

Diszkrét matematika I. feladatok

Tizedik alkalom (2013.11.18.-22.)

1. Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre egyszerre teljesülnek a következők:

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap C = \emptyset, \quad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$$

2. Bizonyítsd be, hogy $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$.
3. Adj meg olyan halmazrendszert, mely diszjunkt de nem páronként diszjunkt. Van-e olyan halmazrendszer, mely páronként diszjunkt de nem diszjunkt?
4. Legyen $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi lesz $\cup \mathcal{A}$ és $\cap \mathcal{A}$?
5. Legyenek $x = \{\text{alma}, \text{szilva}\}$ és $y = \{\text{kutya}, \text{macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\}, y\}$, x , $\{\emptyset\} \cap x$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$.
6. Igazoljuk, hogy
a) $A \Delta \emptyset = A$; b) $A \Delta A = \emptyset$; c) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$; d) $A \Delta (A \Delta B) = B$.
7. Fejezzük ki a Δ és \cap segítségével a következő halmazokat: $A \setminus B$ és $A \cup B$.
8. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.
9. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; b) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
10. Állapítsd meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:
 $(A \cup B) \setminus A = B$; $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$; $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
11. Bizonyítsd be a következő összefüggést: $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C)} \cap \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.
12. Egyszerűsítsd amennyire lehet a következőket: $\overline{A \cup (B \cap (C \cup \overline{D}))}$, $\overline{(\overline{A \cup B}) \cap (A \cup \overline{B})}$.
13. Írd fel a hatványhalmazt egy-egy 0,1,2, illetve 3-elemű halmazra.

Szorgalmi feladatok

14. Egy csapat tökéletesen gondolkodó (programozó informatikus szakos) oroszán áll körben egy cafat hús körül. Mindannyian szívesen ennének, de az életüket nem kockáztatnák az ételért. Ha valamelyikük megeszi a húst, akkor elálmosodik, ott helyben elalszik, és onnantól ő a potenciális ebéd a többiek számára. Hogy fognak a (mint mondtuk, nagyon okos) oroszánok viselkedni, ha
- ketten vannak;
 - hárman vannak;
 - kilencvenkilencen vannak;
 - százan vannak?
15. Az asztalon van 50 darab érme, 25 darab a fej, 25 darab az írás oldalán. Bekötött szemmel hogyan tudunk két kupacot csinálni, hogy mindkét kupacban ugyanannyi legyen a fej oldalán?