Diszkrét matematika 1. középszint

4. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Relációk kitejesztése, leszűkítése, inverze

Definíció

Egy R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (megszorításának) nevezzük, ha $S \subseteq R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való leszűkítése (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Példa

Legyen $R = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(\sqrt{x}, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.
Ekkor R az S kiterjesztése, S az R leszűkítése, $S = R|_{\mathbb{R}_0^+}$
(ahol $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok halmaza).

Definíció

Egy R binér reláció inverze az $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Példa

$R^{-1} = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Halmaz képe, teljes inverz képe

Definíció

Legyen $R \subseteq X \times Y$ egy binér reláció, A egy halmaz. Az A halmaz képe az $R(A) = \{y \in Y | \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes őséképe az $R^{-1}(B)$, vagyis a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Példa

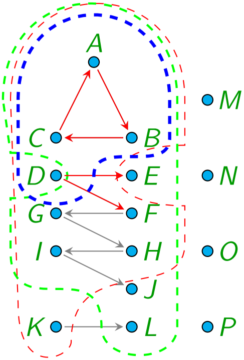
Legyen $R = \{(x^2, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

- $R(\{9\}) = \{-3, +3\}$ (vagy röviden $R(9) = \{-3, +3\}$),
- $S(9) = \{+3\}$.

Példa

Legyen R reláció az $X = \{A, B, C, \ldots, P\}$ halmazon, és jelöljük $T \to T'$-vel, ha $(T, T') \in R$.

- $\mathrm{dmn}(R) = \{A, B, C, D, F, G, H, I, K\}$.
- $\mathrm{rng}(R) = \{A, B, C, E, F, G, H, I, J, L\}$.
- $R|_{\{A,B,C,D\}} = \{(A, B), (B, C), (C, A), (D, E), (D, F)\}$.



Kompozíció

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Kompozíció esetén a relációkat „jobbról-balra írjuk”:

Példa

Legyen $R_{\sin} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
$S_{\log} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

Ekkor

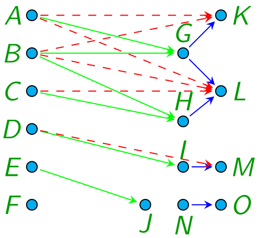
$$\begin{aligned} R_{\sin} \circ S_{\log} &= \{(x, y) | \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$

Kompozíció

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}$$

Példa

Legyen S, R két reláció, és tekintsük a $T = R \circ S$ kompozíciót:



Példa

Adott cég esetén legyenek A,B, . . . , J az alkalmazottak. A cég két projekten dolgozik: BANK, JÁTÉK.

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
programozó	C, D, E
tesztelő	F, G, H
HR	I
tech. dolgozó	J

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F	2014.12.31.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, H	2015.01.31.

Legyen B a beosztás reláció: például A B menedzser.
P a projekt reláció: például A P BANK
H a határidő reláció: például BANK H 2014.12.31.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$.
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$.
- Mi a BANK projekt határideje? $H(\text{BANK})$.
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$.
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}(\text{tesztelő})$.

Kompozíció

$$R \circ S = \{(x, y) | \exists z : (x, z) \in S \land (z, y) \in R\}$$

Állítás

Legyen R, S, T binér reláció. Ekkor

1. Ha $\operatorname{rng}(S) \supseteq \operatorname{dmn}(R)$, akkor $\operatorname{rng}(R \circ S) = \operatorname{rng}(R)$.
2. $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ (a kompozíció asszociatív).
3. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás

1. $\operatorname{rng}(R) = \{y | \ \exists z : \ (z, y) \in R\}$. Mivel $\operatorname{rng}(S) \supseteq \operatorname{dmn}(R)$, ezért minden $(z, y) \in R$ esetén $\exists x : (x, z) \in S$, így $(x, y) \in R \circ S$.
2. $R \circ (S \circ T) = \{(w, z) | \exists y : (w, y) \in S \circ T \land (y, z) \in R\} =$ $\{(w, z) | \exists y \exists x : (w, x) \in T \land (x, y) \in S \land (y, z) \in R\} = (R \circ S) \circ T$.
3. $(R \circ S)^{-1} = \{(y, x) | \exists z : (x, z) \in S \land (z, y) \in R\} =$ $= \{(y, x) | \exists z : (z, x) \in S^{-1} \land (y, z) \in R^{-1}\} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

Relációk tulajdonságai

Példa

Relációk: $=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, $T = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < 1\}$.

