Diszkrét matematika 1. középszint

2. előadás

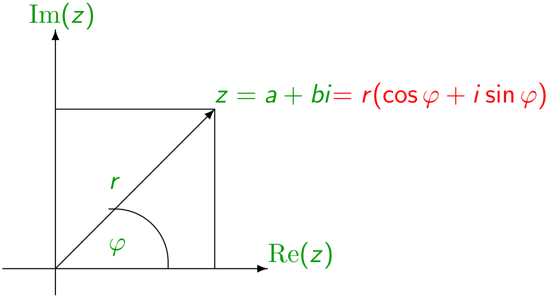
Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Komplex számok ábrázolása

A komplex számok a komplex számsíkon:



Ha $z = a + bi \in \mathbb{C}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathrm{Re}(z) = a$, $\mathrm{Im}(z) = b$.
A $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ vektor hossza: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{|z|^2}$.
A z nemnulla szám argumentuma $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$
A koordináták trigonometrikus függvényekkel kifejezve:

$$\mathrm{Re}(z) = a = r \cdot \cos\varphi, \mathrm{Im}(z) = b = r \cdot \sin\varphi$$

Komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció

$z \in \mathbb{C}$ nemnulla szám trigonometrikus alakja a
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
ahol $r > 0$ a szám abszolút értéke.

Figyelem! A 0-nak nem használjuk a trigonometrikus alakját.
A trigonometrikus alak nem egyértelmű:
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi))$.

Definíció

Egy nemnulla $z \in \mathbb{C}$ argumentuma az a $\varphi = arg(z) \in [0, 2\pi)$, melyre
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

- $z = a + bi$ algebrai alak;
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alak.

Itt $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\left.\begin{array}{r} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{array}\right\}$$

Ha $a \neq 0$, akkor $\mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, és így

$$\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}, \text{ ha } a > 0; \\ \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi, \text{ ha } a < 0. \end{cases}$$

Számolás trigonometrikus alakkal

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
A szorzatuk:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|w|(\cos\psi + i\sin\psi) = \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)) = \end{aligned}$$

addíciós képletek: $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$
$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$

$$= |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

A szorzat abszolút értéke: $|zw| = |z||w|$.
A szorzat argumentuma:

- ha $0 \le arg(z) + arg(w) < 2\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w)$;
- ha $2\pi \le arg(z) + arg(w) < 4\pi$, akkor $arg(zw) = arg(z) + arg(w) - 2\pi$.

A sin, cos függvények 2π szerint periodikusak, az argumentum meghatározásánál redukálni kell az argumentumok összegét.

Moivre-azonosságok

Tétel HF

Legyenek $z, w \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex számok:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$,
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor
$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$;

$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$, ha $w \neq 0$;

$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

A szögek összeadódnak, kivonódnak, szorzódnak. Az argumentumot ezek után redukcióval kapjuk!

Geometriai jelentés

Egy $z \in \mathbb{C}$ komplex számmal való szorzás a komplex számsíkon mint nyújtva-forgatás hat. $|z|$-vel nyújt, $arg(z)$ szöggel forgat.

Komplex számok gyökei

Példa

Számoljuk ki $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8$-t:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8 =$$
$$= \cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

További komplex számok, melyeknek a 8-adik hatványa 1:

- 1;
- -1;
- $i : i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$;
- $-i$;
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}; -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$;
- sőt: $\pm i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}} : \left(i\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = i^8\cdot\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^8 = 1\cdot 1 = 1.$

Gyökvonás

A $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek:

$$|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

ha

- $|z| = |w|$
- $\varphi = \psi + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ szám esetén.

n-edik gyökvonás: Legyen $z^n = w$:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Ekkor

- $|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|}$
- $n\varphi = \psi + k\cdot 2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén, vagyis:
  $\varphi = \frac{\psi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}$ valamely $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

Ha $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, akkor ezek mind különböző komplex számot adnak.

Gyökvonás

Tétel

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor a z n-edik gyökei azok a w-k, amikre $w^n = z$:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Gyökvonás

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) : k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Példa

Számítsuk ki a $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$ értékét!

$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Mivel $\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{12}$, ezért:

$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = \sqrt[6]{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)} =$

$= \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi+24k\pi}{72} + i\sin\frac{19\pi+24k\pi}{72}\right) : k = 0, 1, \dots, 5.$

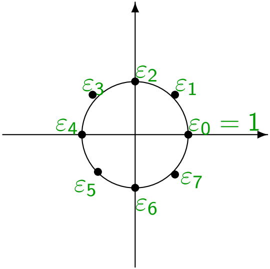
Komplex egységgyökök

Definíció

Az $\varepsilon^n = 1$ feltételnek eleget tevő komplex számok az *n*-edik egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^{(n)} = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) : k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nyolcadik komplex egységgyökök



Gyökvonás

Pozitív valós számok négyzetgyöke: legyen $r > 0$ valós szám, ekkor az $x^2 = r$ megoldásai: $\pm\sqrt{r}$.

Tétel

Legyen $z \in \mathbb{C}$ nemnulla komplex szám. $n \in \mathbb{N}$ és $w \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $w^n = z$. Ekkor z n-edik gyökei felírhatóak a következő alakban: $w\varepsilon_k : k = 0, 1, \ldots n - 1$.

Bizonyítás

A $w\varepsilon_k$ számok mind n-edik gyökök: $(w\varepsilon_k)^n = w^n\varepsilon_k^n = z \cdot 1 = z$. Ez n különböző szám, így az összes gyököt megkaptuk.

