció

Az $f : X \to X$ bijektív függvényt permutációnak nevezzük.

Példa

- Ha $X = \{1, 2, \dots, n\}$, akkor az $X \to X$ permutációk száma $n!$: az $f(1), f(2), \dots, f(n)$ az $1, 2, \dots, n$ elemek egy ismétlés nélküli permutációja.
- Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ a valós számok egy permutációja.
- Az $f(x) = x^3$ függvény nem permutációja $\mathbb{C}$-nek: legyen ε primitív harmadik egységgyök, ekkor $f(\varepsilon) = f(1)$, de $\varepsilon \neq 1$.

Függvények kompozíciója

Emlékeztető
Relációk kompozíciója $R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$.
Függvény Az f reláció függvény, ha $(x, y) \in f \wedge (x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

Tétel

1. Ha f és g függvény, akkor $g \circ f$ is függvény.
2. Ha f és g függvény, akkor $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
3. Ha f és g injektív, akkor $g \circ f$ is injektív.
4. Ha $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ szürjektívek, akkor $g \circ f : X \to Z$ is szürjektív.

Bizonyítás

1. Legyen $(x, y) \in g \circ f$, $(x, y') \in g \circ f$:
   $\exists z : (x, z) \in f, (z, y) \in g$, $\exists z' : (x, z') \in f, (z', y') \in g$.
   Mivel f függény $z = z'$, mivel g függvény $y = y'$.

Függvények kompozíciója

Bizonyítás

2. Legyen $(g \circ f)(x) = y$, tehát létezik z: $(x, z) \in f \land (z, y) \in g$. Mivel f és g függvények, ezért $f(x) = z$ és $g(z) = y$, így $g(f(x)) = y$.
3. Legyen $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, vagyis $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mivel g injektív, ezért $f(x) = f(x')$. Mivel f injektív, ezért $x = x'$.
4. HF. □

Monoton függvények

Definíció

Legyenek $(X; \preceq_1)$, $(Y; \preceq_2)$ részbenrendezett halmazok. Az $f : X \to Y$ függvény

1. monoton növekedő, ha $\forall x, y \in X$, $x \preceq_1 y \Rightarrow f(x) \preceq_2 f(y)$;
2. szigorúan monoton növekedő, ha $\forall x, y \in X$, $x \prec_1 y \Rightarrow f(x) \prec_2 f(y)$;
3. monoton csökkenő, ha $\forall x, y \in X$, $x \preceq_1 y \Rightarrow f(y) \preceq_2 f(x)$;
4. szigorúan monoton csökkenő, ha $\forall x, y \in X$, $x \prec_1 y \Rightarrow f(y) \prec_2 f(x)$.

Példa

- Legyen $X = \mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x) = x$; $g(x) = x^3$ szigorúan monoton növekedő függvények.
- Legyen X az $\{a, b, c\}$ hatványhalmaza a részhalmaza részbenrendezéssel.
  Ekkor az $f(A) = A \setminus \{a\}$ monoton növekedő: $A \subseteq B \Rightarrow f(A) = A \setminus \{a\} \subseteq B \setminus \{a\} = f(B)$;
  A $g(A) = \overline{A}$ szigorúan monoton csökkenő: $A \subsetneq B \Rightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$.

Monoton függvények

Megjegyzés

- Ha $(X;\preceq_1)$, $(Y;\preceq_2)$ rendezett halmazok, akkor egy szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény injektív is:
  $x\neq y \Rightarrow (x\prec_1 y \vee y\prec_1 x) \Rightarrow (f(x)\prec_2 f(y) \vee f(y)\prec_2 f(x)) \Rightarrow$
  $\Rightarrow f(x)\neq f(y)$.
- Ha $(X;\preceq_1)$, $(Y;\preceq_2)$ rendezett halmazok, és f szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény, akkor f^{-1} szigorúan monoton növekedő (ill. csökkenő) függvény:
  Mivel f injektív, f^{-1} is függvény.
  Ha $f(x)\prec_2 f(y)$, akkor nem lehet $y\preceq_1 x$, hiszen $x=y$ esetén $f(x)=f(y)$, $y\prec_1 x$ esetén $f(y)\prec_2 f(x)$ teljesülne.

Példa

Legyen $X=\mathbb{R}$ a szokásos rendezéssel. Ekkor az $f(x)=\sqrt[3]{x}$ szigorúan monoton növekedő függvény.