Diszkrét matematika 1. középszint

1. előadás

Nagy Gábor
nagygabr@gmail.com
nagy@compalg.inf.elte.hu
compalg.inf.elte.hu/$\sim$ nagy
Mérai László diái alapján

Komputeralgebra Tanszék

2017. ősz

Harmadfokú egyenlet

Harmadfokú egyenlet megoldása

Keressük meg az
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
egyenlet megoldásait ($a \neq 0$)!

Végigosztva a-val kapjuk az $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ egyszerűbb egyenletet.

Emlékeztető: másodfokú egyenlet megoldása: $x^2 + px + q = 0$.

Az $x = y - \frac{p}{2}$ helyettesítéssel eltűnik az x-es tag: $y^2 + q' = 0$. Innen átrendezéssel és gyökvonással megkapjuk a lehetséges megoldásokat y-ra, ahonnan kiszámolhatóak az x_1, x_2 megoldások.

Hasonló helyettesítéssel a harmadfokú egyenlet $y^3 + py + q = 0$ alakra hozható.

Harmadfokú egyenlet

Keressük meg az $y^3 + py + q = 0$ egyenlet megoldásait!
Ötlet: keressük a megoldásokat $y = u + v$ alakban!
Most $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.
A harmadfokú egyenlet:

$$\begin{array}{cccc} (u+v)^3 & -3uv(u+v) & -(u^3+v^3) & = 0 \\ y^3 & +py & +q & = 0 \end{array}$$

Célunk olyan u, v találása, melyekre $-3uv = p$, $-(u^3+v^3) = q$. Ekkor $u + v$ megoldás lesz!
u, v megtalálása: $u^3v^3 = (-\frac{p}{3})^3$, $u^3 + v^3 = -q$, u^3, v^3 gyökei lesznek a $z^2 + qz + (\frac{-p}{3})^3 = 0$ másodfokú egyenletnek. A gyökökből u, v köbgyökvonással kijön:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Harmadfokú egyenlet

Keressük meg az $x^3 - 21x + 20 = 0$ egyenlet megoldásait!
(Most $x = y$, és rögtön látszik, hogy az $x = 1$ gyök lesz.)
$p = -21, q = 20$ helyettesítéssel a

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

képletbe azt kapjuk, hogy

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$$

A négyzetgyök alatt negatív!
Meg lehet-e menteni a megoldóképletet?

Harmadfokú egyenlet

$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{-243}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{-243}}$
Formálisan számolva, a $(\sqrt{-3})^2 = -3$ feltétellel:
$-10 + \sqrt{-243} = -10 + 9\sqrt{-3} =$
$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-3} + 3 \cdot 2(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3 = (2 + \sqrt{-3})^3.$

Hasonlóan $-10 - \sqrt{-243} = (2 - \sqrt{-3})^3.$

Ezzel a megoldás: $x = (2 + \sqrt{-3}) + (2 - \sqrt{-3}) = 4.$

Felmerülő kérdések

- Számolhatunk-e $\sqrt{-3}$-mal formálisan?
- Miért épp így kell számolni a $-10 + \sqrt{-243}$ értékét?
- Hova tűnt az $x = 1$ megoldás?
- Mi a harmadik gyöke az egyenletnek?

Számfogalom bővítése

Természetes számok: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
Nincs olyan $x \in \mathbb{N}$ természetes szám, melyre $x + 2 = 1$!
$\mathbb{N}$ halmazon a kivonás nem értelmezett*!

Egész számok: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
A kivonás elvégezhető: $x = -1$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{Z}$ egész szám, melyre $x \cdot 2 = 1$!
$\mathbb{Z}$ halmazon az osztás nem értelmezett!

Racionális számok: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$
Az osztás elvégezhető*: $x = \frac{1}{2}$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{Q}$ racionális szám, melyre $x^2 = 2$!
$\mathbb{Q}$ halmazon a négyzetgyökvonás nem (mindig) elvégezhető!

Valós számok: $\mathbb{R}$.
Nincs olyan $x \in \mathbb{R}$ valós szám, melyre $x^2 = -1$!

