Diszkrét matematika 1. középszint

3. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy

Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

A logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

Állítás

1. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$, $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (asszociativitás);
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (kommutativitás);
3. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (disztributivitás);
4. $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgan);
5. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
6. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (szillogizmus);
7. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.
8. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (a kontrapozíció tétele);

A logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

Bizonyítás (példa)

1. $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ (a logikai vagy asszociativitása)

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$
i	i	i	i	i	i	i	i
i	i	h	i	i	i	i	i
i	h	i	i	i	i	i	i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	h	i	i	i	h	i	i
h	i	h	i	i	i	i	i
i	h	h	h	i	i	i	i
h	h	h	h	h	h	h	i

Kvantorok

Kvantorok

$\exists$ egzisztenciális kvantor: „létezik”, „van olyan”.
$\forall$ univerzális kvantor: „bármely”, „minden”.

Példa

$V(x)$: x veréb.
$M(x)$: x madár.

Minden veréb madár. $\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))$.

Van olyan madár, ami veréb. $\exists x(M(x) \wedge V(x))$.

Minden veréb madár, de nem minden madár veréb.

$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x)))$.

Formulák

A formulák predikátumokból és logikai jelekből alkotott „mondatok”.

Definíció(Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, ún. elemi formulák.
- Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x\mathcal{A})$ és $(\forall x\mathcal{A})$ is formulák.

Példa

Minden veréb madár, de nem minden madár veréb.

$(\forall x(V(x) \Rightarrow M(x))) \wedge (\exists x(M(x) \wedge \neg V(x)))$.

Ez egy formula.

Ha nem okoz félreértést, a zárójelek elhagyhatóak.

Zárt/nyitott formulák

Definíció

Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor $(\exists x\mathcal{A})$ és $(\forall x\mathcal{A})$ formulákban az x változó minden előfordulása az $\mathcal{A}$ formulában a kvantor hatáskörében van.
Ha egy formulában a változó adott előfordulása egy kvantor hatáskörében van, akkor az előfordulás kötött, egyébként szabad.
Ha egy formulában a változónak van szabad előfordulása, akkor a változó szabad változó, egyébként kötött változó.
Ha egy formulának van szabad változója, akkor nyitott formula, egyébként zárt formula.

Példa
$Gy(x, y)$: x gyereke y-nak.
$\exists y \; Gy(x, y)$: x-nek létezik szülője.

Zárt/nyitott formulák

Példa

$E(x)$: x egy egyenes.

$P(x)$: x egy pont.

$I(x,y)$: x illeszkedik y-ra.

$E(x), P(x), I(x,y)$ (elemi) nyitott formulák.

$\mathcal{A}(x,y)$ legyen $E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y)$.

Az x egyenes illeszkedik az y pontra.

$\mathcal{B}(x,y)$ legyen $P(x) \wedge P(y) \wedge \neg(x = y)$. Az x és y pontok különbözőek.

$\mathcal{C}(x)$ legyen $\exists y\,(E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y))$.

Van olyan y pont, ami illeszkedik az x egyenesre.

Itt x szabad, y kötött változó.

$\mathcal{D}()$ legyen $\forall x\,(E(x) \Rightarrow \exists y\,(E(x) \wedge P(y) \wedge I(x,y)))$.

Minden x egyenes esetén van olyan y pont, ami illeszkedik az x egyenesre.

Itt x, y kötött változó.

Halmazok

Halmazelméletben az alapvető fogalmak predikátumok, nem definiáljuk őket:

- A **halmaz** (rendszer, osztály, összesség,...) elemeinek gondolati burka.
- $x \in \mathcal{A}$, ha az x eleme az $\mathcal{A}$ halmaznak.

A halmazok alapvető tulajdonságai axiómák, nem bizonyítjuk őket.
Példa:

Meghatározottsági axióma

Egy halmazt az elemei egyértelműen meghatároznak.

- Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.
- Egy halmaznak egy elem csak egyszer lehet eleme.

