

# Alapfogalmak a Diszkrét matematika II. tárgyból

(*C szakirány, 2014*)

A számonkérés során ezeknek a definícióknak, tételkimondásoknak az alapos megértését is számon kérjük. A példakérdések minták, nem szó szerint ezeket tesszük fel a vizsgán.

## 1. Gráfok

**Gráfábrázolások.** (Adjacenciamátrix, incidenciamátrix, éllista felsorolásával, illeszkedési relációval.) Példa:

Írja fele egy 4 csúcsú teljes gráf adjacenciamátrixát.

**Hurokél, párhuzamos él, egyszerű gráf.** Példa:

Definiálja az egyszerű gráf fogalmát.

**Nyílt, illetve zárt séta, vonal. Út, kör.** Példa:

Egy konkrét gráfban adjon meg két sétát adott két csúcs között, melyek közül az egyik út.

**Fokszám, fokszámok összegére vonatkozó állítás.** Példa:

Van-e olyan gráf, melyben a fokszámok összege 15? Miért?

**Részgráf.** Példa:

Definiálja a részgráf fogalmát.

**Konkrét gráfok és gráftípusok ismerete.** (Teljes, páros, teljes páros, Petersen-gráf.)

Példa: Rajzolja fel a Petersen-gráfot és egy teljes páros gráfot 5, illetve 4 elemű csúcsosztályokkal.

**Fa, illetve feszítőfa fogalma.** Példa:

Adja meg egy adott gráf két különböző feszítőfáját.

**Fák jellemzése ekvivalens tulajdonsággal.** Példa:

Igaz-e, hogy minden véges körmentes gráf fa? Miért?

**Euler-vonal és létezésének feltétele.** Példa:

Van-e Euler-vonal a Petersen-gráfban? Miért?

**Hamilton-kör, Hamilton-út.** Példa:

Definiálja a Hamilton-kör fogalmát. Adjon meg egy-egy gráfot, melyben nincs, illetve van Hamilton-kör.

**Irányított séta, vonal, út, kör.** Példa:

Adjon meg egy olyan irányított gráfot, mely tartalmaz kört, de irányított kört nem.

**Összefüggőség, erős összefüggőség, komponens, erős komponens.** Példa:

Adjon meg két olyan gráfot, melyek összefüggőek, de nem erősen összefüggőek.

## 2. Polinomok

**Polinom, fok, fokszámtétel.** Példa:

Mekkora lehet két polinom szorzatának foka? Mondjon példát, amikor éles, illetve amikor nem éles a korlát!

**Polinomfüggvény.** Példa:

Definiálja a polinomfüggvény fogalmát! Mondjon példát két különböző polinomra, melyek ugyanazt a polinomfüggvényt határozzák meg!

**Polinomok maradékos osztása.** Példa:

Mondja ki a maradékos osztásra vonatkozó tételt, és ossza el maradékosan az  $5x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 6x + 7 \in \mathbb{Z}_{13}[x]$  polinomot a  $12x^2 + 7x + 1 \in \mathbb{Z}_{13}[x]$  polinommal!

**Polinomok legnagyobb közös osztója.** Példa:

Definiálja polinomok legnagyobb közös osztóját, és számolja ki az  $x^4 + x^2 + x + 1, x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$  polinomok legnagyobb közös osztóját!

**Horner-elrendezés.** Példa:

Ossza el maradékosan az  $(i+1)x^3 - ix^2 + x + 1 \in \mathbb{C}[x]$  polinomot az  $x+i \in \mathbb{C}[x]$  polinommal a Horner elrendezés segítségével!

**Algebrai derivált.** Példa:

Ismertesse az algebrai derivált fogalmát, illetve a tulajdonságait leíró tételt! Van-e olyan hatodfokú polinom, melynek a 0 polinom a deriváltja?

**Többszörös gyökök.** Példa:

Mikor mondjuk, hogy egy elem többszörös gyöke egy polinomnak? Mutasson példát  $\mathbb{Z}_3$  fölött olyan polinomra, melynek van többszörös gyöke!

**Irreducibilis polinomok.** Példa:

Definiálja az irreducibilis polinomok fogalmát! Mutasson példát olyan polinomra, mely irreducibilis  $\mathbb{Q}$  fölött, de nem irreducibilis  $\mathbb{R}$  fölött!

## 3. Testek, testbővítések

**Kongruencia polinomok körében.** Példa:

Mikor mondjuk, hogy  $g(x) \equiv h(x) \pmod{f(x)}$  adott  $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$  esetén? Igaz-e  $\mathbb{Z}_5$  fölött az alábbi kongruencia  $x^3 + 2x^2 + 1 \stackrel{?}{\equiv} 3x^4 + 2 \pmod{x^2 + x + 2}$ ?

**Véges testek alaptétele.** Példa:

Mondja ki a véges testek alaptételét! Van-e 6, 7, illetve 8 elemű test?

**Véges testek struktúra tétele.** Példa:

Mondja ki a véges testek struktúratételét! Legyen  $\mathbb{F}_{25} \cong \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 2)$ ! Mennyi lesz  $25 \cdot x$ , illetve  $x^{25}$ ?

