Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: Pálfi József vezérigazgató
Raktári szám: 42580
Felelős főszerkesztő: Palojtay Mária
Felelős szerkesztő: Balassa Zsófia
Műszaki szerkesztő: Görög Istvánné
Terjedelem: 17,88 (A/5) ív
Első kiadás, 2002
A szedés az $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával készült.

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

Járai Antal

MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Felsőoktatási tankönyv

A könyv az Oktatási Minisztérium támogatásával, a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Felsőoktatási Tankönyv- és Szakkönyv-támogatási program keretében jelent meg.

A könyv bírálói

FRIDLI SÁNDOR

egyetemi docens
a matematikatudomány kandidátusa, habil.

GILÁNYI ATTILA

egyetemi docens
PhD., habil.

ISBN 963 19 3273 7

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

A mérték fogalma egyidős a matematikával: a matematika alapjait a hosszúság-, terület- és térfogatmérések hívták életre. Később a különböző mértékek, a hosszúság, terület, térfogat, ívhossz és felszín fogalmát, legalábbis bizonyos egyszerűbb alakzatokra, a görög matematikusok pontosan definiálták. Arkhimédész görbe vonalakkal határolt síkidomok (például parabolaszegmens) területét és görbült felületű testek (például gömb, henger) felszínét definiálta és határozta meg, lényegében integrálszámítás segítségével.

A mérték fogalma szoros kapcsolatban áll az integrál fogalmával. Minden integrálfogalom lényegében a következőképpen épül fel: az integrációs tartományt kis részekre osztjuk, majd minden kis rész mértékét megszorozzuk az integrálandó függvénynek ezen a részen felvett értékeit közelítő értékkel, és az így nyert szorzatok összegének vesszük a határértékét, miközben a beosztás valamilyen értelemben „finomodik".

A geometriai és analízisbeli alkalmazásokon kívül a valószínűségszámítás is a mértékelméleten alapszik. A valószínűség tulajdonképpen egy eseményeken értelmezett mérték.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen természetes feltételeknek kell egy halmaz bizonyos részhalmazain értelmezett halmazfüggvénynek eleget tennie, hogy mértéknek nevezhessük. Három természetes feltétel a következő:

(1) bármely halmaz mértéke nemnegatív valós szám, esetleg $+\infty$;

(2) ha az $\mathcal{A}$ véges halmazrendszer lefedi az A halmazt (azaz az $\mathcal{A}$-beli halmazok egyesítése tartalmazza A-t), akkor az A mértéke nem lehet nagyobb, mint az $\mathcal{A}$-beli halmazok mértékeinek összege;

(3) véges sok, páronként diszjunkt halmaz egyesítésének a mértéke a mértékeik összege.

Ezen három elengedhetetlen feltételen kívül kívánatos még, hogy minél több halmaznak legyen mértéke, a mérhető halmazok köréből ne vezessenek ki az egyszerű halmazműveletek, és hogy a mérhető halmazok lehetőleg szoros kapcsolatban legyenek a topológiával, ha van az alaphalmazon topológia.

A sokszögek területének, illetve a poliéderek térfogatának egyszerű fogalmát először Giuseppe Peano olasz és Camille Jordan francia matematikusok terjesztették ki a sík, illetve a tér részhalmazainak egy nagyobb osztályára (Peano–Jordan-mérték). Ennek alapgondolata, példaként a síkban elmondva, a következő: egy síkbeli korlátos halmaz mértéke legyen az őt lefedő, véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos alsó korlátja, belső mértéke pedig a benne fekvő, véges sok sokszögből álló alakzatok területének pontos felső korlátja. Ha e két szám egyenlő, akkor a halmazt mérhetőnek, a belső és külső mérték közös értékét pedig a halmaz mértékének nevezzük.

Ez a mértékfogalom egyszerű, de több célra, elsősorban az integrálás céljára nem teljesen megfelelő. Később a mértékfogalmat René Baire és Émile Borel francia matematikusok továbbfejlesztették, de a döntő lépést Henry Leon Lebesgue, a párizsi egyetem tanára tette meg az 1900-as évek elején. Lebesgue ismert mértékű halmazokkal való véges lefedések helyett megszámlálható sok ismert mértékű halmazzal való lefedéseket vizsgált. A számegyenesen és az euklideszi terekben egy, a Peano–Jordan-mértéknél jóval általánosabb és kényelmesebben kezelhető mértéket vezetett be, amit később róla Lebesgue-mértéknek neveztek el, valamint bevezette a Lebesgue-integrál fogalmát, és bebizonyított sok fontos, ezekre a fogalmakra vonatkozó tételt. A Lebesgue-mérték eleget tesz az előzőekben kirótt feltételeknek, sőt, a (2) és (3) feltételekben a „véges" szó a „megszámlálható" szóval helyettesíthető.

Az évek során egyre nyilvánvalóbbakká váltak az új mérték- és integrálfogalom előnyei: a jóval nagyobb általánosság, az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, az integrál- és differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Az új elmélet új lendületet adott a Fourier-sorok elméletének, megvetette a modern valós függvénytan alapjait, és a funkcionálanalízis egyik alapkövévé vált. A Lebesgue-féle elméletet az elsők között alkalmazta Riesz Frigyes a funkcionálanalízis alapjait megteremtő munkáiban. A Haar Alfréd által 1933-ban bevezetett Lebesgue-típusú mérték, az úgynevezett Haar-mérték alapvető jelentőségű a topologikus csoportok elméletében. A modern geometria egyes fejezetei elképzelhetetlenek a Lebesgue-féle mértékelmélet nélkül. A valószínűségszámítás alapjait Andrej Nyikolajevics Kolmogorov a mértékelmélet segítségével adta meg, ezzel a valószínűségszámítás a mértékelmélet egyik legfontosabb felhasználási területévé vált.

Ezen könyv célja kettős: egyrészt tartalmazza a matematikus és alkalmazott matematikus hallgatók számára a II. évben tartott előadások anyagát, másrészt igyekszik összefoglalni mindazokat az ismereteket, amelyeket a többi tárgy felhasznál. A kettős célnak megfelelően a könyv két lépésben történő tanulmányozását javasoljuk. Először a csillaggal jelzett részek kihagyhatók. Ezeket, mivel nem alsóbb éves hallgatóknak szólnak, tömörebben fogalmaztuk. Mivel még a törzsanyagot tartalmazó rész is meglehetősen tömör, nem ajánlatos a témakörrel először ismerkedőknek a könyvet előadás helyett használni: az előadó nagyon sokat segíthet a nehezebb részek részletes és szemléletes magyarázatával. A könyv feladatokat is tartalmaz, ezek elsősorban a törzsanyaghoz kapcsolódnak. A feladatoknál megadott számok a megoldáshoz szükséges időről adnak tájékoztatást: eggyel nagyobb szám kétszer annyi időt jelent. Persze, minden ilyen skála nagyon relatív. A nagyon fontos feladatokat $\rightarrow$ jelzi.

Könnyen előfordulhat, hogy a tárgy előadója még az első lépésként javasolt anyagot is túl mélynek találja, és egyszerűbb tárgyalásmódot szeretne választani. Ilyen esetben a következőket javasoljuk:

Elsősorban azzal egyszerűsíthetjük az anyagot, hogy általános topologikus terek helyett metrikus tereket használunk, esetleg csak $\mathbb{R}^n$-et. A Radon-mérték fogalmának elhagyása inkább csak szükségtelen ismétlésekhez vezet. Ezt csak akkor ajánljuk, ha csak az egydimenziós Lebesgue-mértékkel kívánunk foglalkozni.

Másodsorban, ha nem kívánunk abszolút folytonos függvényekkel foglalkozni, a Newton–Leibniz-formula, a helyettesítéses és parciális integrálás szabálya megfogalmazható lokálisan Lipschitz-, Lipschitz- vagy megszámlálható sok pont kivételével differenciálható folytonos függvényekre is.

Végül egyszerűsíti, de nem rövidíti a mérhető függvények tárgyalását, ha csak bővített valós értékű függvényekre szorítkozunk. Ekkor az $X(f > a)$ típusú nívóhalmazok mérhetőségével definiálhatjuk a függvények mérhetőségét. A $\mathbb{C}$-, $\mathbb{R}^n$-, $\mathbb{C}^n$-beli értékű függvények ekkor a koordinátafüggvényekre való hivatkozással tárgyalhatók. Sajnos, ez a felépítés nem elég általános, és például nem illik bele a helyettesítéses és parciális integrálással foglalkozó rész néhány, a valószínűségszámításban fontos szerepet játszó tétele.

A könyvet függelék egészíti ki, amely a felhasznált, főleg topológiai ismeretek tömör összefoglalása. Minden felhasznált fogalom definíciójának helye megtalálható a mutatóban. Csak felhasznált, de nem definiált fogalmaknál egy magyar nyelvű irodalmi hivatkozást is megadtunk, ami halmazelméleti fogalmak esetén Halmos és Sigler [13], lineáris algebrai fogalmak esetén Halmos [14], algebrai fogalmak esetén Fried [9] és analízis esetén Rudin [40] könyve.

Az általánosan szokásos jelöléseket használjuk. A nullát is természetes számnak tekintjük, így az *egész szám*ok halmaza $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$; a *pozitív természetes szám*ok halmazát $\mathbb{N}^+$ jelöli. Az összes, X valamely részhalmazát Y-ba képező függvények osztályát $X \to Y$ jelöli. Így $f \in X \to Y$ azt jelenti, hogy f az X valamely részhalmazát Y-ba képező függvény, míg $f : X \to Y$ azt jelenti, hogy f az egész X-en értelmezett Y-beli értékű függvény. Növekvő, illetve csökkenő sorozat konvergenciájára az $x_n \uparrow x$, illetve $x_n \downarrow x$ jelölést alkalmazzuk. Szorzatokra a $\prod$ jelölést használjuk. A *differenciálás* operátorára néha d/dx vagy más hasonló jelölést használunk.

Az irodalomjegyzék segítségére lehet azoknak, akik más felépítésekkel vagy nagyobb anyaggal kívánnak megismerkedni. Egyszerű bevezetést ad a tanár szakos hallgatók igényeihez szabott Daróczy [5] jegyzet. Magyar nyelven elsősorban a jóval nagyobb anyagot felölelő Laczkovich [26] jegyzetet, illetve Szőkefalvi-Nagy [45] könyvet, Halmos [15] híres könyvét, a tengernyi idegen nyelvű irodalomból pedig Federer [8] munkáját ajánljuk.

A könyv első változata (jegyzetként) 1985-ben készült el és 1988-ban és 1992-ben is megjelent. A jelen kiadás némileg kibővült és feladatokat is tartalmaz. Mindkét változat elkészítésében sok támogatást, hasznos tanácsot kaptam kollégáimtól, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Analízis Tanszéke dolgozóitól, közülük is elsősorban Daróczy Zoltántól és Szabó Györgytől†, a jegyzet lektoraitól, valamint Székelyhidi Lászlótól. Segítségüket nagyon köszönöm. Ugyancsak köszönettel tartozom számos kollégának jelenlegi munkahelyemen, az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, különösen Czách Lászlónak, Schipp Ferencnek és Simon Péternek. Köszönöm könyvem lektorainak, Fridli Sándornak és Gilányi Attilának alapos, kritikus és lelkiismeretes lektori munkájukat.

Köszönöm feleségemnek és gyermekeimnek, hogy türelemmel viselték, hogy könyvírással töltöttem számos hétvégét és szünidőt. A szedés az $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX Járai Zoltán és a szerző által írt magyar változatával készült.

Végezetül köszönöm a Nemzeti Tankönyvkiadónak, hogy vállalta könyvem megjelentetését, különösen Palojtay Mária főszerkesztő, Balassa Zsófia felelős szerkesztő és Görög Istvánné műszaki szerkesztő segítőkészségét. Köszönetem fejezem ki a Felsőoktatási Tankönyvpályázatok Kuratóriumának a könyv kiadásához nyújtott támogatásáért.

Budapest, 2002. március 8. *Járai Antal*

A jelen elektronikus kiadás a Nemzeti Tankönyvkiadónál megjelent könyv alapján készült, lényegében csak a megtalált hibák kijavításával.

Budapest, 2021. október 23. *Járai Antal*

1. MÉRTÉKTEREK, MÉRTÉKEK

Ebben a fejezetben a mértékeket és a mértéktereket tárgyaljuk. Ezek a fogalmak természetesen eleget tesznek a bevezetésben megszabott feltételeknek. Foglalkozunk a mértékterek egyszerű tulajdonságaival és azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehet mértékteret konstruálni. Konkrét mértékterek megismerésére a következő fejezetben kerül sor.

1.1. Mértékterek

1.1.1. Bővített valós számok összege. Emlékeztetünk arra, hogy a *bővített valós szám*ok halmazán az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt értjük, ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $-\infty$ és $+\infty$ pedig szimbólumok ($+\infty$ helyett általában ∞-t írunk), a nyilvánvaló természetes rendezéssel, a rendezésből származó topológiával és az algebrai műveletekkel, amelyeket akkor definiálunk, ha ez folytonosan lehetséges. (Például $\infty + \infty = \infty$, $x \cdot \infty = \infty$, ha $x > 0$, de $\infty - \infty$ és $0 \cdot \infty$ nincs definiálva.) Néhányszor $0 \cdot \infty$-t célszerű 0-nak definiálni. Ha ezt a megállapodást használjuk, jelezni fogjuk.

Ha I egy halmaz, és c_i nemnegatív bővített valós szám minden $i \in I$-re, akkor

$$\sum_{i \in I} c_i$$

a következőképpen van definiálva: 0, ha I üres halmaz, a nyilvánvaló módon, ha I véges, és a $\sum_{i \in I^*} c_i$ összegek pontos felső korlátjaként, ahol I^* befutja I véges részhalmazait, ha I tetszőleges. Megjegyezzük, hogy ha $I \subset \mathbb{N}$, akkor

$$\sum_{i \in I} c_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in I_n} c_i, \quad \text{ahol} \quad I_n = \{i : i \in I,\ i \leq n\}.$$

Ha a c_i-k tetszőleges bővített valós számok, akkor a

$$\sum_{i \in I} c_i = \sum_{\substack{i \in I \\ c_i > 0}} c_i - \sum_{\substack{i \in I \\ c_i < 0}} (-c_i)$$

összefüggéssel definiáljuk *összeg*üket, ha a jobb oldalon a kivonás elvégezhető (azaz nem $\infty - \infty$ alakú).

A bevezetésben említett elvek szerint kívánatos, hogy a mérhető halmazok köréből ne vezessenek ki a szokásos halmazműveletek. Ilyen halmazrendszerre vonatkozik az alábbi definíció:

1.1.2. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *σ-algebrá*nak nevezzük X-en, az $(X, \mathcal{A})$ párt pedig *mérhető tér*nek, ha teljesülnek a következő feltételek:
(1) $X \in \mathcal{A}$;
(2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(3) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$, akkor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
Ha nem okozhat félreértést, akkor $\mathcal{A}$ elemeit egyszerűen *mérhető halmaz*oknak nevezzük. Nyilván $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$.

A következő definícióra épül az egész mértékelmélet.

1.1.3. Definíció. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktér*nek, μ-t pedig *mérték*nek nevezzük X-en, ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, μ pedig egy $\mathcal{A}$-n értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény az alábbi tulajdonságokkal:
(1) $\mu(\emptyset) = 0$;
(2) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, 3 \dots)$ és az A_i halmazok (páronként) diszjunktak, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-}additivit\acute{a}s).$$

Ha $A \in \mathcal{A}$, a $\mu(A)$ számot az *A halmaz mértéké*nek nevezzük. Megjegyezzük, hogy *diszjunkt* halmazrendszer alatt mindig páronként diszjunkt halmazok rendszerét értjük.

1.1.4. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, és $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazaiból álló σ-algebra. Ha $A \in \mathcal{A}$, legyen $\mu(A)$ az A elemeinek száma (∞, ha A nem véges). Ekkor μ mérték, a *számláló mérték*.

Ennél a triviális példánál érdekesebb példákat a következő fejezetben fogunk mutatni.

1.1.5. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. A mértékteret *véges*nek nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$. Ha még az is teljesül, hogy $\mu(X) = 1$, akkor a mértékteret *valószínűségi mértéktér*nek, a mértéket pedig *valószínűségi mérték*nek nevezzük. Egy *$A \subset X$ halmazt σ-véges*nek nevezünk, ha lefedhető megszámlálható sok véges mértékű mérhető halmazzal. A *mértékteret (vagy a mértéket) σ-véges*nek nevezzük, ha az X halmaz σ-véges. A *mértéket (vagy a mértékteret) teljes*nek nevezzük, ha bármely mérhető és nulla mértékű halmaznak minden részhalmaza is mérhető.

1.1.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Ekkor $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbség-, valamint a megszámlálható unió- és metszetképzés.*

Bizonyítás.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

miatt $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a véges unióképzés. A

$$\bigcap_i A_i = X \setminus \Big(\bigcup_i (X \setminus A_i)\Big)$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Végül

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B).$$

1.1.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor*

(1) *mérhető halmazok véges, páronként diszjunkt rendszerére*

$$\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \qquad \textit{(additivitás);}$$

(2) *ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonitás); ha még $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(3) *mérhető halmazok bármely megszámlálható rendszerére*

$$\mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i) \qquad \textit{(σ-szubadditivitás);}$$

(4) *mérhető halmazok bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ sorozatára*

$$\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i);$$

(5) *mérhető halmazok egy szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ sorozatára, ha $\mu(A_1) < \infty$, akkor*

$$\mu(\cap_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

A (4) és (5) tulajdonságokat szokás a *mérték folytonosságá*nak nevezni.

Bizonyítás. (1) közvetlenül következik az 1.1.3. definícióból, $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots$ választással. (2) azon múlik, hogy A és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig B. (3) bizonyításához azt kell észrevenni, hogy $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)$, ha $i > 1$ jelöléssel $\cup_i A_i = \cup_i B_i$ és a B_i-k diszjunktak. (4) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a B_i-k diszjunktak, így

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{i=1}^\infty A_i) &= \mu(\cup_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \mu(B_i)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{i=1}^n B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(5)-öt megkapjuk, ha (2)-t és (4)-et alkalmazzuk a $B_i = A_1 \setminus A_i$ halmazokra.

1.1.8. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és $Y \in \mathcal{A}$. Ha

$$\mathcal{A}_Y = \{A : A \in \mathcal{A}, A \subset Y\}$$

és $\mu_Y = \mu|\mathcal{A}_Y$, akkor $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ nyilvánvalóan mértéktér. Ezt a mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér *Y-hoz tartozó alteré*nek nevezzük. Könnyű látni, hogy az altér teljes, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes volt.

$\to$ **1.1.9. Feladat** [**6**]. Adjuk meg egy háromelemű halmazon az összes σ-algebrát.

$\to$ **1.1.10. Feladat** [7]. Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is σ-véges mértéktérre.

1.1.11. Feladat [8]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B), \quad \text{ha} \quad A, B \in \mathcal{A}$$

eltérés $\mathcal{A}$-n.

1.1.12. Feladat [**9**]. Legyen X tetszőleges halmaz, $f : X \to [0, \infty]$ tetszőleges függvény, $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazainak osztálya, és legyen $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$, ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

1.1.13. Feladat [**12**]. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mérhető halmazok egy valószínűségi mértéktérben. Mutassuk meg, hogy ha a tér minden pontja legalább p halmazban benne van, akkor van olyan halmaz, amelynek mértéke legalább p/n.

1.2. Mértékek konstruálása, külső mértékek

Az előző pontban bevezettük a mértéktér fogalmát. Természetes kérdés, hogy hogyan lehet mértékteret konstruálni? Az 1.2.3. tételben megmutatjuk, hogy mértékteret könnyen kaphatunk úgynevezett külső mértékből. Hogyan kaphatunk külső mértéket? Gyakran előfordul, hogy már van bizonyos „előzetes mérték” fogalmunk egyszerű halmazokra (például, ha a síkbeli halmazokra akarunk területfogalmat bevezetni, a téglalapoknak már tudjuk, hogy mi a területe), vagy legalább valami becsléssel rendelkezünk az egyszerű halmazok „mértékére” vonatkozóan (például, ha térbeli, görbült felületdarab felszínét akarjuk definiálni, akkor tudjuk, hogy „elég kicsi” és így már „alig görbült” felületdarab felszíne, ha „nem nagyon hosszúkás”, akkor körülbelül az átmérője négyzetével arányos), és olyan külső mértéket, majd mértéket keresünk, amely ezzel az „előzetes mértékkel”, illetve becsléssel egybevág. Erre adnak lehetőséget az ebben a pontban tárgyalt tételek.

1.2.1. Definíció. Legyen X egy halmaz és legyen μ az X részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett nemnegatív bővített valós értékű függvény. A μ halmazfüggvényt *σ-szubadditív*nak nevezzük, ha bármely olyan $A \in \mathcal{H}$ halmaz és $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló A_i, $i \in I$ megszámlálható halmazrendszer esetén, amelyre $A \subset \cup_{i \in I} A_i$, teljesül, hogy

$\mu(A) \le \sum_{i\in I}\mu(A_i)$. *Külső mérték* alatt egy olyan nemnegatív bővített valós értékű σ-szubadditív halmazfüggvényt értünk, amely egy X halmaz összes részhalmazán van értelmezve.

A definíciót üres, illetve egyelemű I indexhalmazra alkalmazva kapjuk, hogy ha μ külső mérték X-en, akkor $\mu(\emptyset) = 0$, és ha $A \subset B \subset X$, akkor $\mu(A) \le \mu(B)$.

A külső mérték azon halmazok esetében hasznos, amelyeken additív, azaz amelyek közül két diszjunkt halmazt kiválasztva, azok egyesítésének külső mértéke a külső mértékeik összege. Ilyen halmazok egy rendszerét jelöli ki a következő definíció, amely az additivitást csak arra az egyszerű esetre követeli meg, amikor egy T halmazt egy A halmazzal két részre, $T \cap A$-ra és $T \setminus A$-ra „szétvágunk".

1.2.2. Definíció (Carathéodory). Legyen μ külső mérték X-en. Az A halmazt *μ-mérhetőnek* nevezzük, ha $A \subset X$ és

$$\mu(T) = \mu(T\cap A) + \mu(T\setminus A) \quad \text{minden } T \subset X\text{-re.} \tag{1}$$

A definíciót röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy az A halmaz μ-mérhető, ha „minden halmazt jól vág ketté". Mivel (1)-ben $\mu(T)$ sohasem lehet nagyobb, mint a jobb oldali összeg, (1) a következő feltétellel ekvivalens:

$$\mu(T) \ge \mu(T\cap A) + \mu(T\setminus A), \quad \text{ha } T \subset X \text{ és } \mu(T) < \infty. \tag{2}$$

1.2.3. Tétel. *Legyen μ külső mérték X-en. Ekkor a μ-mérhető halmazok $\mathcal{A}$ rendszere σ-algebra és μ megszorítása $\mathcal{A}$-ra teljes mérték.*

Ezt a mértéket a *μ-ből származó mérték*nek nevezzük. Általában, nem teljesen korrekt módon, ezt is μ-vel jelöljük.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $X \in \mathcal{A}$. Ha A μ-mérhető, akkor

$$\mu(T) = \mu(T\cap A) + \mu(T\setminus A) \qquad \text{minden } T \subset X\text{-re,}$$

de $T\cap(X\setminus A) = T\setminus A$ és $T\setminus(X\setminus A) = T\cap A$ miatt ez azt jelenti, hogy $X\setminus A$ is μ-mérhető. Ha most A és B μ-mérhetőek, akkor

$$\begin{aligned}\mu(T) &= \mu(T\cap A) + \mu(T\setminus A)\\ &= \mu(T\cap A) + \mu\big((T\setminus A)\cap B\big) + \mu\big((T\setminus A)\setminus B\big)\\ &\ge \mu\big(T\cap(A\cup B)\big) + \mu\big(T\setminus(A\cup B)\big),\end{aligned} \tag{1}$$

ha $T \subset X$, így $A\cup B$ μ-mérhető. Ebből indukcióval kapjuk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a véges unió- és metszetképzésre.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unióképzésre. Az eddig bizonyítottak és az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2\setminus A_1) \cup (A_3\setminus(A_1\cup A_2)) \cup (A_4\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3)) \cup \dots$$

összefüggés szerint elég megszámlálható végtelen sok diszjunkt μ-mérhető halmaz uniójáról megmutatni, hogy μ-mérhető. Vegyük észre, hogy (1)-ben egyenlőség áll, és így (1)-ből következik, hogy ha A, B diszjunktak és $T \subset A \cup B$, akkor

$$\mu\big(T \cap (A \cup B)\big) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap B),$$

az általános $T \subset X$ eset pedig erre visszavezethető. Ha $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt μ-mérhető halmazok, akkor indukcióval

$$\mu\big(T \cap (\cup_{i=1}^{j} A_i)\big) = \sum_{i=1}^{j} \mu(T \cap A_i). \tag{2}$$

Innen

$$\begin{aligned}\mu(T) &= \mu\big(T \cap (\cup_{i=1}^{j} A_i)\big) + \mu\big(T \setminus (\cup_{i=1}^{j} A_i)\big) \\ &\geq \sum_{i=1}^{j} \mu(T \cap A_i) + \mu\big(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)\big),\end{aligned}$$

amiből $j \to \infty$ határátmenettel

$$\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap A_i) + \mu\big(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)\big),$$

és a külső mérték σ-szubadditivitása miatt

$$\mu(T) \geq \mu\big(T \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)\big) + \mu\big(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)\big),$$

azaz az $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz μ-mérhető.

Most megmutatjuk, hogy ha $A_1, A_2, A_3, \ldots$ diszjunkt μ-mérhető halmazok, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Vegyük észre, hogy minden j természetes számra

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{j} A_i).$$

Mivel (2) miatt

$$\mu(\cup_{i=1}^{j} A_i) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i),$$

határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk.

Végül, ha $\mu(A) = 0$, akkor $T \cap A \subset A$ miatt $\mu(T \cap A) = 0$, így $T \supset T \setminus A$ miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \setminus A) = \mu(T \setminus A) + \mu(T \cap A),$$

azaz az A halmaz μ-mérhető, amiből következik a teljesség.

1.2.4. Tétel. *Legyen X egy halmaz, és ν az X részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény. Ha $B \subset X$, akkor legyen $\mu(B)$ az összes olyan $\sum_{i\in I}\nu(A_i)$ összegek pontos alsó korlátja, amelyekre I megszámlálható, $A_i \in \mathcal{H}$, ha $i \in I$ és $B \subset \cup_{i\in I}A_i$. (Emlékeztetünk rá, hogy $\sum_{i\in\emptyset}\nu(A_i) = 0$ és $\inf\emptyset = \infty$.) Ekkor μ külső mérték X-en, és $\mu(A) \le \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{H}$.*

μ-t a ν-*höz tartozó külső mérték*nek nevezzük.

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy a μ halmazfüggvény σ-szubadditív, azaz ha J megszámlálható, $B, B_j \subset X$ és $B \subset \cup_{j\in J}B_j$, akkor

$$\mu(B) \le \sum_{j\in J}\mu(B_j).$$

Ha a jobb oldalon álló összeg ∞, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Tegyük fel, hogy a jobb oldalon álló összeg véges, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Nyilván feltehetjük, hogy $J \subset \mathbb{N}$. Ekkor $\mu(B_j)$ definíciója miatt minden $j \in J$-re van olyan I_j megszámlálható halmaz és olyan $A_{i,j} \in \mathcal{H}$, $i \in I_j$ megszámlálható halmazrendszer, hogy

$$B_j \subset \bigcup_{i\in I_j}A_{i,j} \quad \text{és} \quad \sum_{i\in I_j}\nu(A_{i,j}) \le \mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ebből, mivel

$$B \subset \bigcup_{j\in J}B_j \subset \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I_j}A_{i,j},$$

kapjuk, hogy

$$\mu(B) \le \sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\nu(A_{i,j}) \le \sum_{j\in J}\left(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \le \sum_{j\in J}\mu(B_j) + 2\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, az egyenlőtlenségnek ε nélkül is fenn kell állnia.

Az, hogy $\mu(A) \le \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{H}$, nyilvánvaló.

Ezzel a konstrukcióval kapcsolatban két kérdés merül fel. Az első, hogy μ mikor lesz kiterjesztése ν-nek, azaz, hogy milyen feltételek mellett teljesül, hogy $\mu(A) = \nu(A)$ minden $A \in \mathcal{H}$-ra? Erre rögtön választ ad a következő tétel:

1.2.5. Tétel. *Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, μ pontosan akkor kiterjesztése ν-nek, ha az σ-szubadditív.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyításához egyrészt ha $A \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(A) \le \nu(A)$, másrészt viszont a ν σ-szubadditivitása miatt minden $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in I$ megszámlálható halmazrendszerre, amely lefedi A-t, teljesül, hogy $\nu(A) \le \sum_{i\in I}\nu(A_i)$. Így $\nu(A)$ alsó korlátja az ilyen összegeknek, azaz $\nu(A) \le \mu(A)$.

A másik kérdés, hogy milyen feltételek mellett lesznek a $\mathcal{H}$-beli halmazok mind μ-mérhetőek? Erre ad választ a következő tétel:

1.2.6. Tétel. *Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor μ-mérhető, ha*

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \textit{minden } A \in \mathcal{H}\textit{-ra, amelyre } \nu(A) < \infty. \tag{1}$$

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló $\mu(A) \leq \nu(A)$ miatt. Az elégségesség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy ha $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$, akkor

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $A_i \in \mathcal{H}$, $i \in I$ olyan megszámlálható halmazrendszer, amelyre

$$T \subset \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{és} \quad \mu(T) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \nu(A_i).$$

Ekkor

$$\mu(T) + \varepsilon \geq \sum_{i \in I} \nu(A_i) \geq \sum_{i \in I} \mu(A_i \cap B) + \sum_{i \in I} \mu(A_i \setminus B) \geq \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

1.2.7. Definíció. Az 1.2.4. tétel jelöléseivel, azt mondjuk, hogy ν *premérték*, ha

(1) σ-szubadditív;

(2) $\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$ minden $A, B \in \mathcal{H}$-ra.

Megjegyezzük, hogy ha a $\mathcal{H}$ halmazosztály speciális tulajdonságokkal rendelkezik, például zárt a metszet- és különbségképzésre, akkor a fenti két feltétel más, ekvivalens feltételekkel helyettesíthető.

1.2.8. Következmény. *1.2.4. jelöléseivel, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz μ-mérhető legyen $\mu(A) = \nu(A)$ mértékkel, az, hogy ν premérték legyen.*

1.2.9. Megjegyzés. Ha $(X, \mathcal{B}, \nu)$ egy mértéktér és a fenti konstrukciót alkalmazzuk ν-re, akkor a kapott μ külső mértékre nézve mérhető halmazok osztályát $\mathcal{A}$-val jelölve, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, amelyre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(B) = \nu(B)$, ha $B \in \mathcal{B}$. Ezt a mértékteret az $(X, \mathcal{B}, \nu)$ *mértéktér természetes kiterjesztésé*nek nevezzük. Ennek létezése mutatja, hogy nem jelentené az általánosság lényeges megszorítását, ha tetszőleges mértékterek helyett csak teljes mértékterekkel vagy csak külső mértékekkel dolgoznánk. Ráadásul külső mértékekkel dolgozni kényelmesebb is lenne. Hogy mégsem ezt tesszük, annak oka az, hogy ez ma még nem terjedt el általánosan.

