# Diszkrét matematika II. feladatok

*2014 tavasz*

## Polinomok

1. Add meg $\mathbb{Z}_{72}$ felett a $8x^2 + 12$ és a $18x + 36$ polinomok szorzatát!

2. Határozd meg a $\mathbb{Z}$ feletti $3x^8 + 5x^6 - 11x^3 + 7x^2 - 15x + 8$ és $16x^7 - 13x^6 + 6x^3 - 13x + 21$ polinomok szorzatában a 0-ad, 9-ed, 14-ed, 15-öd és 20-ad fokú tag együtthatóját! Oldd meg ugyanezt $\mathbb{Z}_{24}$ felett is! Mennyi lesz ekkor a szorzatpolinom foka?

3. Határozd meg az $x^2 + 4x + 3 \in \mathbb{Z}_8[x]$ gyökeit!

4. Legyen $f(x) = x^5 + x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 2x - 3$ és $g(x) = x^2 + 4x - 5$. Osszuk el maradékosan $f$-et a $g$-vel a) $\mathbb{Q}$ felett; b) $\mathbb{Z}_3$ felett!

5. Osszd el az $f(x)$ polinomot $g(x)$-szel maradékosan $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_7$ és $\mathbb{Z}_6$ felett, ha lehet

   a) $f(x) = 42x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 43x - 12$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
   
   b) $f(x) = 5x^4 + 2x - 3$, $g(x) = 2x^2 - 3x + 4$;
   
   c) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$;
   
   d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$!

6. Hogyan kell megválasztani a $p, q, m$ értékeket, hogy az $x^3 + px + q$ polinom $\mathbb{C}$ felett osztható legyen az $x^2 + mx - 1$ polinommal?

7. Határozd meg $a$ és $b$ értékét úgy, hogy $x^4 + 3x^2 + ax + b$ osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett!

8. Számítsuk ki az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött! Van-e közös gyökük az egyes esetekben?

   a) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ és $x^3 + x^2 - x - 1$;
   
   b) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ és $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;
   
   c) $7x^4 - 28x^3 + 7$ és $11x^3 - 33x^2 + 11$;
   
   d) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ és $x^4 + x^2 - x + 1$!

9. Keresd meg az $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 6$ polinom helyettesítési értékét a $3, -1, 2, -2$ helyeken!

10. Osszd el az $f(x) = 3x^5 + 2x^2 - 7x + 2$ polinomot $g(x)$-szel maradékosan a Horner-módszer segítségével, ha

    a) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}$; b) $g(x) = x + 2, R = \mathbb{Z}$; c) $g(x) = x - 1/2, R = \mathbb{Q}$;
    d) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_3$; e) $g(x) = x - 3, R = \mathbb{Z}_5$!

11. Határozd meg az alábbi maradékos osztások hányadosát és maradékát a Horner-módszerrel:

    a) $f(x) = 4x^3 + x^2, g(x) = x + 1 + i$; b) $f(x) = x^3 - x^2 - x, g(x) = x - 1 + 2i$!

12. Határozd meg a $p$ értékét úgy, hogy az $f(x) = x^5 + 3x^4 + 5x + p$ polinom osztható legyen $x - 2$-vel!

13. Az $x-c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írjuk fel a következő $\mathbb{C}[x]$-beli polinomokat $x-c$ hatványai segítségével:

a) $x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $c=-1$; b) $x^5$, $c=1$!

14. Hányszoros gyöke 2 az $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak?

15. Határozd meg az $a$ együtthatót úgy, hogy $-1$ legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5-ax^2-ax+1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak.

16. Keresd meg a következő $\mathbb{C}[x]$-beli polinomok többszörös gyökeit:

a) $x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$; b) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$!

17. Add meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomokhoz olyan polinomot, amelynek ugyanazok a gyökei, de egyszeresek:

a) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$; b) $x^5-6x^4+16x^3-24x^2+20x-8$!

18. Hány másodfokú reducibilis főpolinom van $\mathbb{Z}_7$ felett?

19. Felbontható-e $\mathbb{Z}_3$ felett az $x^7+2x^4+x^2+2x+2$ polinom?

20. A $\mathbb{Z}_2$ gyűrű felett a) állapítsd meg, hogy irreducibilisek-e az $x^4+1$, $x^3+x^2+1$, illetve $x^4+x+1$ polinomok; b) add meg az összes, legfeljebb harmadfokú irreducibilis polinomot; c) bontsd irreducibilis polinomok szorzatára az $x^7+1$ polinomot!

21. Bontsuk föl az $x^8+x^6+x^5+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomot irreducibilisek szorzatára!

22. Felbontható-e $\mathbb{Z}_3$ fölött az $x^7+2x^4+x^2+2x+2$ polinom?

23. A $3x^4-5x^3+3x^2+4x-2$ polinom egyik gyöke $1+i$. Határozd meg a többi gyökét.

24. Add meg a következő polinomok irreducibilis felbontását $\mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}$ felett:
a) $x^6-27$; b) $x^6+27$; c) $x^8-16$;
d) $x^8+16$; e) $x^{10}-x^5+1$; f) $x^{22}+x^{11}-6$;
g) $x^{2n}+x^n+1$; h) $x^{2n}-2x^n-3$!

25. Mik az $f(x)=40x^4+45x+15$ polinom racionális gyökei?

26. Határozd meg a $4x^6-8x^5-3x^4-11x^3+18x^2+28x+8$ polinom racionális többszörös gyökeit és ezek multiplicitását.

27. Bontsd fel a következő polinomokat irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Q}$ felett:

a) $3x^5+2x^3-12x^2+10x+14$; b) $20x^4+26x^3+65x^2+91$!

28. Mik az $f(x)=40x^4+45x+15$ polinom racionális gyökei?

29. Keresd meg a következő egész együtthatós polinomok racionális gyökeit:
a) $x^4-2x^3-8x^2+13x-24$; b) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$;
c) $10x^4-13x^3+15x^2-18x-24$!

30. Igazold, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Z}[x]$-ben:
a) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$; b) $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$; c) $x^4 - x^3 + 2x + 1$!

31. Határozd meg az alábbi polinomok legnagyobb közös osztóját:
   a) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ és $(x-1)^5(x+2)(x+5)$;
   b) $x^5 + 1$ és $x^{15} - 1$ ;
   c) $x^m - 1$ és $x^n - 1$;
   d) $x^m + 1$ és $x^n + 1$!

32. Felbontható-e $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett a $6x + 10$ polinom?

33. Bontsuk $6(x^2 - 2)(x^2 + 1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

34. Adjunk meg minimális fokszámú olyan valós együtthatós polinomot, amelynek
   a) az 1 kétszeres, a 2,3 és $1 + i$ pedig egyszeres gyöke;
   b) az $i$ háromszoros, a $-1 - i$ pedig egyszeres gyöke!

35. Adjuk meg azt az $\mathbb{R}[x]$-beli interpolációs polinomot, amely az adott helyeken az adott értékeket veszi fel:
   a) a 0,1,2,3,4 helyeken 1,2,3,4,6;
   b) a $-1$,0,1,2,3 helyeken 6,5,0,3,2!

36. Adjunk meg olyan polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 7$, $f(-1) = 0$!