FRAKTÁLGEOMETRIA
Feladatok

Czirbusz Sándor*

2010. április 16.

I. rész
Feladatok

A feladatok végén zárójelben a feladat pontértéke található.

1. Példák fraktálokra

1.1. A Cantor - halmaz

1.1.1. Feladat. Igazoljuk, hogy az $\frac{1}{4}$ nem végpontja egyetlen C_k – t alkotó intervallumnak sem! (2)

1.1.2. Feladat. Igazoljuk, hogy az $\frac{1}{4} \in C$ (2)

1.1.3. Feladat. Igazoljuk, hogy C nem tartalmaz izolált pontot, azaz $a \in C$ és $\forall \varepsilon > 0$ esetén $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ tartalmaz a–tól különböző C-beli pontot! (5)

1.1.4. Feladat. Igazoljuk, hogy C zárt, vagyis ha az $a \in \mathbb{R}$ pontra teljesül, hogy $\forall \varepsilon >$ > 0 esetén az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ metszi C–t, akkor $a \in C$! (5)

1.1.5. Feladat. Legyen $r \in \mathbb{R}$ pozitív. Hány, a konstrukció során elhagyott intervallum hossza haladja meg r–t? (2)

1.1.6. Feladat. Írjuk fel ternárisan a $\frac{7}{9}, \frac{1}{4}, \sqrt{2}, \frac{1}{3}$ számokat! (1)

1.1.7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ függvényekre valóban igaz, hogy $C = f_1(C) \cup f_2(C)$! (5)

1.1.8. Feladat. Keresünk olyan $A \neq C$ halmazokat, melyek attraktorjai az előző f_1, f_2 függvényeknek! (10)

1.1.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $C - C = [0, 1]$ (5)

*A feladatok jelentős része Edgar könyvéből való

1.2. A Sierpinski-háromszög

1.2.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Sierpinski–háromszög területe 0, kerülete ∞ (2)

1.2.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a dilatációk egyenest egyenesbe visznek és szögtartók! (5)

1.2.3. Feladat. Legyen S_0 a konstrukció kiinduló háromszöge, f_1, f_2, f_3 pedig az S_0 csúcsaiból indított $\frac{1}{2}$ arányú zsugorítások.Igazoljuk, hogy $S_{k+1} = f_1(S_k) \cup f_2(S_k) \cup \cup f_3(S_k)$, valamint $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S)$. (5)

1.2.4. Feladat. Vegyünk fel egy ferdeszögű koordinátarendszert: az origó szabályos háromszög egyik csúcsa, a tengelyek az erre illeszkedő oldalak egyenesei, u, w. Bizonyítsuk be, hogy egy $(u, w) \in [0,1] \times [0,1]$ pont pontosan akkor eleme a Sierpinski háromszögnek, ha u és w kettes számrendszerbeli előállításában ugyanazon a helyen egyszerre nem szerepel 1-es! (5)

1.2.5. Feladat. Jelöljünk ki egy kezdőpontot és két irányt, melyek egymással 60^0–ot zárnak be!. Legyen L_0 ezt a egyetlen pontot tartalmazó halmaz, $s_0 = \frac{1}{2}$. A k–adik lépésben pedig L_{k-1}–hez mindkét irányú s_{k-1} távolságú eltoltjait hozzávesszük, legyen $s_k = \frac{1}{2} \cdot s_{k-1}$! Legyen $L = \cup_k L_k$.
Az S halmaz minden pontja határértéke egy L–beli sorozatnak. (5)

1.2.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $k >= 1$, akkor az S_k halmazt alkotó háromszögek oldalaiból képezhető olyan önmagát nem átmetsző zárt töröttvonal, amely mindegyik háromszögnek pontosan egy oldalát tartalmazza! (10)

1.2.7. Feladat. Írjunk programot, mely kirajzolja a Sierpinski–háromszöget! (5)

1.3. A Sierpinski-szőnyeg és a Menger-szivacs

1.3.1. Feladat. Számítsuk ki a Sierpinski–szőnyeg területét! Hova konvergál az iterációs lépésekben létrejövő négyzetek kerülete? (2)