1.2.10. Feladat [5]. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mu(A)$ legyen 0, ha A üres, X egyéb részhalmazaira pedig legyen 1. Mutassuk meg, hogy μ külső mérték, és keressük meg a μ-mérhető halmazokat.

1.2.11. Feladat [**6**]. Igazoljuk, hogy ha μ külső mérték, $B \subset A$, a B halmaz mérhető és $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, akkor A is mérhető.

1.2.12. Feladat [**8**]. Legyen μ külső mérték X-en, $Y \subset X$ és $(\mu\lfloor Y)(A) = \mu(Y \cap A)$, ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy $\mu\lfloor Y$ külső mérték X-en.

1.2.13. Feladat [**8**]. Legyen μ külső mérték X-en, $f : X \to Y$ egy tetszőleges függvény és $(f_{\#}\mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$, ha $B \subset Y$. Mutassuk meg, hogy $f_{\#}\mu$ külső mérték Y-on.

1.2.14. Feladat [**15**]. Legyen μ külső mérték X-en. Azt mondjuk, hogy B a *μ-burka A-nak*, ha $A \subset B \subset X$, a B halmaz μ-mérhető és $\mu(T \cap A) = \mu(T \cap B)$ minden μ-mérhető T halmazra. A μ külső mértéket *reguláris*nak nevezzük, ha minden $A \subset X$-hez van olyan B mérhető halmaz, amelyre $A \subset B$ és $\mu(A) = \mu(B)$. Igazoljuk, hogy ha μ reguláris külső mérték, akkor

(1) ha $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, akkor
$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i);$$

(2) ha $\mu(A) < \infty$, akkor A-nak van μ-burka;

(3) ha az $A \cap B$ halmaz μ-mérhető és $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) < \infty$, akkor az A és B halmazok μ-mérhetőek;

(4) ha $f : X \to Y$ egy függvény, $\mu(X) < \infty$ és a C halmaz $f_{\#}\mu$-mérhető, akkor az $f^{-1}(C)$ halmaz μ-mérhető;

(5) ha $\mu(S) < \infty$, akkor egy halmaz pontosan akkor $\mu\lfloor S$-mérhető, ha előáll $(B \cap S) \cup C$ alakban, ahol B μ-mérhető és $C \subset X \setminus S$.

Végül mutassuk meg, hogy

(6) ha μ nem reguláris, akkor az (1)–(5) állítások egyike sem feltétlenül teljesül.

1.2.15. Feladat [**12**]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy a μ-höz tartozó külső mérték
$$\mu^*(B) = \inf\big\{\mu(A) : B \subset A,\ A \in \mathcal{A}\big\},$$
ha $B \subset X$. Emellett néha használatos a *μ-höz tartozó belső mérték*, amelynek $B \subset X$ esetén
$$\mu_*(B) = \sup\big\{\mu(A) : A \subset B,\ A \in \mathcal{A}\big\}$$
a definíciója. Igazoljuk, hogy

(1) ha $A \subset B$, akkor $\mu_*(A) \le \mu_*(B)$;

(2) minden $A \subset X$-re $\mu_*(A) \le \mu^*(A)$;

(3) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\mu_*(A) = \mu^*(A)$;

(4) ha $\mu_*(A) = \mu^*(A) < \infty$, akkor az A halmaz μ^*-mérhető;

(5) ha $A_1, A_2, \dots$ páronként diszjunkt halmazok, akkor $\mu_*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(A_n)$;

(6) ha $A_1, A_2, \ldots$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok, $B_n \subset A_n$, akkor

$$\mu_*(\cup_{n=1}^\infty B_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu_*(B_n) \quad \text{és} \quad \mu^*(\cup_{n=1}^\infty B_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(B_n).$$

$\rightarrow$ **1.2.16. Feladat** [7]. Az X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerét *félgyűrű*nek nevezzük, ha $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$ és léteznek C_i, $i = 1, 2, \ldots$ diszjunkt elemei $\mathcal{H}$-nak, hogy $A \backslash B = \cup_{i=1}^\infty C_i$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ félgyűrű, $\nu : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ σ-szubadditív, és ha a $C_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ halmazok diszjunktak, részei az $A \in \mathcal{H}$ halmaznak, akkor $\sum_{i=1}^n \nu(C_i) \leq \nu(A)$. Mutassuk meg, hogy ekkor ν premérték.

1.2.17. Feladat [12]. Legyen ν külső mérték X-en, $\mathcal{H}$ az X részhalmazainak egy rendszere, amelyre $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{H}$. Legyen μ a $\nu|\mathcal{H}$ halmazfüggvényhez tartozó külső mérték, és tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ minden eleme ν-mérhető és μ-mérhető is. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $A \subset X$ halmaz μ-mérhető és lefedhető megszámlálható sok $\mathcal{H}$-beli véges mértékű mérhető halmazzal, akkor az A halmaz ν-mérhető is, és $\nu(A) = \mu(A)$.

1.2.18. Feladat [11]. Legfeljebb háromelemű X halmazon adott ellenpéldákkal mutassuk meg, hogy az előző feladat feltételei közül egyik sem hagyható el.

1.3. Mérték és topológia

Igen sok esetben olyan mértékteret vizsgálunk, amelynek alaphalmaza egyben topologikus tér is. Ilyen esetekben fontos szerepet játszik a mérték és a topológia kapcsolata. Az egyik legegyszerűbb kapcsolat az, ha a nyílt halmazok mérhetőek. A nyílt halmazok mérhetőségéből igen sok, „az analízis eszközeivel definiálható" halmaz mérhetősége következik.

1.3.1. Definíció. Legyen X egy halmaz, és $\mathcal{E}$ az X részhalmazainak egy rendszere. Az összes, $\mathcal{E}$-t tartalmazó σ-algebrák metszetét (amely nyilvánvalóan maga is σ-algebra X-en) az *$\mathcal{E}$ által generált σ-algebrá*nak nevezzük. Ha $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér, a $\mathcal{T}$ által generált σ-algebra elemeit az X tér *Borel-halmaz*ainak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha μ mérték X-en, és X nyílt részhalmazai mérhetőek, akkor X összes Borel-halmaza is mérhető.

A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad a nyílt halmazok mérhetőségére.

* **1.3.2. Tétel.** *Legyen μ külső mérték az X metrikus téren. Az X Borel-halmazai akkor és csak akkor mérhetőek, ha X bármely két A, B nem üres, diszjunkt, pozitív távolságú részhalmazára*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Bizonyítás. A feltétel szükségessége nyilvánvaló, mert az $\overline{A}$ halmaz mérhetőségéből $T = A \cup B$-re

$$\mu(A \cup B) = \mu(T) = \mu(T \cap \overline{A}) + \mu(T \setminus \overline{A}) = \mu(A) + \mu(B).$$

Az elegendőség bizonyításához legyen U nyílt, valódi részhalmaza X-nek, $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$. Legyen

$$A_n = \{x : x \in T \cap U,\ \operatorname{dist}(x, X \setminus U) \geq 1/n\},$$

és legyen $D_1 = A_1, D_n = A_n \setminus A_{n-1}$, ha $n > 1$. Ha I pozitív egészek egy véges halmaza, amelynek elemei vagy mind páratlanok, vagy mind párosak, akkor

$$\mu(\cup_{i \in I} D_i) = \sum_{i \in I} \mu(D_i).$$

Ezt I elemeinek száma szerinti teljes indukcióval haladva bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy ez a szám nagyobb, mint 1 és legyen k az I legnagyobb eleme. Mivel D_k és $\cup_{i \in I \setminus \{k\}} D_i$ távolsága pozitív,

$$\mu(\cup_{i \in I} D_i) = \mu(D_k) + \mu(\cup_{i \in I \setminus \{k\}} D_i),$$

ami éppen az indukciós lépés $I \setminus \{k\}$-ról I-re. Ebből

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} D_{2i}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_{2i})$$

és

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} D_{2i-1}) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_{2i-1}),$$

azaz

$$\infty > 2\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i).$$

Így minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon > \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(D_i) \geq \mu(T \cap U \setminus A_n),$$

hiszen $A_n \cup \left(\cup_{i=n+1}^{\infty} D_i\right) = T \cap U$, amiből $\operatorname{dist}(A_n, T \setminus U) \geq 1/n$ miatt

$$\begin{aligned}\mu(T \cap U) + \mu(T \setminus U) &\leq \mu(T \cap U \setminus A_n) + \mu(A_n) + \mu(T \setminus U)\\ &\leq \varepsilon + \mu\big((T \setminus U) \cup A_n\big) \leq \varepsilon + \mu(T).\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, ez azt jelenti, hogy U mérhető.

A következő definíció igen szoros kapcsolatot fejez ki a mérték és a topológia között.

1.3.3. Definíció. A μ mértéket *Radon-mérték*nek nevezzük X-en, ha X Hausdorff-tér, és a következő feltételek teljesülnek:

(1) ha V nyílt részhalmaza X-nek, akkor V mérhető, és

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subset V\} \quad (\textit{belső regularitás});$$

(2) ha A mérhető részhalmaza X-nek, akkor

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : V \text{ nyílt}, A \subset V\} \quad (\textit{külső regularitás});$$

(3) ha K kompakt részhalmaza X-nek, akkor $\mu(K) < \infty$.

Vegyük észre, hogy az (1) és (2) feltételek mellett (3) azzal ekvivalens, hogy minden pontnak van olyan környezete, amely mérhető és a mértéke véges. Valóban, ha minden pontnak van véges mértékű környezete, akkor egy kompakt halmazt lefedve véges sok véges mértékű nyílt halmazzal, kapjuk, hogy véges mértékű. Megfordítva, ha a kompakt halmazok mértéke véges, akkor az egyelemű halmazokra alkalmazva (2)-t, kapjuk, hogy minden pontnak van véges mértékű nyílt környezete.

1.3.4. Approximációs tétel. *Ha μ Radon-mérték X-en, A mérhető, $\mu(A) < \infty$ és $\varepsilon > 0$, akkor A tartalmaz olyan C kompakt halmazt, amelyre $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan V és W nyílt halmazokat, amelyekre $A \subset V$, $\mu(V \setminus A) < \varepsilon/2$, $V \setminus A \subset W$, $\mu(W) < \varepsilon/2$, és válasszunk olyan $K \subset V$ kompakt halmazt, amelyre $\mu(V \setminus K) < \varepsilon/2$. Ekkor $C = K \setminus W$ kompakt részhalmaza $V \setminus W \subset A$-nak, és

$$\mu(A \setminus C) \le \mu(V \setminus K) + \mu(W) < \varepsilon.$$

* **1.3.5. Tétel.** *Ha μ egy σ-véges Radon-mérték X-en, A pedig egy μ-mérhető halmaz, akkor létezik olyan σ-kompakt K és $\mathcal{G}_\delta$-tulajdonságú V halmaz, hogy*

$$K \subset A \subset V \quad \textit{és} \quad \mu(V \setminus K) = 0.$$

Bizonyítás. Válasszunk egy $\varepsilon_n \downarrow 0$ sorozatot és olyan $A_1, A_2, A_3, \dots$ véges mértékű mérhető halmazokat, amelyeknek egyesítése X. Minden n-re és k-ra léteznek olyan $K_{n,k}$ kompakt és $V_{n,k}$ nyílt halmazok, amelyekre

$$K_{n,k} \subset A \cap A_k \subset V_{n,k} \quad \text{és} \quad \mu(V_{n,k} \setminus K_{n,k}) < \frac{\varepsilon_n}{2^k}.$$

Legyen $K = \cup_{n=1}^\infty \cup_{k=1}^\infty K_{n,k}$ és $V = \cap_{n=1}^\infty \cup_{k=1}^\infty V_{n,k}$. Ekkor a K halmaz σ-kompakt, V pedig $\mathcal{G}_\sigma$-halmaz, $K \subset A \subset V$ és minden n-re

$$\mu(V \setminus K) \le \mu\big((\cup_{k=1}^\infty V_{n,k}) \setminus (\cup_{k=1}^\infty K_{n,k})\big) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(V_{n,k} \setminus K_{n,k}) = \varepsilon_n.$$

Érdekes és fontos tény, hogy ha az X tér topológiája „elég szép”, akkor a μ mértékre kirótt jóval enyhébb feltételekből is következik, hogy μ Radon-mérték.

* **1.3.6. Tétel.** *Legyen X olyan Hausdorff-tér, amelyben minden nyílt halmaz σ-kompakt, $\mathcal{B}$ az X Borel-halmazainak σ-algebrája, μ mérték $\mathcal{B}$-n, és tegyük fel, hogy minden kompakt halmaz mértéke véges. Ekkor μ Radon-mérték.*

Bizonyítás. Tekintsük a $V \mapsto \mu(V)$, ha V nyílt részhalmaza X-nek halmazfüggvényt. Megmutatjuk, hogy ez a halmazfüggvény premérték. Jelöljük ν-vel a hozzá tartozó külső mértéket. A μ mérték σ-szubadditivitásából következik, hogy μ és ν megegyeznek a nyílt halmazokon. Legyenek V és W nyílt halmazok, és tegyük fel, hogy $\mu(W) < \infty$. Válasszunk olyan, kompakt halmazokból álló $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ sorozatot, amelyre $V = \cup_{i=1}^{\infty} K_i$. A mérték folytonossága miatt

$$\mu(V) = \sup\bigl\{\mu(K) : K \subset V,\ K \text{ kompakt}\bigr\}.$$

Mivel $W \setminus V = \bigcap_{i=1}^{\infty}(W \setminus K_i)$, ugyancsak a mérték folytonossága miatt

$$\mu(W \setminus V) = \lim_{i\to\infty} \mu(W \setminus K_i).$$

Ebből

$$\mu(W) = \mu(W \cap V) + \mu(W \setminus V) = \nu(W \cap V) + \lim_{i\to\infty} \mu(W \setminus K_i) \geq \nu(W \cap V) + \nu(W \setminus V),$$

azaz a nyílt halmazok ν-mérhetőek, tehát a Borel-halmazok is. Legyen B tetszőleges Borel-halmaz, és válasszunk egy kompakt halmazokból álló sorozatot úgy, hogy $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = X$ teljesüljön. Legyen $\varepsilon > 0$. A ν definíciója miatt minden i-re van olyan V_i nyílt halmaz, hogy

$$\mu(V_i) = \nu(V_i) < \nu(B \cap K_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \quad \text{és} \quad B \cap K_i \subset V_i.$$

Ebből $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$-re

$$\nu(V \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i \setminus (B \cap K_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alkalmazva ezt $X \setminus B$-re is, egy olyan W nyílt halmazt kapunk, amelyre $\nu\bigl(W \setminus (X \setminus B)\bigr) \leq \varepsilon/2$ és $X \setminus B \subset W$. Az $X \setminus W = F$ jelöléssel F zárt halmaz, $F \subset B$ és $\nu(B \setminus F) \leq \varepsilon/2$. Ebből $\nu(V \setminus F) \leq \varepsilon$. Mivel ν és μ megegyeznek a nyílt halmazokon, $\mu(V \setminus F) \leq \varepsilon$ és így

$$\mu(V \setminus B) \leq \mu(V \setminus F) < \varepsilon,$$

amiből

$$\mu(B) = \inf\bigl\{\mu(V) : B \subset V,\ V \text{ nyílt}\bigr\}$$

minden B Borel-halmazra, így μ Radon-mérték.

$\to$ **1.3.7. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az alábbi halmazosztályok mindegyikére a generált σ-algebra a Borel-halmazok osztálya: nyílt intervallumok, kompakt intervallumok, racionális végpontú nyílt intervallumok, racionális végpontú kompakt intervallumok, $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{Q}$ alakú intervallumok. Adjunk hasonló példákat $\overline{\mathbb{R}}$-ban, $\mathbb{C}$-ben, $\mathbb{K}^n$-ben és más topologikus terekben.

1.3.8. Feladat [12]**.** A síkon adjunk meg olyan konvex halmazt, amely nem Borel-halmaz.

* **1.3.9. Feladat** [18]**.** Igazoljuk, hogy megszámlálható bázisú topologikus térben legfeljebb kontinuum sok Borel-halmaz van.

* **1.3.10. Feladat** [20]**.** Bizonyítsuk be, hogy teljes szeparábilis metrikus térben minden Borel-halmaz vagy megszámlálható, vagy kontinuum számosságú.

$\to$ **1.3.11. Feladat** [6]**.** Mikor lesz a számláló mérték Radon-mérték egy X Hausdorff-téren?

1.3.12. Feladat [6]**.** Legyen X Hausdorff-tér, x_n az X elemeiből álló sorozat és a_n egy nemnegatív tagú konvergens sor. Ha $A \subset X$, legyen $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} a_n$. Mutassuk meg, hogy μ Radon-mérték.

$\to$ **1.3.13. Feladat** [6]**.** Igazoljuk, hogy Radon-mérték természetes kiterjesztése is Radon-mérték.

1.3.14. Feladat [9]**.** Legyen $f : X \to Y$ folytonos leképezése az X lokálisan kompakt Hausdorff-térnek az Y lokálisan kompakt Hausdorff-térbe. Tegyük fel, hogy $f^{-1}(K)$ kompakt bármely K kompakt részhalmazára Y-nak, az X tér σ-kompakt, μ pedig Radon-mérték X-en. Legyen $\nu(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big)$, ha az $f^{-1}(B)$ halmaz μ-mérhető. Bizonyítsuk be, hogy ν Radon-mérték Y-on.

* **1.3.15. Feladat** [17]**.** Legyen μ olyan Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Mutassuk meg, hogy ha A egy véges de pozitív mértékű mérhető halmaz, akkor A tartalmaz nem mérhető részhalmazt.

* **1.3.16. Feladat** [19]**.** Legyen μ olyan nem nulla véges Radon-mérték az X teljes metrikus téren, amelyre minden egyelemű halmaz mértéke nulla. Igazoljuk, hogy létezik kontinuum sok diszjunkt részhalmaza X-nek úgy, hogy egyiknek a komplementere sem tartalmaz pozitív mértékű mérhető halmazt.

2. PÉLDÁK MÉRTÉKEKRE

2.1. A Lebesgue-mérték a számegyenesen

Ebben a pontban az előző fejezetben ismertetett módszer és az ott bebizonyított tételek segítségével bevezetjük a számegyenesen a Lebesgue-mértéket.

2.1.1. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum $\nu(A)$ *hosszán* a $b-a$ számot értjük, ahol a az A alsó, b pedig az A felső végpontja (A lehet nyílt, zárt vagy félig nyílt). Az 1.2.4. tétel szerint ν-höz tartozó külső mértéket *Lebesgue külső mérték*nek nevezzük és a továbbiakban mindig λ-val jelöljük. A λ-mérhető halmazokat *Lebesgue-mérhető*eknek nevezzük, és osztályukat $\mathcal{L}$-el jelöljük, λ megszorítását $\mathcal{L}$-re *Lebesgue-mérték*nek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ-val jelöljük.

2.1.2. Tétel. *A korlátos intervallumok Lebesgue-mérhetőek és mértékük a hosszukkal egyenlő.*

Bizonyítás. A 2.1.1. definíció jelöléseivel, az 1.2. paragrafus eredményei szerint azt kell megmutatnunk, hogy ν premérték. Annak bizonyításához, hogy

$$\nu(A) \geq \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B),$$

ha A és B korlátos intervallumok, vegyük észre, hogy $A \cap B$ vagy üres, vagy intervallum, $A \setminus B$ pedig vagy üres, vagy intervallum, vagy két diszjunkt intervallum egyesítése. Így a fenti egyenlőtlenség arra a trivialitásra redukálódik, hogy ha A-t legfeljebb három részintervallumra bontjuk, akkor azok összhossza éppen A hossza.

A szubadditivitás bizonyításához legyen I megszámlálható halmaz, és legyenek A, A_i, $i \in I$ korlátos intervallumok. Tegyük fel, hogy $A \subset \cup_{i \in I} A_i$. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy $B = [a, b] \subset A$ zárt intervallumot, amelyre $\nu(A) \leq \nu(B) + \varepsilon$, továbbá, feltéve, hogy $I \subset \mathbb{N}$, válasszunk minden $i \in I$-hez egy $B_i = (a_i, b_i) \supset A_i$ nyílt intervallumot, amelyre $\nu(B_i) \leq \nu(A_i) + \varepsilon/2^i$. Mivel a B_i nyílt halmazok lefedik a B kompakt halmazt, van olyan I^* véges részhalmaza I-nek, amelyre $B \subset \cup_{i \in I^*} B_i$. Válasszunk olyan i_1-et, amelyre $a_{i_1} < a < b_{i_1}$, és teljes indukcióval válasszunk ki egy olyan $I^{**} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I^*$ halmazt, amelyre $a_{i_{j+1}} < b_{i_j}$, ha $j = 1, 2, \ldots, n-1$ és $b_{i_n} > b$, például legyen $i_{j+1} = \min\{i \in I^* : a_i < b_{i_j} < b_i\}$, ha $b_{i_j} \le b$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\nu(A) &\le \nu(B) + \varepsilon = \varepsilon + (b - a) < \varepsilon + (b_{i_n} - a_{i_1}) \\
&= \varepsilon + (b_{i_n} - a_{i_n}) + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{i_{j+1}} - a_{i_j}) \\
&< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n} (b_{i_j} - a_{i_j}) = \varepsilon + \sum_{i \in I^{**}} \nu(B_i) \\
&\le \varepsilon + \sum_{i \in I} \big(\nu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\big) \le 3\varepsilon + \sum_{i \in I} \nu(A_i).
\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

2.1.3. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $g(x) = ax + b$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ekkor minden $A \subset \mathbb{R}$-re $\lambda\big(g(A)\big) = |a|\lambda(A)$, és ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy intervallumok képe is intervallum, és egyszerű számolás mutatja, hogy intervallumokra teljesül az állítás. Ha $a = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy $a \ne 0$ és $A \subset \mathbb{R}$. Ha I megszámlálható, az A_i-k pedig intervallumok minden $i \in I$-re, továbbá $A \subset \cup_{i \in I} A_i$, akkor

$$g(A) \subset \bigcup_{i \in I} g(A_i),$$

amiből

$$\lambda\big(g(A)\big) \le \sum_{i \in I} \lambda\big(g(A_i)\big) = |a| \sum_{i \in I} \lambda(A_i).$$

Ezt felhasználva a λ külső mérték definíciója szerint $\lambda\big(g(A)\big) \le |a|\lambda(A)$. Alkalmazva ezt g helyett g^{-1}-re, A helyett pedig $g(A)$-ra, azt kapjuk, hogy

$$\lambda(A) = \lambda\Big(g^{-1}\big(g(A)\big)\Big) \le \frac{1}{|a|} \lambda\big(g(A)\big),$$

azaz

$$\lambda\big(g(A)\big) \ge |a|\lambda(A).$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az. Tetszőleges $T \subset \mathbb{R}$-re

$$\begin{aligned}
\lambda\big(T \cap g(A)\big) + \lambda\big(T \setminus g(A)\big) &= |a|\lambda\big(g^{-1}(T) \cap A\big) + |a|\lambda\big(g^{-1}(T) \setminus A\big) \\
&= |a|\lambda\big(g^{-1}(T)\big) = \lambda(T).
\end{aligned}$$

A következő tételben a Lebesgue-mérték és a topológia kapcsolatával foglalkozunk.

2.1.4. Tétel. *A λ mérték Radon-mérték $\mathbb{R}$-en, és minden $A \subset \mathbb{R}$-re*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(V) : A \subset V,\ V \text{ nyílt}\}.$$

Bizonyítás. Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Mivel V előáll a benne lévő racionális végpontú intervallumok megszámlálható uniójaként, és az intervallumok mérhetőek, V mérhető. Mivel $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza σ-kompakt, létezik kompakt halmazoknak olyan $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \dots$ sorozata, amelyre $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = V$. A mérték folytonossága szerint

$$\lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \sup_n \lambda(K_n).$$

Az nyilvánvaló, hogy ha K kompakt, akkor $\lambda(K) < \infty$, mivel kompakt halmaz korlátos intervallumba foglalható. Végül meg kell mutatnunk, hogy bármely $A \subset \mathbb{R}$ halmazra

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(V) : V \text{ nyílt}, A \subset V\}.$$

A külső mérték monotonitása miatt $\lambda(A)$ nem nagyobb, mint a jobb oldal. Ha $\lambda(A)$ végtelen, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $\lambda(A)$ véges, és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan A_i, $i \in I$ megszámlálható intervallumrendszer, hogy I pozitív egész számokból áll, $A \subset \cup_{i\in I} A_i$ és $\lambda(A) + \varepsilon \geq \sum_{i\in I} \lambda(A_i)$. Választva minden i-re egy V_i nyílt intervallumot, amelyre $\lambda(V_i) \leq \lambda(A_i) + \varepsilon/2^i$ és $A_i \subset V_i$, a $V = \cup_{i\in I} V_i$ halmaz nyílt, tartalmazza A-t, valamint

$$\lambda(V) \leq \sum_{i\in I} \lambda(V_i) \leq \sum_{i\in I} \lambda(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \lambda(A) + 2\varepsilon.$$

Mivel az egyelemű halmazok zárt intervallumok, és hosszuk nulla, mérhetőek, és mértékük nulla. Ebből a σ-additivitás alapján $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza Lebesgue-mérhető, és mértéke nulla. Önként adódik a kérdés, hogy nagyobb számosságú halmazok lehetnek-e nulla mértékűek? Erre ad választ a következő érdekes konstrukció.

2.1.5. A Cantor-féle triadikus halmaz. Az alábbiakban egy $C \subset \mathbb{R}$ halmazt konstruálunk, amely kontinuum számosságú, Lebesgue-mértéke nulla, kompakt, sehol sem sűrű, és nincs izolált pontja.

Legyen $C_0 = [0, 1]$ és hagyjuk el C_0-ból a középső 1/3-ad hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó halmazt jelölje C_1. Ez két 1/3-ad hosszúságú zárt intervallumból áll. Hagyjuk el ezek mindegyikéből a középső 1/9 hosszúságú nyílt intervallumot, és a visszamaradó halmazt jelöljük C_2-vel. Teljes indukcióval folytatva az eljárást, n lépés után egy C_n zárt halmazt kapunk, amely 2^n darab $1/3^n$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallumból áll. Ezek mindegyikének közepéből kivéve egy-egy $1/3^{n+1}$ hosszúságú nyílt intervallumot, kapjuk a C_{n+1} halmazt. Legyen $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Annak bizonyításához, hogy C kontinuum számosságú, vegyük észre, hogy egy $x \in [0, 1]$ valós szám pontosan akkor van benne C_n-ben, ha van olyan

$$0{,}x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_{n+1} \dots$$

alakú triadikus törtbe fejtése, amelyben x_i vagy 0, vagy 2, ha $1 \leq i \leq n$. Ez azt jelenti, hogy C pontosan azon x valós számokból áll, amelyek triadikus törtbe fejthetők úgy, hogy egyetlen helyen sem áll egyes. Nyilván C minden eleme pontosan egyféleképpen fejthető így triadikus törtbe. Ha most

$$x = 0{,}x_1x_2x_3 \ldots \in C,$$

akkor legyen $y_i = x_i/2$, ha $i = 1, 2, \ldots$ és $f(x) = y \in [0, 1]$ az a valós szám, amelynek

$$0{,}y_1y_2y_3 \ldots$$

egy diadikus kifejtése. Nyilván az f függvény C-t az egész $[0, 1]$-re képezi le. Így C számossága legalább kontinuum. Mivel $C \subset \mathbb{R}$, számossága nem lehet nagyobb kontinuumnál, így kontinuum számosságú. Az, hogy $\lambda(C) = 0$, abból következik, hogy

$$\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$$

minden n-re. Nyilván C korlátos halmaz, és mivel zárt halmazok metszete, zárt is, tehát kompakt. Nem tartalmazhat pozitív hosszúságú nyílt intervallumot, mivel nulla mértékű. Ez azt jelenti, hogy C sehol sem sűrű.

Annak bizonyításához, hogy C-nek nincs izolált pontja, megjegyezzük, hogy ha egy pont valamely n-re a C_n-et alkotó intervallumok valamelyikének végpontja, akkor a C_{n+1}-et alkotó intervallumok végpontjai között is előfordul, így teljes indukcióval kapjuk, hogy minden C_i-ben benne van, tehát C-ben is. Legyen most $x \in C$ és $\varepsilon > 0$. Választva olyan n-et, amelyre $1/3^n < \varepsilon$, a C_n-et alkotó zárt intervallumok közül az x-et tartalmazó intervallum valamelyik végpontja olyan x-től különböző eleme C-nek, amely ε-nál közelebb van x-hez.

Mivel a Cantor-halmaz kontinuum számosságú, ugyanannyi részhalmaza van, mint $\mathbb{R}$-nek. Mivel nulla mértékű, minden részhalmaza is mérhető, így ugyanannyi Lebesgue-mérhető halmaz van, mint ahány részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Felmerül a kérdés, hogy ha ilyen sok mérhető halmaz van, van-e egyáltalán nem mérhető halmaz? Az alábbiakban ilyen, nem Lebesgue-mérhető halmazra ismertetünk egy, Zermelo német matematikustól származó példát.

2.1.6. Nem mérhető halmaz létezése. A konstrukcióban felhasználjuk a halmazelmélet kiválasztási axiómáját: nem üres, páronként diszjunkt halmazok bármely rendszeréhez van olyan halmaz, amely mindegyikből pontosan egy elemet tartalmaz.

Legyen $I = [-1, 1]$ és vezessük be az I elemei között az $x \sim y$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$ ekvivalenciarelációt. Az I ekvivalenciaosztályai páronként diszjunkt, nem üres halmazokból álló rendszert alkotnak, így a kiválasztási axióma szerint van olyan A halmaz, amelyik minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz. Megmutatjuk, hogy A nem lehet mérhető. Rendezzük egy $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sorozatba a $[-2, 2]$-beli racionális számokat, és legyen

$$A_k = \{x + r_k : x \in A\}.$$

Ekkor $I \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, hiszen ha $y \in I$, akkor van olyan $x \in I$, hogy $x \in A$ és $x \sim y$. Nyilván $|y - x| \leq 2$ és $y - x$ racionalitása miatt $y - x = r_k$ valamilyen k természetes számra, így

$$y = x + (y - x) = x + r_k \in A_k.$$

Felhasználva a 2.1.3. tételt, $\lambda(A_k) = \lambda(A)$ minden k-ra, így a

$$2 = \lambda(I) \leq \lambda(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$$

összefüggésből következik, hogy $\lambda(A) > 0$.

