Diszkrét matematika II. feladatok

2014 tavasz

Gráfok

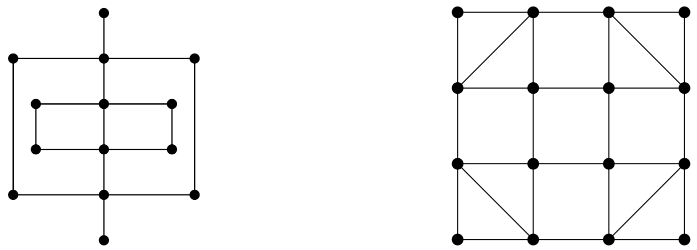
1. Rajzold le az összes, páronként nem izomorf 3, 4, illetve 5 csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő, illetve reguláris van közöttük?
2. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?
3. Van-e olyan társaság, ahol minden embernek különböző számú ismerőse van?
4. Van-e olyan 9-pontú gráf (tetszőleges, illetve egyszerű), melyben a pontok foka rendre

   a)7,7,7,6,6,6,5,5,5; b) 6,6,5,4,4,3,2,2,1?
5. Van-e olyan 8-pontú egyszerű gráf, melyben a fokszámok 6,6,6,6,3,3,2,2?
6. Hány olyan, páronként nem izomorf gráf van, amelyben

   a) két-két másod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, más fokszám nem fordul elő;
   b) három-három másod-, harmad- és negyedfokú csúcs van, más fokszám nem fordul elő.
7. Mutasd meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!
8. Rajzold le a következő gráfot! Egy kör kerületén vegyünk fel öt pontot! A gráf csúcsai a pontok által meghatározott $\binom{5}{2}$ húr lesz. Két csúcsot akkor kötünk össze a gráfban, ha a nekik megfelelő húroknak nincs közös végpontjuk. Ezt hívják Petersen-gráfnak.
9. Milyen C_n gráfok részgráfjai a Petersen-gráfnak?
10. Hány olyan 3,4, illetve 5 csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?
11. Mutasd meg, hogy tetszőleges páratlan hosszúságú zárt séta tartalmaz kört. Igaz-e ez páros hosszúságúra?
12. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontja legalább másodfokú, akkor a gráfban van kör!
13. Mutasd meg, hogy ha a-ból vezet út b-be, és b-ből c-be, akkor a-ból is vezet c-be!
14. Hat versenyző körmérkőzést játszik. Bizonyítsd be, hogy bármely időpontban van három olyan versenyző, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, hogy egyik sem játszott a másik kettővel.
15. Mutasd meg, hogy ha egy $2n$-pontú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n-1$-fokú pontokat is megengedünk?
16. Igaz-e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggő?
17. Jelöljük egy fa elsőfokú pontjanak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutasd meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c+2$.
18. Igazold, hogy egy összefüggő véges gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja!
19. Mutasd meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!
20. Legfeljebb hány szeparáló él (olyan él, amit elhagyva több komponensre esik szét a gráf) van egy $n(\geq 1)$ pontú gráfban? És legfeljebb hány szeparáló pont? Mindkét esetben mutass olyan példát, ahol pontosan ennyi van!

21. Igazold, hogy véges gráfban a komponensek számának és az élek számának összege nem kisebb, mint a csúcsszám.

22. Lerajzolhatóak-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi gráfok úgy, hogy minden élet pontosan egyszer húzunk be (van-e Euler vonala/ zárt vonala)?

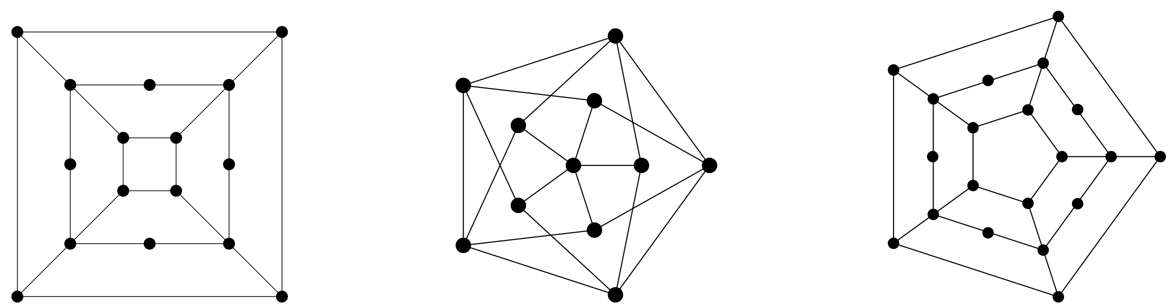


23. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van zárt Euler-vonal, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?