## 4. Üzenetkódolás

**Betűnkénti kódolás.** Példa:

Definiálja a betűnkénti kódolást. Betűnkénti kódolások-e az alábbi  $\varphi_1, \varphi_2 : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1\}^+$  leképezések:

$$\begin{aligned}\varphi_1(a) &= 0, & \varphi_1(b) &= 01, & \varphi_1(c) &= 10, & \varphi_1(d) &= 00, \\ \varphi_2(a) &= 1, & \varphi_2(b) &= 01, & \varphi_2(c) &= 001, & \varphi_2(d) &= 0001.\end{aligned}$$

**Kódtulajdonságok.** Példa:

Definiálja a felbontható, prefix, egyenletes és vesszős kódokat. Az alábbi kódok milyen tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$\begin{aligned}\varphi_1(a) &= 0, & \varphi_1(b) &= 10, & \varphi_1(c) &= 10, & \varphi_1(d) &= 110, \\ \varphi_2(a) &= 1, & \varphi_2(b) &= 01, & \varphi_2(c) &= 001, & \varphi_2(d) &= 0001.\end{aligned}$$

**Kódfa.** Példa:

Definiálja a kódfát! Mi lesz az alábbi kódok fája?

$$\begin{aligned}\varphi_1(a) &= 0, & \varphi_1(b) &= 10, & \varphi_1(c) &= 10, & \varphi_1(d) &= 110, \\ \varphi_2(a) &= 1, & \varphi_2(b) &= 01, & \varphi_2(c) &= 001, & \varphi_2(d) &= 0001.\end{aligned}$$

## 5. Hibajavító kódolás

**$t$ -hibajelző kódok.** Példa:

Mikor mondjuk, hogy egy kód  $t$ -hibajelző? Hány hibajelző az alábbi négyszeres ismétléses kód: adott  $a \in \{0, 1, 2\}$  esetén  $a \mapsto (a, a, a, a)$ ?

**Hamming távolság.** Példa:

Definiálja a Hamming távolságot, és mondja ki annak tulajdonságait! Mennyi lesz az  $(0, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 0) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^4$  szavak távolsága?

**Kódtávolság.** Példa:

Definiálja a kódtávolság fogalmát! Mennyi lesz az alábbi négyszeres ismétléses kód kódtávolsága: adott  $a \in \{0, 1, 2\}$  esetén  $a \mapsto (a, a, a, a)$ ?

**$t$ -hiba javító kódok.** Példa:

Mikor mondjuk, hogy egy kód  $t$ -hibajavító? Hány hibajavító az alábbi négyszeres ismétléses kód: adott  $a \in \{0, 1, 2\}$  esetén  $a \mapsto (a, a, a, a)$ ?

**Lineáris kódok.** Példa:

Mikor mondjuk, hogy egy kód lineáris? Lineáris-e az alábbi bináris kódolás:

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 \cdot c_2)?$$

**Generátormátrix.** Példa:

Definiálja a generátormátrix fogalmát! Adja meg az alábbi lineáris bináris kód generátormátrixát:

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 + c_2, c_1, c_2)!$$

**Ellenőrző mátrix.** Példa:

Definiálja az ellenőrző mátrix fogalmát! Adja meg az alábbi lineáris bináris kód generátormátrixát:

$$(c_1, c_2) \mapsto (c_1, c_2, c_1 + c_2, c_1, c_2)!$$

**Ciklikus kódok.** Példa:

Definiálja a ciklikus kódokat! Ciklikus-e a  $\{000, 010, 100, 111\}$  kód?

**Polinom kódok.** Példa:

Mit értünk egy polinomkód generátor-, illetve ellenőrzőpolinomja alatt?

**CRC kódok.** Példa:

Definiálja a CRC kódokat! Mondjon példát CRC kódra ( $n, k$  paraméterek és a generátormatrica megadásával)!

**Reed–Solomon-kód.** Példa:

Definiálja a Reed–Solomon-kódot!

## 6. Gazdaságos kódolás

**McMillian egyenlőtlenség.** Példa:

Mondja ki a McMillian egyenlőtlenség egyenlőtlenségét! Létezik-e olyan bináris felbontható kód, ahol a kódszavak hossza 2, 2, 2, 3, 3, 4?

**Átlagos kódhossz.** Példa:

Definiálja az átlagos kódhosszt! Mennyi lesz annak a kódnak az átlagos kódhossza, ahol a kódszavak rendre 2, 2, 2, 3, 3, a betűk valószínűségei rendre 0,34, 0,3, 0,22, 0,07, 0,07?

**Entrópia.** Példa:

Definiálja az entrópia fogalmát! Mennyi lesz annak a forrásnak az entrópiája, ahol a betűk valószínűségei 0,34, 0,3, 0,22, 0,07, 0,07?

**Shanonn tételek.** Példa:

Mondja ki Shanonn tételeit! Adjon alsó, illetve felső korlátot az optimális kód átlagos kódhosszára, ahol a kódolandó betűk valószínűségei 0,34, 0,3, 0,22, 0,07, 0,07!

**Huffman kód.** Példa:

Konstruáljon Huffman kódot, ha a kódolandó betűk valószínűségei 0,34, 0,3, 0,22, 0,07, 0,07!