Másrészt nyilván $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-3, 3]$, és ha $k \neq j$, akkor $A_k \cap A_j = \emptyset$, hiszen $y \in A_k \cap A_j$-ből az következne, hogy y előáll $x_j + r_j$ és $x_k + r_k$ alakban is, ahol x_j és x_k az A különböző pontjai, ami pedig $x_j - x_k = r_k - r_j$ racionalitása miatt lehetetlen, hiszen A minden ekvivalenciaosztályból csak egy elemet tartalmaz. Így ha A mérhető lenne, akkor 2.1.3. felhasználásával azt kapnánk, hogy az A_k-k is mérhetőek ugyanazzal a mértékkel, amiből a

$$6 = \lambda\big([-3, 3]\big) \geq \lambda(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k)$$

egyenlőtlenség szerint $\lambda(A) = 0$ következne. Ez ellentmondás.

$\rightarrow$ **2.1.7. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ minden nulla Lebesgue-mértékű zárt részhalmaza sehol sem sűrű.

2.1.8. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy $[0, 1]$ minden egy Lebesgue külső mértékű részhalmaza sűrű $[0, 1]$-ben.

2.1.9. Feladat [9]. Bizonyítsuk be, hogy azon $[0, 1]$-beli valós számok, amelyeknek van olyan tizedestört alakja, amelyben nem szerepel hetes, sehol sem sűrű, perfekt, nulla Lebesgue-mértékű halmazt alkotnak.

2.1.10. Feladat [8]. Jelölje C a Cantor-halmazt, és legyen

$$A = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} a + (b - a)C.$$

Mutassuk meg, hogy $\lambda(A) = 0$, az A halmaz első kategóriájú, nulla Lebesgue-mértékű, és $\mathbb{R}$ minden pontja kondenzációs pontja A-nak.

2.1.11. Feladat [14]. Legyen $a_n > 0$, és tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Igazoljuk, hogy létezik páronként diszjunkt nyílt intervallumok olyan $I_n \subset [0, 1]$ sorozata, hogy $\lambda(I_n) = a_n$ és $[0, 1] \setminus \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ sehol sem sűrű perfekt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek.

2.1.12. Feladat [12]. Legyen $F \subset \mathbb{R}$ nem üres perfekt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy F tartalmaz nem üres, perfekt, nulla Lebesgue-mértékű részhalmazt.

2.1.13. Feladat [10]. Adott $0 < \varepsilon \leq 1$-hez adjunk meg $[0, 1]$-nek perfekt, sehol sem sűrű, $1 - \varepsilon$ Lebesgue-mértékű részhalmazát.

2.1.14. Feladat [8]**.** Adjunk meg $[0,1]$-ben 1 Lebesgue-mértékű, első kategóriájú részhalmazt.

2.1.15. Feladat [8]**.** Van-e a számegyenesnek nulla Lebesgue-mértékű, második kategóriájú részhalmaza?

2.1.16. Feladat [14]**.** Igaz-e, hogy $\mathbb{R}$ minden nulla Lebesgue-mértékű A részhalmazához van olyan B nulla Lebesgue-mértékű $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, amely tartalmazza A-t?

* **2.1.17. Feladat: Steinhaus tétele** [15]**.** Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor $A - A$ tartalmazza a 0 egy környezetét. Bizonyítsuk be, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhetőek és pozitív mértékűek, akkor $A + B$ belseje nem üres. Igaz-e ez, ha B nem mérhető, de a külső mértéke pozitív?

2.1.18. Feladat [10]**.** Igazoljuk, hogy $C - C = [-1, 1]$, ha C a Cantor-halmaz.

2.1.19. Feladat [7]**.** Legyen A pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pontja, amelyek különbsége racionális.

* **2.1.20. Feladat** [15]**.** Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető és pozitív mértékű, akkor minden $n \in \mathbb{N}$-re tartalmaz n-tagú számtani sorozatot.

2.1.21. Feladat [12]**.** Legyen ξ irracionális szám, $X_0 = 2\mathbb{Z} + \xi\mathbb{Z}$, $X_1 = X_0 + 1$, és $X = X_0 \cup X_1$. Igazoljuk, hogy X_0 és X sűrű részcsoportjai $\mathbb{R}$-nek. Legyen A olyan halmaz, amely minden X szerinti mellékosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, és legyen $N = A + X_0$. Bizonyítsuk be, hogy $N - N$ nem tartalmaz X_1-beli pontot, X_1 sűrű $\mathbb{R}$-ben, $\mathbb{R} \setminus N = N + 1$ és N nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

2.1.22. Feladat [8]**.** Mutassuk meg, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelynek pozitív a Lebesgue külső mértéke, tartalmaz olyan B halmazt, amelyre sem B, sem $A \setminus B$ nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető részhalmazt.

2.1.23. Feladat [10]**.** Legyen A zárt, sehol sem sűrű részhalmaza $[0,1]$-nek, és $f(x) = \lambda\big([0,x] \setminus A\big)/\lambda\big([0,1] \setminus A\big)$, ha $x \in [0,1]$. Igazoljuk, hogy f a $[0,1]$ intervallumot önmagára képezi le, szigorúan monoton növekedő, folytonos, az inverze is folytonos, $\lambda\big(f(A)\big) = 0$, valamint ha $B \subset A$ nem Lebesgue-mérhető, akkor $f(B)$ Lebesgue-mérhető, de nem Borel-halmaz.

2.1.24. Feladat [15]**.** Adjunk meg olyan részhalmazát $[0,1]$-nek, amelynek Lebesgue külső mértéke 1, de a racionális számok feletti lineáris burka nem tartalmaz pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmazt.

2.2. Lebesgue–Stieltjes-mértékek a számegyenesen

Ebben a pontban a Lebesgue-mérték általánosításaként bevezetjük az úgynevezett Lebesgue–Stieltjes-mértékeket. Ezek a mértékek fontos szerepet játszanak a valószínűségszámításban.

2.2.1. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény. Tekintsük azon (nyílt, zárt vagy félig nyílt) intervallumok osztályát, amelyeknek az a, b végpontjai g-nek folytonossági pontjai, és legyen ν_g az a halmazfüggvény, amely egy ilyen intervallumhoz a $g(b) - g(a)$ számot rendeli. Legyen λ_g a ν_g-hez tartozó külső mérték $\mathbb{R}$-en, $\mathcal{L}_g$ pedig a λ_g-mérhető halmazok osztálya. A λ_g halmazfüggvényt a g-hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes külső mérték*nek nevezzük, λ_g megszorítását $\mathcal{L}_g$ -re pedig a *g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték*nek, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ_g-vel jelöljük.

Megjegyezzük, hogy a Lebesgue-mérték speciális esete a Lebesgue–Stieltjes-mértéknek: akkor kapjuk, ha $g(x) = x$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.

2.2.2. Tétel. *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ és $[a, b]$ intervallumok λ_g-mérhetőek, és*

$$\begin{aligned}\lambda_g(a, b) &= g(b-) - g(a+),\\ \lambda_g(a, b] &= g(b+) - g(a+),\\ \lambda_g[a, b) &= g(b-) - g(a-),\\ \lambda_g[a, b] &= g(b+) - g(a-).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az, hogy ν_g premérték $\mathbb{R}$-en, hasonlóan látható be, mint a Lebesgue-mérték esetében. Ebből következnek a fenti egyenlőségek arra az esetre, ha a és b a g-nek folytonossági pontjai. Most legyen a és b tetszőleges, és legyenek $a_n \downarrow a$, $b_n \uparrow b$ olyan sorozatok, amelyekre a_n és b_n a g-nek folytonossági pontjai. Ekkor

$$\lambda_g(a, b) = \lambda_g\big(\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \lambda_g(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty}\big(g(b_n) - g(a_n)\big) = g(b-) - g(a+),$$

amivel beláttuk az első összefüggést. A többi összefüggés hasonlóan bizonyítható.

2.2.3. Tétel. *A λ_g mérték Radon-mérték $\mathbb{R}$-en, és minden A részhalmazára $\mathbb{R}$-nek*

$$\lambda_g(A) = \inf\big\{\lambda_g(V) : A \subset V,\ V \text{ nyílt}\big\}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a Lebesgue-mérték esetében.

* **2.2.4. Definíció.** Egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *függvényt normalizált*nak nevezünk, ha balról folytonos és $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy függvény, $f(x-)$ létezik minden $x \in \mathbb{R}$ pontban, és $c \in \mathbb{C}$, akkor a

$$g(x) = f(x-) + c, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény balról folytonos. Valóban, ha $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $y < x$, hogy $\big|f(t) - f(x-)\big| < \varepsilon$, ha $t \in (y, x)$. Mivel $f(t-)$ az $f(s)$, $y < s < t$ számok torlódási pontja,

$$\big|f(t-) - f(x-)\big| = \big|g(t) - g(x)\big| \le \varepsilon.$$

Ha még $\lim_{x\to-\infty} f(x) \in \mathbb{C}$ is létezik, akkor $c = -\lim_{x\to-\infty} f(x)$ választással g normalizált függvény. Valóban, ha $x_n \to -\infty$ és y_n-et úgy választjuk, hogy $x_n - 1/n < y_n < x_n$ és $\left|f(x_n-) - f(y_n)\right| < 1/n$ teljesüljön, akkor $y_n \to -\infty$ és $g(x_n) - c - f(y_n) \to 0$, amiből $g(x_n) \to c + \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Ezt a g függvényt az f *normalizáltjá*nak nevezzük.

* **2.2.5. Tétel.** *Legyen μ egy véges teljes Radon-mérték $\mathbb{R}$-en és legyen $g(x) = \mu(-\infty, x)$. Ekkor*

(1) *g monoton növekedő normalizált függvény;*

(2) *g pontosan akkor folytonos egy $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$;*

(3) *$\lambda_g = \mu$.*

Megfordítva, legyen f egy monoton növekedő korlátos függvény és legyen g az f normalizáltja. Ekkor

(4) *$\lambda_f = \lambda_g$;*

(5) *$g(x) = \lambda_f(-\infty, x)$.*

Bizonyítás. (1) és (2) a mérték monotonitásából és folytonosságából következik. Mivel $\mu[x, y) = g(y) - g(x)$, a μ és a λ_g mértékek egybeesnek a balról zárt, jobbról nyílt intervallumokon. Ha $x < x_n < y$, $x_n \downarrow x$, akkor

$$\mu(x, y) = \lim_{n\to\infty} \mu[x_n, y) = \lim_{n\to\infty} \lambda_g[x_n, y) = \lambda_g(x, y),$$

így μ és λ_g egybeesnek a nyílt intervallumokon. A nyílt halmazok struktúratétele szerint μ és λ_g egybeesnek $\mathbb{R}$ nyílt részhalmazain. Mivel mindkettő Radon-mérték, ugyanez teljesül minden Borel-halmazra. Ha az A halmaz μ-mérhető, akkor léteznek olyan B és C Borel-halmazok, hogy $C \subset A \subset B$ és $\mu(B \setminus C) = 0$. A λ_g teljessége miatt $A \setminus C \subset B \setminus C$ is λ_g-mérhető, így A is λ_g-mérhető és

$$\lambda_g(A) = \lambda_g(C) + \lambda_g(A \setminus C) = \lambda_g(C) = \mu(C) = \mu(C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A).$$

Hasonlóan adódik, hogy ha az A halmaz λ_g-mérhető, akkor μ-mérhető is és $\mu(A) = \lambda_g(A)$.

A megfordításhoz, mivel f monoton, minden pontban létezik a bal oldali határértéke, így f korlátossága miatt g értelmezve van és monoton növekedő. A 2.2.1. definíció szerint f-hez tartozó ν_f és g-hez tartozó ν_g premértékek megegyeznek, így $\lambda_f = \lambda_g$. Felhasználva, hogy $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ és g balról folytonos, 2.2.2.-ből és a mérték folytonosságából kapjuk (5)-öt.

* **2.2.6. Megjegyzés.** Az előző tétel kiterjeszthető arra az esetre is, amikor μ nem véges teljes Radon-mérték. Ekkor g-t a következőképpen definiálhatjuk:

$$g(x) = \begin{cases} \mu[0, x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -\mu[x, 0), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ feltétel helyett $g(0) = 0$ fog teljesülni, az f korlátossága nem szükséges, és (5)-ben

$$g(x) = \begin{cases} \lambda_f[0, x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -\lambda_f[x, 0), & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

egyébként a tétel és bizonyítása érvényben marad. A valószínűségszámításban és más alkalmazásokban 2.2.5. eredeti alakját szokás használni.

→ **2.2.7. Feladat** [**7**]. Határozzuk meg a λ_Θ Lebesgue–Stieltjes-mértéket és a mérhető halmazokat, ha Θ a Heaviside-függvény: $\Theta(x)$ nulla, ha $x \le 0$ és egy, ha $x > 0$. (A λ_Θ mérték a *Dirac-mérték*.)

2.2.8. Feladat [**9**]. Legyen x_n a racionális számok egy sorozatba rendezése, és legyen $g(x) = \sum_{x_n<x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy g szigorúan monoton növekedő, balról folytonos, minden irracionális pontban folytonos és egyetlen racionális pontban sem folytonos. Határozzuk meg a λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket és a mérhető halmazokat.

2.2.9. Feladat [**8**]. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, λ_g a hozzá tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték. Igazoljuk, hogy $\lambda_g\{x\} = 0$ pontosan akkor, ha g folytonos az x pontban. Bizonyítsuk be, hogy van olyan sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, amelynek λ_g-mértéke nulla.

2.3. Lebesgue–Stieltjes-mértékek az euklideszi téren

* **2.3.1. Motiváció.** A valószínűségszámításban fontos szerepet játszik a következő probléma: Minden $x = (x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n$-re ismerjük annak $g(x)$ valószínűségét, hogy egy adott valószínűségi változó értéke az

$$\big\{y : y = (y_1, \dots , y_n) \in \mathbb{R}^n,\ y_i < x_i, \text{ ha } i = 1, 2, \dots , n\big\} \tag{1}$$

halmazba esik. Meghatározandó annak valószínűsége, hogy a valószínűségi változó egy adott Borel-halmazba esik.

Ez a probléma úgy fogható fel, hogy adott egy halmazfüggvény az (1) alakú halmazokon, és ez kiterjesztendő a Borel-halmazokon is értelmezett mértékké. Adott $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots , a_n)$, $b = (b_1, \dots , b_n)$ esetén írjuk azt, hogy $a \le b$, ha $a_i \le b_i$ $(i = 1, 2, \dots , n)$ és írjuk azt, hogy $a < b$, ha $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \dots , n)$. Vezessük be az

$$[a, b) = \big\{x : x = (x_1, \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i \le x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots , n\big\} \tag{2}$$

jelölést, és az analóg (a, b), $(a, b]$, $[a, b]$ jelöléseket, ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \le b$. Ezeket a halmazokat n-dimenziós intervallumoknak nevezzük. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ és

$$\begin{aligned}\Delta^{(k)}_{[a_k,b_k)} g(x) &= g(x_1, \dots , x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots , x_n)\\ &\quad - g(x_1, \dots , x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots , x_n),\end{aligned} \tag{3}$$

ha $a_k \le b_k$ valós számok. Ez a k-adik változótól már nem függő érték nyilván annak valószínűségét jelenti, hogy az adott valószínűségi változó az

$$\big\{y : y = (y_1, \dots , y_n) \in \mathbb{R}^n,\ y_1 < x_1, \dots , y_{k-1} < x_{k-1}, a_k \le y_k < b_k, \dots , y_n < x_n\big\}$$

halmazba esik. Hasonlóan, annak valószínűségét, hogy az adott valószínűségi változó az n-dimenziós $[a, b)$ balról zárt intervallumba essen, az x-től már nem függő

$$\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \cdots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g$$

érték adja. Az n-dimenziós balról zárt intervallumok osztályáról aztán az így kapott premértéket a szokásos módon terjeszthetjük ki egy σ-algebrára. Ezzel foglalkozunk a következő definícióban és tételben.

* **2.3.2. Definíció.** Legyen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy függvény. A 2.3.1. pont jelöléseivel tegyük fel, hogy

(1) g minden változójában balról folytonos;

(2) minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a \leq b$ esetén

$$\nu_g^n[a,b) = \Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \dots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g$$

nemnegatív.

A ν_g^n-hez tartozó külső mértéket λ_g^n-vel, a λ_g^n-mérhető halmazok osztályát $\mathcal{L}_g^n$-vel jelöljük. A λ_g^n külső mértéket a *g-hez tartozó n-dimenziós Lebesgue–Stieltjes külső mérték*nek nevezzük, megszorítását $\mathcal{L}_g^n$-re pedig a *g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték*nek, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is λ_g^n-vel jelöljük.

* **2.3.3. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$ esetén az $[a,b)$ intervallum λ_g^n-mérhető és*

$$\lambda_g^n[a,b) = \Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \dots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g.$$

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy ν_g^n premérték. Ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$ és $a_1 \leq c_1 \leq b_1$, akkor

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \dots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g &= \Delta^{(1)}_{[a_1,c_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \dots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g \\ &\quad + \Delta^{(1)}_{[c_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \dots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g.\end{aligned}$$

Ugyanez az összefüggés igaz akkor is, ha az $[a,b)$ intervallumot bármely másik $[a_k, b_k)$ oldalának két részre bontásával osztjuk két intervallumra. Ebből indukcióval következik, hogy a ν_g^n függvény additív az $[a,b)$ bármely olyan véges sok diszjunkt, balról zárt intervallumra való felbontására, amely úgy áll elő, hogy az oldalakat véges sok balról zárt intervallumra bontjuk.

Legyen I és J két tetszőleges n-dimenziós balról zárt intervallum. Ekkor $K_1 = I \cap J$ is n-dimenziós balról zárt intervallum, $I \setminus J$ pedig előállítható véges sok n-dimenziós $K_2, K_3, \dots, K_m$ balról zárt intervallum diszjunkt uniójaként: ezeket úgy kapjuk, hogy I oldalait legfeljebb három részre vágjuk. Így

$$\begin{aligned}\nu_g^n(I) = \sum_{i=1}^m \nu_g^n(K_i) &= \nu_g^n(I \cap J) + \sum_{i=2}^m \nu_g^n(K_i) \\ &\geq \lambda_g^n(I \cap J) + \lambda_g^n(I \setminus J).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az n-dimenziós balról zárt intervallumok λ_g^n-mérhetőek.

Megmutatjuk, hogy a ν_g^n halmazfüggvény σ-szubadditív. Tegyük fel, hogy $I = [a,b)$ és $I_k = [a_k, b_k)$, $k \in K \subset \mathbb{N}$ egy n-dimenziós balról zárt intervallumokból álló megszámlálható rendszer, továbbá $I \subset \cup_{k \in K} I_k$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $\eta \in \mathbb{R}^n$ olyan vektor, amelynek minden koordinátája pozitív. Mivel g minden változójában balról folytonos, minden $k \in K$-ra található olyan $\eta_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelynek minden koordinátája pozitív és amelyre

$$\nu_g^n[a_k - \eta_k, b_k) \le \nu_g^n[a_k, b_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Az $(a_k - \eta_k, b_k)$ nyílt intervallumok lefedik az $[a, b - \eta]$ kompakt intervallumot, így kiválasztható egy $K^* \subset K$ véges halmaz, amelyre

$$[a, b - \eta) \subset \bigcup_{k \in K^*} [a_k - \eta_k, b_k).$$

Tekintsük az

$$[a, b - \eta) \bigcap \Big([a_k - \eta_k, b_k) \setminus \big(\cup_{j<k, j \in K^*} [a_j - \eta_j, b_j) \big) \Big),$$

$k \in K^*$ diszjunkt halmazokat. Ezek mindegyike előáll véges sok diszjunkt $I_{k,j}$, $j = 1, 2, \ldots, m_k$ balról zárt intervallum egyesítéseként. Így

$$[a, b - \eta) = \bigcup_{k \in K^*} \bigcup_{j=1}^{m_k} I_{k,j},$$

és

$$\nu_g^n[a, b - \eta) = \sum_{k \in K^*} \sum_{j=1}^{m_k} \nu_g^n(I_{k,j}) \le \sum_{k \in K^*} \nu_g^n[a_k - \eta_k, b_k) \le \sum_{k \in K} \nu_g^n(I_k) + 2\varepsilon.$$

Ebből $\eta_i \downarrow 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ határátmenettel

$$\nu_g^n(I) \le \sum_{k \in K} \nu_g^n(I_k) + 2\varepsilon,$$

amiből a ν_g^n halmazfüggvény σ-szubadditivitását kapjuk.

2.3.4. Megjegyzés. Az n-dimenziós Lebesgue–Stieltjes-mértékek speciális eseteként megkapható az n-dimenziós Lebesgue-mérték is, ha $g(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$. Mi az n-dimenziós Lebesgue-mértéket másként, a mértékterek szorzatánál fogjuk definiálni.

2.3.5. Tétel. *A λ_g^n mérték Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re*

$$\lambda_g^n(A) = \inf\big\{ \lambda_g^n(V) : A \subset V,\ V \text{ nyílt} \big\}.$$

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a számegyenesen a Lebesgue-mérték esetében.

* **2.3.6. Tétel.** *Legyen μ véges, teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és $x \in \mathbb{R}^n$-re*

$$g(x) = \mu\big\{ y : y \in \mathbb{R}^n,\ y_i < x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \big\}.$$

Ekkor

(1) *g minden változójában monoton növekedő és balról folytonos;*

(2) *ha $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és $i = 1, 2, \ldots, n$, akkor*

$$\lim_{x \to -\infty} g(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_n) = 0;$$

(3) *ha $[a, b)$ egy balról zárt intervallum $\mathbb{R}^n$-ben, akkor*

$$\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \ldots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g \geq 0;$$

(4) $\lambda_g^n = \mu$.

Megfordítva, ha g egy, az (1)–(3) feltételeknek eleget tevő függvény, akkor

(5) $$g(x) = \lambda_g^n \big\{ y : y \in \mathbb{R}^n,\ y_i < x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \big\}.$$

Bizonyítás. Az (1)–(3) tulajdonságok g definíciójából és a mérték folytonosságából következnek. Mivel az $[a, b)$ intervallum λ_g^n-mértéke és μ-mértéke is

$$\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \ldots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} g,$$

μ és λ_g^n egybeesnek az n-dimenziós balról zárt intervallumokon. Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, és V_i az összes olyan V-beli n-dimenziós balról zárt intervallumok diszjunkt megszámlálható uniója, amelyek minden csúcspontjának minden koordinátája $k/2^i$ alakú, ahol k egész szám, és amelyeknek minden oldala $1/2^i$ hosszúságú. Nyilván $\mu(V_i) = \lambda_g^n(V_i)$, $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$, $\cup_{i=1}^{\infty} V_i = V$ és így

$$\mu(V) = \lim_{i \to \infty} \mu(V_i) = \lim_{i \to \infty} \lambda_g^n(V_i) = \lambda_g^n(V),$$

azaz μ és λ_g^n megegyeznek a nyílt halmazokon. Innen, hasonlóan, mint az egydimenziós esetben, kapjuk, hogy

$$\mu = \lambda_g^n.$$

(5) bizonyításához legyen $x, z \in \mathbb{R}^n$, $z \leq x$. A mérték folytonossága miatt indukcióval kapjuk, hogy az $\big\{ y : y \in \mathbb{R}^n,\ y_i < x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \big\}$ halmaz λ_g^n-mértéke

(6) $$\lim_{z_1 \downarrow -\infty} \lim_{z_2 \downarrow -\infty} \ldots \lim_{z_n \downarrow -\infty} \Delta^{(1)}_{[z_1,x_1)} \Delta^{(2)}_{[z_2,x_2)} \ldots \Delta^{(n)}_{[z_n,x_n)} g.$$

Vegyük észre, hogy

$$\Delta^{(1)}_{[z_1,x_1)} \Delta^{(2)}_{[z_2,x_2)} \ldots \Delta^{(n)}_{[z_n,x_n)} g$$

$\pm g(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ alakú tagok összege, ahol minden u_i vagy x_i-vel, vagy z_i-vel egyezik meg. Ezt felhasználva, g-nek az (1)-ben szereplő határérték-tulajdonsága miatt (6)-ban az összes tag nullához tart, kivéve $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-et, amiből kapjuk az állítást.

* **2.3.7. Megjegyzés.** A tétel, hasonlóan az egydimenziós esethez, kiterjeszthető nem véges teljes Radon-mértékekre is.

2.4. A Hausdorff-mérték

Az alábbiakban megkonstruálandó mérték rendkívül nagy geometriai jelentőséggel bír.

2.4.1. Definíció. Legyen $m \geq 0$ egy rögzített valós szám és legyen

$$\boldsymbol{\alpha}(m) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^m}{\boldsymbol{\Gamma}(1 + m/2)}.$$

(Itt $\boldsymbol{\Gamma}$ a gammafüggvény, azaz $\boldsymbol{\Gamma}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, ha $x > 0$.) Nyilván $\boldsymbol{\alpha}(m) > 0$. Később meg fogjuk mutatni, hogy ha m pozitív egész szám, akkor $\boldsymbol{\alpha}(m)$ az m-dimenziós egységgömb Lebesgue-mértéke. Legyen X egy metrikus tér, és X minden nem üres A részhalmazára legyen

$$\nu^m(A) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(m)}{2^m}\big(\operatorname{diam}(A)\big)^m,$$

ahol $0^0 = 1$. Jelölje $\delta > 0$ esetén ν_δ^m a ν^m leszűkítését a δ-nál nem nagyobb átmérőjű halmazokra, χ_δ^m pedig a ν_δ^m-hez tartozó külső mértéket. Nyilván $\chi_\delta^m(A) \geq \chi_\sigma^m(A)$, ha $0 < \delta < \sigma < \infty$. Végül legyen

$$\chi^m(A) = \sup_{\delta > 0} \chi_\delta^m(A).$$

A $\nu^m(A)$ definíciójában szereplő konstans biztosítja, hogy $\nu^m(A)$ éppen a $\operatorname{diam}(A)$ átmérőjű m-dimenziós gömb térfogatával egyezik meg, minden pozitív egész számra. Ez a konstans azért szükséges, mert a „legtakarékosabb” lefedés éppen gömbökből készíthető.

2.4.2. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel χ^m külső mérték X-en.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy I megszámlálható, B, B_i, $i \in I$ részhalmazai X-nek, és $B \subset \cup_{i \in I} B_i$. Ekkor minden $\delta > 0$-ra

$$\chi_\delta^m(B) \leq \sum_{i \in I} \chi_\delta^m(B_i).$$

A jobb oldalon $\delta > 0$-ra tagonként szuprémumot véve,

$$\chi_\delta^m(B) \leq \sum_{i \in I} \chi^m(B_i),$$

amiből a bal oldalon is szuprémumot véve, kapjuk az állítást.

2.4.3. Definíció. Az előző tétel jelöléseivel a χ^m-mérhető halmazok osztályát $\mathcal{H}^m$-mel jelöljük, χ^m-et pedig *m-dimenziós Hausdorff külső mérték*nek nevezzük, χ^m megszorítását $\mathcal{H}^m$-re *m-dimenziós Hausdorff-mérték*nek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) ezt is χ^m-mel jelöljük.

2.4.4. Megjegyzések. (1) A χ^0 mérték a számláló mérték, azaz $\chi^0(A)$ az A elemeinek száma, ha A véges és ∞, ha A nem véges.

(2) Ha $0 \le m < n < \infty$ és $\chi^m(A) < \infty$, akkor $\chi^n(A) = 0$. Ennek bizonyításához vegyük észre, hogy ha $\operatorname{diam}(A) \le \delta$, akkor

$$\nu^n(A) \le \delta^{n-m} \frac{\mathbf{\Gamma}(1+m/2)\mathbf{\Gamma}(1/2)^{n-m}}{\mathbf{\Gamma}(1+n/2)2^{n-m}} \nu^m(A),$$

így egy lefedésre összegezve, $\delta \downarrow 0$ határátmenettel kapjuk az állítást.

(3) Ha $A \subset \mathbb{R}$, akkor $\lambda(A) = \chi^1(A)$. Valóban, definíció szerint $\lambda(A) \le \chi^1_\delta(A)$, ha $0 < \delta < \infty$. Mivel A minden megszámlálható sok intervallumból álló lefedése helyettesíthető egy olyan, δ-nál rövidebb intervallumokból álló lefedéssel, amelynek összhossza ugyanaz, $\chi^1_\delta(A) \le \lambda(A)$, amiből $\chi^1(A) = \lambda(A)$.

Mint a későbbiekben majd megmutatjuk, ha $0 \le m \le n$, akkor $\mathbb{R}^n$-ben χ^m a természetes m-dimenziós mérték. Így $\mathbb{R}^3$-ban χ^0 a pontok száma, χ^1 az ívhossz, χ^2 a felszín, χ^3 pedig a térfogat. Ez adja a Hausdorff-mérték óriási geometriai jelentőségét.

2.4.5. Tétel. *A 2.4.1. definíció jelöléseivel X Borel-halmazai χ^m-mérhetőek.*

* **Bizonyítás.** Legyen B és C két nem üres részhalmaza X-nek, amelyek távolsága pozitív, és legyen δ kisebb, mint a távolságuk. Ekkor

$$\chi^m_\delta(B \cup C) \ge \chi^m_\delta(B) + \chi^m_\delta(C), \tag{1}$$

mivel $B \cup C$ bármely A_i, $i \in I$ megszámlálható lefedésére nem üres, δ-nál nem nagyobb átmérőjű halmazokkal

$$\{A_i : i \in I,\ A_i \cap B \ne \emptyset\},$$

illetve

$$\{A_i : i \in I,\ A_i \cap C \ne \emptyset\}$$

diszjunkt megszámlálható halmazrendszerek, amelyek lefedik B-t, illetve C-t. Először (1) bal, majd jobb oldalán véve szuprémumot, kapjuk, hogy

$$\chi^m(B \cup C) \ge \chi^m(B) + \chi^m(C).$$

Ez 1.3.2. szerint azt jelenti, hogy minden Borel-halmaz χ^m-mérhető.

* **2.4.6. Tétel.** *A 2.4.1. definíció jelöléseivel minden $m \ge 0$-hoz és $A \subset X$-hez van olyan $G \supset A$ halmaz, amely $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, és amelyre*

$$\chi^m(A) = \chi^m(G).$$

Bizonyítás. Ha $\chi^m(A) = \infty$, legyen $G = X$. Egyébként legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$, és válasszunk olyan $A \subset \cup_{i \in I} A_i$ megszámlálható lefedést, amelyre

$$\sum_{i \in I} \nu^m(A_i) \le \chi^m_{1/k}(A) + \frac{1}{l}$$

és

$$\operatorname{diam}(A_i) \le \frac{1}{k}, \quad \text{ha} \quad i \in I.$$

Fedjük le az A_i-ket olyan V_i nyílt halmazokkal, hogy átmérőik csak annyira növekedjenek, hogy

$$\sum_{i \in I} \nu^m(V_i) \le \chi^m_{1/k}(A) + \frac{2}{l}$$

és

$$\operatorname{diam}(V_i) \le \frac{2}{k}, \quad \text{ha} \quad i \in I$$

teljesüljön. Ebből, a V_i halmazok egyesítését $V_{k,l}$-lel jelölve, $V_{k,l} \supset A$ és

$$\chi^m_{2/k}(V_{k,l}) \le \chi^m_{1/k}(A) + \frac{2}{l} \le \chi^m(A) + \frac{2}{l}.$$

Innen a $G = \cap_{k=1}^{\infty} \cap_{l=1}^{\infty} V_{k,l}$ halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, $A \subset G$ és

$$\chi^m_{2/k}(G) \le \chi^m(A) + \frac{2}{l},$$

így $k, l \to \infty$ határátmenettel $\chi^m(G) = \chi^m(A)$.