Definíció

Legyen R reláció X-en. Ekkor azt mondjuk, hogy

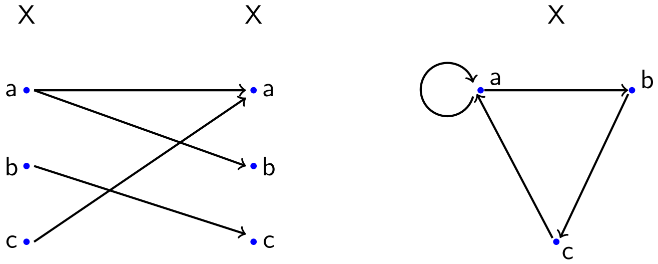
1. R tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$;($=$, $<$, $\leq$, $|$, $\subseteq$)
2. R szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$; ($=$, T)
3. R antiszimmetrikus, ha$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$;($=$, $\leq$, $\subseteq$)
4. R szigorúan antiszimmetrikus, ha xRy és yRx egyszerre nem teljesülhet; ($<$)
5. R reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$; ($=$, $\leq$, $|$, $\subseteq$, T)
6. R irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg xRx$; ($<$)
7. R trichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül; ($<$)
8. R dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén xRy vagy yRx (esetleg mindkettő). ($\leq$)

Relációk tulajdonságai

A reflexív, trichotóm, dichotóm tulajdonságok nem csak a relációtól függnek, hanem az alaphalmaztól is:

Az $\{(x,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ mint $\mathbb{R}$-en értelmezett reláció reflexív, de mint $\mathbb{C}$-n értelmezett reláció nem reflexív.

Példa

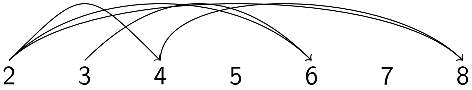


tranzitív	✗	szigorúan antiszimmetrikus	✗	trichotóm	✗
szimmetrikus	✗	reflexív	✗	dichotóm	✗
antiszimmetrikus	✓	irreflexív	✗		

Relációk gráfja

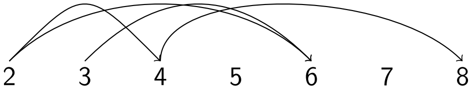
A relációk gráfját egyszerűsíthetjük:

- Ha egy reláció reflexív, akkor a hurokéleket nem rajzoljuk.



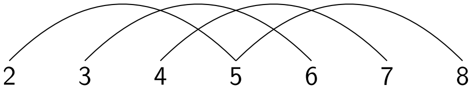
osztója reláció

- Ha egy reláció tranzitív, akkor elhagyjuk az olyan éleket, amelyek létezése a tranzitivitás miatt a már berajzolt élekből következik.



osztója reláció

- Ha egy reláció szimmetrikus, akkor irányított élek helyett csak éleket (vonalakat) rajzolunk.



3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Definíció

Legyen X egy halmaz, R reláció X-en. Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Példa

1. $=$; 2. $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$.

Definíció

Az X részhalmazainak egy $\mathcal{O}$ rendszerét az X **osztályozásának** nevezzük, ha $\mathcal{O}$ páronként diszjunkt, nem-üres halmazokból álló halmazrendszer és $\cup\mathcal{O} = X$.

Példa

1. $\mathbb{R}$ egy osztályozása: $\{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathbb{C}$ egy osztályozása: $\{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\}$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalenciareláció esetén az $\tilde{x} = \{y \in X : y \sim x\}$ $(x \in X)$, ekvivalenciaosztályok X-nek egy osztályozását adják, ezt az osztályozást $X/\sim$ -mal jelöljük.

