- $0/6$:

  $<$

$\mu(V) = \inf\{\mu(V) : V \text{ nyílt, } A \subset V\}$

  $>$

$\mu(V) = \sup\big\{\mu(K) : K \text{ kompakt, } K \subset V\big\}$

- $0/9$:

  $<$

$$\int_A div\, f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_B \big\langle f(x), \mathbf{n}(x,A)\big\rangle\, d\chi^{n-1}(x)$$

  $>$

$$\int_A \mathrm{div}\ f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_B \big\langle f(x), \mathbf{n}(x,A)\big\rangle\, d\chi^{n-1}(x)$$

- $16/7$:

  $<$

halmazok, akkor indukcióval

$$\mu\big(T \cap (\cup_{i=1}^{j} A_i)\big) = \sum_{i=1}^{j} \mu(T \cap A_i).$$

  $>$

halmazok, akkor indukcióval

$$\mu\big(T \cap (\cup_{i=1}^{j} A_i)\big) = \sum_{i=1}^{j} \mu(T \cap A_i). \tag{2}$$

- $16/-9$:

  $<$

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(B_j), \quad \text{ahol} \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i.$$

Ha indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\mu(B_j) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i),$$

akkor határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk. De $B_{j+1} \cap A_{j+1} = A_{j+1}, B_{j+1} \setminus A_{j+1} = B_j$, innen

$$\mu(B_{j+1}) = \mu(A_{j+1}) + \mu(B_j).$$

$>$

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{j} A_i).$$

Mivel (2) miatt

$$\mu(\cup_{i=1}^{j} A_i) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i),$$

határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk.

- $24/-4$:

$<$

mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

* **1.3.16. Feladat [19].** Legyen μ olyan véges Radon-mérték az X teljes metrikus

$>$

de pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

* **1.3.16. Feladat [19].** Legyen μ olyan nem nulla véges Radon-mérték az X teljes metrikus

- $30/-1$:

$<$

de nem Borel-halmaz.

$>$

de nem Borel-halmaz.

* **2.1.24. Feladat [15].** Adjunk meg olyan részhalmazát $[0,1]$-nek, amelynek Lebesgue külső mértéke 1, de a racionális számok feletti lineáris burka nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmazt.

- $33/4$:

$<$

2.2.8. Feladat [9]. Legyen $\{x_n\}$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és

$>$

2.2.8. Feladat [9]. Legyen x_n a racionális számok egy sorozatba rendezése, és

- $41/-9$:

$<$

$$\mu_U(C_1 \cap C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

$>$

$$\mu_U(C_1 \cup C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

- 42/4 :

$<$

A szorzattér azon φ függvényei, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt

$>$

A szorzattér azon φ elemei, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt

- 42/15 :

$<$

és a jobb oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1 + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes induk

$>$

és a bal oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes induk-

- 47/18 :

$<$

$(f \mid B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

$>$

$(f \mid B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

$\rightarrow$ **3.1.13. Feladat [10].** Adjunk meg olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényt, amelynek semmilyen 1 mértékű $A \subset [0,1]$ halmazra vett megszorítása sem folytonos.

- 52/−0 :

$<$

$>$

* **3.2.21. Definíció.** Az X topologikus teret az Y topologikus térbe képező függvény *Baire-függvény*, ha benne van az összes olyan függvényosztályban, amely tartalmazza a folytonos függvényeket és nem vezet ki belőle a pontonkénti határérték képzése. Nyilván a Baire-függvények mind Borel-függvények. Legyen $\mathcal{B}_0(X;Y)$ az X-et Y-ba képező folytonos függvények osztálya, és minden $\alpha > 0$ rendszámra $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ az összes olyan függvények osztálya, amelyek előállnak valamely $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(X;Y)$, $\beta_n < \alpha$ függvénysorozat pontonkénti határértékeként.

* **3.2.22. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ osztályok egyesítése az összes α megszámlálható rendszámra a Baire-függvények osztálya, így ha α nem megszámlálható rendszám, akkor $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ a Baire-függvények osztálya.

* **3.2.23. Feladat [9].** Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ valós értékű Baire-függvények az X topologikus téren, és $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Baire-függvény. Mutassuk meg, hogy

$$x \mapsto g\big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\big)$$

is Baire-függvény.

* **3.2.24. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy ha X metrikus tér, akkor az X-et $\mathbb{R}$-be képező Baire-függvények osztálya megegyezik a Borel-függvények osztályával.