Halmazok

Részhalmazok

Definíció

Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak: $A \subseteq B$, ha $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
Ha $A \subseteq B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

A részhalmazok tulajdonságai:

Állítás (Biz. HF)

1. $\forall A \quad A \subseteq A$ (reflexivitás).
2. $\forall A, B, C \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ (tranzitivitás).
3. $\forall A, B \quad (A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A = B$ (antiszimmetria).

Halmazok egyenlősége egy további tulajdonságot is teljesít:
3'. $\forall A, B \quad A = B \Rightarrow B = A$ (szimmetria).

Halmazok

Definíció

A halmaz és $\mathcal{F}(x)$ formula esetén $\{x \in A : \mathcal{F}(x)\} = \{x \in A | \mathcal{F}(x)\}$ halmaz elemei pontosan azon elemei A-nak, melyre $\mathcal{F}(x)$ igaz.

Példa

- $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0\}$: valós számok halmaza.
- $\{z \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{Z}^+ : z^n = 1\}$: komplex egységgyökök halmaza.

Halmazok

Speciális halmazok

Üres halmaz Annak a halmaznak, melynek nincs eleme a jele: $\emptyset$. A meghatározottsági axióma alapján ez egyértelmű.
$\forall A \quad A \text{ halmaz} \Rightarrow \emptyset \subseteq A$

Halmaz megadása elemei felsorolásával. Annak a halmaznak, melynek csak az a elem az eleme a jelölése: $\{a\}$. Annak a halmaznak, melynek pontosan az a és b az elemei a jelölése: $\{a, b\}$,...

Speciálisan $\emptyset = \{\}$, illetve, ha $a = b$, akkor $\{a\} = \{a, b\} = \{b\}$.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az A és B halmazok uniója: $A \cup B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B elemeit tartalmazza.
Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cup\mathcal{A} = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ az a halmaz, mely az $\mathcal{A}$ összes elemének elemét tartalmazza:

$$\cup\mathcal{A} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi\} =$
  $= \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$

Műveletek halmazokkal(Az unió tulajdonságai)

Állítás

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (asszociativitás)
3. $A \cup B = B \cup A$ (kommutativitás)
4. $A \cup A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

Bizonyítás

- 1. $x \in A \cup \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in \emptyset) \Leftrightarrow x \in A$.
- 2. $x \in (A \cup (B \cup C)) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C)) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x \in (A \cup B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cup C)$
- 3-as, 4-es hasonló.
- 5. $\Rightarrow$: $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$, de $B \subseteq A \cup B$ mindig teljesül, így $A \cup B = B$.
  $\Leftarrow$: Ha $A \cup B = B$, akkor A minden eleme eleme B-nek.

Műveletek halmazokkal

Definíció

Az A és B halmazok metszete: $A \cap B$ az a halmaz, mely pontosan az A és a B közös elemeit tartalmazza: $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$.
Általában: Legyen $\mathcal{A}$ egy olyan halmaz, melynek az elemei is halmazok (halmazrendszer). Ekkor $\cap\mathcal{A} = \cap\{A : A \in \mathcal{A}\} = \cap_{A \in \mathcal{A}} A$ a következő halmaz:

$$\cap\mathcal{A} = \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} : \ x \in A\}.$$

Speciálisan: $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

Példa

- $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\} = \{b, c\}$.
- Ha $E_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ az n-edik egységgyökök halmaza, akkor
    - $E_2 \cap E_4 = E_2$
    - $E_6 \cap E_8 = E_2$
    - $E_n \cap E_m = E_{(n,m)}$
    - $\cap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 = \{1\}$

Műveletek halmazokkal

Definíció

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor A és B diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, és $\cap\mathcal{A} = \emptyset$, akkor $\mathcal{A}$ diszjunkt, illetve $\mathcal{A}$ elemei diszjunktak.
Ha $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer, és $\mathcal{A}$ bármely két eleme diszjunkt, akkor $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak.

Példa

- Az $\{1, 2\}$ és $\{3, 4\}$ halmazok diszjunktak.
- Az $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ és $\{1, 3\}$ halmazok diszjunktak, de nem páronként diszjunktak.
- Az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$ és $\{5, 6\}$ halmazok páronként diszjunktak.