* **2.4.7. Lemma.** *Legyenek X és Y metrikus terek, $A \subset X$, $g : A \to Y$ egy Lipschitz-függvény, $m \ge 0$. Ekkor*

$$\chi^m\big(g(A)\big) \le (\operatorname{Lip} g)^m \chi^m(A).$$

Bizonyítás. A $\operatorname{Lip}(g) = 0$ eset triviális. Egyébként 2.4.1. jelöléseivel legyen $\alpha = \operatorname{Lip} g$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, és A_i, $i \in I$ egy megszámlálható sok δ/α-nál nem nagyobb átmérőjű X-beli halmazokból álló lefedése A-nak, amelyre

$$\sum_{i \in I} \nu^m_{\delta/\alpha}(A_i) \le \chi^m_{\delta/\alpha}(A) + \varepsilon \le \chi^m(A) + \varepsilon.$$

Ekkor $\operatorname{diam}\big(g(A_i)\big) \le \alpha \operatorname{diam}(A_i) \le \delta$, így

$$\chi^m_\delta\big(g(A)\big) \le \sum_{i \in I} \nu^m_\delta\big(g(A_i)\big) \le \sum_{i \in I} \alpha^m \nu^m_{\delta/\alpha}(A_i) \le \alpha^m\big(\chi^m(A) + \varepsilon\big).$$

Előbb $\delta > 0$-ra szuprémumot, majd $\varepsilon \downarrow 0$ határértéket véve,

$$\chi^m\big(g(A)\big) \le \alpha^m \chi^m(A).$$

2.4.8. Következmény. *Ha A és B (esetleg különböző metrikus terekben lévő) izometrikus halmazok, akkor $\chi^m(A) = \chi^m(B)$ minden $m \ge 0$-ra.*

* **Bizonyítás.** Ha g izometria, akkor $\operatorname{Lip}(g) = \operatorname{Lip}(g^{-1}) = 1$.

2.4.9. Definíció. A Hausdorff-mérték felhasználható arra is, hogy az X metrikus tér egy A részhalmazának a *Hausdorff-dimenzió*ját definiáljuk. Legyen

$$\dim(A) = \sup\big\{m : m \geq 0, \chi^m(A) > 0\big\}.$$

Megjegyezzük, hogy a dimenzió nem csak egész lehet, a törtdimenziós halmazok a *fraktál*ok.

2.4.10. Feladat [6]. Az előző definíció jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha A nem üres, akkor $\dim(A) = \inf\big\{m \geq 0 : \chi^m(A) = 0\big\}$, és ha A nem véges, akkor $\dim(A) = \sup\big\{m \geq 0 : \chi^m(A) = \infty\big\}$.

2.4.11. Feladat [6]. Igazoljuk, hogy ha X és Y metrikus terek, $f : X \to Y$ *Hölder-folytonos* C *Hölder-konstans*sal és $0 \leq \alpha \leq 1$ *kitevő*vel, azaz minden $x, y \in X$ esetén $d_Y\big(f(x), f(y)\big) \leq C d_X(x,y)^\alpha$, továbbá $A \subset X$ és $m \geq 0$, akkor

$$\chi^m\big(f(A)\big) \leq C^m \frac{\mathbf{\Gamma}(1/2)^{m(1-\alpha)}\mathbf{\Gamma}(1+m\alpha/2)}{2^{m(1-\alpha)}\mathbf{\Gamma}(1+m/2)} \chi^{m\alpha}(A).$$

2.4.12. Feladat [7]. Adjunk meg $[0,1]$-ben olyan kontinuum számosságú halmazt, amelynek Hausdorff-dimenziója 0.

* **2.4.13. Feladat [14].** Bizonyítsuk be, hogy a Cantor-halmaz Hausdorff-dimenziója $\ln 2/\ln 3$. (Lásd Laczkovich [26], 100. o.)

* **2.4.14. Feladat [15].** Legyen X teljes metrikus tér, az $f_i : X \to X$, $i = 1, 2, \dots, s$ leképezések pedig kontrakciók. Igazoljuk, hogy ekkor egyetlen olyan K nem üres kompakt halmaz létezik, amelyre $K = \cup_{i=1}^s f_i(K)$.

* **2.4.15. Feladat [9].** Az előző feladat jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha valamely $m \in \mathbb{R}$-re $\sum_{i=1}^s \big(\mathrm{Lip}(f_i)\big)^m = 1$, akkor $\chi^m(K) < \infty$.

* **2.4.16. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, bizonyítsuk be, hogy ha az f_i függvények hasonlóságok, és az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, akkor $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [26], 107. o.)

* **2.4.17. Feladat [14].** Az előző feladat jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha $X = \mathbb{R}^n$, és nem tudjuk, hogy az $f_i(K)$ halmazok diszjunktak, csak azt, hogy van olyan G nem üres korlátos nyílt halmaz, amelyre az $f_i(G)$ halmazok diszjunkt részhalmazai G-nek, akkor is $\chi^m(K) > 0$. (Lásd Laczkovich [26], 109. o.)

2.4.18. Feladat: Sierpiński-szőnyeg [6]. Az előző feladatok segítségével sok halmaz Hausdorff-dimenziója könnyen meghatározható. Határozzuk meg az alábbi leképezésekhez tartozó kompakt halmaz Hausdorff-dimenzióját: $f_{i,j}(x,y) = (x/3+i/3, y/3+j/3)$, $i, j \in \{0,1,2\}$, de nem mindkettő 2.

2.5. A Haar-mérték létezése

Az alábbiakban megkonstruálandó mérték alapvető fontosságú a topologikus csoportok elméletében.

* **2.5.1. Definíció.** Legyen G egy csoport, $\mathcal{A}$ a G részhalmazainak egy σ-algebrája, μ pedig egy mérték az $\mathcal{A}$-beli halmazokon. Azt mondjuk, hogy μ *bal [jobb] invariáns mérték*, ha minden $x \in G$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén $xA \in \mathcal{A}$ $[Ax \in \mathcal{A}]$ és $\mu(xA) = \mu(A)$ $[\mu(Ax) = \mu(A)]$. Ha G Hausdorff-csoport, akkor egy *bal [jobb] Haar-mérték* alatt egy olyan bal [jobb] invariáns Radon-mértéket értünk, amely megegyezik saját természetes kiterjesztésével, és amelyre minden nem üres nyílt halmaz mértéke pozitív.

* **2.5.2. Tétel: Haar-mérték létezése.** *Minden lokálisan kompakt Hausdorff-csoporton létezik bal [jobb] Haar-mérték.*

Bizonyítás. Csak a bal Haar-mérték konstrukciójával foglalkozunk, a jobb Haar-mérték konstrukciója analóg. Legyen G a topologikus csoport. Ha $A, B \subset G$, akkor legyen

$$A : B = \inf\bigl\{n : \text{léteznek } x_i \in G \text{ elemek, hogy } A \subset \cup_{i=1}^{n} x_i B\bigr\}.$$

Rögzítsünk egy C_0 nem üres belsejű kompakt halmazt, és minden C kompakt halmazra és nem üres belsejű U halmazra képezzük a

$$\mu_U(C) = \frac{C : U}{C_0 : U}$$

*Haar-féle hányados*okat. A számláló durván méri, hogy C hányszor nagyobb, mint U, a $C_0 : U$-val való osztás pedig kiküszöböli az U „alakjából” eredő hibát, C_0-hoz mint „egységhez” történő viszonyítással. A μ_U halmazfüggvény nemnegatív valós értékű, végesen szubadditív $\bigl($azaz ha $C \subset \cup_{k=1}^{n} C_k$, akkor $\mu_U(C) \le \sum_{k=1}^{n} \mu_U(C_k)\bigr)$, bal invariáns, $\mu_U(C_0) = 1$ minden U-ra, továbbá μ_U „majdnem additív”: ha $(C_1U^{-1}) \cap (C_2U^{-1}) = \emptyset$, akkor nincs olyan $x \in G$, amelyre $C_1 \cap (xU)$ és $C_2 \cap (xU)$ egyike sem üres, így

$$\mu_U(C_1 \cup C_2) = \mu_U(C_1) + \mu_U(C_2).$$

A $C : U \le (C : C_0)(C_0 : U)$ becslésből látszik, hogy $0 \le \mu_U(C) \le C : C_0 < \infty$ minden U-ra. A csoport egységelemére összehúzva U-t határértéket akarunk képezni, és ehhez Tyihonov tételét (a 11.2.12. tételt) használjuk fel. Ha U az egységelem egy környezete, tekintsük a $\prod_C [0, C : C_0]$ szorzattérben (a $[0, C : C_0]$ zárt intervallumok szorzata G összes C kompakt részhalmazára veendő) az

$$M(U) = \{\mu_V : \emptyset \ne V \subset U,\ V \text{ nyílt}\}$$

halmazt. Az $M(U)$ halmazok centrált rendszert alkotnak, így lezártjaik metszete nem üres. Legyen μ_0 ennek egy eleme. Ekkor μ_0 egy olyan függvény a kompakt halmazokon, amelyre $0 \le \mu_0(C) \le C : C_0 < \infty$. Megmutatjuk, hogy μ_0 additív. Ha C_1 és C_2 diszjunkt kompakt halmazok, akkor 11.2.19. szerint van olyan U környezete az egységelemnek, hogy $C_1U^{-1} \cap C_2U^{-1} = \emptyset$. Ebből minden $\emptyset \neq V \subset U$ nyílt halmazra

$$\mu_V(C_1 \cup C_2) = \mu_V(C_1) + \mu_V(C_2).$$

A szorzattér azon φ elemeii, amelyekre $\varphi(C_1 \cup C_2) = \varphi(C_1) + \varphi(C_2)$, egy zárt halmazt alkotnak, és ennek része $M(U)$, tehát a lezártja is, amiből μ_0 ennek a halmaznak eleme. Hasonlóan adódik, hogy μ_0 szubadditív, bal invariáns, és $\mu_0(C_0) = 1$.

Legyen

$$\mu(U) = \sup\{\mu_0(C) : C \text{ kompakt}, \ C \subset U\},$$

ha U nyílt halmaz. Nyilván μ bal invariáns. Megmutatjuk, hogy a μ nemnegatív bővített valós értékű halmazfüggvény σ-szubadditív. Ha U_1 és U_2 nyílt halmazok, és $C \subset U \subset U_1 \cup U_2$ kompakt halmaz, akkor $C \setminus U_1$ és $C \setminus U_2$ diszjunkt kompakt halmazok, így léteznek V_1 és V_2 diszjunkt, nyílt halmazok, amelyekre $C \setminus U_1 \subset V_1$ és $C \setminus U_2 \subset V_2$. Legyen $C_1 = C \setminus V_1 \subset U_1$ és $C_2 = C \setminus V_2 \subset U_2$. Ekkor $C = C_1 \cup C_2$,

$$\mu_0(C) \leq \mu_0(C_1) + \mu_0(C_2) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2),$$

és a bal oldalon szuprémumot véve, $\mu(U) \leq \mu(U_1) + \mu(U_2)$ adódik. Innen teljes indukcióval kapjuk a véges szubadditivitást. Ha $C \subset U \subset \cup_i U_i$, akkor mindig kiválasztható egy véges részlefedése C-nek, így a szubadditivitásból $\mu_0(C) \leq \sum_i \mu(U_i)$, amiből szuprémumot véve adódik a σ-szubadditivitás. Képezzük a μ-höz tartozó külső mértéket. A μ halmazfüggvény σ-szubadditivitása miatt ez kiterjesztése μ-nek, jelölje ezt is μ. Nyilván μ bal invariáns, és

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, \ U \text{ nyílt}\}$$

minden $A \subset G$-re. Megmutatjuk, hogy a nyílt halmazok mérhetőek. Azt kell belátnunk, hogy

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A),$$

ha T, A nyílt halmazok és $\mu(T) < \infty$. Az A-t $T \cap A$-val helyettesítve, $A \subset T$ feltehető, ekkor $\mu(T \cap A)$ helyett $\mu(A)$ írható, így elég belátnunk, hogy $\varepsilon > 0$ esetén

$$\mu(T \setminus A) \leq \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon.$$

Válasszunk egy $C \subset A$ kompakt halmazt, amelyre $\mu_0(C) > \mu(A) - \varepsilon$. A $V = T \setminus C$ jelöléssel, $T \setminus A \subset V$ miatt, elég belátnunk, hogy

$$\mu(V) \leq \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon.$$

Ha ez nem teljesülne, akkor létezne olyan $D \subset V$ kompakt halmaz, amelyre $\mu_0(D) > \mu(T) - \mu(A) + \varepsilon$. De

$$\mu_0(C \cup D) = \mu_0(C) + \mu_0(D) > \mu(T) - \mu(A) + \mu_0(C) + \varepsilon > \mu(T),$$

ami ellentmondás.

Nyilván $\mu(C^\circ) \leq \mu_0(C) \leq \mu(C)$. A bal oldali egyenlőtlenséget felhasználva, kapjuk, hogy a kompakt halmazokon μ véges, a jobb oldalit felhasználva pedig, hogy egy nyílt halmaz mértéke a benne lévő kompaktak mértékeinek szuprémuma. Végül, a C_0 halmazra alkalmazva az egyenlőtlenséget, az adódik, hogy $\mu(C_0)$ pozitív. Ebből minden nyílt halmaz mértéke pozitív, mert véges sok eltoltja lefedi C_0-t.

3. MÉRHETŐ FÜGGVÉNYEK

3.1. A mérhető függvények fogalma

3.1.1. Majdnem mindenütt. Legyen X egy halmaz. Ha P egy *pontbeli tulajdonság* (azaz $P(x)$ igaz vagy hamis lehet: $x \mapsto P(x)$ egy logikai függvény), akkor használni fogjuk az

$$X(P) = \{x : x \in X,\ P(x) \text{ értelmezve van és igaz}\}$$

jelölést. Például, ha f és g valós értékű függvények, akkor $X(f > g)$ az

$$\{x : x \in X,\ x \in \operatorname{dmn} f,\ x \in \operatorname{dmn} g,\ f(x) > g(x)\}$$

halmazt jelenti.

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, akkor gyakran mondjuk, hogy egy P pontbeli tulajdonság *μ-majdnem mindenütt* teljesül az $A \subset X$ halmazon. Ez azt jelenti, hogy A azon pontjainak halmaza, ahol P nem igaz, vagy nincs értelmezve, azaz az $A \setminus A(P)$ halmaz μ-mérhető és mértéke 0. Például $f = g$ μ-majdnem mindenütt azt jelenti, hogy az

$$\{x : x \in X,\ x \notin \operatorname{dmn} f \text{ vagy } x \notin \operatorname{dmn} g \text{ vagy } f(x) \neq g(x)\}$$

halmaz μ-mérhető és mértéke nulla. Mint majd látni fogjuk, számos konvergenciatételnél a nulla mértékű halmazok nem játszanak szerepet, így „mindenütt” helyett gyakran „majdnem mindenütt” írható.

3.1.2. Lemma. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, Y halmaz, f pedig X egy mérhető részhalmazán értelmezett függvény Y-beli értékekkel, akkor az*

$$\{E : E \subset Y,\ f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

halmazrendszer Y részhalmazainak egy σ-algebrája.

Bizonyítás. $f^{-1}(Y) = A$ jelöléssel $A \in \mathcal{A}$ és az

$$f^{-1}(Y \setminus E) = A \setminus f^{-1}(E),$$

valamint az

$$f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i)$$

összefüggésből következik az állítás.

3.1.3. Definíció. Tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek. Egy $f \in X \to Y$, azaz X valamely részhalmazát Y-ba képező f *függvényt* $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-mérhető*nek vagy röviden *mérhető*nek nevezünk, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \in \mathcal{B}$-re. Megjegyezzük, hogy $\operatorname{dmn} f = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$.

A leggyakoribb eset az, amikor Y topologikus tér. Ilyenkor f-et $\mathcal{A}$*-mérhető*nek vagy rövidebben *mérhető*nek nevezzük, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden B Borel-halmazára Y-nak. Sokszor, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, akkor $\mathcal{A}$-mérhető helyett μ-mérhetőt mondunk.

Ha X is topologikus tér, akkor f-et *Borel-függvény*nek nevezzük, ha $f^{-1}(B)$ Borel-halmaz X-ben minden B Borel-halmazára Y-nak.

Az előző lemma mutatja, hogy Y Borel-halmazainak rendszere helyett más halmazrendszert is választhattunk volna, például az f függvény pontosan akkor mérhető, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ minden $B \subset Y$ nyílt halmazra, és pontosan akkor Borel-függvény, ha $f^{-1}(B)$ Borel-halmaz X-ben minden $B \subset Y$ nyílt halmazra. Speciálisan, X egy Borel-halmazán értelmezett és ott folytonos függvény Borel-függvény.

A definíciót az motiválja, hogy a mértékelmélet eszközeivel egy függvény akkor kezelhető, ha a képtér sok részhalmazára azon pontok halmaza, amelyek képe ebben az adott halmazban van, kezelhető a mértékelmélet eszközeivel. Például gyakran szükségünk lesz $X(f < a) = f^{-1}[-\infty, a)$, $X(f \le a) = f^{-1}[-\infty, a]$ stb. típusú, úgynevezett „*nívóhalmazok*” mérhetőségére.

Az alábbi lemma lehetővé teszi, hogy mérhető függvényekből mérhető függvényeket rakjunk össze.

3.1.4. Lemma. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, Y topologikus tér, X az A_i mérhető halmazok megszámlálható uniója, és minden i-re az f függvény az A_i halmazon egy $f_i \in X \to Y$ mérhető függvénnyel egyezik meg, akkor f mérhető.*

Bizonyítás. Nyilván $f^{-1}(V) = \cup_i \big(f^{-1}(V) \cap A_i\big)$, de $f^{-1}(V) \cap A_i = f_i^{-1}(V) \cap A_i$ mérhető, ha $V \subset Y$ nyílt.

3.1.5. Következmény. *Ha egy teljes mértéktéren egy függvény majdnem mindenütt egyenlő egy mérhető függvénnyel, akkor mérhető.*

3.1.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és Y topologikus tér. Legyen $f \in X \to Y$ egy függvény.*

(1) *Ha az f függvény $\mathcal{A}$-mérhető, Z topologikus tér és $g \in Y \to Z$ Borel-függvény, akkor $g \circ f$ is $\mathcal{A}$-mérhető.*

(2) *Ha Y az $Y_1, Y_2, \dots$ megszámlálható bázisú topologikus terek szorzata, akkor f pontosan akkor $\mathcal{A}$-mérhető, ha az $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots\big)$ összefüggéssel definiált f_i koordinátafüggvények $\mathcal{A}$-mérhetőek minden i-re.*

Bizonyítás. (1) igaz, mivel ha C Borel-halmaz Z-ben, akkor $g^{-1}(C)$ Borel-halmaz Y-ban, és így $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big) \in \mathcal{A}$.

(2) egyik fele következik abból, hogy a

$$p_i(y_1, y_2, \dots) = y_i, \quad \text{ha} \quad y \in Y$$

összefüggéssel definiált projekciók folytonosak, tehát Borel-függvények, amiből $f_i = p_i \circ f$ mérhető. Másrészt, ha $\mathcal{V}_i$ megszámlálható bázisa Y_i-nek ($i = 1, 2, \dots$), akkor a

$$\mathcal{V} = \{V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \dots : n \in \mathbb{N},\, V_i \in \mathcal{V}_i,\, i = 1, 2, \dots, n\}$$

halmazrendszer megszámlálható bázisa Y topológiájának. Ha az f_i függvények mérhetőek és $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \dots \in \mathcal{V}$, akkor

$$f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \dots \cap f_n^{-1}(V_n) \cap f_{n+1}^{-1}(Y_{n+1}) \cap \dots$$

mérhető, így, lévén

$$\{E : E \subset Y,\, f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

σ-algebra, a $\mathcal{V}$-beli halmazok megszámlálható egyesítéseként előálló nyílt halmazok f általi teljes inverz képe is mérhető, azaz f mérhető.

3.1.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, f és g bővített valós értékű mérhető függvények és $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor a cf, $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f + g$, fg függvények mérhetőek.*

Bizonyítás. Az első három állítás következik 3.1.6.(1)-ből, hiszen az $y \mapsto cy$, $y \mapsto |y|$, $y \mapsto 1/y$ függvények Borel-függvények $\overline{\mathbb{R}}$-en. A $\max\{f, g\}$, $f + g$ és fg mérhetősége abból következik, hogy 3.1.6.(2) szerint az

$$x \mapsto \big(f(x), g(x)\big), \quad \text{ha} \quad x \in \operatorname{dmn} f \cap \operatorname{dmn} g$$

függvény mérhető, az $(y_1, y_2) \mapsto \max\{y_1, y_2\}$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$, illetve $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ függvények pedig Borel-függvények $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$-en, így az $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$ és az $x \mapsto f(x)g(x)$ összetett függvények is mérhetőek.

* **3.1.8. Tétel.** *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, Y szeparábilis normált tér $\mathbb{K}$ felett, f mérhető függvény $\mathbb{K}$-beli értékekkel, g, h pedig mérhető függvények Y-beli értékekkel. Ekkor fg és $g + h$ mérhetőek.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyítása használható.

A következő tétel bővített valós értékű függvényekkel foglalkozik.

3.1.9. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és f az X egy mérhető részhalmazán értelmezett, bővített valós értékű függvény, S pedig sűrű részhalmaza $\overline{\mathbb{R}}$-nak. A következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *az f függvény $\mathcal{A}$-mérhető;*

(2) *$X(f > a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$-re;*

(3) *$X(f < a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$-re;*

(4) *$X(f \geq a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$-re;*

(5) *$X(f \leq a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$-re.*

Továbbá, ha a fenti feltételek fennállnak, akkor

(6) *$X(f=a) \in \mathcal{A}$ minden $a \in S$-re.*

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy ha A az f értelmezési tartománya, akkor $X(f>a) = A \setminus X(f \le a)$, illetve $X(f \le a) = A \setminus X(f > a)$ miatt (2) és (5) ekvivalensek. Hasonlóan (3) és (4) is ekvivalensek. Mivel $X(f>a) = f^{-1}\big((a,\infty]\big)$ és $(a,\infty]$ nyílt $\overline{\mathbb{R}}$-ban, (1)-ből következik (2). Megfordítva, ha (2) teljesül, akkor a

$$\mathcal{B} = \big\{E : f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\big\}$$

halmazrendszer $\overline{\mathbb{R}}$ részhalmazainak olyan σ-algebrája, amely az $(a,\infty]$, $a \in S$ alakú halmazokat tartalmazza. De ha $a, a_n, b, b_n \in S$, $a < b$ és $a_n \uparrow a$, $b_n \uparrow b$, akkor $(a,b] = (a,\infty] \setminus (b,\infty]$, $(a,b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a,b_n]$ és $[-\infty,a) = \overline{\mathbb{R}} \setminus \cap_{n=1}^{\infty}(a_n,\infty]$, így $\mathcal{B}$ minden $[-\infty,a)$, $(a,\infty]$, (a,b), $a,b \in S$ intervallumot tartalmaz. Ha választunk S-nek egy megszámlálható sűrű részhalmazát, és ezen intervallumok közül csak azokat tekintjük, amelyeknek a,b végpontjai ebbe a megszámlálható halmazba esnek, megszámlálható bázisát kapjuk $\overline{\mathbb{R}}$ topológiájának. Ebből következik, hogy minden nyílt halmaz benne van $\mathcal{B}$-ben, azaz f mérhető. Hasonlóan látható be, hogy (1) és (3) ekvivalensek. Végül $X(f=a) = X(f \ge a) \cap X(f \le a)$.

Ha egy függvény egy Radon-mértékkel ellátott teret képez le folytonosan egy másik topologikus térbe, akkor a folytonosság és a mérhetőség definíciójának összevetésével azonnal látható, hogy a függvény mérhető. Triviális ellenpéldák mutatják, hogy a megfordítás nem igaz. A következő tétel azonban mégis azt mutatja, hogy a mérhetőség nem áll nagyon messze a folytonosságtól.

3.1.10. Luzin-tétel. *Legyen μ Radon-mérték X-en, Y megszámlálható bázisú topologikus tér, A véges mértékű mérhető részhalmaza X-nek, f pedig az A részhalmazon értelmezett mérhető függvény Y-beli értékekkel. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan K kompakt részhalmaza X-nek, hogy $K \subset A$, $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ és $f \mid K$ folytonos.*

Bizonyítás. Oxtoby [34] könyvének bizonyítását használjuk. Az approximációs tétel szerint van olyan C kompakt részhalmaza A-nak, hogy $\mu(A \setminus C) < \varepsilon/2$. Legyen $V_1, V_2, V_3, \ldots$ egy megszámlálható bázisa Y-nak. Mivel az $f^{-1}(V_i) \subset A$ halmazok μ-mérhetőek, választhatunk olyan G_i nyílt és K_i kompakt halmazokat, amelyekre

$$K_i \subset f^{-1}(V_i) \subset G_i \quad \text{és} \quad \mu(G_i \setminus K_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Legyen $G = \cup_{i=1}^{\infty}(G_i \setminus K_i)$ és $K = C \setminus G$. Nyilván K kompakt részhalmaza A-nak és

$$\mu(A \setminus K) \le \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(G) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon.$$

Jelölje g az f megszorítását K-ra. Mivel

$$g^{-1}(V_i) = f^{-1}(V_i) \cap K = G_i \cap K,$$

g folytonos K-n mint altéren.

* **3.1.11. Következmény.** *Ha az előző tételben $Y = \mathbb{R}$ és X lokálisan kompakt, akkor Tietze kiterjesztési tétele (11.3.15.) szerint $f \mid K$ kiterjeszthető a folytonosság megtartásával egy g kompakt tartójú, az egész X-en értelmezett függvénnyé, és erre a függvényre $\mu A(f \neq g) < \varepsilon$.*

* **3.1.12. Tétel.** *Ha μ Radon-mérték X-en, Y megszámlálható bázisú topologikus tér, f az X egy mérhető és σ-véges A részhalmazán értelmezett mérhető függvény Y-beli értékekkel, akkor van olyan $B \subset A$ Borel-halmaz, amelyre $\mu(A \setminus B) = 0$ és $f \mid B$ Borel-függvény.*

Bizonyítás. Legyen $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, ahol $\mu(A_n) < \infty$, és válasszunk minden n-re olyan $K_{n,k} \subset A_n$ kompakt halmazokat, amelyekre $f \mid K_{n,k}$ folytonos és $\mu(A_n \setminus K_{n,k}) < 1/k$. Legyen $B = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}$. Ekkor

$$\mu(A_n \setminus \cup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}) \leq \mu(A_n \setminus K_{n,k}) \leq \frac{1}{k} \to 0$$

és

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus \cup_{k=1}^{\infty} K_{n,k}) = 0.$$

Ha V nyílt részhalmaza Y-nak, akkor

$$(f \mid B)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(f^{-1}(V) \cap K_{n,k}\right).$$

Mivel $f^{-1}(V) \cap K_{n,k} = (f \mid K_{n,k})^{-1}(V)$ nyílt a $K_{n,k}$ altérben, és így Borel-halmaz, $(f \mid B)^{-1}(V)$ is Borel-halmaz.

$\to$ **3.1.13. 3.1.13. Feladat [10].** Adjunk meg olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető függvényt, amelynek semmilyen 1 mértékű $A \subset [0,1]$ halmazra vett megszorítása sem folytonos.

3.2. Mérhető függvények sorozatai

3.2.1. Tétel. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, Y metrikus tér, $f, f_n : X \to Y$, az f_n függvények mérhetőek, és $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re, akkor f is mérhető.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha V nyílt részhalmaza Y-nak, akkor

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}\big\{y : \mathrm{dist}(y, Y \setminus V) > 1/j\big\}.$$

Ebből már következik a bizonyítandó állítás, mivel $y \mapsto \mathrm{dist}(y, A)$ folytonos függvény, így az $\big\{y : \mathrm{dist}(y, Y \setminus V) > 1/j\big\}$ halmazok nyíltak, amiből a jobb oldalon mérhető halmaz áll.

Legyen $x \in f^{-1}(V)$, azaz tegyük fel, hogy $f(x) \in V$. Mivel V nyílt, van olyan j, hogy $\mathbb{U}\big(f(x), 2/j\big) \subset V$. Mivel $f_k(x) \to f(x)$, van olyan n, hogy $k \geq n$ esetén $f(x)$ és $f_k(x)$ távolsága kisebb, mint $1/j$. Ekkor $\mathrm{dist}\big(f_k(x), Y \setminus V\big) > 1/j$, amiből x eleme a jobb oldalnak. Megfordítva, ha x eleme a jobb oldalnak, akkor van olyan j és n, hogy $k \geq n$ esetén $\mathrm{dist}\big(f_k(x), Y \setminus V\big) > 1/j$. Határátmenettel azt kapjuk, hogy $\mathrm{dist}\big(f(x), Y \setminus V\big) \geq 1/j$, amiből $f(x) \in V$.

3.2.2. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és legyenek $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$ mérhető függvények. Ekkor az alábbi összefüggésekkel definiált függvények mérhetőek:*

(1) $(\sup_n f_n)(x) = \sup_n f_n(x) = \sup\big\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\big\}$, *ha* $x \in X$;

(2) $(\inf_n f_n)(x) = \inf_n f_n(x) = \inf\big\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\big\}$, *ha* $x \in X$;

(3) $(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x)$, *ha* $x \in X$;

(4) $(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x)$, *ha* $x \in X$.

Bizonyítás. (1) a minden $a \in \mathbb{R}$-re fennálló

$$X(\sup_n f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n > a)$$

összefüggésből következik. (2) hasonlóan mutatható meg. (3) és (4) az (1)-ből és a (2)-ből következik.

3.2.3. Következmény. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$ függvények. Ha az f_n függvények mérhetőek, és az f_n függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál az f függvényhez, akkor f is mérhető.*

Bizonyítás. Az f függvény majdnem mindenütt egyenlő a $\limsup_{n\to\infty} f_n$ mérhető függvénnyel.