Bizonyítás

Legyen $\sim$ egy X-beli ekvivalenciareláció. Azt kell megmutatni, hogy $X/\sim = \{\tilde{x} : x \in X\}$ az X egy osztályozását adja.

- Mivel $\sim$ reflexív, így $x \in \tilde{x} \Rightarrow \bigcup\{\tilde{x} : x \in X\} = X$.
- Különböző ekvivalenciaosztályok páronként diszjunktak. Tfh. $\tilde{x} \cap \tilde{y} \neq \emptyset$, legyen $z \in \tilde{x} \cap \tilde{y}$. Mivel $z \in \tilde{x}$, ezért $z \sim x$, ahonnan a szimmetria miatt $x \sim z$. Hasonlóan $z \in \tilde{y}$ miatt $z \sim y$. Ha $x_1 \in \tilde{x}$, akkor $x_1 \sim x$, így a tranzitivitás miatt $x_1 \sim x \wedge x \sim z \Rightarrow x_1 \sim z$, továbbá $x_1 \sim z \wedge z \sim y \Rightarrow x_1 \sim y \Rightarrow x_1 \in \tilde{y}$. Hasonlóan $y_1 \in \tilde{y}$-ról megmutatható, hogy $y_1 \in \tilde{x}$, így $\tilde{x} = \tilde{y}$. $\square$

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Tétel

Valamely X halmaz bármely $\mathcal{O}$ osztályozása esetén az $R = \bigcup\{Y \times Y : Y \in \mathcal{O}\}$ reláció ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó ekvivalenciaosztályok halmaza $\mathcal{O}$.

Bizonyítás

- R reflexív: legyen az x osztálya Y: $x \in Y \in \mathcal{O}$. Ekkor $(x, x) \in Y \times Y$.
- R szimmetrikus: legyen az $(x, y) \in R$. Ekkor $x, y \in Y$ valamely Y osztályra, speciálisan $(y, x) \in Y \times Y$.
- R tranzitív: hasonlóan legyen $(x, y), (y, z) \in R$, ezért $x, y \in Y$, $y, z \in Y'$. Mivel az osztályok páronként diszjunktak, így $Y = Y'$, speciálisan $z \in Y$, azaz $(x, z) \in Y \times Y$.

Ekvivalenciareláció, osztályozások

Az ekvivalenciarelációk illetve osztályozások kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Példa

- $= \longleftrightarrow \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$;
- $z \sim w$, ha $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w) \longleftrightarrow \{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = r\} : r \in \mathbb{R}\}$.

Példa

- A síkon két egyenes legyen $\sim$ szerint relációban, ha párhuzamosak. Ekkor az osztályok az irány fogalmát adják.
- A síkon két szakasz legyen $\sim$ szerint relációban, ha egybevágóak. Ekkor az osztályok a hossz fogalmát adják.
- Két egész számpár esetén $(r, s) \sim (p, q)$ $(s, q \neq 0)$, ha $r \cdot q = p \cdot s$. Ekkor az osztályok a racionális számoknak felelnek meg.

Részbenrendezés, rendezés

Definíció

Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus relációt részbenrendezésnek nevezzük. (Jele: $\leq$, $\preceq$ $\preccurlyeq$, $\ldots$)
Ha $\preceq$ egy részbenrendezés X-en, akkor az $(X; \preceq)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük.
Ha $x, y \in X$ esetén $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
(Ha minden elempár összehasonlítható, akkor a reláció dichotóm.)
Az X halmazon értelmezett reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus és dichotóm relációt rendezésnek nevezzük.

Ha egy részbenrendezés esetén bármely két elem összehasonlítható, akkor az rendezés.

Példa

- $\mathbb{R}$-en a $\leq$ reláció rendezés: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ vagy $y \leq x$.
- $\mathbb{N}$-en az $|$ (osztója) reláció részbenrendezés: $4 \nmid 5$, $5 \nmid 4$.
- Az X halmaz összes részhalmazán a $\subseteq$ reláció részbenrendezés
  $X = \{a, b, c\}$, $\{a\} \not\subseteq \{b, c\}$, $\{b, c\} \not\subseteq \{a\}$.