Diszkrét Matematika 1.

Első zárthelyi dolgozat, 2013. ősz (minta feladatsor)

Számológép használata megengedett (kivéve grafikus ill. programozható számológép). Időtartam: 85 perc. Minden feladat 10 pontot ér, a 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös ponthatára: 20, 30, 40, 50 pont.

1. Számítsa ki algebrai alakban a következőket (a, illetve b nullától különböző valós számokat jelölnek):

   a. $(2+i)^2$;

   b. $(a+3i)(b-2ai)$;

   c. $(1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i)$;

   d. $1/(a+bi)+1/(a-bi)$;

   e. i^{2013}.

2. A trigonometrikus alak segítségével számítsa ki a z értékét trigonometrikus és algebrai alakban is, majd adja meg az összes olyan w komplex számot trigonometrikus alakban, melyre $w^6 = z$.

$$z = \frac{(2+2\sqrt{3}i)^{24}}{(-1+i)^{90}}$$

3. **a.** Oldjuk meg a következő egyenletet a komplex számok körében:

$$(1+i)z^2 + (2+3i)z + (1+2i) = 0$$

   b. Adjuk meg a PQ szakasz harmadolópontjait, ha $P = 2+3i$, $Q = -4+5i$.

4. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

   a. $3x \equiv 4 \pmod 7$;

   b. $2x \equiv 5 \pmod{14}$;

   c. $6x \equiv 4 \pmod{10}$;

   d. $34x \equiv 2 \pmod{55}$;

   e. $x^2 \equiv 3 \pmod 5$.

5. Mi $1789^{1969^{2013}}$ utolsó két számjegye 10-es számrendszerben? Indokolja meg a választ.

6. **a.** Oldjuk meg az alábbi szimultán kongruencia-rendszert:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \quad \text{mod } 5 \\ x &\equiv 3 \quad \text{mod } 6 \\ x &\equiv 1 \quad \text{mod } 7 \end{aligned}$$

   b. Egy szigeten hét- és kilencfejű sárkányok élnek. Hányan lehetnek, ha összesen 107 fejük van?