Fraktálok

Cantor halmaz

Czirbusz Sándor
ELTE IK, Komputeralgebra Tanszék

A CANTOR HALMAZ KONSTRUKCIÓJA

- Legyen $C_0 = [0, 1]$
  Hagyjuk el az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervallumot!
- $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$
- $\ldots$
- minden lépésben hagyjuk el a megmaradt intervallumok középső harmadát!
- $C = \cap_{k=1}^{\infty} C_k$ a **Cantor-halmaz**

Megjegyzés: az elhagyott intervallumot az angol irodalom néha **trema** néven illeti.

EGYSZERŰ TULAJDONSÁGOK

1. Hány diszjunkt intervallum uniója a C_k halmaz:
2. Egy ilyen intervallum hossza:
3. A k-adik konstrukció részintervallumainak száma:
4. A Cantor-halmaz hossza:
5. Ha $a, b \in [0, 1]$ és valamely k -ra $[a, b]$ a C_k-t alkotó részintervallum, akkor minden $n >= k$ esetén $a, b \in C_n$
6. Nem minden elem intervallum-végpont:

TRIADIKUS ÁBRÁZOLÁS ÁLTALÁBAN

Bármely $x \in \mathbb{N}$ ábrázolható 3-as számrendszerben

$$x = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot 3^i$$

formában.
A $[0, 1]$ között számok felírhatók

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 3^{-i}$$

alakban.

A Cantor halmaz triadikus ábrázolása

Tétel

Az $x \in [0, 1]$ *szám pontosan akkor van benne C -ben ha van olyan triadikus felírása, melyben nem szerepel* 1 *-es*

Következmény

A Cantor halmaz nem megszámlálható.

TRANSZLÁCIÓK I

Ha $L \subset \mathbb{R}, s \in L$, akkor az $L + s = x + s : x \in L$ halmazt al L halmaz s-el való eltoltjának nevezzük.

Definiáljuk a következő sorozatokat : $L_0 = 0$, legyen továbbá $s_0 = \frac{2}{3}$, és $L_k = L_{k-1} \cup (L_{k-1} + s_{k-1}), s_k = \frac{s_{k-1}}{3}$
$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots$. Legyen $L = \cup_{k=0}^{\infty} L_k$
Tulajdonságok:

- L^k elemszáma: 2^k
- L_k pontjai a C_k-beli intervallumok bal-végpontjai: C_k-ból kihagyott intervallumok job-végpontjai (plusz a 0)
- L_k elemeinek triadikus felbontásában nincs 1-es

ITERÁLT FÜGVÉNYRENDSZEREK I

Definíció

Legyenek $r > 0$ valamint a valós számok. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto r \cdot x + (1 - r) \cdot a$ utasítással definiált függvényt r arányú, a középpontú dilatációnak vagy nyújtásnak nevezzük

Tekintsük a következő két dilatációt : $f_1(x) = \frac{x}{3}, f_2(x) = \frac{x+2}{3}$. Nézzük a két függvény $[0, 1]$-re való megszorítását! A függvényt iterálva a Cantor halmazt kapjuk.

ANALITIKUS TULAJDONSÁGOK

1. A Cantor-halmaz nem tartalmaz intervallumot.
2. Nincs izolált pontja. [1]
3. A Cantor halmaz zárt. [2]
4. A Cantor halmaz kompakt. [3]
5. A Cantor halmaz perfekt.
6. Teljesen széteső.

[1] Vagyis minden pontja tetszőleges környezetében van tőle különböző pontja a halmaznak.

[2] Ha $a \in R$ minden környezete belemetsz C-be, akkor $a \in C$.

[3] vagyis korlátos és zárt.

DEFINÍCIÓ

Legyen $x \in [0,1]$ és írjuk fel harmados törtként: $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,x} 3^{-i}$. Jelölje N_x azt a legkisebb i-t, amire $a_{i,x} = 1$ ebben a felírásban, illetve $N_x = \infty$, ha nincs ilyen index.

Definíció

Cantor függvénynek nevezzük azt a $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$G(x) = \frac{1}{2^{N_x}} + \sum_{i=1}^{N_x - 1} \frac{a_{i,x}}{2^i}.$$

Szokás még Cantor–Lebesgue függvénynek, vagy az ördög lépcsőjének nevezni.

A definíciót kiterjeszthetjük minden valósra, úgy hogy $x < 0$ estén 0, $x > 1$ esetén 1 a függvény értéke.

Tulajdonságok

1. A definíció nem függ a harmados felbontás nem-egyértelműségtől.
2. A Cantor-halmazon az első tag kiesik.
3. G folytonos, növekvő.
4. A $[0,1] \setminus C$ halmaz mindegyik intervallumán konstans.
5. G deriváltja majdnem mindenütt zérus.
6. A Cantor-halmazt a $[0,1]$-re képezi.
7. Ha $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ növekvő függvény, $F(\frac{x}{3}) = \frac{F(x)}{2}$ továbbá $F(1-x) = 1 - F(x)$, akkor F a Cantor függvény.