1.3.2. Feladat. Számítsuk ki a Menger–szivacs térfogatát! Hova konvergál az iterációs lépésekben létrejövő kockák felszíne? (2)

1.3.3. Feladat. Igazoljuk, hogy a Sierpinski–szőnyeg konstrukciójának k–adik lépésében keletkező négyzetek oldalainak felhasználásával készíthető olyan zárt töröttvonal, amelynek minden kis négyzettel van közös pontja! (2)

1.3.4. Feladat. Írjunk programot, mely kirajzolja a Sierpinski–szőnyeget! (5)

1.3.5. Feladat. Írjunk programot, mely kirajzolja a Menger–szivacsot! (5)

1.4. A Koch-görbe

1.4.1. Feladat. Készítsünk programot, amely lerajzolja a Koch-görbét! (5)

1.4.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Koch–görbe korlátos részhalmaza a síknak? (5)

1.4.3. Feladat. Számítsuk ki a hópihe területét és kerületét! (5)

1.5. Egyéb fraktálgörbék

1.5.1. Feladat. A Heighway–sárkány
Induljunk ki egy P_0, egységnyi hosszúságú szakaszból! P_1–et úgy kapjuk, hogy a szakaszunkat helyettesítjük két darab, egymáshoz derékszögben csatlakozó szakasszal, ezek nem közös végpontjai P_0 végpontjaival azonosak.(A derékszög legyen az eredeti szakasztól balra!). P_2–t úgy kapjuk P_1–ből, hogy minden szakaszt helyettesítünk derékszögű töröttvonallal, az irányokat pedig váltogatjuk, ballal kezdve. A fenti iteráció „határgörbéje" a Heighway–sárkány. Készítsünk programot a sárkány lerajzolására! (5)

1.5.2. Feladat. A Heighway–sárkány approximációja során P_n mindig a sík ugyanazon korlátos tartományában marad. (10)

1.5.3. Feladat. A P_n–et alkotó poligon sohasem metszi önmagát. (10)

1.5.4. Feladat. A Heighway–sárkány iterációjában használjunk 120^0–os szöget! (fudgeflake) (5)

1.5.5. Feladat. Sierpinski–sárkány
Az iterációs lépésben most a szakaszunkat három egyenlő hosszú, egymással 60^0–ot bezáró, ugyanazokhoz a végpontokhoz csatlakozó töröttonallal helyettesítjük, az irányt itt is váltogatjuk. (5)

1.6. Számrendszerek

1.6.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a -2 alapú számrendszerben a $0, 1$ számjegyekkel minden egész szám egyértelműen felírható! (5)

1.6.2. Feladat. Legyen $b = -1+i$ a számrendszerünk alapszáma, $0, 1$ a a számjegyek. Jellemezzük ebben a rendszerben az egészeket! (5)

1.6.3. Feladat. Keressünk a fenti számrendszerben olyan komplex számot, melynek van háromféle előállítása. (5)

1.6.4. Feladat. Legyen $b = -2$ és a számjegyek $0, 1, \omega, \omega^2$, ahol $\omega = \dfrac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}$ (harmadik egységgyök). Jellemezzük ebben a rendszerben az egészeket! (5)

2. Metrikus topológia

A feladatokban S, T metrikus tér, a metrikát többnyire ρ–val jelöljük.

2.1. Metrikus terek

2.1.1. Feladat. Igazoljuk, hogy $\sigma(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ szintén metrika S–en! (2p)

2.1.2. Feladat. Igazoljuk, hogy $\rho^{'}(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ szintén metrika S–en! (5p)

2.1.3. Feladat. Legyen $S = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Definiáljuk az $f : S \to S$ függvényt a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|} & \text{ha } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{ha } x = \infty \\ -1 & \text{ha } x = -\infty \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$ függvény metrika S–en! (5p)

2.1.4. Feladat. Legyen S az összes valós sorozat. Igazoljuk, hogy:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

metrika S–en. (5p)

2.1.5. Feladat. Keressünk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a Cauchy–egyenlőtlenségben egyenlőség álljon! (2p)

2.1.6. Feladat. Keressünk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy a Minkowski–egyenlőtlenségben egyenlőség álljon! (2p)

2.1.7. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy ultrametrikus térben minden háromszög egyenlőszárú! (2p)