24. Igazold, hogy minden összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Igaz-e ez zárt sétára?

25. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen!

26. Van-e az alábbi gráfoknak Hamilton köre (útja)?



27. Bejárható-e a 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?

28. Mutasd meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör.

29. Mutasd meg, hogy a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen csúcsát, a maradékban már lesz.

30. Mutasd meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen élétt, a maradék gráf összefüggő.

31. Bizonyítsd be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!

32. Bizonyítsd be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből egy élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!

33. Mutasd meg, hogy minden $n \geq 5$-re igaz, hogy (a) létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört; (b) létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy sem G sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.

34. Egy hotelba 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!

35. Bizonyítsd be, hogy bármely hurokmentes gráf irányítható úgy, hogy a keletkező gráf nem tartalmaz irányított kört.

36. Egy körmérkőzéses teniszbajnokságban nevezzük királynak azt a versenyzőt, aki minden ellenfelét legyőzte. Kvázikirálynak nevezzük K-t, ha minden olyan játékos, aki őt legyőzte, kikapott legalább egy olyan L-től, akit K megvert.

    (a) Mutassuk meg, hogy minden körmérkőzéses bajnokságban van kvázikirály.
    (b) Mutassuk meg, hogy ha nincs király, akkor legalább két kvázikirály van.
    (c) Sőt, három is. Vajon négynek is kell lennie?
    (d) Mutassuk meg, hogy egy körmérkőzéses teniszverseny játékosai sorba állíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a közvetelenül mögötte állót.

37. Tételezzük fel, hogy egy ügyes öltöztetőgép fel tud úgy öltöztetni valakit, hogy azokat a ruhadarabokat, melyekre nincs sorrendi előírás, párhuzamosan is fel tudja adni az emberre (tehát pl. zoknit és pulóvert igen, de nadrágot és cipőt nem). Mennyi idő alatt tud minimálisan felöltöztetni valakit, ha a következő ruhadarabokat veszi fel (zárójelben az egyes ruhadarabok felvételéhez szükséges idő másodpercekben)? Alsónadrág (20), zokni(35), nadrág(30), cipő(50), karóra(20), ing(40), öv(35), nyakkendő(300), zakó(10).

38. Mennyi idő alatt épülhet fel leggyorsabban az a ház, melynek alapozása 30, falazása 10, a tetőfedés 20, a vízvezetékszerelés 15, a nyílászárók beszerelése 20, és a burkolás 8, a festés 7 napot vesz igénybe?

39. Melyik gráfot tudod lerajzolni úgy, hogy az élei ne messék egymást:

    (a) egy kocka éleinek hálózata; (b) teljes n-szög $n = 3, 4, 5, ..$; (c) „három-ház-három-kút": páros gráf 3-3 ponttal (házak, kutak), minden ház összekötve minden kúttal; (d) a Petersen-gráf.

40. Hány éle van egy n-pontú síkgráfnak, ha minden lapja (a végtelen lap is) háromszög?

41. Mutasd meg, hogy egy $n \geq 3$ pontú síkbarajzolható gráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle lehet!

42. Bizonyítsd be, hogy ha egy G gráf pontszáma legalább 11, akkor vagy G, vagy a komplementere nem síkbarajzolható!

43. Rajzolj egy olyan 8-pontú síkgráfot, aminek a komplementere is síkgráf!

44. Mutasd meg, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!

45. Legfeljebb hány éle lehet egy síkbarajzolható gráfnak, ha minden köre legalább k hosszú?

46. Egy nemzetközi konferencián öt különböző ország egy-egy résztvevője ül. Bizonyítsd be, hogy van közöttük legalább kettő, akiknek az országa nem szomszédos!

47. Mutasd meg, hogy egy síkbarajzolható gráf lapjai pontosan akkor színezhetőek két színnel úgy, hogy a szomszédos lapok különböző színűek legyenek, ha a gráfnak van zárt Euler-vonal!