Diszkrét matematika I. feladatok

Tizenegyedik alkalom (2013.11.25.-29.)

1. Az alábbi $\mathbf{R}$ relációkra határozd meg $\mathrm{dmn}(\mathbf{R}), \mathrm{rng}(\mathbf{R})$ halmazokat. $A = \{0, 1, 2\}$ esetén hatátozd meg az A képét $\mathbf{R}(A)$, teljes inverzképét $\mathbf{R}^{-1}(A)$, megszorítását $\mathbf{R}\mid_A$:

   a) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 : y^2 = x\}$, b) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 : y^2 = x^2\}$,
   c) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : y^2 = x^3 + x + 1\}$, d) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 : y^2 = x^3 + 2\}$.

2. Határozzuk meg az $R \cap S$ relációt, ha R az m osztója n-nek reláció $\mathbb{N}$-en, S pedig az $n = m + 6$ reláció $\mathbb{Z}$-n!

3. Határozd meg az $\mathbf{S} \circ \mathbf{R}$ és $\mathbf{R} \circ \mathbf{S}$ szorzatot, ha

   a) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 : y^2 = x\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 : y = 2x\}$;
   b) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 : y^2 = x^2\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 : y = 2x\}$;
   c) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : y^2 = x^3 + x + 1\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 : y^2 = x^3 + 1\}$;
   d) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 : xy = 0\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 : x^2 + y^2 = 0\}$;
   e) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 : xy = 1\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 : x^2 + y^2 = 1\}$;
   f) $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : x^2y^2 = 0\}$ és $\mathbf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_8 : x^2 + y^2 = 0\}$;

4. Legyen $X = \{a, b, c\}$. Határozd meg az összes X-beli binér reláció számát. Keressünk példát a relációtulajdonságok teljesülésére és nemteljesülésére.

5. Legyen az $\mathbf{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció olyan, hogy $n\mathbf{R}m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ igaz, ha n és m közös prímosztóinak a száma páros. Vizsgáljuk meg $\mathbf{R}$ tulajdonságait.

6. Keressünk olyan relációt, amely

   a) reflexív, de nem tranzitív; b) antiszimmetrikus és reflexív; c) antiszimmetrikus és nem tranzitív; d) nem reflexív, nem tranzitív; e) nem tranzitív, de trichotóm;
   f) semmi (nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm).

7. Definiáljunk a következő relációkat $\mathbb{Z}$-n és vizsgáljuk meg tulajdonságait:
   a) $x\mathbf{R}_1y$, ha $x^2 + y^2$ osztható 2-vel; b) $x\mathbf{R}_2y$, ha $x^2 - y^2$ osztható 2-vel.

8. Adott X halmaz esetén bizonyítsuk be, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció! Mi lesz a $\sim$ által meghatározott osztályozás?

   a) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w$, ha $|z| = |w|$; b) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w$, ha $z/|z| = w/|w|$;
   c) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w$, ha $z/w = \pm 1$; d) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w$, ha $z/w \in \{\pm 1, \pm i\}$;
   e) $X = \mathbb{C}$, $z \sim w$, ha $(z/w)^n = 1$; f) $X = \mathbb{Z}_{15}$, $x \sim x$, ha $5(x - y) \equiv 0 \mod 15$;
   g) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(p, q) \sim (r, s)$, ha $p + s = r + q$; h) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$, $(p, q) \sim (r, s)$, ha $ps = rq$.

Szorgalmi feladatok

9. Írjunk programot, mely egy relációról eldönti, hogy reflexív (szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív), vagy nem. Számoljuk meg a programmal, hány ekvivalenciareláció, illetve részbenrendezés van egy négyelemű halmazon.

10. Aladár és Béla a következő játékot játsszák: először Aladár mond egy részhalmazt az $X = \{1, 2, 3\}$ részhalmazai közül. Utána Béla mond egy másik részhalmazt X-ből, majd újra Aladár stb. A szabály az, hogy mindig csak olyan részhalmazt lehet megnevezni, amely egyetlen korábban megnevezett halmaznak sem részhalmaza. Az veszít, aki utoljára lép (az utolsó lépés mindig a teljes X halmaz lesz). Egy lehetséges játékmenet: $A : \{1\}$, $B : \{2\}$, $A : \{1, 3\}$, $B : \{2, 3\}$, $A : \{1, 2\}$, $B : \{1, 2, 3\}$, és Aladár nyert. Kinek van nyerő stratégiája?