3.2.4. Mértékben való konvergencia. A mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia mellett a mértékben való konvergencia játszik fontos szerepet. Például mindkét konvergencia igen fontos a valószínűségszámításban.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér. Jelölje $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$ az $X \to Y$-beli μ-majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztályát. Ha $f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$, akkor 3.1.6. szerint $x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$ és így $x \mapsto d\big(f(x), g(x)\big)$ is mérhető. Ha $f, f_n \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$, akkor azt mondjuk, hogy f_n *mértékben konvergál* f-hez, ha minden $\sigma > 0$-ra $\mu X\big(d(f_n, f) > \sigma\big) \to 0$, ha $n \to \infty$.

* **3.2.5. Megjegyzés.** Megmutatjuk, hogy a mértékben való konvergencia metrikából, pontosabban eltérésből származtatható. Legyen

$$d_0(f, g) = \inf\Big\{\varepsilon : \varepsilon \in \mathbb{R},\, \mu X\big(d(f, g) > \varepsilon\big) \le \varepsilon\Big\}.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\mu X\big(d(f, g) > d_0(f, g)\big) \le d_0(f, g), \tag{1}$$

azaz a $d_0(f, g)$ definíciójában a jobb oldalon szereplő halmaz tartalmazza a pontos alsó korlátját. Legyen $\varepsilon = d_0(f, g)$ és válasszunk olyan $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon$ sorozatot, amelyre

$$\mu X\big(d(f, g) > \varepsilon_n\big) \le \varepsilon_n.$$

Az $X\big(d(f, g) > \varepsilon_n\big)$ halmazsorozat monoton növekedő és egyesítése $X\big(d(f, g) > \varepsilon\big)$, így a mérték folytonossága miatt

$$\mu X\big(d(f, g) > \varepsilon\big) = \lim_{n\to\infty} \mu X\big(d(f, g) > \varepsilon_n\big) \le \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

ami a bizonyítandó állítás.

Megmutatjuk, hogy d_0 eltérés $\mathbb{L}_Y^0(\mu)$-n. Nyilvánvaló, hogy nemnegatív és szimmetrikus. A háromszög-egyenlőtlenség a nyilvánvaló

$$X\big(d(f, h) > d_0(f, g) + d_0(g, h)\big) \subset X\big(d(f, g) > d_0(f, g)\big) \cup X\big(d(g, h) > d_0(g, h)\big)$$

tartalmazásból és (1)-ből következik. (1)-ből az is következik, hogy $d_0(f, g) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = g$ majdnem mindenütt.

Végül belátjuk, hogy $d_0(f_n, f) \to 0$ ekvivalens a mértékben való konvergenciával. Valóban, ha f_n mértékben konvergál f-hez, akkor minden $\sigma > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n \ge N$, akkor $\mu X\big(d(f_n, f) > \sigma\big) \le \sigma$, azaz $d_0(f_n, f) \le \sigma$. Megfordítva, ha $n \ge N$ esetén $d_0(f_n, f) \le \min\{\varepsilon, \sigma\}$, akkor (1) szerint

$$\mu X\big(d(f_n, f) > \sigma\big) \le \mu X\big(d(f_n, f) > \min\{\varepsilon, \sigma\}\big) \le \min\{\varepsilon, \sigma\} \le \varepsilon.$$

3.2.6. Jegorov tétele. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, $f, f_n : X \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ mérhető függvények. Ha az f_n függvénysorozat* *majdnem mindenütt konvergál f-hez, akkor minden $\delta > 0$-hoz van olyan A mérhető részhalmaza X-nek, hogy $\mu(X \setminus A) < \delta$ és az A halmazon a konvergencia egyenletes, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor*

$$d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon \quad \text{minden } x \in A\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Legyen

$$A_{i,j} = \bigcup_{n=j}^{\infty} X\big(d(f_n, f) \geq 1/i\big),$$

ha i és j pozitív egészek. Az $A_{i,j}$ halmazok mérhetőek. Vegyük észre, hogy bármely rögzített i esetén, ha egy $x \in X$-re $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, akkor $x \notin A_{i,j}$ valamely j-re, így $x \notin \cap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$, amiből $\mu(\cap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}) = 0$. Így a mérték folytonossága miatt minden i-re $\mu(A_{i,j}) \to 0$, ha $j \to \infty$. Válasszunk minden i-hez egy olyan j_i-t, amelyre $\mu(A_{i,j_i}) < \delta/2^i$, és álljon A az X összes olyan pontjaiból, amelyek nincsenek benne egyetlen A_{i,j_i}-ben sem. Ekkor

$$\mu(X \setminus A) = \mu\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_{i,j_i}\big) < \delta.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $1/i < \varepsilon$, akkor bármely $x \in A$-ra $x \notin A_{i,j_i}$ miatt

$$d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{i} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n \geq j_i.$$

A következő két tételben a mértékben való és a majdnem mindenütti konvergencia kapcsolatával foglalkozunk.

3.2.7. Lebesgue tétele. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, $f, f_n : X \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ mérhető függvények. Ha az f_n függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál f-hez, akkor f_n mértékben is konvergál f-hez.*

Bizonyítás. Jegorov tétele szerint, minden $\varepsilon, \sigma > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$\mu X\big(d(f_n, f) > \sigma\big) \leq \varepsilon.$$

3.2.8. Riesz-féle kiválasztási tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ mérhető függvények. Ha f_n mértékben konvergál f-hez, akkor f_n-nek van olyan f_{n_k} részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergál f-hez.*

Bizonyítás. Válasszunk teljes indukcióval olyan $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ természetes számokat, amelyekre $\mu X\big(d(f_{n_k}, f) > 1/k\big) \leq 1/2^k$ teljesül $k = 1, 2, 3, \dots$-ra. Legyen

$$A_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} X\big(d(f_{n_k}, f) > 1/k\big),$$

ha $i = 1, 2, 3, \ldots$, és $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor

$$\mu(A_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu X\big(d(f_{n_k}, f) > 1/k\big) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}},$$

és $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, valamint $\mu(A_1) \leq 1 < \infty$ miatt

$$0 \leq \mu(A) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i) \leq \lim_{i \to \infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0.$$

Ezek után elég megmutatnunk, hogy ha $x \in X \setminus A$, akkor $f_{n_k}(x) \to f(x)$. Valóban, ha $x \in X \setminus A$, akkor van olyan i, hogy $x \notin A_i$, azaz $k \geq i$-re

$$d\big(f_{n_k}(x), f(x)\big) \leq \frac{1}{k} \to 0,$$

amint $k \to \infty$.

3.2.9. Definíció. Legyenek X és Y halmazok. Az $f : X \to Y$ függvényt *egyszerű függvény*nek nevezzük, ha értékkészlete véges.

A következő lemma fontos technikai segédeszköz.

3.2.10. Approximációs lemma nemnegatív függvényekre. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f : X \to [0, \infty]$ mérhető függvény. Ekkor létezik olyan $s_n : X \to \mathbb{R}$ nemnegatív mérhető egyszerű függvényekből álló $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots$ sorozat, amely pontonként konvergál f-hez.*

Bizonyítás. Legyen r_n egy olyan pozitív tagú számsorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = \infty$, legyen $s_0(x) \equiv 0$, legyen továbbá indukcióval

$$A_n = X(f \geq r_n + s_{n-1}) \quad \text{és} \quad s_n = s_{n-1} + r_n \xi_{A_n},$$

ahol ξ_{A_n} az A_n karakterisztikus függvénye. Ha $f(x) = \infty$, akkor $x \in A_n$ minden n-re, és így $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \to \infty = f(x)$. Ha $0 \leq f(x) < \infty$, akkor végtelen sok olyan n van, amelyre $x \notin A_n$, és minden ilyen n-re $r_n > f(x) - s_{n-1}(x) \geq 0$.

Az előző lemma könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, amikor f értékei $\overline{\mathbb{K}}$-ban vagy $\mathbb{K}^n$-ben vannak; a monotonitás helyébe az kerül, hogy $|s_n|$ monoton növekedő, és nem nagyobb, mint $|f|$. Az alábbi tétel további általánosításnak tekinthető.

* **3.2.11. Approximációs lemma.** *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, (Y, d) szeparábilis metrikus tér, és $f : X \to Y$ mérhető függvény. Ekkor léteznek olyan $s_n : X \to Y$ egyszerű mérhető függvények, hogy $s_n \to f$ az X minden pontjában. Ha $(Y, |\ |)$ szeparábilis normált tér, akkor s_n választható úgy, hogy $|s_n| \leq |f|$ teljesüljön minden n-re.*

Bizonyítás. Legyen V_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ egy megszámlálható bázisa Y-nak, és $y_i \in \overline{V_i}$ minden i-re. Indukcióval, legyen $s_0(x) \equiv y_0$ és $n > 0$ esetén

$$s_n(x) = \begin{cases} y_n, & \text{ha } x \in f^{-1}(V_n) \text{ és } d\big(y_n, f(x)\big) < d\big(s_{n-1}(x), f(x)\big); \\ s_{n-1}(x) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha x az f értelmezési tartományába tartozik, és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan n, hogy $f(x) \in V_n \subset \mathbb{U}(f(x), \varepsilon)$. Most $k \geq n$ esetén $d(s_k(x), f(x)) \leq d(y_n, f(x)) \leq \varepsilon$.

Ha Y szeparábilis normált tér, akkor legyen $c_0 = 0$, válasszuk a V_n-eket $\mathbb{U}(c_n, r_n)$ nyílt gömböknek, legyen $y_n = 0$, ha $|c_n| \leq r_n$, és legyen $y_n = \big((|c_n| - r_n)/|c_n|\big)c_n$, ha $|c_n| > r_n$.

* **3.2.12. Megjegyzés.** Mint látható, fontos tételek csak akkor érvényesek, ha az értékkészlet szeparábilis. Ez nyilván enyhíthető úgy, hogy a szereplő függvények értékei egy-egy szeparábilis altérben legyenek. Ha tehát $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, (Y, d) metrikus tér, legyen $\mathbb{L}^0_Y(\mu)$ azon $f \in X \to Y$ μ-majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztálya, amelyekre $\operatorname{rng} f$ szeparábilis; d_0 definíciója értelmes marad erre az általánosabb esetre is, és tulajdonságai is változatlanok. Ha a mértéktér teljes, akkor azt is elég lenne feltenni, hogy f értékei μ-majdnem mindenütt valamely $Z \subset Y$ (az f-től függő) szeparábilis altérben vannak. A gyakorlatban ennek a feltételnek a teljesülése általában könnyen belátható.

$\to$ **3.2.13. Feladat [7].** Legyenek az f_n függvények $[0,1]$-en a következőképpen definiálva: ha $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$, akkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \big[j/2^k, (j+1)/2^k\big], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy f_n mértékben tart az azonosan nulla függvényhez, de $f_n(x)$ egyetlenegy $x \in [0,1]$-re sem konvergens.

* **3.2.14. Feladat [13].** A Riesz-féle kiválasztási tétel jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha Y teljes és $\sum_{n=1}^{\infty} d_0(f_{n+1}, f_n) < \infty$, akkor van olyan f mérhető függvény, amelyre $d_0(f_n, f) \to 0$ és $f_n \to f$ majdnem mindenütt. Vezessük le ebből, hogy minden Cauchy-sorozatnak van olyan részsorozata, amely konvergens és majdnem mindenütt is konvergens, speciálisan d_0 teljes.

$\to$ **3.2.15. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a nemnegatív függvényekre vonatkozó approximációs lemmában a függvény korlátos, akkor a konvergencia egyenletes.

3.2.16. Feladat [7]. Mutassuk meg, hogy ha az f_n valós értékű függvények mérhetőek, akkor azon pontok halmaza, ahol a függvénysorozatnak létezik a határértéke, mérhető.

3.2.17. Feladat [9]. Keressünk olyan $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekből álló függvénysorozatot és olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre f_n pontonként konvergál f-hez, de a konvergencia egyetlen részintervallumon sem egyenletes.

3.2.18. Feladat [6]. Adjunk meg olyan folytonos $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló függvénysorozatot, amely minden pontban monoton csökkenően az azonosan nulla függvényhez konvergál, de Lebesgue-mértékben nem.

3.2.19. Feladat [10]. Igazoljuk, hogy egy véges mértéktéren mérhető valós értékű függvények egy sorozata pontosan akkor konvergál mértékben egy f mérhető valós értékű függvényhez, ha minden részsorozatából kiválasztható olyan részsorozat, amely majdnem mindenütt f-hez konvergál.

3.2.20. Feladat [10]. Bizonyítsuk be, hogy a $[0,1]$-en értelmezett, valós értékű Lebesgue-mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia nem származtatható topológiából.

* **3.2.21. Definíció.** Az X topologikus teret az Y topologikus térbe képező függvény *Baire-függvény*, ha benne van az összes olyan függvényosztályban, amely tartalmazza a folytonos függvényeket és nem vezet ki belőle a pontonkénti határérték képzése. Nyilván a Baire-függvények mind Borel-függvények. Legyen $\mathcal{B}_0(X;Y)$ az X-et Y-ba képező folytonos függvények osztálya, és minden $\alpha > 0$ rendszámra $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ az összes olyan függvények osztálya, amelyek előállnak valamely $f_n \in \mathcal{B}_{\beta_n}(X;Y)$, $\beta_n < \alpha$ függvénysorozat pontonkénti határértékeként.

* **3.2.22. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ osztályok egyesítése az összes α megszámlálható rendszámra a Baire-függvények osztálya, így ha α nem megszámlálható rendszám, akkor $\mathcal{B}_\alpha(X;Y)$ a Baire-függvények osztálya.

* **3.2.23. Feladat [9].** Legyenek $f_1, f_2, \dots, f_n$ valós értékű Baire-függvények az X topologikus téren, és $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Baire-függvény. Mutassuk meg, hogy

$$x \mapsto g\bigl(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\bigr)$$

is Baire-függvény.

* **3.2.24. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy ha X metrikus tér, akkor az X-et $\mathbb{R}$-be képező Baire-függvények osztálya megegyezik a Borel-függvények osztályával.

* **3.2.25. Feladat [16].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$ helyett egy Y szeparábilis metrikus térbe képező függvények osztályára az előző feladat állítása pontosan akkor marad érvényben, ha Y minden véges részhalmaza minden $\varepsilon > 0$-ra benne van $\mathbb{R}$ egy folytonos képének az ε-környezetében.

* **3.2.26. Feladat [20].** Mutassuk meg, hogy minden α megszámlálható rendszámra

$$\mathcal{B}_\alpha(\mathbb{R};\mathbb{R}) \setminus \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{B}_\beta(\mathbb{R};\mathbb{R}) \neq \emptyset.$$

4. AZ INTEGRÁL

Az integrál „Riemann-összegekkel” való definiálásának gondolata legalább Arkhimédészig nyúlik vissza. Riemann érdeme az volt, hogy szükséges és elégséges feltételt talált az integrálhatóságra: ezt ma, némileg átfogalmazva, a „Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma” néven emlegetjük. Az így kialakult „Riemann-integrál” továbbfejlesztését elsősorban az integrál és a határérték felcserélésével kapcsolatos problémák kényszerítették ki. Lebesgue 1901-ben egy nemnegatív valós függvény integrálját a görbe alatti terület síkbeli Lebesgue-mértékeként definiálta, tetszőleges valós függvény integrálját pedig a pozitív és negatív rész segítségével. Lebesgue eredeti gondolata lényegében azzal ekvivalens, hogy nem az értelmezési tartományt osztjuk fel, hanem az értékkészletet. Eljárása nem érzékeny a szakadásokra és gyors oszcillációkra, viszont intervallumnál bonyolultabb halmazok hosszának (mértékének) ismeretére is szükség van. Az új integrálfogalom segítségével definiálta Riesz Frigyes az $\mathbb{L}^p$-tereket.

A mértéktér általános fogalmának kialakulásával együtt általánosították a Lebesgue-féle integrálfogalmat is. Az így kialakult fogalmat ma egyszerűen integrálnak nevezzük, a Lebesgue-integrál elnevezést a Lebesgue-mérték szerinti integrálra tartva fenn.

4.1. Nemnegatív mérhető függvények integrálja

Nemnegatív függvények esetén legegyszerűbb alsó közelítésekkel dolgozni. Minden nemnegatív mérhető függvénynek tulajdonítható integrál.

4.1.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és f nemnegatív, bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Az f

$$\int f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

módon jelölt *integrál*ján az összes

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$$

alakú *integrálközelítő összeg*ek pontos felső korlátját értjük, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n$ diszjunkt mérhető részhalmazai X-nek, $y_1, y_2, \dots, y_n$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \ge y_i$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1, 2, \dots, n)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$). Megjegyezzük, hogy ez a szuprémum nyilván ugyanaz marad, ha $f(x) \ge y_i$ csupán majdnem minden $x \in A_i$-re teljesül $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Ha A mérhető részhalmaza X-nek, akkor az f függvény

$$\int_A f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_A f(x)\,d\mu(x)$$

*A halmaz feletti integrál*ját az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként értelmezzük.

$\to$ **4.1.2. Feladat [6].** Az $f(0) = 0$, $f(x) = 1 + \sin(1/x)$, ha $0 < |x| \le 1$ függvény esetén, 8 egyenlő részre osztva az értelmezési tartományt, illetve az értékkészletet, ábrázoljuk a Riemann-féle és a Lebesgue-féle alsó összegeknek megfelelő halmazokat.

4.1.3. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f és g pedig nemnegatív bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények, $\alpha \ge 0$ valós szám. Ekkor*

(1) *ha $f \le g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$ (monotonitás);*

(2) *ha $f = g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$;*

(3) *$\alpha\mu X(f \ge \alpha) \le \int f\,d\mu$ (Csebisev-egyenlőtlenség; itt $0 \cdot \infty = 0$);*

(4) *ha $\int f\,d\mu < \infty$, akkor f majdnem mindenütt véges;*

(5) *ha $\int f\,d\mu = 0$, akkor f majdnem mindenütt nulla;*

(6) *$\int \alpha f\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu$ (pozitív homogenitás; itt $0 \cdot \infty = 0$);*

(7) *ha f egyszerű függvény, értékkészlete $y_1, y_2, \dots, y_n$, akkor*

$$\int f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \mu X(f = y_i)$$

(itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Bizonyítás. (1) az előző definícióban tett megjegyzés felhasználásával triviális. (2) az (1)-ből következik. A Csebisev-egyenlőtlenség $y_1 = \alpha$, $A_1 = X(f \ge \alpha)$ választással a definícióból következik. (4)-et úgy kapjuk, hogy $\alpha \in \mathbb{N}$-re, (5)-öt pedig, hogy $1/\alpha \in \mathbb{N}$-re alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, vegyük észre, hogy ha $x \in A_i$ esetén $f(x) \ge y_i$, akkor $\alpha f(x) \ge \alpha y_i$, amiből bármely integrálközelítő összegre

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i) \le \int \alpha f\,d\mu.$$

Innen

$$\alpha \int f\,d\mu \le \int \alpha f\,d\mu.$$

Ugyanezt felírva $1/\alpha$-ra és αf-re, kapjuk az állítást. (7) bizonyításához, az integrál definíciója szerint

$$\int f\,d\mu \geq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu X(f = y_i).$$

Ha most $A_1, A_2, \ldots, A_m$ diszjunkt mérhető halmazok, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq y'_j$ minden $x \in A_j$-re, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} y'_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} y'_j \mu\big(A_j \cap X(f = y_i)\big)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i \mu\big(A_j \cap X(f = y_i)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu X(f = y_i),\end{aligned}$$

amiből

$$\int f\,d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu X(f = y_i).$$

4.1.4. Fatou-lemma. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és $f_n : X \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ mérhető függvények, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\mu(x).$$

Bizonyítás. Legyenek $A_1, \ldots, A_m$ diszjunkt mérhető halmazok, $y_1, \ldots, y_m$ pozitív valós számok úgy, hogy $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq y_i$ teljesüljön minden $x \in A_i$-re, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és legyen $0 < t < 1$. Tekintsük minden i-re az

$$A_{i,n} = \bigcap_{j=n}^{\infty} A_i(f_j > ty_i)$$

növekvő halmazsorozatot. Mivel ha $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \geq y_i$, akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy $f_j(x) > ty_i$ minden $j \geq n$-re, $A_i = \cup_{n=1}^{\infty} A_{i,n}$. Így a mérték folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i).$$

Mivel

$$\int_X f_n\,d\mu \geq \sum_{i=1}^{m} ty_i \mu(A_{i,n}),$$

mindkét oldal alsó határértékét véve,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \geq t \sum_{i=1}^{m} y_i \mu(A_i).$$

Most $t \uparrow 1$-et, majd a jobb oldalon felső határt véve, kapjuk az állítást.

4.1.5. Levi tétele (vagy Beppo Levi tétele). *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* $f_n : X \to [0, \infty]$, $n = 1, 2, \ldots$ *mérhető függvények úgy, hogy* $f_n \le f_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu(x).$$

Bizonyítás. A Fatou-lemmából következik a nagyobb vagy egyenlő, 4.1.3.(1)-ből pedig a kisebb vagy egyenlő.

4.1.6. Tétel. *Ha* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* I *megszámlálható halmaz, és minden* $i \in I$*-re* $f_i : X \to [0, \infty]$ *mérhető függvény, akkor*

$$\sum_{i\in I} \int_X f_i \, d\mu = \int_X \sum_{i\in I} f_i(x) \, d\mu(x).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy f és g egyszerű függvények, $x_1, \ldots, x_n$, illetve $y_1, \ldots, y_m$ értékkészlettel. Ha $f + g$ értékkészlete $z_1, \ldots, z_\ell$, akkor

$$\begin{aligned}
\int (f+g)\, d\mu &= \sum_{k=1}^{\ell} z_k \mu X(f+g = z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{x_i + y_j = z_k} (x_i + y_j) \mu\big(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \mu\big(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)\big) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_j \mu\big(X(f = x_i) \cap X(g = y_j)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \mu X(f = x_i) + \sum_{j=1}^{m} y_i \mu X(g = y_j) = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.
\end{aligned}$$

Most legyenek f és g tetszőleges nemnegatív, bővített valós értékű mérhető függvények. Ekkor az approximációs lemma szerint választhatunk olyan r_n és s_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ egyszerű függvényekből álló sorozatokat, hogy $r_n \uparrow f$ és $s_n \uparrow g$. Nyilván $(r_n + s_n) \uparrow (f + g)$, így Beppo Levi tétele szerint

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (r_n + s_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int r_n \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

Végül az általános esetben feltehetjük, hogy $I \subset \mathbb{N}$. Az eddig bizonyítottakat és Beppo Levi tételét alkalmazva,

$$\int \sum_{i\in I} f_i(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{\substack{i\le n \\ i\in I}} f_i(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i\le n \\ i\in I}} \int f_i \, d\mu = \sum_{i\in I} \int f_i \, d\mu.$$

→ **4.1.7. Feladat [7].** Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelyre a Fatou-lemmában éles egyenlőtlenség teljesül. Lehet-e a függvénysorozat egyenletesen konvergens? Lehet-e a függvénysorozat korlátos, ha a mértéktér véges?

$\to$ **4.1.8. Feladat** [7]. Mutassuk meg, hogy Levi tétele nem marad igaz, ha kisebb vagy egyenlő helyett nagyobb vagy egyenlő szerepel.

4.1.9. Feladat [10]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, (Y, d_Y) szeparábilis metrikus tér. Igazoljuk, hogy a mérhető Y-beli értékű függvények között a

$$d(f, g) = \int \frac{d_Y(f, g)}{1 + d_Y(f, g)}\, d\mu$$

összefüggés egy eltérést ad meg, és a megfelelő konvergencia a mértékben való konvergencia.

4.2. Integrálható függvények

4.2.1. Definíció. Egy tetszőleges halmazon értelmezett, bővített valós értékű f függvény f^+ *pozitív, illetve* f^- *negatív részét* definiáljuk az

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$
$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

összefüggésekkel, ha f értelmezve van az x pontban. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, egy bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény *integrál*ját az

$$\int f = \int f\, d\mu = \int_X f\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu(x) = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a jobb oldalon álló különbségnek nem mind a két tagja ∞. Ha $\int f\, d\mu$ véges, akkor f-et *integrálható*nak vagy *szummábilis*nek nevezzük. A „*létezik az integrál*” és az „integrálható” fogalmak között hasonló kapcsolat van, mint a „létezik a határérték” és a „konvergens” fogalmak között. Az első esetben végtelen is megengedett, a második esetben nem. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az A halmaz feletti $\int_A f\, d\mu$ integrált az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

4.2.2. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f és g pedig bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények. Ekkor*

(1) *ha $f = g$ majdnem mindenütt, és $\int f\, d\mu$ létezik, akkor $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$;*

(2) *f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, és $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu$;*

(3) *ha $\int f\, d\mu$ létezik és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ (homogenitás; itt $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$);*

(4) *ha $\int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ értelmezve van, akkor $\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$ (additivitás);*

(5) *ha $f \leq g$ és $\int f\, d\mu > -\infty$ vagy $\int g\, d\mu < \infty$, akkor $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$;*

(6) *ha $|f| \leq g$ majdnem mindenütt és g integrálható, akkor f is integrálható (majoráns kritérium).*

Bizonyítás. (1) abból következik, hogy $f^+ = g^+$ és $f^- = g^-$ majdnem mindenütt. (2) következik abból, hogy $|f| = f^+ + f^-$. (3) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ és $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, így (3) a definícióból következik. Az $\alpha < 0$ eset erre az esetre vezethető vissza a $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ összefüggések felhasználásával. (5) az $f^+ \le g^+$ és $f^- \ge g^-$ egyenlőtlenségek következménye. (6) $\int f\,d\mu$ definíciójából triviális. Végül ha $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu \in \mathbb{R}$, akkor (4) a majdnem mindenütt fennálló

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \tag{7}$$

összefüggés átrendezésével adódó

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

összefüggés mindkét oldalának integrálásával, majd visszarendezésével adódik. Ha

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \infty,$$

akkor $f > -\infty$ és $g > -\infty$ majdnem mindenütt, és a (7) összefüggésből

$$(f+g)^+ + f^- + g^- \ge f^+ + g^+$$

majdnem mindenütt, így $\int (f+g)^+\,d\mu = \infty$, a majdnem mindenütt fennálló

$$(f+g)^- \le f^- + g^-$$

egyenlőtlenségből viszont $\int (f+g)^-\,d\mu < \infty$. Hasonlóan kezelhető az $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = -\infty$ eset is.

4.2.3. Lebesgue majorált konvergencia tétele. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények, g pedig nemnegatív bővített valós értékű integrálható függvény. Ha $|f_n| \le g$ majdnem mindenütt $(n = 1, 2, \ldots)$, és $f_n \to f$ majdnem mindenütt, akkor*

$$\int |f_n - f|\,d\mu \to 0 \quad \textit{és} \quad \int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu,$$

amint $n \to \infty$.

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon megváltoztatva a $g, f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ függvényeket, feltehetjük, hogy $f_n \to f$ mindenütt, és $|f_n| \le g$ mindenütt. Alkalmazva a Fatou-lemmát a nemnegatív függvényekből álló $2g - |f_n - f|$ függvénysorozatra, amely pontonként $2g$-hez konvergál, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &\ge \int 2g\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int \big(2g - |f_n - f|\big)\,d\mu \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu \ge \limsup_{n\to\infty} \Big|\int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu\Big| \ge 0. \end{aligned}$$

4.2.4. Lemma. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$ és f egy bővített valós értékű függvény. Legyen*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \text{ és } x \in \operatorname{dmn} f, \\ 0, & \text{ha } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_A f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az f függvény pontosan akkor μ_A-mérhető, ha a g függvény μ-mérhető. Az állítás nyilvánvaló, ha f nemnegatív egyszerű függvény, Beppo Levi tételéből következik, ha f nemnegatív függvény, és a 4.2.1. definícióból, ha f tetszőleges.

4.2.5. Az integrál σ-additivitása. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f olyan bővített valós értékű függvény, amelynek integrálja létezik, és $A_1, A_2, A_3, \ldots$ diszjunkt mérhető halmazok egy sorozata, $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f\, d\mu.$$

Bizonyítás. Nemnegatív f-re 4.1.6. szerint

$$\int_X f\xi_A\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X f\xi_{A_i}\, d\mu.$$

Ez viszont az előző segédtétel szerint éppen (1)-et jelenti. Tetszőleges f-re a 4.2.1. definícióból kapjuk az állítást.

4.2.6. Az integrál abszolút folytonossága. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f pedig bővített valós értékű integrálható függvény és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy*

$$\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon, \qquad \text{ha } A \in \mathcal{A} \text{ és } \mu(A) < \delta.$$

Bizonyítás. Mivel $f_n = \min\{|f|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ nemnegatív függvények monoton növekedő sorozata, amely pontonként $|f|$-hez konvergál, Beppo Levi tétele szerint választhatunk olyan n természetes számot, amelyre

$$\int \big(|f| - f_n\big)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_A \big(|f| - f_n\big)\, d\mu + \int_A f_n\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + n\mu(A).$$

Az állítás $\delta = \varepsilon/(2n)$ választással nyilván fennáll.

$\to$ **4.2.7. Feladat** [**3**]. Számítsuk ki egy függvény Dirac-mérték szerinti integrálját.

$\to$ **4.2.8. Feladat** [**5**]. Számítsuk ki egy függvény számláló mérték szerinti integrálját.

4.2.9. Feladat [**9**]. Számítsuk ki $\int_X f\,d\mu$-t, ha $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha : X \to [0, \infty]$ és $\mu(A) = \sum_{x \in A} \alpha(x)$, ha $A \subset X$.

4.2.10. Feladat [**6**]. Igazoljuk, hogy ha egy integrálható bővített valós értékű f függvényre $\int_A f = 0$ minden mérhető A halmazra, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

$\to$ **4.2.11. Feladat** [**6**]. Igazoljuk, hogy valós értékű függvények körében egy korlátos és mérhető függvénynek minden integrálható függvénnyel való szorzata integrálható. Igaz-e a megfordítás?

4.2.12. Feladat [**7**]. Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy σ-véges halmazon kívül nulla.

4.2.13. Feladat [**10**]. Mutassuk meg, hogy Lebesgue majorált konvergencia tételének állítása igaz marad, ha majdnem mindenütti konvergencia helyett mértékben való konvergenciát tételezünk fel.

4.3. Vektorértékű függvények integrálja

Gyakran nem csak valós, hanem komplex, $\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$-beli értékű függvények integráljára van szükségünk. Az alábbiakban vázoljuk, hogy hogyan definiálható az integrál ezekben az esetekben a koordinátafüggvények segítségével. Ez az egyszerű megközelítés nem használható, ha az értékkészlet nem véges dimenziós. Ezért az alábbiakban egy csak a nemnegatív függvények integráljára támaszkodó általánosabb megközelítést is tárgyalunk. Az 4.2.2.–4.2.6. tételek lényegében érvényben maradnak, és a legtöbb, valós értékű függvények integráljára érvényes tétel egyszerűen átvihető vektorértékű függvényekre is.