U.i.: Ha $x \geq 0$, akkor $x^2 \geq 0$.
Ha $x < 0$, akkor $x^2 = (-x)^2 > 0$.

Számfogalom bővítése

Komplex számok körében az $x^2 = -1$ egyenlet megoldható!

Komplex számok alkalmazása:

- egyenletek megoldása;
- geometria;
- fizika (áramlástan, kvantummechanika, relativitáselmélet);
- grafika, kvantumszámítógépek.

Komplex számok bevezetése
Legyen i az $x^2 = -1$ egyenlet megoldása.
A szokásos számolási szabályok szerint számoljunk az i szimbólummal formálisan, $i^2 = -1$ helyettesítéssel:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i.$$

Általában:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i.$$

A komplex számok definíciója

Definíció

Az $a+bi$ alakú kifejezéseket, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, komplex számoknak ($\mathbb{C}$) hívjuk, az ilyen formában való felírásukat algebrai alaknak nevezzük.
Összeadás: $(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$.
Szorzás: $(a+bi)(c+di) = ac-bd+(ad+bc)i$.
A $z = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám valós része: $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$.
A $z = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám képzetes része: $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$.

Figyelem! $Im(z) \neq bi$
Az $a+0\cdot i$ alakú komplex számok a valós számok.
A $0+bi$ alakú komplex számok a tisztán képzetes számok.
Az $a+bi$ és a $c+di$ algebrai alakban megadott komplex számok pontosan akkor egyenlőek: $a+bi = c+di$, ha

$$a = c \quad \text{és} \quad b = d.$$

A komplex számok definíciója

Megjegyzés

A komplex számok alternatív definíciója:
$(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ párok halmaza, ahol az
összeadás: $(a, b) + (c, d) = (a + c, d + b)$;
a **szorzás**: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

A két definíció ekvivalens: $i \leftrightarrow (0, 1)$.
Az $a + bi$ formátum kényelmesebb számoláshoz.
Az (a, b) formátum kényelmesebb ábrázoláshoz
(grafikusan, számítógépen).
További formális számokra nincs szükség:

Tétel(Algebra alaptétele, NB)

Ha $n > 0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, akkor minden
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ kifejezés esetén létezik olyan $z \in \mathbb{C}$ komplex
szám, hogy $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n = 0$.

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy x szám ellentettje az az $\hat{x}$ szám, melyre $x + \hat{x} = 0$.

Egy $r \in \mathbb{R}$ szám ellentettje: $-r$.

Állítás (HF)

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám ellentettje a $-z = -a - bi$ algebrai alakban megadott komplex szám.

Definíció

Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ algebrai alakban megadott komplex szám abszolút értéke: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Valós számok esetében ez a hagyományos abszolút érték: $|a| = \sqrt{a^2}$.

Állítás(HF)

$|z| = |a + bi| \geq 0, \qquad |z| = |a + bi| = 0 \Leftrightarrow z = a + bi = 0.$

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy x szám **reciproka** az az $\hat{x}$ szám, melyre $x \cdot \hat{x} = 1$.

Egy $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ szám reciproka: $\frac{1}{r}$.
Mi lesz $\frac{1}{1+i}$?
Ötlet: gyöktelenítés, konjugálttal való bővítés:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -1+\sqrt{2}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Számolás komplex számokkal

Definíció

Egy $z = a + bi$ algebrai alakban megadott komplex szám **konjugáltja** a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ szám.

Állítás(HF)

Egy $z \neq 0$ komplex szám **reciproka** $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}}$.

A definíció értelmes, hiszen a nevező:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Nullosztómentesség: $z \cdot w = 0 \Rightarrow z = 0$ vagy $w = 0$.

Két komplex szám **hányadosa**:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}.$$

Számolás komplex számokkal

Tétel (HF)

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
5. $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z) \cdot i$;
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
7. $z \neq 0$ esetén $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$;
8. $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$;
9. $|\overline{z}| = |z|$;
10. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;
11. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (háromszög egyenlőtlenség).

Számolás komplex számokkal

Tétel(HF)

$\vdots$

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

$\vdots$

Bizonyítás

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$