* **3.2.25. Feladat** [**16**]**.** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ helyett egy Y szeparábilis metrikus térbe képező függvények osztályára az előző feladat állítása pontosan akkor marad érvényben, ha Y minden véges részhalmaza minden $\varepsilon > 0$-ra benne van $\mathbb{R}$ egy folytonos képének az ε-környezetében.

* **3.2.26. Feladat** [**20**]**.** Mutassuk meg, hogy minden α megszámlálható rendszámra

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbb{R};\mathbb{R}) \setminus \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta(\mathbb{R};\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

- $54/-6$:

$<$

alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folyonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha

$>$

alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha

- $57/-3$:

$<$

(5) ha $f \le g$ és $\int f\,d\mu > -\infty$ vagy $\int g\,d\mu < \infty$, akkor $\int f \le \int g$;

$>$

(5) ha $f \le g$ és $\int f\,d\mu > -\infty$ vagy $\int g\,d\mu < \infty$, akkor $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$;

- $60/9$:

$<$

Igaz-e a megfordítás?

$>$

Igaz-e a megfordítás?

$\rightarrow$ **4.2.11.1. Feladat** [**7**]**.** Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy σ-véges halmazon kívül nulla.

- $61/2$:

$<$

beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \le \int |f|$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j \overline{f}_j(x) \le |y|\big|f(x)\big|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int \overline{f}_j \le |y| \int |f|.$$

$>$

beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \le \int |f|$. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x) \le |y| \big| f(x) \big|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \int f_j \le |y| \int |f|.$$

- $61/{-12}$:

$<$

$$S(s) = \sum_{j=1}^{n} y_j \mu X(s = y_j).$$

Nyilván $S(s_n) \le S\big(|s_n|\big) = \int |s_n|$. Az X-en majdnem mindenütt értelmezett Y-beli értékű mérhető függvényt

$>$

$$S(s) = \sum_{j=1}^{n} \mu X(s = y_j) y_j.$$

Nyilván $\big|S(s)\big| \le S\big(|s|\big) = \int |s|$. Az X-en majdnem mindenütt értelmezett Y-beli értékű mérhető függvényt

- $62/{-14}$:

$<$

4.3.5. Majoráns kritérium. Ha f majdnem mindenütt értelmezett, mérhető

$>$

4.3.5. Majoráns kritérium. Ha f majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű mérhető

- $62/{-4}$:

$<$

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, a

$>$

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, az f_n-ek és az f értékkészlete egy szeparábilis altérben marad, és a

- $66/{-11}$:

$<$

és mi a határértékük:

$>$

és mi a határértékük (x_n-ben n nem nulla elem van):

- $66/-1$:

$<$

hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en, akkor a tartalmazás valódi.

$>$

hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en, akkor a tartalmazás valódi, és $\mathbb{L}^{\infty}_{\mathbb{K}}(\mu) \neq \cap_{1\leq p<\infty}\mathbb{L}^{p}_{\mathbb{K}}(\mu)$.

$\rightarrow$ **4.4.12.1. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg mérhető függvények pontonkénti, egyenletesen, $\mathbb{L}^2$-normában, majdnem mindenütt és mértékben való konvergenciája között a kapcsolatot.

- $67/11$:

$<$

* **4.4.18. Feladat [9].** Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén esetén $\mathbb{L}^{p}_{\mathbb{K}}(\mu)$

$>$

* **4.4.18. Feladat [9].** Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén $\mathbb{L}^{p}_{\mathbb{K}}(\mu)$

- $69/-13$:

$<$

$$\begin{aligned} A_k(x) &= m_i, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k), \\ F_k(x) &= M_i, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k) \end{aligned}$$

$>$

$$\begin{aligned} A_k(x) &= m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k), \\ F_k(x) &= M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad \text{ha} \quad x_{i-1} < x \leq x_i \quad (1 \leq i \leq n_k) \end{aligned}$$

- $69/-2$:

$<$

$1/k < \delta$ és $x \in (x_i, x_{i+1})$ valamely $1 \leq i \leq n_k - 1$-re, akkor $(x_i, x_{i+1}] \subset (x-\delta, x+\delta)$, így

$>$

$1/k < \delta$ és $x \in (x_{i-1}, x_i)$ valamely $1 \leq i \leq n_k$-ra, akkor $[x_{i-1}, x_i] \subset (x-\delta, x+\delta)$, így

- $70/-11$:

$<$

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

$\rightarrow$ **4.5.6. Feladat [2].** Határozzuk meg $[0,1]$-en a racionális számok karakterisztikus függvényének Riemann- és Lebesgue-integrálját.

$>$

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

- 71/−1 :

$<$

nem mindenütt folytonos függvénnyel?