4.3.1. Komplex és euklideszi térbeli értékű függvények integrálja. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f pedig az X-en majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Komplex értékű f függvény *integrál*ját akkor definiáljuk, ha $\Re f$ és $\Im f$ integrálhatóak, az

$$\int f = \int \Re f + i \int \Im f$$

összefüggéssel. Egy $\mathbb{K}^n$-beli értékű $f = (f_1, \dots, f_n)$ függvény *integrál*ját pedig akkor definiáljuk, ha az f_i koordinátafüggvények integrálhatóak, az

$$\int f\,d\mu = \Big(\int f_1\,d\mu, \dots, \int f_n\,d\mu\Big)$$

összefüggéssel. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az *A halmaz feletti* $\int_A f\,d\mu$ *integrál*t az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

A 4.2.2.–4.2.6. tételek, és számos, később tárgyalandó tétel is — értelemszerű módosításokkal — komplex és euklideszi térbeli értékű függvényekre is érvényben marad, és könnyen következik a definícióból. Például f akkor és csak akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, mert $|f_j| \leq |f| \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j|$. Némi külön meggondolást igényel $\mathbb{K}^n$-beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $|\int f| \leq \int |f|$. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ az f integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^{n} y_j \overline{f}_j(x) \leq |y| \big|f(x)\big|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j \int f_j \leq |y| \int |f|.$$

Ebből adódik az állítás.

4.3.2. Megjegyzés. Integrálokra vonatkozó tételek bizonyításának általános módja a következő *approximációs eljárás*: Az állítást belátjuk mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire, ebből azonnal következik egyszerű függvényekre. Ezután Beppo Levi tételét használva nemnegatív függvényekre térünk át, majd az integrál definíciójának megfelelően haladunk tovább. Ezzel a módszerrel a tételek általában átvihetők vektorértékű függvényekre is.

* **4.3.3. Banach-térbeli értékű függvények integrálja.** Sokkal általánosabban, definiálhatjuk Banach-térbeli értékű mérhető függvény integrálját. Vegyük észre, hogy egy f nemnegatív mérhető függvény integrálját lényegében mint az összes $0 \leq s \leq f$ egyszerű mérhető függvények integráljainak felső határát definiáltuk. A felső határt határértékre cseréljük: ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, Y egy Banach-tér, jelölje $\mathcal{I}$ azon $s : X \to Y$ mérhető egyszerű függvények osztályát, amelyek egy véges mértékű halmazon kívül nullák. Az integrált ezen függvények segítségével definiáljuk. Ha $s \in \mathcal{I}$, és s nem nulla értékei $y_1, \ldots, y_n$, akkor legyen

$$S(s) = \sum_{j=1}^{n} \mu X(s = y_j) y_j.$$

Nyilván $\big|S(s)\big| \leq S\big(|s|\big) = \int |s|$. Az X-en majdnem mindenütt értelmezett Y-beli értékű mérhető függvényt *integrálható*nak nevezünk, ha létezik olyan $s_n \in \mathcal{I}$ függvénysorozat, amely majdnem mindenütt f-hez konvergál, és amelyre $\int |f - s_n| \to 0$, amint $n \to \infty$. (Az $|f - s_n|$ függvény mérhető, mert véges sok $|f - c|$ alakú függvényből rakható össze.) Vegyük észre, hogy a $\lim_{n\to\infty} S(s_n)$ határérték létezik, mert

$$\big|S(s_n) - S(s_m)\big| \leq \int |s_n - s_m| \leq \int |f - s_n| + \int |f - s_m|.$$

Továbbá a határérték nem függ az s_n sorozat választásától, mert vehetjük a két sorozat tagjait felváltva. Valós értékű integrálható függvényhez létezik ilyen s_n sorozat: válasszuk

s_n-et úgy, hogy $s_n^+ \uparrow f^+$ és $s_n^- \uparrow f^-$ teljesüljön, ekkor $|f - s_n| = f^+ - s_n^+ + f^- - s_n^-$, amiből

$$\int |f - s_n| = \int f^+ - \int s_n^+ + \int f^- - \int s_n^- \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Nyilván erre a sorozatra $S(s_n) \to \int f$. Ha figyelembe vesszük, hogy $\int |f| \le \int |f - s_n| + \int |s_n| < \infty$, látjuk, hogy az integrálhatóság itteni definíciója valós értékű függvényekre visszaadja a régit. Tehát a valós értékű függvényekre definiált integrálfogalom kiterjesztését kapjuk, ha egy tetszőleges Banach-térbeli értékű integrálható f függvény *integrál*ját az

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} S(s_n)$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor az A *halmaz feletti* $\int_A f\,d\mu$ *integrál*t az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altér feletti integrálként definiáljuk.

* **4.3.4. Az integrál tulajdonságai.** *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha $f \in \mathcal{I}$, akkor f integrálható és $\int f\,d\mu = S(f)$;*

(2) *ha α, β skalárok, f és g integrálható függvények, akkor $\alpha f + \beta g$ is integrálható, és $\int(\alpha f + \beta g)\,d\mu = \alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\mu$ (linearitás);*

(3) *ha f integrálható, g mérhető, és $f = g$ majdnem mindenütt, akkor g is integrálható és $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$;*

(4) *ha f integrálható, akkor $|f|$ is, és $|\int f\,d\mu| \le \int |f|\,d\mu$;*

(5) *ha $f = (f_1, \dots, f_n)$, akkor f pontosan akkor integrálható, ha minden f_j integrálható, és $\int f\,d\mu = (\int f_1\,d\mu, \dots, \int f_n\,d\mu)$.*

(6) *ha f integrálható, akkor van olyan szeparábilis altere Y-nak, hogy f értékei majdnem mindenütt ebben az altérben vannak.*

Bizonyítás. (1) és (3) triviálisak. (2) az $\mathcal{I}$ elemeire hasonló gondolatmenettel látható be, mint amit a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitásáról szóló tétel bizonyításának elején használtunk, (4) és (5) pedig $\mathcal{I}$ elemeire triviálisak. Innen az általános eset határátmenettel következik. (6) teljesül, mert az s_n-ek értékkészletei lineáris burkának a lezártja szeparábilis altér.

* **4.3.5. Majoráns kritérium.** *Ha f majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű mérhető függvény, amelynek értékei majdnem mindenütt egy szeparábilis altérben vannak, g pedig nemnegatív integrálható függvény egy mértéktéren, és $|f| \le g$ majdnem mindenütt, akkor f integrálható.*

A tételt a következő tétellel együtt bizonyítjuk.

* **4.3.6. Lebesgue majorált konvergencia tétele.** *Ha $f_1, f_2, \dots$ majdnem mindenütt értelmezett, Banach-térbeli értékű integrálható függvények az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktéren, g nemnegatív integrálható függvény, $|f_n| \le g$ majdnem mindenütt minden n-re és $f_n \to f$ majdnem mindenütt, akkor $\int |f_n - f|\,d\mu \to 0$ és $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Ha a mértéktér nem lenne teljes, f és $f_n - f$ mérhetőségét is fel kellene tenni.

Bizonyítás. Nulla mértékű halmazon alkalmasan megváltoztatva a függvényeket, az f_n-ek és az f értékkészlete egy szeparábilis altérben marad, és a $2g-|f_n-f|$ nemnegatív mérhető függvénysorozat pontonként a $2g$ függvényhez konvergál. A Fatou-lemma szerint

$$0 \geq \int 2g \, d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int \big(2g - |f_n - f|\big) \, d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \geq 0.$$

Ha most az approximációs lemmát felhasználva, egy egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot választunk, amely mindenütt konvergál f-hez, és amelyre $|s_n| \leq |f| \leq g$, akkor f_n helyett s_n-re alkalmazva az eddig bizonyítottakat, azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \int |s_n - f| = 0$. Ez azt jelenti, hogy a majoráns kritérium teljesül. Ezek szerint f_n és f integrálhatóak. Mivel

$$\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu,$$

a bizonyítás kész.

4.4. $\mathbb{L}^p$-terek

4.4.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ha f egy majdnem mindenütt értelmezett, μ-mérhető, $\mathbb{K}$-beli értékű függvény, és $1 \leq p < \infty$, legyen

$$\|f\|_p = \Big(\int_X \big|f(x)\big|^p \, d\mu(x) \Big)^{1/p} \qquad (\text{itt } \infty^{1/p} = \infty).$$

Legyen továbbá

$$\|f\|_\infty = \inf\Big\{ r : r \geq 0,\ \mu X\big(|f| > r\big) = 0 \Big\}.$$

Megjegyezzük, hogy μ-majdnem mindenütt $|f| \leq \|f\|_\infty$. Jelölje $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ azon $\mathbb{K}$-beli értékű μ-mérhető f függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$. Ha egyértelmű, hogy milyen értékű függvényeket és milyen mértéket tekintünk, akkor az $\mathbb{L}^p$ jelölést használjuk.

4.4.2. Minkowski-egyenlőtlenség. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $1 \leq p \leq \infty$. Ha $f, g : X \to \mathbb{K}$ mérhetőek, akkor*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. Ha a jobb oldal ∞, akkor nincs mit bizonyítani. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v} y + \frac{v}{u+v} z \right)^p \leq \frac{u}{u+v} y^p + \frac{v}{u+v} z^p,$$

ha $u, v, y, z \geq 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = |f(x)|/\|f\|_p$, $z = |g(x)|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int \big(|f| + |g|\big)^p \, d\mu \leq 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség.

4.4.3. Hölder-egyenlőtlenség. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), és $f, g : X \to \mathbb{K}$ mérhetőek, akkor*

$$\int_X |f||g| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$$

(itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$).

Bizonyítás. A $p = 1$ és $p = \infty$ esetek triviálisak. Feltehetjük, hogy a jobb oldal nem nulla, de véges. Az

$$F = \Big(\frac{|f|}{\|f\|_p}\Big)^p, \qquad G = \Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^q,$$

$\alpha = 1/p$, $\beta = 1 - \alpha = 1/q$ jelölésekkel $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $F \ge 0$, $G \ge 0$. Mivel $-\ln$ konvex függvény, ha $u, v > 0$, akkor

$$\ln(\alpha u + \beta v) \ge \alpha \ln u + \beta \ln v,$$

amiből

$$\alpha u + \beta v \ge u^\alpha v^\beta,$$

így

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int |f||g| \, d\mu &= \int (F^\alpha G^\beta) \, d\mu \le \int (\alpha F + \beta G) \, d\mu \\ &= \alpha \int F \, d\mu + \beta \int G \, d\mu = 1.\end{aligned}$$

4.4.4. Megjegyzés. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $1 \le p \le \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, akkor az $\|f\|_p = 0$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha f μ-majdnem mindenütt nulla. Ez azt jelenti, hogy $\| \ \|_p$ általában nem norma $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-n. Ezen a következőképpen segíthetünk: Vezessük be $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-n a következő ekvivalenciarelációt: $f_1 \sim f_2$, ha f_1 és f_2 μ-majdnem mindenütt egyenlőek. Ekkor $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-t ekvivalenciaosztályokra bonthatjuk. Az ekvivalenciaosztályok halmazát is $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-vel szokás jelölni. Ez nem okoz félreértést, mivel a szövegösszefüggésből mindig kiderül, hogy melyik értelmezésre gondolunk. Ha $f_1 \sim f_2$ és $g_1 \sim g_2$, akkor $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$, $cf_1 \sim cf_2$ és $\|f_1\|_p = \|f_2\|_p$, ezért az ekvivalenciaosztályokon értelmezhető az összeadás, a skalárral való szorzás és a $\| \ \|_p$ függvény, és a Minkowski-egyenlőtlenség szerint ezekkel $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ lineáris normált tér. Ha $p = 2$ és $f, g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$, akkor a $4f\overline{g} = (f+\overline{g})^2 - (f-\overline{g})^2$ összefüggés (vagy a Hölder-egyenlőtlenség) szerint $f\overline{g}$ integrálható és az $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g} \, d\mu$ összefüggéssel definiálva az f és g függvények belső szorzatát, $\mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ belső szorzat tér. A belső szorzatból éppen a $\| \ \|_2$ norma származik.

4.4.5. Riesz–Fischer-tétel. *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $1 \le p \le \infty$, akkor $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ teljes.*

Bizonyítás. Legyen f_n, $n = 1, 2, \ldots$ egy Cauchy-sorozat $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-ben. Válasszunk ki teljes indukcióval egy olyan természetes számokból álló $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ sorozatot, amelyre

$$\|f_s - f_t\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad \text{ha} \quad s, t \ge n_k.$$

Legyen
$$g_k = |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$
és $g = \lim_{k\to\infty} g_k$. Megmutatjuk, hogy $g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Nyilván

$$\|g_k\|_p = \Big\| |f_{n_2} - f_{n_1}| + \ldots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \Big\|_p \le \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \le 1.$$

Ebből $p = \infty$ esetén következik, hogy $|g| \le 1$ majdnem mindenütt, azaz $\|g\|_\infty \le 1$. Ha $1 \le p < \infty$, akkor Beppo Levi tétele szerint

$$\int g^p \, d\mu = \int \lim_{k\to\infty} g_k^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k^p \, d\mu \le 1,$$

így $g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Ez azt jelenti, hogy a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \big|$$

sor μ-majdnem minden x-re konvergens. Ezekben a pontokban az

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \big)$$

sorozat is konvergens. Legyen $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. Ekkor f majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény, és ha $m \ge n_l$ és $k \ge l$, akkor

$$\|f_{n_k} - f_m\|_p < \frac{1}{2^l}.$$

Most $1 \le p < \infty$ esetén a Fatou-lemma szerint

$$\int |f - f_m|^p \, d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \le \frac{1}{2^{pl}},$$

így $f - f_m \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, tehát $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ és $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_p = 0$. Ugyanez adódik $p = \infty$ esetén közvetlen határátmenettel.

* **4.4.6. Tétel.** *Legyen μ Radon-mérték az X lokálisan kompakt Hausdorff-téren és $1 \le p < \infty$. Ekkor $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-ben a $\| \ \|_p$ normára nézve.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Az approximációs lemma felhasználásával olyan egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot kaphatunk, amely majdnem mindenütt konvergál f-hez és amelyre $|s_n| \le |f|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Az $|f - s_n|^p$ sorozatra alkalmazva Lebesgue majorált konvergencia tételét kapjuk, hogy $\|f - s_n\|_p \to 0$. Így egy adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $s \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ egyszerű függvény, amelyre $\|f - s\|_p < \varepsilon$.

Legyenek $\operatorname{rng} s$ nem 0 értékei $y_1, y_2, \dots, y_n$, $A_j = s^{-1}\{y_j\}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, $A = \cup_{j=1}^n A_j$ és $M = \sup\{|y_j| : j = 1, 2, \dots, n\}$. Nyilván $\mu(A) < \infty$. Egy tetszőleges $\delta > 0$-hoz választhatunk olyan V nyílt halmazt, amelyre $A \subset V$ és $\mu(V \setminus A) < \delta$, valamint olyan K_j, $j = 1, 2, \dots, n$ kompakt halmazokat, amelyekre $K_j \subset A_j$ és $\mu(A_j \setminus K_j) < \delta$. Legyen $K = \cup_{j=1}^n K_j$. Az Uriszon-lemma szerint minden j-re létezik olyan $g_j : X \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amely K_j-n 1, az $F_j = (X \setminus V) \cup (K \setminus K_j)$-n pedig 0. Legyen $g = \sum_{j=1}^n g_j y_j$. Ekkor g folytonos, és

$$\int_X |s - g|^p \, d\mu = \int_{V \setminus K} |s - g|^p \, d\mu \le \mu(V \setminus K)\big((n+1)M\big)^p \le (n+1)\delta\big((n+1)M\big)^p.$$

Ebből $\|s - g\|_p < \varepsilon$, ha δ elég kicsi, így

$$\|f - g\|_p \le \|f - s\|_p + \|s - g\|_p < 2\varepsilon.$$

* **4.4.7. Megjegyzés.** Észrevehetjük, hogy a 4.4.1.–4.4.6. definíciók és tételek nem az f, hanem az $|f|$ függvény tulajdonságain múlnak, így ezeket minden nehézség nélkül átvihetjük $\mathbb{K}^n$, sőt bármilyen valós vagy komplex szeparábilis Banach-térbeli értékű mérhető függvényekre is, az abszolút érték helyett mindenütt normát használva. A további általánosítás akadálya, hogy ha az Y Banach-tér nem szeparábilis, akkor nem biztos, hogy két mérhető függvény összege mérhető, de tekinthetünk $\mathbb{L}^0_Y(\mu)$-beli függvényeket. Ha $\big(Y, \langle .,. \rangle\big)$ Hilbert-tér, az $(f,g) \mapsto \int \big\langle f(x), g(x) \big\rangle \, d\mu(x)$ belső szorzattal az $\mathbb{L}^2_Y(\mu)$ tér Hilbert-tér.

$\to$ **4.4.8. Feladat: $\mathbb{L}^p$-normák $\mathbb{K}^n$-en [8].** Legyen $X = \{1, 2, \dots, n\}$ és μ a számláló mérték. Vizsgáljuk meg az $\mathbb{L}^p$-tereket ebben az esetben. Vázoljuk $n = 2$ esetén az egységgömböt.

$\to$ **4.4.9. Feladat [11].** Ha $X = \mathbb{N}$ és μ a számláló mérték, $\mathbb{L}^p(\mu)$ a hagyományosan $\mathbf{l}^p$-vel jelölt tér. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorozatok konvergensek-e az $\mathbf{l}^p$ terekben, és mi a határértékük (x_n-ben n nem nulla elem van):

(1) $x_n = (1, 2, \dots, n, 0, 0, \dots)$;

(2) $x_n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$;

(3) $x_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$;

(4) $x_n = (1/n^\alpha, 1/n^\alpha, \dots, 1/n^\alpha, 0, 0, \dots)$.

4.4.10. Feladat [10]. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{l}^\infty$ nem szeparábilis.

4.4.11. Feladat [8]. Zárt alteret alkotnak-e $\mathbf{l}^\infty$-ben a konvergens, illetve a nullsorozatok?

$\to$ **4.4.12. Feladat [9].** Bizonyítsuk be, hogy egy μ véges mérték esetén $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$, ha $1 \le q < p \le \infty$, és $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$, ha f mérhető függvény. Igazoljuk, hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en, akkor a tartalmazás valódi, és $\mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) \ne \cap_{1 \le p < \infty} \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

→ **4.4.13. Feladat** [9]. Vizsgáljuk meg mérhető függvények pontonkénti, egyenletesen, $\mathbb{L}^2$-normában, majdnem mindenütt és mértékben való konvergenciája között a kapcsolatot.

→ **4.4.14. Feladat** [8]. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{l}^q \subset \mathbf{l}^p$, ha $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

→ **4.4.15. Feladat** [9]. Igazoljuk, hogy $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\lambda^n) \not\subset \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\lambda^n)$, ha $p \neq q$.

4.4.16. Feladat [8]. Adjunk példát $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$-ban olyan korlátos sorozatra, amely nem konvergens, de majdnem mindenütt nullához tart.

* **4.4.17. Feladat** [7]. Bizonyítsuk be, hogy $1 < p < \infty$ esetén a Hölder-egyenlőtlenségben akkor és csak akkor teljesül egyenlőség, ha van olyan $c \geq 0$, hogy μ-majdnem minden x-re $|f(x)|^p = c|g(x)|^q$ vagy μ-majdnem minden x-re $c|f(x)|^p = |g(x)|^q$. Mikor teljesül egyenlőség a $p = 1$ esetben?

* **4.4.18. Feladat** [9]. Mutassuk meg, hogy $1 < p < \infty$ esetén $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ szigorúan normált, de $p = 1$ és $p = \infty$ esetén általában nem.

* **4.4.19. Feladat** [9]. Igazoljuk, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ normája általában nem származik belső szorzatból.

* **4.4.20. Feladat** [11]. Egy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér *bázis*án egy olyan $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ halmazrendszert értünk, amelyre minden $\varepsilon > 0$-hoz és $A \in \mathcal{A}$-hoz van olyan $B \in \mathcal{B}$, hogy $\mu(A \bigtriangleup B) < \varepsilon$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ terek pontosan akkor szeparábilisak, ha a mértéktérnek létezik megszámlálható bázisa.

* **4.4.21. Feladat** [11]. Egy $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *m-rektifikálható*nak nevezünk, ha χ^m-mérhető, és χ^m-majdnem része megszámlálható sok $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény értékkészlete uniójának. Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-terek ($1 \leq p < \infty$) szeparábilisak, ha a μ mérték a Lebesgue-mérték vagy a χ^m Hausdorff-mérték egy m-rektifikálható halmazon.

* **4.4.22. Feladat** [12]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és tegyük fel, hogy $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu)$ véges dimenziós.

* **4.4.23. Feladat** [14]. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és f valós értékű mérhető függvény. Bizonyítsuk be, hogy a

$$P = \{p : 1 \leq p < \infty,\ \|f\|_p < \infty\}$$

halmaz intervallum; a $p \mapsto \|f\|_p$ leképezése $\overline{P}$-nak $\overline{\mathbb{R}}$-ba folytonos; az

$$U = \{u : 1 \leq 1/u < \infty,\ 0 < \|f\|_{1/u} < \infty\}$$

halmaz is intervallum; az $u \mapsto \ln \|f\|_{1/u}$ leképezése U-nak $\mathbb{R}$-be konvex.

* **4.4.24. Feladat [10].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és (Y, d) metrikus tér. Mutassuk meg, hogy ha $1 \le p < \infty$, akkor

$$d_p(f,g) = \left(\int d\big(f(x), g(x)\big)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}, \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

eltérés. Igazoljuk, hogy

$$d_\infty(f,g) = \inf\Big\{r : r \ge 0, \mu X\big(d(f,g) > r\big) = 0\Big\}, \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

is eltérés. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < 1$, akkor

$$(f,g) \mapsto \left(\int d\big(f(x), g(x)\big)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

általában nem eltérés, de

$$d_p(f,g) = \int d\big(f(x), g(x)\big)^p \, d\mu(x), \quad \text{ha} \quad f, g \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$$

eltérés. Ha Y normált tér, azon $f \in \mathbb{L}_Y^0(\mu)$ függvények osztályát, amelyekre $d_p(f, 0) < \infty$, jelölje $\mathbb{L}_Y^p(\mu)$. Mutassuk meg, hogy az $f \mapsto d_p(f, 0)$ leképezés általában nem norma.

4.5. A Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolata

4.5.1. Definíció. A Lebesgue-mérték szerinti integrált *Lebesgue-integrál*nak, a Lebesgue–Stieltjes-mérték szerinti integrált pedig *Lebesgue–Stieltjes-integrál*nak nevezzük. Ha egy egydimenziós intervallum felett integrálunk, amelynek végpontjai a és b, $a \le b$, továbbá a végpontoknak az intervallumba való beletartozása lényegtelen vagy egyértelmű, akkor az intervallum feletti integrált $\int_a^b f \, d\mu$-vel is jelöljük. Az $a > b$ esetben $\int_a^b f \, d\mu = -\int_b^a f \, d\mu$.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon Riemann-integrálható függvény mindig Lebesgue-integrálható is és a két integrál megegyezik. (A megfordítás nem igaz, például $\xi_\mathbb{Q}$, a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye egyetlen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ intervallumon sem Riemann-integrálható, de Lebesgue-integrálható, mert majdnem mindenütt nulla.) Mellékeredményként nyerjük a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériumát.

4.5.2. Definíció. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $x \in [a, b]$, $\delta > 0$ és legyen

$$m_\delta(x) = \inf\big\{f(y) : y \in [a, b], |x - y| < \delta\big\};$$
$$M_\delta(x) = \sup\big\{f(y) : y \in [a, b], |x - y| < \delta\big\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $m_\delta(x) \le f(x) \le M_\delta(x)$, és hogy a δ csökkentésével $m_\delta(x)$ csak nőhet, $M_\delta(x)$ pedig csak csökkenhet, így léteznek a

$$m(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} m_\delta(x) \quad \text{és} \quad M(x) = \lim_{\delta \downarrow 0} M_\delta(x)$$

határértékek, továbbá

$$m_\delta(x) \le m(x) \le f(x) \le M(x) \le M_\delta(x)$$

minden $x \in [a,b]$-re és $\delta > 0$-ra. Az így definiált m és M függvényeket az f alsó, illetve felső *Baire-féle függvény*einek nevezzük.

4.5.3. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel f pontosan akkor folytonos egy $x \in [a,b]$ pontban, ha $m(x) = M(x)$.*

Bizonyítás. Ha f folytonos az x pontban, akkor adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $y \in [a,b]$ és $|x-y| < \delta$, akkor $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$, amiből $M_\delta(x) - m_\delta(x) \le 2\varepsilon$, tehát $m(x) = M(x)$. Megfordítva, ha $m(x) = f(x) = M(x)$, akkor van olyan δ_1 és δ_2, hogy $M_{\delta_1}(x) - M(x) < \varepsilon$ és $m(x) - m_{\delta_2}(x) < \varepsilon$. Ebből $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$-re $y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$ esetén $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$.

4.5.4. Tétel. *Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható $[a,b]$-n, ha λ-majdnem minden $x \in [a,b]$ pontban folytonos, továbbá, ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, akkor létezik az $[a,b]$ feletti Lebesgue-integrálja is, és a két integrál megegyezik.*

Bizonyítás. Rudin [40] jelöléseit használva válasszunk az $[a,b]$ beosztásainak egy olyan P_k, $k = 1,2,3,\dots$ sorozatát, amelyre P_{k+1} finomítása P_k-nak, P_k szomszédos osztópontjainak távolsága kisebb, mint $1/k$, továbbá

$$\lim_{k\to\infty} A(P_k, f) = \underline{\int} f\,dx, \qquad \lim_{k\to\infty} F(P_k, f) = \overline{\int} f\,dx.$$

Ha $P_k = \{x_0, x_1, \dots, x_{n_k}\}$, ahol $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n_k} = b$, akkor definiáljuk az A_k és F_k egyszerű függvényeket $(a,b]$-n az

$$\begin{aligned} A_k(x) = m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad &\text{ha} \quad x_{i-1} < x \le x_i \quad (1 \le i \le n_k),\\ F_k(x) = M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad &\text{ha} \quad x_{i-1} < x \le x_i \quad (1 \le i \le n_k) \end{aligned}$$

összefüggéssel. Ekkor

$$A(P_k, f) = \int_a^b A_k(x)\,d\lambda(x), \qquad F(P_k, f) = \int_a^b F_k(x)\,d\lambda(x),$$

és

$$A_k(x) \le A_{k+1}(x) \le f(x) \le F_{k+1}(x) \le F_k(x),$$

ha $x \in (a, b]$ és $k = 1, 2, \ldots$. Mivel ha $x \in [a, b] \setminus P_k$ és $(x - \delta, x + \delta) \subset (x_i, x_{i+1}]$, akkor

$$A_k(x) = m_i \leq m_\delta(x) \leq m(x) \leq M(x) \leq M_\delta(x) \leq M_i = F_k(x),$$

azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} A_k(x) \leq m(x) \leq M(x) \leq \lim_{k\to\infty} F_k(x),$$

ha $x \in [a, b] \setminus \cup_{k=1}^{\infty} P_k$, azaz λ-majdnem minden elemére $[a, b]$-nek. Másrészt, ha $\delta > 0$, $1/k < \delta$ és $x \in (x_{i-1}, x_i)$ valamely $1 \leq i \leq n_k$-ra, akkor $[x_{i-1}, x_i] \subset (x - \delta, x + \delta)$, így

$$m_\delta(x) \leq m_i = A_k(x) \leq F_k(x) = M_i \leq M_\delta(x),$$

amiből

$$m(x) \leq \lim_{k\to\infty} A_k(x) \leq \lim_{k\to\infty} F_k(x) \leq M(x),$$

ha $x \in (a, b]$. Ez azt jelenti, hogy az A_k, illetve F_k függvénysorozatok λ-majdnem minden $x \in [a, b]$-re konvergálnak a m, illetve M függvényekhez. Így m és M az $[a, b]$-n λ-mérhetőek, és Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint

$$\underline{\int} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b A_k\,d\lambda = \int_a^b m\,d\lambda, \qquad \overline{\int} f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b F_k\,d\lambda = \int_a^b M\,d\lambda.$$

Ebből

$$\int_a^b (M - m)\,d\lambda = \overline{\int} f\,dx - \underline{\int} f\,dx,$$

amiből felhasználva a $m \leq f \leq M$ egyenlőtlenséget és az előző tételt, kapjuk az állítást.

Hasonló állítás igaz Riemann–Stieltjes-integrálokra is, ha a Riemann–Stieltjes-integrált Szőkefalvi-Nagy [45] könyve szerint, tetszőleges integrálközelítő összegek segítségével definiáljuk, *de nem igaz, ha alsó és felső integrálközelítő összegek segítségével, Rudin [40] könyvét követve definiáljuk;* lásd Rudin [40] könyvében a 148. oldalon a 3. feladatot.

4.5.5. Tétel. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, a, b a g-nek folytonossági pontjai, $a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Az $\int_a^b f\,dg$ Riemann–Stieltjes-integrál (Szőkefalvi-Nagy [45] könyve szerinti értelemben) pontosan akkor létezik, ha λ_g-majdnem minden $x \in [a, b]$ pontban f folytonos. Ekkor létezik az $\int_a^b f\,d\lambda_g$ Lebesgue–Stieltjes-integrál is, és a két integrál megegyezik.*

Bizonyítás. Hasonlóan végezhető, mint a Riemann-integrál esetében.

Megjegyezzük, hogy a többdimenziós esetben is hasonló állítások igazak.

$\to$ **4.5.6. Feladat** [4]. Mennyi $\int_0^{2\pi} e^{ix}\,d\lambda(x)$?

→ **4.5.7. Feladat** [**6**]. Számítsuk ki az $\int_0^1 x^\alpha \, d\lambda(x)$ és $\int_1^\infty x^\alpha \, d\lambda(x)$ integrálokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.5.8. Feladat [**8**]. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelyre $\int_0^x f \, d\lambda = 0$ minden $x \in [0,1]$-re. Mutassuk meg, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

4.5.9. Feladat [**5**]. Mutassuk meg, hogy egy zárt intervallumon Riemann-integrálható függvény esetén az integrál mint a felső határ függvénye majdnem mindenütt differenciálható.

→ **4.5.10. Feladat** [**8**]. Adjunk példát olyan $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amelyre $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 f(x) \, d\lambda(x)$ véges, de f a $(0,1]$-en nem Lebesgue-integrálható.

4.5.11. Feladat [**10**]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $\int_0^1 x^\alpha \sin x^\beta \, d\lambda(x)$ Lebesgue-integrál, és mikor létezik a $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \sin x^\beta \, d\lambda(x)$ határérték?

→ **4.5.12. Feladat** [**5**]. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely λ-majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, de sehol sem folytonos.

→ **4.5.13. Feladat** [**5**]. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely λ-majdnem mindenütt folytonos, de nincs olyan folytonos függvény, amellyel λ-majdnem mindenütt egyenlő.

* **4.5.14. Feladat** [**13**]. Igaz-e, hogy egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény majdnem mindenütt egyenlő egy majdnem mindenütt folytonos függvénnyel?

