Diszkrét Matematika 1.

Második zárthelyi dolgozat, 2013. ősz (minta feladatsor)

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 85 perc. A 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50 pont.

1. Hányféleképpen lehet tíz különböző jutalmat kiosztani harminc versenyző közt, ha **[2-2 pont]**

   a. A jutalmak különbözők, és egy versenyző legfeljebb egyet kaphat;

   b. A jutalmak különbözők, és egy versenyző többet is kaphat;

   c. A jutalmak egyformák, és egy versenyző legfeljebb egyet kaphat;

   d. A jutalmak egyformák, és egy versenyző többet is kaphat?

   e. Hányféleképp lehet tíz jutalmat 5 versenyző közt szétosztani, ha mindenkinek kell kapnia legalább egyet, és a jutalmak egyformák?

2. Hányféleképpen lehet 100 számozott nagy dobozban elhelyezni 10 kis golyót, ha **[2-2 pont]**

   a. a golyók is számozottak;

   b. a golyók számozottak, és minden nem üres dobozba pontosan kettőt kell tenni;

   c. a golyók egyformák, és minden nem üres dobozba pontosan kettőt kell tenni;

   d. a golyók egyformák, és szomszédos dobozokba nem szabad tenni;

   e. a golyók is számozottak (egytől tízig), és a golyókat úgy kell elhelyezni, hogy a golyó és a doboz paritása (párossága) egyforma legyen?

3. Hány olyan 100 jegyű szám van kettes számrendszerben, melyben minden számjegy előfordul? Hány ilyen van tízes számrendszerben? **[10 pont]**

4. Fogalmazza meg a következő állítások tagadását (de ne úgy, hogy a mondatot idézőjelbe rakjuk, és eléírjuk, hogy „Nem igaz, hogy:") **[1-1 pont]**:

   a. Az e egyenes metszi az f egyenest, és merőleges g-re.

   b. Minden piros autónak létezik fekete alkatrésze.

   c. Minden 10-nél nagyobb n páros számra igaz, hogy vannak olyan p és q prímszámok, melyekre $p + q = n$.

   d. Ha egy gráfban minden csúcs foka páros, akkor van benne Euler-vonal.

   e. Minden bigyóra létezik olyan izé, melynek minden kütyüje felemás.

5. Az alábbi állítások közül némelyik minden halmazra teljesül, másokra van ellenpélda. Döntsük el, melyik eset áll fenn, és ha van ellenpélda, adjunk meg olyan halmazokat, melyekre az állítás NEM teljesül **[1-1 pont]**.

   a. $A \cup B = A \cap B$.

   b. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

   c. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   d. $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$

   e. $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

6. Egy nagyáruházban az árufeltöltők halmaza: $X = \{$Aladár, Béla, Cecil$\}$. A részlegek halmaza: $Y = \{$Pékáru, Ital, Édesség, Kassza$\}$. A termékek pedig $Z = \{$csoki, kóla, kifli, croissant$\}$. Azt, hogy melyik árufeltöltő melyik részlegek feltöltéséért felelős, a következő reláció határozza meg: $R = \{$(Aladár, Pékáru), (Aladár, Ital), (Béla, Kassza), (Cecil, Édesség)$\}$. A termékek pedig az alábbi részlegeken találhatók meg (relációval megadva): $S = \{$(csoki, Édesség), (csoki, Kassza), (kóla, Ital), (kóla, Kassza), (kifli, Pékáru), (croissant, Pékáru), (croissant, Édesség)$\}$. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. **[2-2 pont]**

   a. Adjuk meg halmazként: $R \circ S$.

   b. Melyek függvények: R, R^{-1}, S, S^{-1}?

   c. Legyen $R_2 = R|_{\{\text{Aladár}\}}$ Mi $\mathrm{rng}(S^{-1} \circ R_2)$?

   d. Hogyan tudjuk az R és S relációkkal megfogalmazni azt, hogy kik a felelősök a csoki elhelyezéséért?

   e. Tranzitív-e R?

7. A komplex nyolcadik egységgyökök E halmazán vezessük be a következő relációt: $R = \{(x, y) \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ (x^k = y)\}$. Rajzoljuk fel a relációt az E halmaz pontjait összekötő nyilakkal. Vizsgáljuk meg, hogy reflexív, szimmetrikus, tranzitív, antiszimmetrikus-e. Igaz-e, hogy a reláció ekvivalenciareláció? Ha igen (de csak akkor), soroljuk fel az ekvivalenciaosztályokat. Igaz-e, hogy részbenrendezés? Ha igen (de csak akkor), soroljuk fel a minimális ill. maximális elemeket. **[10 pont]**