$>$

nem mindenütt folytonos függvénnyel?

* **4.5.16. Feladat [10].** Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, $0 < c < \lambda(A)$. Mutassuk meg, hogy ha f integrálja az A tetszőleges c mértékű részhalmazán 0, akkor f majdnem mindenütt nulla.

* **4.5.17. Feladat [11].** Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, amelynek integrálja 0. Mutassuk meg, hogy $0 \le c \le \lambda(A)$ esetén van olyan $B \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $\lambda(B) = c$ és a B-n az integrál szintén nulla.

- 75/14 :

$<$

egy σ-véges mértéktér, λ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en, $f : X \to [0, \infty]$ mérhető függvény, és

$>$

egy mértéktér, λ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en, $f : X \to [0, \infty]$ mérhető függvény, és

- 79/10 :

$<$

hogy $\lambda^n\big(\tau(B)\big) = c_\tau \lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \in \mathbb{R}^n$-re is

$>$

hogy $\lambda^n\big(\tau(B)\big) = c_\tau \lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \subset \mathbb{R}^n$-re is

- 80/−1 :

$<$

$\lambda(B)\lambda(C) > 0.$

$>$

$\lambda(B)\lambda(C) > 0.$

* **5.2.12. Feladat [18].** Konstruáljunk olyan valós függvényt, amely grafikonjának bármely egységnégyzetbe eső része 1 külső mértékű halmaz.

- 81/−4 :

$<$

Létezik továbbá egy olyan φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

$>$

Létezik továbbá egy olyan X-en értelmezett φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

- 81/−2 :

$<$

A φ függvény μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik

$>$

A φ függvény μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik X-en értelmezett

- 91/6 :

$<$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelelő feltételek mellett —

$>$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelő feltételek mellett —

- 116/2 :

$<$

8.3.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon *abszolút*

$>$

8.3.1. Definíció. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egy $f : I \to \mathbb{C}$ függvényt *abszolút*

- 116/6 :

$<$

8.3.2. Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ abszolút folytonos egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor f teleinek?

$>$

8.3.2. Tétel. Ha egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon $f : I \to \mathbb{C}$ abszolút folytonos, akkor f

- 118/−9 :

$<$

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$>$

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$

- 160/5 :

$<$

$$\operatorname{dist}(f(x), f(y)) \leq M \operatorname{dist}(x, y)$$

$>$

$$\operatorname{dist}\big(f(x), f(y)\big) \leq M \operatorname{dist}(x, y)$$

- 161/−12 :

<

homeomorf

>

homeomorf

11.1.15.1. Feladat [**5**]**.** Van-e olyan, nyílt intervallummal homeomorf térgörbe, amely értékkészletének lezártja az egész tér?

- 161/−1 :

<

kategóriájú

>

kategóriájú

* **11.1.20.1. Feladat** [**12**]**.** Konstruáljunk a számegyenesen olyan egymással homeomorf A és B halmazokat, amelyekre A első, B második kategóriájú.

- 162/9 :

<

függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

>

függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

* **11.1.24. Feladat** [**13**]**.** Mutassuk meg, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvény deriváltjának folytonossági helyei mindenütt sűrűek (a, b)-ben.

- 162/−3 :

<

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 1, 2, \ldots ; k = 0, 1, 2, \ldots , 2^n \right\}.$$

>

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 0, 1, 2, \ldots ; k = 0, 1, 2, \ldots , 2^n \right\}.$$

- 166/20 :

<

A következő tétel az egység felbontásának Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

>

A következő tétel az egység felbontásának lokálisan kompakt Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

- 167/14 :

  $<$

  Az egységelem bármely W környezete tartalmazza az egységelem olyan V környeze-

  $>$

  Az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelem olyan V környeze-

- 175/14 :

  $<$

(6) $\left|f(x) - g(x)\right| \leq (2/3)^i$, ha $x \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

  $>$

(6) $\left|f(x) - g_i(x)\right| \leq (2/3)^i$, ha $x \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

- 177/6 :

  $<$

pedig X^*-ot írunk; X^*-ot az X *konjugált ter*ének nevezzük.

  $>$

pedig X^*-ot írunk; X^*-ot az X *konjugált ter*ének vagy *duális ter*ének nevezzük.

- 183/−16 :

  $<$

[29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.

  $>$

[29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

- 184/−1 :

  $<$

[50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.

  $>$

[50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its applications I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.

- 194/15 :

  $<$

Peano, Giuseppe (1887–1956)

  $>$

Peano, Giuseppe (1858–1932)