Rend

Bizonyos komplex számok hatványai periodikusan ismétlődnek:

- $1, 1, 1, \ldots$
- $-1, 1, -1, 1, \ldots$
- $i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots$
- $\frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, -1, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, -i, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, i, \ldots$

Általában:
$\cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$-nek n darab különböző hatványa van.

Definíció

Egy z komplex szám különböző (egész kitevős) hatványainak számát a z rendjének nevezzük és $o(z)$-vel jelöljük.

Példa

- 1 rendje 1;
- 2 rendje ∞ : $2, 4, 8, 16, \ldots$;
- -1 rendje 2: $1, -1$;
- i rendje 4: $1, i, -1, -i$.

Rend

Tétel

Egy z komplex számnak vagy bármely két egész kitevős hatványa különböző (ilyenkor a rendje végtelen), vagy pedig a hatványok a rend szerint periodikusan ismétlődnek. A rend a legkisebb olyan pozitív d szám, melyre $z^d = 1$.
Továbbá $z^k = z^l \Leftrightarrow o(z) | k - l$. Speciálisan $z^k = 1 \Leftrightarrow o(z) | k$.

Bizonyítás

NB.
Talán később...

Primitív gyökök

Az n-edik egységgyökök rendje nem feltétlenül n:
4-edik egységgyökök: $1, i, -1, -i$.

- 1 rendje 1;
- -1 rendje 2;
- i rendje 4.

Definíció

Az n-ed rendű n-edik egységgyökök a primitív n-edik egységgyökök.

A tétel következményei:

Következmény

- Egy primitív n-edik egységgyök hatványai pontosan az n-edik egységgyökök.
- Egy primitív n-edik egységgyök pontosan akkor k-adik egységgyök, ha $n|k$.

Primitív egységgyökök

Példa

- Primitív 1. egységgyök: 1;
- Primitív 2. egységgyök: -1;
- Primitív 3. egységgyökök: $\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$;
- Primitív 4. egységgyökök: $\pm i$;
- Primitív 5. egységgyökök: $\ldots$ (HF)
- Primitív 6. egységgyökök: $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Állítás(NB.)

Egy $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ n-edik egységgyök pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha $(n, k) = 1$.

Matematikai logika

A logika a helyes következtetés tudománya.
Alkalmazási területek:

- matematika;
- informatika;
- mesterséges intelligencia;
- ...

Példa
Minden bogár rovar.
tagadás: Van olyan bogár, ami nem rovar.
Esik az eső, de meleg van, bár a nap is elbújt, és az idő is későre jár.
tagadás: ?

Axiomatikus módszer

A tudományok a valóság egy részének modellezésével foglalkoznak.
Axiomatikus módszer: közismert, nem definiált fogalmakból (alapfogalmakból) és bizonyos feltevésekből (axiómákból) a logika szabályai szerint milyen következtetéseket vonunk le (milyen tételeket bizonyítunk).

Példa

Euklidészi geometria

Alapfogalmak

- pont,
- egyenes,
- sík.

Axiómák

- párhuzamossági axióma,
- ...

Az axiomatikus módszer előnye: elég ellenőrizni az axiómák teljesülését.

Predikátumok

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő definiálatlan alapfogalom, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik: igaz ($I, \uparrow$), hamis ($H, \downarrow$), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Példa

$M()$: Minden jogász hazudik.	0-változós, értéke: I.
$Sz(x)$: x egy szám.	1-változós, értéke: Sz(1)=I, SZ(h)=H.
$E(x)$: x egy egyenes.	1-változós.
$P(x)$: x egy pont.	1-változós.
$I(x, y)$: x illeszkedik y-ra.	2-változós.
$F(x, y)$: x az y férje.	2-változós.
$Gy(x, y, z)$: x az y és z gyermeke.	3-változós.

Logikai jelek

A predikátumokat logikai jelekkel tudjuk összekötni:
Tagadás, jele: $\neg A$.

És, jele: $A \wedge B$.

Vagy, (megengedő), jele: $A \vee B$.

Ha..., akkor... (implikáció), jele: $A \Rightarrow B$.

Ekvivalencia, jele: $A \Leftrightarrow B$.

Igazságtáblázat

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
I	I	H	I	I	I	I
I	H	H	H	I	H	H
H	I	I	H	I	I	H
H	H	I	H	H	I	I

Logikai jelek

A köznyelvben a **vagy** háromféle értelemmel bírhat:

Megengedő **vagy** "Átok reá ki gyávaságból **vagy** lomhaságból elmarad,..."

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

Kizáró **vagy**: "**Vagy** bolondok vagyunk és elveszünk egy szálig, **vagy** ez a mi hitünk valóságra válik."

$A \oplus B$	I	H
I	H	I
H	I	H

Összeférhetetlen **vagy**: "Iszik **vagy** vezet!"

$A \| B$	I	H
I	H	I
H	I	I

Logikai jelek

Az implikáció ($A \Rightarrow B$) csak logikai összefüggést jelent és nem okozatit!

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

Példa

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$

$2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow$ kedd van

Hamis állításból minden következik:

Példa

$2 \cdot 2 = 5 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -2$

Adott logikai jel, más módon is kifejezhető:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A logikai műveletek tulajdonságai, ítéletlogikai tételek

Állítás

1. $(A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$, $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (asszociativitás);
2. $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$, $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (kommutativitás);
3. $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (disztributivitás);
4. $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgan);
5. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (a kontrapozíció tétele);
6. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$;
7. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (szillogizmus);
8. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.