Diszkrét matematika I. feladatok

Hetedik, nyolcadik alkalom (2013.10.21.-11.08.)

1. Az összes lehetséges módon kitöltünk TOTÓ-szelvényeket. Hány szelvényt töltöttünk ki?
2. Egy futóversenyen 25-en indulnak. Hányféle sorrendben érhetnek célba (nincs holtverseny és mindenki célba ér)?
3. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 20\}$ halmaznak? Hány részhalmazára teljesül, hogy
   a) az 1 benne van; b) 1 és 2 is benne van; c) 1 vagy 2 benne van?
4. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak, melyben az 1 és a 2 nem lehetnek szomszédosak?
5. Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?
6. Az $(a+b)^{22}$ kifejtésében mi az együtthatója az $a^{14}b^8$-nak, valamint az $a^{17}b^5$-nek?
7. Hány út vezet a 3×10-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak fel, jobbra, vagy jobbra-fel átlósan léphetünk?
8. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken p darab, a másikon q darab pont. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?
9. Jelöljük C_k^n-val az $x^{n-k}y^k$ együtthatóját az $(x+y)^n$ kifejezésben! Ezen számokból készül a Pascal-háromszög. Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit! Mit kapunk? Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit most váltakozó előjellel! Most mit kapunk?
10. Hány nullára végződik a $11^{100} - 1$ szám?
11. Egy 25 fős osztályban küldöttséget választanak, mely 6 főből áll, majd ezen hat emberből egy-egy igazgatót és titkárt választanak. Hányféleképpen történhet ez, ha egy ember csak egy tisztséget viselhet?
12. Hányféleképpen lehet n darab egyforintos érmét k ember között szétosztani? És ha mindenki kap biztosan legalább egy forintot?
13. A cukrászdában ötféle süteményt árulnak: lúdlábat, gesztenyés kockát, dobostortát, minyont és fatörzset. Mindegyikből van még legalább 20.

    Hányféleképpen ehetünk meg hármat, ha a) számít a sorrend, b) nem?
14. Hányféleképpen lehet felbontani, ha a sorrend számít
    a) a 100-at 7 pozitív egész szám összegére; b) a 200-at 12 természetes szám összegére;
    c) a 12-t olyan összegre, melyben csak 1 és 2 szerepel?
15. Egy 2x12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2x1-es dominókkal (melyeket vízszintesen és függőlegesen tehetünk le)?
16. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. Hány különböző leosztás van? Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?
17. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?
18. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér és 40 zöld golyó van, ezekből húzunk. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy biztosan legyen
    a) fehér; b) 3 különböző szinű; c) 3 azonos szinű; d) 5 azonos szinű;
    e) 15 azonos szinű; f) két egymás utáni zöld húzás?
19. Mekkora az a minimális osztálylétszám, ahol biztosan teljesül, hogy
    a) van négy diák, aki ugyanabban a hónapban született;
    b) minden hónapban van 3-3 születésnap?

20. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható nyolccal?

21. Mutasd meg, hogy a $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, 100\pi$ számok között van olyan, amelyik nincs messzebb a legközelebbi egésztől, mint 1/101. Általánosítsd az állítást.

22. Bizonyítsd be, hogy bármely $m \in \mathbb{N}^+$ -hoz van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy tízes számrendszerben mn minden számjegye 0 vagy 1.

23. Hány TOTÓ-t kell kitöltenünk, hogy legyen olyan szelvényünk, amin legalább 5 találatunk van?

24. Hány hatjegyű számra igaz, hogy
a) a szomszédos számjegyei különböznek; b) minden jegye különböző;
c) pontosan egy jegye 0, d) van 0 a jegyei között?

25. Egy bolha ugrál az egyenes egész pontjain jobbra-balra, másodpercenként egyet. Ha az origóból indul és egy percig ugrál, hányféleképpen tud eljutni a +24 pontba?

26. Egy osztály 30 tanulója közül a matekot 12, a matekot és a fizikát 5, a fizikát 14, a matekot és a kémiát 4, a kémiát 13, a fizikát és a kémiát 7, mindhármat 3 szereti. Hányan vannak, akik semelyiket nem kedvelik?

27. Hány 100-nál kisebb természetes szám van, mely 2,3 és 5 egyikével sem osztható? És hány olyan 1000-nél kisebb, mely 2,3,5 és 7 egyikével sem osztható?

28. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni úgy, hogy minden rekeszben, amelyikben van golyó, pontosan 6 darab van és a) a golyók egyformák; b) a golyók különbözőek, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét; c) a golyók különbözőek, de a rekeszben nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét?

29. Artúr király Kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?

Szorgalmi feladatok

30. Hányféleképpen helyezhetünk el egy 8x8-as sakktáblán 8 bástyát úgy, hogy egyik se üsse semelyik másikat? Mennyi a lehetőségek száma, ha azokat a megoldásokat, amik forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők, csak egynek számítjuk (tehát pl. az a1-b2-c3-d4-e8-f7-g6-h5 nem szó szerint ugyanaz, mint az a4-b3-c2-d1-e5-f6-g7-h8, de ezt csak egy megoldásnak tekintjük mert középpontos tükörképek).

31. Hányféleképpen lehet az egymilliót három természetes szám szorzatára bontani, ha azok sorrendje a) számít; b) nem számít?

32. a) Egy ládában 10000 piros és 100 kék golyó van. Találomra kihúzunk 100-at. Mennyi az esélye, hogy van köztük kék? b) Az Atlanti-óceánba beleöntünk egy liter vizet. Jól megkeverjük az óceánt, majd a túlparton kiveszünk (találomra) egy liter vizet. Mennyi az esélye, hogy az eredetileg beleöntött liter víz egyik molekuláját újra kifogtuk? c) Mennyi az esélye, hogy a büfében vásárolt pizzaszelet egyik szénatomja a Földön élt utolsó T. rex bal combjában is járt már? Az adatoknak utánanézni, ill. a számoláshoz Wolfram Alphát használni SZABAD!