* **4.5.15. Feladat** [**10**]. Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, $0 < c < \lambda(A)$. Mutassuk meg, hogy ha f integrálja az A tetszőleges c mértékű részhalmazán 0, akkor f madnem mindenütt nulla.

* **4.5.16. Feladat** [**11**]. Legyen f az $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető halmazon integrálható valós értékű függvény, amelynek integrálja 0. Mutassuk meg, hogy $0 \le c \le \lambda(A)$ esetén van olyan $B \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $\lambda(B) = c$ és a B-n az integrál szintén nulla.

5. MÉRTÉKEK SZORZATA

5.1. A Fubini-tétel

5.1.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(X, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek. Jelölje $\mu \otimes \nu$ az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ halmazfüggvényhez (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$) tartozó külső mértéket $X \times Y$-on. A $\mu \otimes \nu$-mérhető halmazok osztályát $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-vel fogjuk jelölni, $\mu \otimes \nu$ megszorítását erre a halmazrendszerre a μ és ν *mértékek szorzatá*nak nevezzük és (nem teljesen korrekt módon) ezt is $\mu \otimes \nu$-vel jelöljük.

5.1.2. Fubini tétele. *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ teljes mértékterek. Ekkor*

(1) *ha A μ-mérhető, B pedig ν-mérhető halmaz, akkor az $A \times B$ halmaz $\mu \otimes \nu$-mérhető és*
$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad (\text{itt } 0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0).$$

Ha f egy olyan bővített valós értékű függvény, amelynek $\mu \otimes \nu$-integrálja létezik, és f egy σ-véges halmazon kívül eltűnik, akkor

(2) *az $x \mapsto f(x,y)$ függvény μ-integrálja létezik ν-majdnem minden $y \in Y$-ra;*

(3) *az $y \mapsto f(x,y)$ függvény ν-integrálja létezik μ-majdnem minden $x \in X$-re;*

(4) *az $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ függvény ν-integrálja létezik;*

(5) *az $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(x)$ függvény μ-integrálja létezik;*

(6)
$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{F}$ az olyan $S \subset X \times Y$ halmazok osztályát, amelyeknek ξ_S karakterisztikus függvényére a
$$\varrho(S) = \int_Y \int_X \xi_S(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$
kétszeres integrál értelmezve van. Kétszer alkalmazva a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitását, illetve Lebesgue majorált konvergencia tételét, kapjuk, hogy

(7) ha $S_1, S_2, S_3, \ldots$ diszjunkt elemei $\mathcal{F}$-nek, akkor

$$\cup_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\cup_{j=1}^{\infty} S_j);$$

(8) ha $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \ldots$ egy $\mathcal{F}$-beli sorozat, és $\varrho(S_1) < \infty$, akkor

$$\cap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \lim_{j\to\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\cap_{j=1}^{\infty} S_j).$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_0 =& \{A \times B : A\ \mu\text{-mérhető},\ B\ \nu\text{-mérhető}\},\\
\mathcal{P}_1 =& \{\cup_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_0\},\\
\mathcal{P}_2 =& \{\cap_{i=1}^{\infty} S_i : S_i \in \mathcal{P}_1\}
\end{aligned}$$

halmazrendszereket, és vegyük észre, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$, akkor $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Innen $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$ és $C \times D \in \mathcal{P}_0$, akkor $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0$ és

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big((A \setminus C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B \setminus D)\big)$$

két diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmaz uniója. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_1$ minden tagja előállítható diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmazok uniójaként. Így $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$. Két $\mathcal{P}_1$-beli halmaz metszete is $\mathcal{P}_1$-ben van. Így $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mathcal{P}_1$-beli halmazok csökkenő sorozatának a metszete.

Megmutatjuk, hogy bármely $S \subset X \times Y$-ra

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \inf\big\{\varrho(V) : S \subset V \in \mathcal{P}_1\big\},$$

és van olyan W halmaz, hogy

$$S \subset W \in \mathcal{P}_2 \quad \text{és} \quad (\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) = \varrho(W).$$

Először is, ha $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, A_3 \times B_3, \ldots$ a $\mathcal{P}_0$ osztályban vannak, és

$$S \subset V = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j,$$

akkor

$$\xi_V \leq \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{A_j \times B_j},$$

amiből

$$\varrho(V) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j),$$

továbbá egyenlőség teljesül, ha az $A_j \times B_j$ halmazok diszjunktak. Másodszor, a

$$(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$$

esetben, választhatunk $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$ halmazokat úgy, hogy $S \subset V_j \in \mathcal{P}_1$ és

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \lim_{j \to \infty} \varrho(V_j)$$

teljesüljön. Végül, legyen $W = \cap_{j=1}^{\infty} V_j$, ha $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$, ha pedig $(\mu \otimes \nu)(S) = \infty$, akkor legyen $W = X \times Y$.

(1) bizonyításához tegyük fel, hogy $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Mivel

$$\mu(A)\nu(B) = \varrho(A \times B) \leq \varrho(V)$$

minden $A \times B \subset V \in \mathcal{P}_1$-re, kapjuk, hogy $\mu(A)\nu(B) \leq (\mu \otimes \nu)(A \times B)$. A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Továbbá, ha $T \subset X \times Y$, akkor $T \subset U \in \mathcal{P}_1$-ből $U \cap (A \times B)$ és $U \setminus (A \times B)$ diszjunkt $\mathcal{P}_1$-beli halmazok, így

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)&\big(T \cap (A \times B)\big) + (\mu \otimes \nu)\big(T \setminus (A \times B)\big) \\ &\leq \varrho\big(U \cap (A \times B)\big) + \varrho\big(U \setminus (A \times B)\big) = \varrho(U),\end{aligned}$$

amiből U-ra alsó határt véve az $A \times B$ halmaz $\mu \otimes \nu$-mérhetősége adódik. (1)-ből következik, hogy $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mu \otimes \nu$-mérhető. Ha most $(\mu \otimes \nu)(S) = 0$, akkor S benne van valamely $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $\varrho(W) = 0$, innen μ és ν teljessége miatt $\varrho(S) = 0$.

Ha $(\mu \otimes \nu)(S) < \infty$ és az S halmaz $\mu \otimes \nu$-mérhető, akkor S benne van egy $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $(\mu \otimes \nu)(S) = (\mu \otimes \nu)(W) = \varrho(W)$, innen $(\mu \otimes \nu)(W \setminus S) = 0$. Így $\varrho(W \setminus S) = 0$,

$$\mu\big\{x : (x, y) \in S\big\} = \mu\big\{x : (x, y) \in W\big\}$$

teljesül ν-majdnem minden $y \in Y$-ra. Ez azt jelenti, hogy

$$\varrho(S) = \varrho(W) = (\mu \otimes \nu)(S),$$

azaz (2), (4) és (6) első egyenlősége teljesül S karakterisztikus függvényére. Ugyanez teljesül, ha S tetszőleges σ-véges $\mu \otimes \nu$-mérhető halmaz. (3), (5) és (6) második fele μ és ν szerepének felcserélésével kapható a σ-véges $\mu \otimes \nu$-mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire. Végül az approximációs lemma és Beppo Levi tétele alapján kapjuk a tételt nemnegatív, az integrál definíciója alapján pedig tetszőleges függvényekre.

5.1.3. Definíció. Ha $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ mértékterek, $i = 1, 2, \dots, n$, akkor teljes indukcióval definiáljuk a

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$$

külső mértéket $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$-en. Legyen továbbá

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n.$$

A $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$ külső mérték leszűkítését $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n$-re *szorzatmérték*nek nevezzük, és (nem teljesen korrekt módon) szintén $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n$-nel jelöljük. Ha $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \dots = \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ és $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu$, akkor μ^n-et és $\mathcal{A}^n$-et írunk.

→ **5.1.4. Feladat [7].** Legyen λ a Lebesgue-mérték, μ pedig a számláló mérték $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy a $\delta(x,y)=1$, ha $x=y$, $\delta(x,y)=0$, ha $x\neq y$ összefüggéssel definiált Kronecker-delta $\mu\otimes\lambda$-mérhető, és határozzuk meg a Fubini-tételben szereplő integrálokat. Miért nem mond ellent az eredmény a Fubini-tételnek?

5.1.5. Feladat [10]. Számítsuk ki az

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,d\lambda(x)\,d\lambda(y),\qquad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,d\lambda(y)\,d\lambda(x),$$
$$\int_0^1\int_0^1 \bigl|f(x,y)\bigr|\,d\lambda(x)\,d\lambda(y),\qquad \int_0^1\int_0^1 \bigl|f(x,y)\bigr|\,d\lambda(y)\,d\lambda(x)$$

integrálokat, ha

(1) $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$;

(2) $f(x,y)=1/(x-1/2)^3$, ha $0<y<|x-1/2|$ és 0 egyébként;

(3) $f(x,y)=(x-y)/(x^2+y^2)^{3/2}$;

(4) $f(x,y)=1/(1-xy)^p$, ahol $p>0$.

5.1.6. Feladat: az integrál mint görbe alatti terület [10]. Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ egy σ-véges mértéktér, λ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en, $f: X\to[0,\infty]$ mérhető függvény, és

$$T_*=\bigl\{(x,t):(x,t)\in X\times\mathbb{R}, 0\le t<f(x)\bigr\},$$
$$T^*=\bigl\{(x,t):(x,t)\in X\times\mathbb{R}, 0\le t\le f(x)\bigr\}.$$

Igazoljuk, hogy a T_* és T^* halmazok $\mu\otimes\lambda$-mérhetőek, és

$$(\mu\otimes\lambda)(T_*)=(\mu\otimes\lambda)(T^*)=\int_X f\,d\mu.$$

(Lebesgue eredetileg a nemnegatív valós értékű függvények Lebesgue-integrálját görbe alatti területként definiálta.)

* **5.1.7. Feladat: a nagy számok gyenge törvénye [13].** Legyenek $(X_\gamma,\mathcal{A}_\gamma,\mu_\gamma)$, $\gamma\in\Gamma$ valószínűségi mértékterek. Az

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\mapsto\prod_{i=1}^n\mu_{\gamma_i}(A_{\gamma_i}),$$

$n\in\mathbb{N}$, $\gamma_i\in\Gamma$ páronként különböző indexek, $A_{\gamma_i}\in\mathcal{A}_{\gamma_i}$, ha $i=1,\dots,n$ és $A_\gamma=X_\gamma$, ha $\gamma\neq\gamma_i$, $i=1,2,\dots,n$ összefüggéssel értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ külső mértéket $\prod_{\gamma\in\Gamma}\mu_\gamma$-val jelöljük, az erre nézve mérhető halmazok osztályát pedig $\prod_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$-val. A μ megszorítását a μ-mérhető halmazok osztályára a μ_γ *mértékek szorzatá*nak nevezzük. Legyen $\Gamma=\mathbb{N}$, $X_n=\{-1,1\}$, $\mathcal{A}_n$ az X_n összes részhalmazainak osztálya, μ_n pedig a számláló mérték 1/2-szerese, ha $n\in\mathbb{N}$. Legyen $f_n(x)=x_n$, ha $x=(x_0,x_1,x_2,\dots)$. Bizonyítsuk be, hogy az f_n mérhető függvénysorozat mértékben az azonosan nulla függvényhez tart.

* **5.1.8. Probléma [?].** Igaz-e, hogy ha μ külső mérték X-en, ν pedig külső mérték Y-on, akkor az $A\times B\mapsto\mu(A)\nu(B)$ leképezés σ-szubadditív $X\times Y$ részhalmazain?

5.2. A Lebesgue-mérték az euklideszi téren

5.2.1. Definíció. A λ^n *n-dimenziós Lebesgue külső mérték*et $\mathbb{R}^n$-en mint a

$$\lambda^n = \lambda \otimes \lambda \otimes \cdots \otimes \lambda$$

n-tényezős szorzatot definiáljuk. Az *n-dimenziós Lebesgue-mérhető halmaz*ok osztályát $\mathcal{L}^n$-nel jelöljük. A λ^n külső mérték megszorítását $\mathcal{L}^n$-re *n-dimenziós Lebesgue-mérték*nek nevezzük, és szintén λ^n-nel jelöljük.

5.2.2. Tétel. *A λ^n szorzatmérték Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, továbbá*

$$\lambda^n(S) = \inf\{\lambda^n(V) : V \text{ nyílt, } S \subset V\} \quad \text{minden} \quad S \subset \mathbb{R}^n\text{-re.} \tag{1}$$

Bizonyítás. A Fubini-tételt ismételten alkalmazva kapjuk, hogy az

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

alakú n-dimenziós nyílt intervallumok mérhetőek. Mivel azok az n-dimenziós nyílt intervallumok, amelyekre minden a_i és b_i racionális, megszámlálható bázisát alkotják $\mathbb{R}^n$ topológiájának, $\mathbb{R}^n$ minden nyílt részhalmaza mérhető.

A kompakt halmazok mértéke véges, mivel intervallumba foglalhatók. Mivel $\mathbb{R}^n$ minden nyílt részhalmaza σ-kompakt, tetszőleges V nyílt halmazhoz létezik kompakt halmazok egy $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$ sorozata, amelyre $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = V$. Így a mérték folytonosságából

$$\lambda^n(V) = \lim_{i\to\infty} \lambda^n(K_i) \le \sup\{\lambda^n(K) : K \subset V,\, K \text{ kompakt}\}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Végül n szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk (1)-et. Legyen $\varepsilon > 0$, és tegyük fel, hogy $n-1$-re már tudjuk az állítást. Nyilván feltehetjük, hogy $\lambda^n(S) < \infty$. Válasszunk egy olyan

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i)$$

lefedést, amelyre az A_i halmaz λ^{n-1}-mérhető, a B_i halmaz λ-mérhető, ha $i = 1, 2, \dots$, továbbá $\lambda^{n-1}(A_i) < \infty$, $\lambda(B_i) < \infty$, és

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(A_i)\lambda(B_i) \le \lambda^n(S) + \varepsilon.$$

Választva minden i-re olyan V_i és W_i nyílt halmazokat, amelyekre $A_i \subset V_i$, $B_i \subset W_i$ és

$$\lambda^{n-1}(V_i)\lambda(W_i) \le \lambda^{n-1}(A_i)\lambda(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i},$$

az $U = \cup_{i=1}^{\infty}(V_i \times W_i)$ nyílt halmazra $S \subset U$ és

$$\lambda^n(U) \le \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(V_i)\lambda(W_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\lambda^{n-1}(A_i)\lambda(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \le \lambda^n(S) + 2\varepsilon.$$

* **5.2.3. Lemma.** *Legyenek $a_1, \dots, a_n$ és $b_1, \dots, b_n$ valós számok, τ pedig a*

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \dots, a_nx_n + b_n), \quad \text{ha} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel adott affin transzformációja $\mathbb{R}^n$-nek önmagába, és legyen

$$J\tau = |a_1a_2\cdots a_n|.$$

Ekkor

$$\lambda^n\big(\tau(S)\big) = J\tau \cdot \lambda^n(S) \quad \text{minden} \quad S \subset \mathbb{R}^n\text{-re,}$$

továbbá ha S mérhető, akkor $\tau(S)$ is mérhető.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. A 2.1.3. tételben $n = 1$-re már igazoltuk az állítást. Legyen $n > 1$ és tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz az állítás, legyen továbbá $S \subset \mathbb{R}^n$ és

$$\tau^* : (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (a_1x_1 + b_1, \dots, a_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1}), \quad \text{ha} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

$$\tau' : x_n \mapsto a_nx_n + b_n, \quad \text{ha} \quad x_n \in \mathbb{R}.$$

Ha $S \subset \cup_{i=1}^{\infty}(A_i \times B_i)$, ahol $A_i \in \mathcal{L}^{n-1}$ és $B_i \in \mathcal{L}$, akkor

$$\tau(S) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau(A_i \times B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\big(\tau^*(A_i) \times \tau'(B_i)\big),$$

amiből

$$\lambda^n\big(\tau(S)\big) \le |a_1a_2\cdots a_{n-1}||a_n| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(A_i)\lambda(B_i),$$

és így

$$\lambda^n\big(\tau(S)\big) \le J\tau \cdot \lambda^n(S).$$

Ha valamelyik a_i nulla, akkor készen is vagyunk. Ha nem, akkor τ^{-1}-re alkalmazva az eddigieket, kapjuk a másik irányú egyenlőtlenséget. A $\tau(S)$ halmaz mérhetősége a

$$\begin{aligned}\lambda^n\big(T \cap \tau(S)\big) + \lambda^n\big(T \setminus \tau(S)\big) &= J\tau \cdot \lambda^n\big(\tau^{-1}(T) \cap S\big) + J\tau \cdot \lambda^n\big(\tau^{-1}(T) \setminus S\big)\\ &= J\tau \cdot \lambda^n\big(\tau^{-1}(T)\big) = \lambda^n(T)\end{aligned}$$

összefüggésből következik.

* **5.2.4. Tétel.** *Legyen μ egy Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, és legyen $\mathcal{A}$ a μ értelmezési tartománya. Tegyük fel, hogy μ eltolásinvariáns, azaz*

$$A + b \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mu(A+b) = \mu(A) \quad \text{minden} \quad A \in \mathcal{A},\, b \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Ekkor van olyan $c \geq 0$ konstans, hogy

$$\mu(A) = c\lambda^n(A) \quad \text{minden} \quad A \in \mathcal{A}\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint az 5.2.2. tétel bizonyításában, kapjuk, hogy $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ minden Borel-halmaza $\mu \times \lambda^n$-mérhető. Legyen K egy rögzített, nem üres, kompakt lezártú nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, V pedig tetszőleges nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Felhasználva, hogy az

$$\big\{(x,y) : y \in K, x+y \in V\big\} \quad \text{és} \quad \big\{(x,y) : y \in V, y-x \in K\big\}$$

halmazok nyílt halmazok, a Fubini-tétel és az előző lemma szerint

$$\begin{aligned}
\lambda^n(V)\mu(K) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(x)\,d\lambda^n(x)\xi_K(y)\,d\mu(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_{V-y}(x)\,d\lambda^n(x)\xi_K(y)\,d\mu(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_{V-x}(y)\xi_K(y)\,d\mu(y)\,d\lambda^n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(y)\xi_{K+x}(y)\,d\mu(y)\,d\lambda^n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_V(y)\int_{\mathbb{R}^n} \xi_{y-K}(x)\,d\lambda^n(x)\,d\mu(y) = \mu(V)\lambda^n(K).
\end{aligned}$$

Ebből $c = \mu(K)/\lambda^n(K)$ jelöléssel $\mu(V) = c\lambda^n(V)$ minden nyílt részhalmazára $\mathbb{R}^n$-nek. Egy adott $A \in \mathcal{A}$ halmazt tartalmazó nyílt halmazokra alsó határt véve ugyanez teljesül minden A-ra.

5.2.5. Tétel. *Legyen $\tau : x \mapsto A(x) + b$ egy affin transzformációja $\mathbb{R}^n$-nek önmagába, ahol $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és $b \in \mathbb{R}^n$. Legyen*

$$J\tau = |\det A|.$$

Ekkor

$$\lambda^n\big(\tau(S)\big) = J\tau \cdot \lambda^n(S) \quad \text{minden} \quad S \subset \mathbb{R}^n\text{-re,}$$

továbbá ha az S halmaz λ^n-mérhető, akkor $\tau(S)$ is az.

* **Bizonyítás.** Nyilván feltehetjük, hogy $J\tau \neq 0$, azaz, hogy τ invertálható, mert egyébként τ képtere nullmértékű. Ha τ invertálható, akkor τ homeomorf leképezése $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{R}^n$-re. Legyen

$$\mu(S) = \lambda^n\big(\tau(S)\big), \quad \text{ha} \quad S \subset \mathbb{R}^n.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}(1)\qquad \inf\{\mu(V) : V \text{ nyílt}, S \subset V\} &= \inf\Big\{\lambda^n\big(\tau(V)\big) : \tau(V) \text{ nyílt}, \tau(S) \subset \tau(V)\Big\}\\ &= \lambda^n\big(\tau(S)\big) = \mu(S).\end{aligned}$$

Tekintsük μ leszűkítését a Borel-halmazokra. Ez Radon-mérték: könnyen látható, hogy mérték és a kompakt halmazok mértéke véges, a nyílt halmazokkal kívülről való approximálhatóságot már láttuk, és

$$\begin{aligned}\sup\{\mu(K) : K \text{ kompakt}, K \subset V\} &= \sup\Big\{\lambda^n\big(\tau(K)\big) : \tau(K) \text{ kompakt}, \tau(K) \subset \tau(V)\Big\}\\ &= \lambda^n\big(\tau(V)\big) = \mu(V)\end{aligned}$$

minden V nyílt részhalmazára $\mathbb{R}^n$-nek. Így az előző tétel szerint van olyan c_τ konstans, hogy $\lambda^n\big(\tau(B)\big) = c_\tau\lambda^n(B)$ minden Borel-halmazra. (1) szerint ez minden $S \subset \mathbb{R}^n$-re is teljesül. Ha

$$\tau_1(x_1, \dots, x_n) = (a_1x_1 + b, \dots, a_nx_n + b_n),$$

akkor az 5.2.3. lemma szerint $c_{\tau_1} = J\tau_1$. Ha τ_2 ortogonális lineáris transzformáció, akkor $c_{\tau_2} = 1$, mivel τ_2 az $\{x : x \in \mathbb{R}^n, |x| \le 1\} = \mathbb{B}(0,1)$ gömböt önmagára képezi le. Mivel minden τ invertálható affin transzformáció előáll $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$ alakban, és $c_\tau = c_{\tau_1}c_{\tau_2}$, a tételt bebizonyítottuk.

* **5.2.6. Tétel.** *Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely r sugarú gömbjének λ^n-mértéke*

$$r^n\boldsymbol{\alpha}(n).$$

Bizonyítás. Az 5.2.3. lemma szerint

$$\lambda^n\big(\mathbb{B}(a,r)\big) = r^n\lambda^n\big(\mathbb{B}(0,1)\big)$$

bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ és $r \ge 0$-ra, ahol $\mathbb{B}(a,r)$ az a középpontú, r sugarú zárt gömböt jelöli.

Indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$. A Fubini-tétel szerint, felhasználva a $\boldsymbol{\Gamma}$-függvény ismert tulajdonságai (lásd Rudin [40], 201–204. oldal), valamint a Riemann- és a Lebesgue-integrál kapcsolatát, $n \ge 2$ esetén

$$\begin{aligned}\int_{[-1,1]} \lambda^{n-1}\{y : |y| \le (1-t^2)^{1/2}\}\,d\lambda(t) &= \boldsymbol{\alpha}(n-1)\int_{[-1,1]} (1-t^2)^{(n-1)/2}\,d\lambda(t)\\ = 2\boldsymbol{\alpha}(n-1)\int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2}\,dt &= 2\boldsymbol{\alpha}(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,d\theta\\ = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^{n-1}}{\boldsymbol{\Gamma}\big((n+1)/2\big)}\frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)\boldsymbol{\Gamma}\big((n+1)/2\big)}{\boldsymbol{\Gamma}\big((n+2)/2\big)} &= \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/2)} = \boldsymbol{\alpha}(n).\end{aligned}$$

Nyílt gömbökre a bizonyítás hasonló.

→ **5.2.7. Feladat** [**6**]. Fogalmazzuk meg pontosan, és igazoljuk a *Cavalieri-elv*et.

→ **5.2.8. Feladat** [**8**]. Bizonyítsuk be, hogy λ^n és λ^m szorzata λ^{n+m}.

5.2.9. Feladat [**10**]. Jelölje $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak osztályát. Keressünk olyan $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazt, amely az $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}\}$, illetve $\{A \times B : A, B \in \mathcal{L}\}$ halmazosztályok által generált σ-algebrák közül az elsőben nincs benne, de a másodikban igen. Keressünk olyan $S \subset \mathbb{R}^2$ halmazt, amelyre $\lambda^2(S) = 0$, de a fenti σ-algebrákban nincs benne.

* **5.2.10. Feladat** [**11**]. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$ bármely konvex részhalmaza Lebesgue-mérhető.

* **5.2.11. Feladat** [**14**]. Adjunk példát olyan $A \subset [0,1] \times [0,1]$ Borel-halmazra, amelyre $\lambda^2(A) = 1$, de A nem tartalmaz $B \times C$ alakú halmazt, amelyre $B, C \in \mathcal{L}$ és $\lambda(B)\lambda(C) > 0$.

* **5.2.12. Feladat** [**18**]. Konstruáljunk olyan valós függvényt, amely grafikonjának bármely egységnégyzetbe eső része 1 külső mértékű halmaz.

6. MÉRTÉKEK DERIVÁLTJA

6.1. A Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel

A 4.2.5. tétel szerint, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és φ egy nemnegatív, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény, akkor a $\nu(A) = \int_A \varphi \, d\mu$, ha $A \in \mathcal{A}$ összefüggéssel definiált függvény mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Az nyilvánvaló, hogy ha $\mu(A) = 0$ valamely $A \in \mathcal{A}$-ra, akkor $\nu(A) = 0$. A valószínűségszámításban és az analízisben fontos szerepet játszik a fenti állítás — bizonyos feltételek mellett fennálló — megfordítása.

6.1.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, μ és ν pedig ezen a mérhető téren értelmezett mértékek. Azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ-re nézve, ha bármely $A \in \mathcal{A}$-ra, amelyre $\mu(A) = 0$, teljesül, hogy $\nu(A) = 0$. Jelölése: $\nu \ll \mu$. Azt mondjuk, hogy μ és ν *szingulárisak egymásra*, ha van olyan $A \in \mathcal{A}$, hogy $\mu(A) = 0$ és $\nu(X \setminus A) = 0$. Jelölése: $\nu \perp \mu$.

Nyilván egy adott $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett mértékek körében $\ll$ reflexív és tranzitív, $\perp$ pedig szimmetrikus reláció. Egyszerű példa szinguláris mértékekre a Lebesgue-mérték és a Dirac-mérték $\mathbb{R}$-en.

6.1.2. Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, μ és ν pedig σ-véges mértékek $(X, \mathcal{A})$-n. Ekkor létezik pontosan egy olyan $(X, \mathcal{A})$-n értelmezett ν_a és ν_s mértékekből álló pár, hogy*

$$\nu(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A) \quad \textit{minden} \quad A \in \mathcal{A}\text{-ra;} \tag{1}$$

$$\nu_a \ll \mu \quad \textit{és} \quad \nu_s \perp \mu. \tag{2}$$

Létezik továbbá egy olyan X-en értelmezett φ nemnegatív valós értékű mérhető függvény, hogy

$$\nu_a(A) = \int_A \varphi \, d\mu \quad \textit{minden} \quad A \in \mathcal{A}\text{-ra.} \tag{3}$$

A φ függvény μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi}$ egy másik X-en értelmezett nemnegatív mérhető függvény, amelyre (3) *fennáll, akkor a két függvény*

μ-majdnem mindenütt egyenlő. Ha $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\int_X f\,d\nu_a = \int_X f\varphi\,d\mu. \tag{4}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy μ és ν véges mértékek. Legyen $\kappa(A) = \mu(A) + \nu(A)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ekkor κ is mérték $(X, \mathcal{A})$-n, továbbá

$$\int f\,d\kappa = \int f\,d\mu + \int f\,d\nu,$$

ha valamelyik oldal definiálva van. Az utóbbi állítás mérhető, egyszerű függvényekre nyilvánvaló, nemnegatív mérhető függvényekre Beppo Levi tételéből, tetszőlegesekre pedig az integrál definíciójából következik.

A bizonyítás kulcsa Riesz reprezentációs tételének alkalmazása a (valós) $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa)$ tér folytonos lineáris funkcionáljaira. Ha $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa)$, akkor

$$\Big|\int f\,d\nu\Big| \le \int |f|\,d\nu \le \int |f|\,d\kappa \le \kappa(X)^{1/2}\Big(\int |f|^2\,d\kappa\Big)^{1/2},$$

így az $f \mapsto \int f\,d\nu$ funkcionál folytonos lineáris funkcionál $\mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa)$-n. A Riesz-féle reprezentációs tétel szerint van olyan $g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa)$, hogy

$$\int f\,d\nu = \int fg\,d\kappa = \int fg\,d\nu + \int fg\,d\mu, \tag{5}$$

ha $f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa)$. Legyen $f = \xi_A$ valamely $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor az előző egyenlőség bal oldala $\nu(A)$, és mivel $0 \le \nu(A) \le \kappa(A)$,

$$0 \le \int_A g\,d\kappa \le \kappa(A).$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{A}$-ra fennáll, κ-majdnem minden $x \in X$-re $0 \le g(x) \le 1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez minden $x \in X$-re teljesül. (5)-öt átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$\int_X (1-g)f\,d\nu = \int_X fg\,d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{R}}(\kappa). \tag{6}$$

Legyen $B = X(g = 1)$, és legyen $\nu_a(A) = \nu(A \setminus B)$, $\nu_s(A) = \nu(A \cap B)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Ha f a B karakterisztikus függvénye (6)-ban, akkor látjuk, hogy $\mu(B) = 0$. Nyilván $\nu_s(X \setminus B) = 0$, így $\mu \perp \nu_s$. Mivel g korlátos, (6) akkor is teljesül, ha f-et $(1 + g + \ldots + g^n)\xi_A$-val helyettesítjük, $A \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$-re. Így azt kapjuk, hogy

$$\int_A (1 - g^{n+1})\,d\nu = \int_A g(1 + g + \ldots + g^n)\,d\mu. \tag{7}$$

A B minden pontjában $g(x) = 1$, és így $1 - g^{n+1}(x) = 0$. Az $X \setminus B$ minden pontjában $g^{n+1}(x) \to 0$ monoton csökkenve. Így a bal oldal $\nu(A \setminus B) = \nu_a(A)$-hoz tart monoton növekedve. A jobb oldalon szereplő függvény egy nemnegatív mérhető φ függvényhez tart monoton növekedve, maga az integrál pedig $\int_A \varphi \, d\mu$-höz. Ezzel beláttuk (3)-at. (3)-ból következik, hogy $\nu_a \ll \mu$.

Most térjünk át az általános eset bizonyítására. Válasszunk egy olyan C_n, $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozatot, amelyre $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$, $\mu(C_n) < \infty$ és $\nu(C_n) < \infty$ minden n-re. A ν_{C_n} és μ_{C_n} mértékekre alkalmazva a tétel eddig bizonyított részét, a $\nu_{C_n,a}$ és $\nu_{C_n,s}$ mértékeket és φ_n függvényeket kapjuk. Legyen

$$\nu_a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,a}(A \cap C_n) \quad \text{és} \quad \nu_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{C_n,s}(A \cap C_n),$$

ha $A \in \mathcal{A}$, és legyen $\varphi(x) = \varphi_n(x)$, ha $x \in C_n$ és $\varphi_n(x)$ definiálva van. Ekkor az (1), (2) és (3) összefüggések teljesülnek.