2.1.8. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy ultrametrikus tér tetszőleg $B_r(x)$ gömbjének átmérője legfeljebb r! (2p)

2.1.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy ultrametrikus térben $\forall y \in B_r(x), B_r(y) = B_r(x)$! (2p)

2.1.10. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy ultrametrikus térben minden nyílt gömb zárt és minden zárt gömb nyílt! (2p)

2.1.11. Feladat. Legyen f az $\mathbb{R}^2$ dilatációja, $\vec{a}$ középponttal, r sugárral. Igazoljuk, hogy minden $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ esetén (3p):

$$||f(\vec{x}) - f(\vec{y})|| = r|\vec{x} - \vec{y}|$$

2.1.12. Feladat. Specifikáljuk az izometriákat $\mathbb{R}^2$–ben (10p)!

2.2. Konvergencia, folytonosság

2.2.1. Feladat. Legyen $\mathcal{B}$ bázis a T topológiájában. Bizonyítsuk be, hogy egy $h : S \to T$ függvény pontosan akkor folytonos, ha $h^{-1}(V)$ nyílt S–ben! (3p)

2.2.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy folytonos függvények kompozíciója folytonos! (2p)

2.2.3. Feladat. Igazoljuk, hogy az $A \subset S$ halmazra a következő állítások ekvivalensek (5p):

1. A zárt
2. Ha $x \in S$ esetén van olyan x_n sorozat A–ban, hogy $x_{n \to x}$, akkor $x \in A$

2.2.4. Feladat. Igazoljuk, hogy az $A \subset S$ halmazra a következő állítások ekvivalensek (5p):

1. A nyílt
2. Minden $x \in A$ és minden olyan S–beli x_n–sorozatra, melyre $x_{n \to x}$, létezik olyan N, hogy $n \geqq N$ esetén $x_n \in A$

2.2.5. Feladat. Igazoljuk, hogy a diszkrét metrikus tér tlejes! (2p)

2.2.6. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy ultrametrikus térben egy x_n sorozat pontosan akkor Cauchy–sorozat, ha $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$! (5p)

2.2.7. Feladat. Igazoljuk, hogy az $E = \{0{,}1\}$ ábécé fölöti E^ω végtelen sztringtér teljes a $\rho_{\frac{1}{2}}$ metrikával! (10p)

2.2.8. Feladat. Keressünk példát arra, hogy a telesség metrikus tulajdonság, de nem topologikus! (10p)

2.2.9. Feladat. Legyen f egy Lipschitz függvény. Igaz-e, hogy folytonos? (2p)

2.2.10. Feladat. Keressünk példát $\mathbb{R}$–ben olyan F_n zárt halmazokból álló sorozatra, hogy $\cup_n F_n$ nem zárt! (2p)

2.2.11. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n–re $F_n \subset [n, n+1]$, akkor $\cup_n F_n$ zárt! (3p)

2.3. Szeparábilitás

2.3.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $\{ (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_j \in \mathbb{Q}, j = 1, \ldots, d \}$ megszámlálható és sűrű $\mathbb{R}^d$–ben.

2.3.2. Feladat. Legyen $E = \{ 1, 2 \}$. Tekintsük E^ω–t a $\rho_{\frac{1}{2}}$ metrikával. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\{ [\alpha] \mid \alpha \in E^* \}$$

halmaz megszámlálható bázis. Speicálisan, bárely nyílt gömb valamely $[\alpha]$–val azonos. (5p)

2.4. Kompaktság

2.4.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy metrikus térban a kompaktság, sorozatkompaktság, megszámlálható kompaktság ekvivalens! (10p)

2.4.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy metrikus tér kompakt részhalmaza zárt! (3p)

2.4.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy kompakt tér zárt részhalmaza kompakt! (3p)