Műveletek halmazokkal

A metszet tulajdonságai

Állítás (Biz. HF)

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asszociativitás)
3. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativitás)
4. $A \cap A = A$ (idempotencia)
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Műveletek halmazokkal

Az unió és metszet disztributivitási tulajdonságai:

Állítás

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bizonyítás

1. $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. HF. hasonló

Különbség, komplementer

Definíció

Az A és B halmazok különbsége az $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Definíció

Egy rögzített X alaphalmaz és $A \subseteq X$ részhalmaz esetén az A halmaz komplementere az $\overline{A} = A' = X \setminus A$.

Állítás

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Bizonyítás

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$

Komplementer tulajdonságai

Állítás (Biz. HF)

Legyen X az alaphalmaz.

1. $\overline{\overline{A}} = A$;
2. $\overline{\emptyset} = X$;
3. $\overline{X} = \emptyset$;
4. $A \cap \overline{A} = \emptyset$;
5. $A \cup \overline{A} = X$;
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

A 7. és 8. összefüggések az ún. de Morgan szabályok.

Komplementer tulajdonságai

Bizonyítás(Példa)

$\vdots$

- $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

$\vdots$

Szimmetrikus differencia

Definíció

Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája az
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Állítás(Biz. HF)

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Hatványhalmaz

Definíció

Ha A egy halmaz, akkor azt a halmazrendszert, melynek elemei pontosan az A halmaz részhalmazai az A **hatványhalmazának** mondjuk, és 2^A-val jelöljük.

- $A = \emptyset, 2^\emptyset = \{\emptyset\}$
- $A = \{a\}, 2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $A = \{a, b\}, 2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Állítás (Biz. később)

$|2^A| = 2^{|A|}$

Relációk

A relációk

- a függvényfogalom általánosításai;
    - „hagyományos” függvények pontos definiálása;
    - „többértékű függvények”
- kapcsolatot ír le
    - $=$, $<$, $\leq$, oszthatóság, ...

Rendezett pár

Adott $x \neq y$ és (x, y) rendezett pár esetén számít a sorrend:

- $\{x, y\} = \{y, x\}$
- $(x, y) \neq (y, x)$.

Definíció

Az (x, y) rendezett párt a $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ halmazzal definiáljuk.
Az (x, y) rendezett pár esetén a x az első, az y a második koordináta.

Definíció

Az X, Y halmazok Descartes-szorzatán (direkt szorzatán) az

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

rendezett párokból álló halmazt értjük.

Binér relációk

Adott X, Y halmazok esetén az $R \subseteq X \times Y$ halmazokat binér (kétváltozós) relációknak nevezzük.
Ha R binér reláció, akkor gyakran $(x, y) \in R$ helyett xRy-t írunk.

Példa

1. $\mathbb{I}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ az egyenlőség reláció.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \mid y\}$ az osztója reláció.
3. $\mathcal{F}$ halmazrendszer esetén az $\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subseteq Y\}$ a tartalmazás reláció.
4. Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén a függvény grafikonja $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

Definíció

Ha valamely X, Y halmazokra $R \subseteq X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között.
Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy R X-beli reláció (homogén binér reláció).

Relációk értelmezési tartománya, értékkészlete

Ha R reláció X és Y között ($R \subseteq X \times Y$) és $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, akkor R reláció X' és Y' között is!

Definíció

Az $R \subseteq X \times Y$ reláció értelmezési tartománya a

$$\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in R\},$$

értékkészlete

$$\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y | \exists x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Példa

1. Ha $R = \{(x, 1/x^2) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
2. Ha $R = \{(1/x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$, akkor $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

Relációk kitejesztése, leszűkítése, inverze

Definíció

Egy R binér relációt az S binér reláció **kiterjesztésének**, illetve S-et az R **leszűkítésének** (megszorításának) nevezzük, ha $S \subseteq R$. Ha A egy halmaz, akkor az R reláció A-ra való **leszűkítése** (az A-ra való megszorítása) az

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Példa

Legyen $R = \{(x, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$, $S = \{(\sqrt{x}, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.
Ekkor R az S kiterjesztése, S az R leszűkítése, $S = R|_{\mathbb{R}_0^+}$
(ahol $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok halmaza).