Diszkrét matematika I. feladatok

Tizenkettedik alkalom (2013.12.02.-06.)

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en definiáljunk egy $\mathbf{R}$ relációt a következõképpen: $(m_1, n_1)\mathbf{R}(m_2, n_2)$, ha $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ részbenrendezés.

2. Függvény-e a következõ reláció? $\mathbf{R} \subset A \times A$, ahol $A = \{$a síkbeli egyenesek$\}$; $a\mathbf{R}b$, ha a és b egyenesek által bezárt (a kisebb) szög $60°$: Vizsgáljuk a fenti reláció tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következõk: reflexív, tranzitív, szimmetrikus).

3. Legyen $A = \{$olyan egyenlõszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlõ egy rögzített $m > 0$ számmal$\}$, $B = \{b : b > 0, b \in \mathbb{R}\}$. Definiáljuk az $\mathbf{R} \subseteq A \times B$ relációt a következõképpen: $a\mathbf{R}b, a \in A, b \in B$, ha az a háromszög területe b. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következõk: szürjektív, injektív, bijektív).

4. Határozd meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsd el, hogy függvény-e és hogy az inverze függvény-e:

   a) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : x \cdot y = 1\}$;
   b) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 : x \cdot y = 1\}$;
   c) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : x^2 + y^2 = 1\}$;
   d) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : x^4 - x = y\}$;
   e) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{12} : x^4 - x = y\}$;
   f) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 : x^4 - x = y\}$;
   f) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_7 : x^6 = y\}$.

5. Határozd meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsd el, hogy függvény-e és hogy az inverze függvény-e:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, x < y < 2x\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adott számok;
   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(1 - x^2) = x - 1\}$;
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x - 1)/(1 - x^2)\}$;
   d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;
   e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1 + y^2, y > 0\}$;
   f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y < 0\}$.

Szorgalmi feladatok

6. Tekintsük az $f(x) = x/(1-x)$ függvényt. Ez nem értelmezhető az egész számegyenesen. Mi a legbővebb olyan részhalmaza a valós számoknak, melyen f értelmezhető? Injektív/szürjektív/bijektív-e ezen a halmazon értelmezett valós értékű függvényként? Mi az a legbővebb részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, melyen az $f, f \circ f, f \circ f \circ f, \ldots$ kompozíciók mindegyike értelmezhető? Mit mondhatunk $f \circ f \circ f$ és f kapcsolatáról?