2.4.4. Feladat. Kompakt halmazok véges uniója kompakt (2p)

2.4.5. Feladat. Kompakt halmazon folytonos képe kompakt! (2p)

2.4.6. Feladat. Kompakt halmazonon folytonos függvény korlátos! (2p)

2.4.7. Feladat. Ha $A \subset$ zárt, $K \subset S$ kompakt és $A \cap K = \emptyset$, akkor $\rho(A, K) > 0$! (5p)

2.4.8. Feladat. Kompakt metrikus téren folytonos függvény egyenletesen folytonos! (2p)

2.4.9. Feladat. Legyen $\mathcal{C}(S,T) = \{\, fS \to T \mid f$ folytonos $\}$, az unifor metrika pedig $\rho_u(f,g) = sup\{\, \rho(f(x), g(x)) \mid x \in S\,\}$. Bizonyítsuk be, ha S kompakt, ρu valóban metrik $\mathcal{C}(S,T)$–n! (5p)

2.4.10. Feladat. Ha az előző feladatban T teljes, akkor $(\mathcal{C}(S,T), \rho_u)$ teljes! (5p)

2.4.11. Feladat. Ha $E = \{\,1{,}2\,\}$, akkor $(E^\omega, \rho_{\frac{1}{2}})$ kompakt. (5p)

2.4.12. Feladat. Milyen feltételek mellett lesz $\mathcal{C}(S,T)$ ultrametrikus?(10p)

2.4.13. Feladat. Bionyítsuk be, hogy tetszőleges $0 < r < 1$ esetén (E^ω, ρ_r) kompakt és szeparábilis! (10p)

2.4.14. Feladat. Bionyítsuk be, hogy az (E^ω, ρ_r) terek homeomorfak! (10p)

2.5. Hausdorff-metrika

2.5.1. Feladat. Ha A_n egy sorozat $\mathbb{H}(S)$–ben és $A \in \mathbb{H}(S)$–hez konvergál, akkor $A = \{x :$ van olyan x_n sorozat, hogy $x_n \in A_n$ és $x_n \to x\}$ (5p)

2.5.2. Feladat. Legyen $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ fogyó kompakt halmasorozat. Ekkor A_n a Hausdorff-metrikában az $A = \cap_{n \in N} A_n$ halmazhoz konvergál.

2.5.3. Feladat. Ha $f_n, f \in S \to T, S$ kompakt és $f_n \to f$ egyenletesen, akkor $f_n \to f(S)$ a Hausdorff–metrika szerint $\mathbb{H}(S)$–ben.

2.6. Metrika sztringtereken

2.6.1. Feladat. Legyen $0 < r < 1$ valós szám, definiáljuk a ρ_r–et ugyanúgy, mint $\rho_{\frac{1}{2}}$–et: ha $\sigma = \alpha\sigma'$ és $\tau = \alpha\tau'$, akkor $\rho_r(\sigma, \tau) = k^r, k = |\alpha|$. Bizonyítsuk be, hogy valóban metrikát kapunk!

2.6.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban definiált metrikában $[\alpha]$ átmérője r^α (2p)

2.6.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az előző metrikus tér kompakt, teljes és szeparábilis. (10p)

2.6.4. Feladat. Ha $h : E^\omega \to \mathbb{R}$ a Cantor–halmazt címző függvény, azaz $h(0\sigma) = = \frac{h(\sigma)}{3}, h(1\sigma) = \frac{h(\sigma)+2}{3}$. akkor h lipeomorfizmus $\rho_{\frac{1}{3}}$-ra, azaz

$$\frac{1}{3}\rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau) \leq |h(\sigma) - h(\tau)| \leq \rho_{\frac{1}{3}}(\sigma, \tau)$$

3. Topologikus dimenzió

3.1. Zéró-dimenziós terek

3.1.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy S metrikus tér pontosan akkor kompakt, ha minden nyílt lefedésének van véges finomítása. (2p)

3.1.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy véges S halmaz zéró–dimenziós. (2p)

3.1.3. Feladat. Legyen S zéró–dimenzós metrikus tér. Ekkor van olyan bázisa S–nek, mely nyílt–zárt halmazokból áll. (5p)

3.1.4. Feladat. Ha S kompakt, nemüres metrikus tér és van olyan bázisa, mely csupa nyílt–zárt halmazból áll, akkor S zéró–dimenzió. (5p)

3.1.5. Feladat. Egy szeparábilis metrikus tér pontosan akkor zéró–dimenziós, ha van csupa nyílt–zárt halmazból álló bázisa. (5p)