A $\nu = \nu_a + \nu_s$ felbontás unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy $B \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B) = 0$ és $\nu_s(X \setminus B) = 0$, továbbá hogy $\nu'_a + \nu'_s = \nu$, $\nu'_a \ll \mu$, és $B' \in \mathcal{A}$ úgy, hogy $\mu(B') = 0$ és $\nu'_s(X \setminus B') = 0$. Ekkor bármely $\mathcal{A}$-beli $D \subset B \cup B'$ halmazra $\mu(D) = 0$, és így ν_a és ν'_a abszolút folytonossága miatt $\nu(D) = \nu_s(D) = \nu'_s(D)$. Ha $D \subset X \setminus (B \cup B')$, akkor $\nu_s(D) = \nu'_s(D) = 0$ teljesül. Így

$$\begin{aligned} \nu_s(A) &= \nu_s\big(A \cap (B \cup B')\big) + \nu_s\big(A \setminus (B \cup B')\big) \\ &= \nu'_s\big(A \cap (B \cup B')\big) + \nu'_s\big(A \setminus (B \cup B')\big) = \nu'_s(A), \end{aligned}$$

ha $A \in \mathcal{A}$. Ebből már adódik, hogy $\nu_a(A) = \nu'_a(A)$. Így $\nu_a = \nu'_a$ és $\nu_s = \nu'_s$.

A φ unicitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\nu_a(A) = \int_A \tilde{\varphi} \, d\mu$$

minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ekkor az $X(\varphi > \tilde{\varphi})$ halmazra

$$0 = \int_{X(\varphi > \tilde{\varphi})} (\varphi - \tilde{\varphi}) \, d\mu,$$

amiből $\mu X(\varphi > \tilde{\varphi}) = 0$. Hasonlóan $\mu X(\varphi < \tilde{\varphi}) = 0$, így a két függvény μ-majdnem mindenütt egyenlő.

Végül (4) a szokásos módon kapható: nyilvánvaló egyszerű függvényekre, Beppo Levi tételéből adódik nemnegatív, az integrál definíciójából pedig tetszőleges függvényekre.

6.1.3. Megjegyzés. Az előző tételben szereplő ν_a, ν_s párt a ν mérték μ-re vonatkozó *Lebesgue-felbontás*ának nevezzük, a tétel ennek létezésére és egyértelműségére vonatkozó részét pedig *Lebesgue felbontási tétel*ének. A tétel második fele, amely a ν_a mérték integrálként való előállításával foglalkozik, a *Radon–Nikodym-tétel*. A φ függvényt szokás *ν_a-nak a μ-re vonatkozó Radon–Nikodym-derivált*jának nevezni, és $\frac{d\nu_a}{d\mu}$-vel jelölni. Mint láttuk, φ nem egyértelmű, csak μ-majdnem mindenütt meghatározott.

6.1.4. Láncszabály. *Legyenek μ, ν és κ σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren úgy, hogy $\nu \ll \mu$ és $\kappa \ll \nu$. Ekkor $\kappa \ll \mu$ és*

$$\frac{d\kappa}{d\mu} = \frac{d\kappa}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu} \qquad \mu\text{-majdnem mindenütt.}$$

Bizonyítás. Bármely $A \in \mathcal{A}$-ra

$$\kappa(A) = \int_A \frac{d\kappa}{d\nu}\, d\nu = \int_A \frac{d\kappa}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

6.1.5. Feladat [9]. Vezessük le Lebesgue felbontási tételét a Radon–Nikodym-tételből.

6.2. Komplex mértékek

Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és φ egy integrálható függvény, akkor a

$$\nu(A) = \int_A \varphi\, d\mu$$

összefüggéssel definiált halmazfüggvény a 4.2.5. tétel szerint σ-additív $\mathcal{A}$-n, de attól függően, hogy φ valós, komplex vagy vektorértékű, ν is valós, komplex vagy vektorértékű. Érdemesnek látszik ennek alapján valós, komplex vagy vektorértékű σ-additív halmazfüggvényekkel foglalkozni. Mi csak a valós és komplex értékű esetet vizsgáljuk meg részletesen, de a tételek könnyen általánosíthatók $\mathbb{K}^n$-beli értékű mértékekre is, ha koordinátákat használunk. Általános Banach-térbeli értékű mértékek iránt érdeklődőknek Dunford és Schwartz [7], illetve Bourbaki [4] könyvének tanulmányozását ajánljuk. Ha φ bővített valós értékű, nem integrálható, de létezik az integrálja, akkor ν a $-\infty$ és ∞ értékeket is felveheti. Az ilyen, úgynevezett előjeles mértékek tárgyalását lásd Laczkovich [26] jegyzetében vagy Halmos [15] könyvében.

* **6.2.1. Definíció.** Legyen $(X, \mathcal{A})$ egy mérhető tér. Azt mondjuk, hogy μ egy *komplex mérték* $\mathcal{A}$-n, ha $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ és

$$\text{(1)} \qquad \mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-additivitás})$$

diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazok bármely A_k, $k = 1, 2, \dots$ sorozatára. Ha μ csak valós értékeket vesz fel, akkor *valós mérték*nek nevezzük.

Világos, hogy egy adott $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren értelmezett valós, illetve komplex mértékek a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{C}$ felett.

Mivel az (1) egyenlet bal oldala nem függ az A_k halmazok sorrendjétől, a jobb oldalon álló számsor összege sem függhet a sorrendtől. Ebből következik, hogy a jobb oldalon álló sornak abszolút konvergensnek kell lennie.

* **6.2.2. Definíció.** Ha μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, akkor a

$$\mu_r(A) = \Re\mu(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A},$$

illetve

$$\mu_i(A) = \Im\mu(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A}$$

összefüggésekkel definiált valós mértékeket μ *valós, illetve képzetes rész*ének nevezzük. Nyilván $\mu = \mu_r + i\mu_i$.

* **6.2.3. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és ha $A \in \mathcal{A}$, definiáljuk a $|\mu|(A)$ számot mint az összes

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl|\mu(A_k)\bigr|$$

alakú összegek pontos felső korlátját, ahol $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként diszjunkt, mérhető halmazok, amelyek egyesítése A. Az így értelmezett $|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt a μ *teljes változás*ának nevezzük. Vegyük észre, hogy a pontos felső korlát ugyanaz marad, ha csak azt tesszük fel, hogy $A_1, A_2, \dots, A_n$ páronként diszjunkt, mérhető részhalmazai A-nak.

* **6.2.4. Tétel.** *Legyenek μ és ν komplex mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és $c \in \mathbb{C}$. Ekkor*

$$|c\mu| = |c||\mu| \tag{1}$$

és

$$|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|. \tag{2}$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **6.2.5. Tétel.** *Ha μ komplex mérték $(X, \mathcal{A})$-n, akkor $|\mu|$ véges mérték $(X, \mathcal{A})$-n.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy $|\mu|$ mérték. A σ-additivitás miatt $\mu(\emptyset) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\emptyset)$, amiből $\mu(\emptyset) = 0$. Innen $|\mu|(\emptyset) = 0$. Megmutatjuk, hogy $|\mu|$ is σ-additív. Legyen A_j, $j = 1, 2, \dots$ egy $\mathcal{A}$-beli páronként diszjunkt halmazokból álló sorozat, $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ és $t < |\mu|(A)$. Válasszunk $\mathcal{A}$-beli páronként diszjunkt $E_1, \dots, E_n$ halmazokat, amelyekre $\cup_{k=1}^{n} E_k = A$, úgy, hogy

$$t < \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|$$

teljesüljön. Ekkor

$$\begin{aligned} t &< \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k \cap A_j) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \bigl|\mu(E_k \cap A_j)\bigr| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \bigl|\mu(E_k \cap A_j)\bigr| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j). \end{aligned}$$

Mivel t tetszőleges volt, kapjuk, hogy

$$|\mu|(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j).$$

Ha $|\mu|(A) = \infty$, akkor a fordított egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ha $|\mu|(A) < \infty$, legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk minden j-re egy olyan $\mathcal{A}$-beli páronként diszjunkt halmazokból álló $E_{j,1}, \dots, E_{j,n_j}$ halmazrendszert, amelyre $\cup_{k=1}^{n_j} E_{j,k} = A_j$ és

$$\sum_{k=1}^{n_j} \left|\mu(E_{j,k})\right| \geq |\mu|(A_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Ekkor bármely m pozitív egész számra

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} |\mu|(A_j) &\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{2^j} + \sum_{k=1}^{n_j} \left|\mu(E_{j,k})\right| \right) \\
&\leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \left|\mu(E_{j,k})\right| + \left|\mu(\cup_{j=m+1}^{\infty} A_j)\right| \\
&\leq \varepsilon + |\mu|(A).
\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt,

$$\sum_{j=1}^{m} |\mu|(A_j) \leq |\mu|(A),$$

amiből

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(A_j) \leq |\mu|(A).$$

Ezzel beláttuk, hogy $|\mu|$ mérték.

Második lépésként megmutatjuk, hogy $|\mu|$ véges mérték. A 6.2.4. tétel szerint $|\mu|(X) \leq |\mu_r|(X) + |\mu_i|(X)$, így elég valós mértékekre belátni az állítást. Először megmutatjuk, hogy ha $E \in \mathcal{A}$ és $|\mu|(E) = \infty$, akkor E előáll két diszjunkt mérhető A, B halmaz egyesítéseként, amelyekre $\left|\mu(A)\right| > 1$ és $|\mu|(B) = \infty$. Valóban, válasszunk E-nek egy olyan $E_1, E_2, \dots, E_n$ páronként diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló felbontását, amelyre

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\mu(E_k)\right| > 2 + 2\left|\mu(E)\right|.$$

Legyen A azon E_k-k uniója, amelyekre $\mu(E_k) > 0$, és B azon E_k-k uniója, amelyekre $\mu(E_k) \leq 0$. Ekkor kiszámolható, hogy $\left|\mu(A)\right| > 1$, $\left|\mu(B)\right| > 1$ és $|\mu|$ nem lehet A-n és B-n is véges. Szükség szerint esetleg megcseréljük A és B szerepét.

Ha most $|\mu|(X) = \infty$, akkor teljes indukcióval definiálhatunk egy olyan $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló A_n, $n = 1, 2, \ldots$ és B_n, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatot, hogy $A_n \cap B_n = \emptyset$, $\big|\mu(A_n)\big| > 1$, $|\mu|(B_n) = \infty$ és $A_{n+1} \cup B_{n+1} = B_n$ minden n-re. Ha $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

kell teljesüljön, de a jobb oldali sor nem konvergens, mivel $\mu(A_n)$ nem tart nullához.

* **6.2.6. Definíció.** Legyen μ valós mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és

$$\mu^+ = \frac{1}{2}\big(|\mu| + \mu\big), \qquad \mu^- = \frac{1}{2}\big(|\mu| - \mu\big).$$

Ekkor a μ^+, μ^- véges mértékekből álló párt a μ *Hahn-féle felbontásának* nevezzük. Nyilván $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

* **6.2.7. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. A μ_r^+, μ_r^-, μ_i^+, μ_i^- véges mértékekből álló négyest a μ *Jordan-felbontásának* nevezzük. Világos, hogy $\mu = \mu_r^+ - \mu_r^- + i\mu_i^+ - i\mu_i^-$, amit gyakran írunk $\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$ alakban is.

* **6.2.8. Tétel.** *Ha μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és $\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$ a μ Jordan-felbontása, akkor*

(1) $\mu_j \le |\mu|$, *ha* $j = 0, 1, 2, 3$;

(2) $|\mu| \le \sum_{j=0}^{3} \mu_j$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **6.2.9. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, f pedig bővített valós, komplex vagy Banach-térbeli értékű függvény. Az f-et *μ-integrálhatónak* nevezzük, ha $|\mu|$-integrálható. Az f függvény μ *integrálját egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz felett* az

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \int_A f\, d\mu_j$$

összefüggéssel definiáljuk, ahol $\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$ a μ Jordan-felbontása. Megjegyezzük, hogy a jobb oldalon álló integrálok létezése a szokásos módon (egyszerű függvények, Beppo Levi tétele, az integrál definíciója) következik 6.2.8.(1)-ből.

* **6.2.10. Tétel.** *Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, f és g pedig integrálható, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ vagy Banach-térbeli értékű függvények. Ha c valós, illetve komplex konstans, akkor $f + g$ és cf is integrálhatóak és*

(1) $\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$;

(2) $\int (cf)\, d\mu = c \int f\, d\mu$.

Bizonyítás. Egyszerű, a definíció alapján végzett számolás.

* **6.2.11. Definíció.** Legyenek μ és ν komplex mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. A μ-t *teljes*nek nevezzük, ha $|\mu|$ teljes. A μ-t *komplex Radon-mérték*nek nevezzük, ha $|\mu|$ Radon-mérték. Azt mondjuk, hogy ν *abszolút folytonos* μ-re vonatkozóan, ha $|\nu|$ abszolút folytonos $|\mu|$-re vonatkozóan. Azt mondjuk, hogy μ és ν *szinguláris*ak egymásra, ha $|\mu|$ és $|\nu|$ szingulárisak egymásra. A $\nu \ll \mu$ és $\nu \perp \mu$ jelöléseket is használjuk.

* **6.2.12. A Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel komplex mértékre.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy σ-véges mértéktér, ν pedig komplex mérték $(X, \mathcal{A})$-n. Ekkor létezik egyetlen olyan $(X, \mathcal{A})$-n értelmezett ν_a és ν_s komplex mértékekből álló pár, amelyre*

(1) $\nu = \nu_a + \nu_s$;

(2) $|\nu_a| \ll \mu$ *és* $|\nu_s| \perp \mu$.

Létezik továbbá egy $\varphi \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ függvény, amelyre

(3) $\nu_a(A) = \int_A \varphi \, d\mu$ *bármely* $A \in \mathcal{A}$*-ra.*

A φ függvény μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott, azaz ha $\tilde{\varphi} \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ egy másik függvény, amelyre (3) *fennáll, akkor a két függvény μ-majdnem mindenütt egyenlő. Továbbá*

(4) $\int_X f \, d\nu_a = \int_X f\varphi \, d\mu$ *bármely ν_a-integrálható $f : X \to \mathbb{C}$ függvényre;*

(5) $|\nu_a|(A) = \int_A |\varphi| \, d\mu$ *bármely* $A \in \mathcal{A}$*-ra.*

A φ függvényt $\frac{d\nu_a}{d\mu}$-vel is jelöljük, és a ν_a mérték μ szerinti *Radon–Nikodym-derivált*jának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $\nu = \sum_{j=0}^{3} i^j \nu_j$ a ν Jordan-felbontása, és alkalmazzuk a ν_j mértékekre a 6.1.2. tételt. Legyen

$$\nu_a = \sum_{j=0}^{3} i^j \nu_{j,a} \quad \text{és} \quad \nu_s = \sum_{j=0}^{3} i^j \nu_{j,s}.$$

(1) és (2) egyszerű számolással adódnak. Az unicitás ugyanúgy kapható meg, mint 6.1.2.-ben. Legyen

$$\varphi = \sum_{j=0}^{3} i^j \varphi_j, \quad \text{ahol} \quad \nu_{j,a}(A) = \int_A \varphi_j \, d\mu.$$

Ekkor 6.1.2.(3) és 6.1.2.(4) szerint teljesül (3) és (4). A φ egyértelműsége hasonlóan látható be, mint 6.1.2.-ben. Végül, (5) bizonyításához legyen $A \in \mathcal{A}$ rögzített, és $A_1, A_2, \dots, A_n$ diszjunkt $\mathcal{A}$-beli halmazokból álló sorozat, amelyre $\cup_{k=1}^{n} A_k = A$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} \big|\nu_a(A_k)\big| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{A_k} \varphi \, d\mu \right| \le \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} |\varphi| \, d\mu = \int_A |\varphi| \, d\mu,$$

amiből

$$|\nu_a|(A) \le \int_A |\varphi| \, d\mu.$$

Legyen $g = \xi_A \operatorname{sgn} \overline{\varphi}$. Választva olyan egyszerű függvényekből álló s_j függvénysorozatot, amely pontonként g-hez konvergál, és amelyre $|s_j| \le |\xi_A \operatorname{sgn} \overline{\varphi}| \le 1$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint

$$\int_A |\varphi|\, d\mu = \int_X \varphi \xi_A \operatorname{sgn} \overline{\varphi}\, d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X \varphi s_j\, d\mu.$$

Másrészt minden s_j függvény $\sum_{k=1}^n c_k \xi_{A_k}$ alakú, ahol $A_1, \dots, A_n$ az A egy mérhető, diszjunkt halmazokra való felosztása, és $|c_k| \le 1$ minden k-ra. Így

$$\left| \int_X \varphi s_j\, d\mu \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k \int_{A_k} \varphi\, d\mu \right| \le \sum_{k=1}^n \left| \int_{A_k} \varphi\, d\mu \right| = \sum_{k=1}^n |\nu_a(A_k)| \le |\nu_a|(A).$$

Összevetve a két előző összefüggést kapjuk, hogy

$$\int_A |\varphi|\, d\mu \le |\nu_a|(A).$$

* **6.2.13. Következmény.** *Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ekkor van olyan mérhető $\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ függvény, hogy*

(1) $|\varphi(x)| = 1$ *minden* $x \in X$*-re;*

(2) $\mu(A) = \int_A \varphi\, d|\mu|$ *minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra;*

(3) $\int_X f\, d\mu = \int_X f\varphi\, d|\mu|$ *minden* $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(|\mu|)$*-re;*

(4) $|\int_X f\, d\mu| \le \int_X |f|\, d|\mu|$ *minden* $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(|\mu|)$*-re.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt μ-re és $|\mu|$-re. (1)-et 6.2.12.(5)-ből kapjuk. (4) a (3)-ból következik.

* **6.2.14. Definíció.** Ha ν komplex mérték az $(X, \mathcal{B})$ mérhető téren, $(X, \mathcal{B}, |\nu|)$ természetes kiterjesztése $(X, \mathcal{A}, \kappa)$ és $h = d\nu/d|\nu|$, akkor a $\mu(A) = \int_A h\, d\kappa$ összefüggéssel definiált komplex mértéket ν *természetes kiterjesztés*ének nevezzük. Nyilván $|\mu| = \kappa$.

* **6.2.15. Hahn-féle felbontási tétel.** *Legyen μ valós mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ekkor $\mu^+ \perp \mu^-$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\dfrac{d\mu}{d|\mu|} = h$, ahol $|h| = 1$. Mivel μ valós, h is valós majdnem mindenütt. Legyen $B = X(h = -1)$. Mivel

$$\mu^+ = \frac{1}{2}\big(|\mu| + \mu\big), \quad \mu^- = \frac{1}{2}\big(|\mu| - \mu\big),$$

$$\mu^+(B) = \frac{1}{2} \int_B (1 + h)\, d|\mu| = 0$$

és

$$\mu^-(X \setminus B) = \frac{1}{2} \int_{X \setminus B} (1 - h)\, d|\mu| = 0.$$

* **6.2.16. Tétel.** *Legyenek μ és ν komplex mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, és $c \in \mathbb{C}$. Ha egy $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ vagy Banach-térbeli értékű f függvény μ-integrálható, akkor $c\mu$-integrálható is, és*

$$\int f\, d(c\mu) = c \int f\, d\mu. \tag{1}$$

Ha az f függvény ν-integrálható is, akkor $\mu + \nu$-integrálható, és

$$\int f\, d(\mu + \nu) = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu. \tag{2}$$

Bizonyítás. Ha f egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor nyilván fennállnak az (1) és (2) összefüggések. Az integrál definíciójából kapjuk, hogy (1) és (2) akkor is fennállnak, ha f egyszerű függvény. Végül, választva olyan egyszerű függvényekből álló s_n sorozatot, amely pontonként f-hez konvergál, és amelyre $|s_n| \le |f|$, $n = 1, 2, \ldots$, Lebesgue majorált konvergencia tétele és a 6.2.13.(4) felhasználásával

$$\left| \int (f - s_n)\, d(c\mu) \right| \le \int |f - s_n|\, d|c\mu| \to 0,$$

$$\left| c \int (f - s_n)\, d\mu \right| \le |c| \int |f - s_n|\, d|\mu| \to 0,$$

amiből

$$\int f\, d(c\mu) = \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d(c\mu) = c \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d\mu = c \int f\, d\mu.$$

Hasonlóan kapjuk (2)-t.

* **6.2.17. Definíció.** Legyen μ komplex mérték az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ν pedig komplex mérték az $(Y, \mathcal{B})$ mérhető téren. Legyen

$$\varphi_\mu = \frac{d\mu}{d|\mu|}, \qquad \varphi_\nu = \frac{d\nu}{d|\nu|}.$$

A μ és ν *szorzatát* a

$$(\mu \otimes \nu)(S) = \int_S \varphi_\mu(x)\varphi_\nu(y)\, d\big(|\mu| \otimes |\nu|\big)(x, y)$$

összefüggéssel definiáljuk azon S halmazokra, amelyek $|\mu| \otimes |\nu|$-mérhetőek.

* **6.2.18. Feladat [5].** Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, μ komplex mérték $(X, \mathcal{A})$-n, f komplex értékű μ-integrálható függvény. Mutassuk meg, hogy a $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, ha $A \in \mathcal{A}$ összefüggéssel definiált komplex mérték abszolút folytonos μ-re vonatkozóan.

* **6.2.19. Feladat [7].** Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, ν és μ komplex mértékek $(X, \mathcal{A})$-n, $\nu = \sum_{j=0}^{3} i^j \nu_j$ a ν Jordan-felbontása. Igazoljuk, hogy az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) $\nu \ll \mu$;

(2) $\nu_j \ll \mu$, ha $j = 0, 1, 2, 3$;

(3) bármely $A \in \mathcal{A}$ halmazra, ha $|\mu|(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$.

6.3. $\mathbb{L}^p$ duális tere

* **6.3.1. Megjegyzés.** A Hölder-egyenlőtlenség szerint, ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $1 \leq p \leq \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), akkor bármely $g \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$-re az

$$F(f) = \int f g \, d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$$

összefüggéssel definiált funkcionál (amely nyilvánvalóan lineáris) korlátos és $\|F\| \leq \|g\|_q$. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a normák között — megfelelő feltételek mellett — egyenlőség áll és $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ minden korlátos lineáris funkcionálja előáll ilyen alakban.

* **6.3.2. Lemma.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $1 \leq p < \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$). Ekkor tetszőleges $g : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvényre*

$$\|g\|_q \leq \sup_f \frac{\left|\int f g \, d\mu\right|}{\|f\|_p},$$

ahol a felső határ az összes nem nulla $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-beli korlátos mérhető függvényre veendő.

Bizonyítás. Ha valamely g függvényre az egyenlőtlenség nem állna fenn, akkor $|g|$-re és $f \operatorname{sgn} g$-re (itt $\operatorname{sgn} 0 = 1$) sem állna fenn, így elég nemnegatív g-re bizonyítani az állítást. Ekkor azonban $|\int f g \, d\mu| \leq \int |f| g \, d\mu$ miatt a jobb oldali felső határ nem változik, ha csak nemnegatív f függvényeket tekintünk. Egyszerű függvények monoton növekedő sorozatával közelítve g-t kapjuk, hogy ha az egyenlőtlenség nem áll fenn, akkor van olyan g nemnegatív egyszerű függvény is, amelyre szintén nem áll fenn, így elég az egyenlőtlenséget erre az esetre bizonyítani. Ha $1 < p < \infty$, legyen $f = g^{q-1}$. Ekkor $f^p = g^q$, így $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p}$ és $\int f g \, d\mu = \int g^q = \|g\|_q^q$, ahonnan $\int f g \, d\mu \geq \|g\|_q \|f\|_p$. Ha $p = 1$, legyen s a jobb oldali felső határ. Ha $A = X(g > s)$ pozitív mértékű, akkor legyen $f = \xi_A$. Nyilván $\|f\|_1 = \mu(A)$, és $\int f g = \int_A g > s\mu(A) = s\|f\|_1$, ami ellentmondás.

* **6.3.3. Riesz reprezentációs tétele.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, $1 \leq p < \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$). Ha $1 < p < \infty$, akkor bármely $F : \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K}$ korlátos lineáris funkcionálhoz egy és csak egy olyan $g \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ létezik, amelyre*

$$F(f) = \int f g \, d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu).$$

Fennáll továbbá $\|F\| = \|g\|_q$. Ha a mértéktér σ-véges, akkor $p = 1$ esetén is teljesül az állítás.

A tételt sokszor röviden úgy fogalmazzuk, hogy $\mathbb{L}^p$ duálisa $\mathbb{L}^q$.

Bizonyítás. Először feltesszük, hogy a mértéktér véges. Legyen $\nu(A) = F(\xi_A)$, ha $A \in \mathcal{A}$. Megmutatjuk, hogy ν valós, illetve komplex mérték. Ha A_n diszjunkt, mérhető halmazok egy sorozata, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, akkor

$$\left\|\xi_A - \xi_{\cup_{k=1}^n A_k}\right\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k)\right)^{1/p} \to 0,$$

és így

$$\nu(A) = F(\xi_A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_{A_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Nyilvánvaló, hogy $\nu \ll \mu$, így alkalmazhatjuk a Radon–Nikodym-tételt, mely szerint létezik egy μ-majdnem mindenütt egyértelműen meghatározott $g \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ függvény, amelyre

$$F(\xi_A) = \nu(A) = \int_A g\, d\mu = \int \xi_A g\, d\mu.$$

Innen azonnal következik, hogy $F(f) = \int fg\, d\mu$ akkor is fennáll, ha f mérhető egyszerű függvény. Az approximációs lemmát és Lebesgue majorált konvergencia tételét alkalmazva, az is következik, hogy ez akkor is fennáll, ha f korlátos mérhető függvény. A 6.3.2. lemma szerint $\|g\|_q \le \|F\|$. Mivel a korlátos mérhető függvények sűrűek $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-ben, kapjuk, hogy $F(f) = \int fg\, d\mu$ minden $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-re teljesül.

Ha most μ tetszőleges mérték és $A \in \mathcal{A}$ véges mértékű halmaz, akkor az eddig bizonyítottakat alkalmazhatjuk az $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ altérre és az F funkcionál A-n kívül eltűnő függvényekre vett megszorítására. A kapott g_A függvényt tekinthetjük olyan X-en értelmezett $\mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$-beli függvénynek, amely A-n kívül nulla. Az egyértelműség miatt, ha $B \in \mathcal{A}$, akkor $g_A|(A \cap B) = g_B|(A \cap B)$ majdnem mindenütt.

Az $1 < p < \infty$ esetben legyen

$$s = \sup\big\{\|g_A\|_q : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\big\} \le \|F\|,$$

és válasszunk olyan $A_n \in \mathcal{A}$ halmazsorozatot, amelyre $\|g_{A_n}\|_q \to s$. Feltehetjük, hogy az A_n halmazsorozat bővülő. A g_{A_n} függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál egy $g \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ függvényhez, amely az $A_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ halmazon kívül eltűnik, és amelyre $\|g\|_q = \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_q = s$.

Megmutatjuk, hogy ha $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$, akkor $F(f) = \int fg\, d\mu$. Először is vegyük észre, hogy ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$, $A_\infty \cap A = \emptyset$, akkor $g_A = 0$ majdnem mindenütt, mert egyébként elég nagy n-re $\|g_{A_n \cup A}\|_q^q = \|g_{A_n}\|_q^q + \|g_A\|_q^q > s$ teljesülne. Ha most f majdnem mindenütt nulla A_∞-en, akkor $|f|^p$-re alkalmazva a Csebisev-egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $B_n = X\big(|f| > 1/n\big)$ véges mértékű. Mivel B_n bővülő halmazsorozat és f nulla a $B_\infty = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ halmazon kívül, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\|f - f|B_n\|_p \to 0$. Innen F folytonossága miatt $F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f|B_n) = 0$. Ha f majdnem mindenütt nulla A_∞-en kívül, akkor Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\|f - f|A_n\|_p \to 0$. Innen F folytonossága és a Hölder-egyenlőtlenség miatt

$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(f|A_n) = \lim_{n\to\infty} \int f g_{A_n}\, d\mu = \int fg\, d\mu$. Végül, ha f tetszőleges, akkor $F(f) = F(f\xi_{A_\infty}) + F(f\xi_{X\setminus A_\infty}) = \int fg\, d\mu$.

Tegyük fel, hogy $\tilde{g} \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ egy másik függvény, amellyel $F(f) = \int f\tilde{g}\, d\mu$ teljesül minden $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$-re. Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség szerint a $B_n = X\big(|\tilde{g}| > 1/n\big)$ halmazok véges mértékűek, ezeken $\tilde{g} = g$ majdnem mindenütt. Ugyanez teljesül az A_n halmazokon. Az $\cup_{n=1}^\infty (A_n \cup B_n)$ halmaz komplementerén mindkét függvény nulla.

A $p = 1$ esetben válasszuk a véges mértékű mérhető halmazokból álló és bővülő A_n sorozatot úgy, hogy egyesítése X legyen. A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy $F(f) = \int fg\, d\mu$. A g egyértelműsége azonnal adódik a g_{A_n} függvények egyértelműségéből.

* **6.3.4. Feladat [11].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy ha minden $A \in \mathcal{A}$ esetén

$$\mu(A) = \sup\big\{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subset A, \mu(B) < \infty\big\}$$

(σ-véges mértékterekre ez a feltétel teljesül), $1 \le p \le \infty$ és $1/p + 1/q = 1$ (itt $1/\infty = 0$), akkor tetszőleges $g : X \to \mathbb{K}$ mérhető függvényre

$$\|g\|_q = \sup\big\{|\textstyle\int fg\, d\mu| : f \in \mathbb{L}^p, \|f\|_p \le 1\big\}.$$

* **6.3.5. Feladat [7].** Az 6.3.1. megjegyzés jelöléseivel, igazoljuk, hogy ha $p = 1$, akkor $\|F\| = \|g\|_q$ nem feltétlenül teljesül.

* **6.3.6. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy a 6.3.3. tétel állítása $p = \infty$ esetén nem teljesül, még akkor sem, ha a mértéktér véges.

* **6.3.7. Feladat [19].** Igazoljuk, hogy van olyan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $F : \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \to \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionál, amelyhez nincs olyan μ-mérhető g függvény, hogy $F(f) = \int fg\, d\mu$ minden $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$-re.

7. MÉRTÉKEK ÉS LINEÁRIS FUNKCIONÁLOK

7.1. Monoton lineáris funkcionálok

* **7.1.1. Motiváció.** Legyen μ Radon-mérték X-en. Ekkor az

$$F : f \mapsto \int f \, d\mu$$

megfeleltetés minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$-hez hozzárendel egy komplex számot. Az integrál tulajdonságaiból következik, hogy F lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$-en, továbbá F rendelkezik még egy fontos tulajdonsággal: ha f és g valós értékű függvények és $f \geq g$, akkor $F(f) \geq F(g)$, amit úgy fogunk kifejezni, hogy F *monoton lineáris funkcionál*. Igen fontos tény, hogy ennek az egyszerű állításnak teljesül a megfordítása.

* **7.1.2. Riesz-féle reprezentációs tétel.** *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, és $F : \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X) \to \mathbb{C}$ monoton lineáris funkcionál. Ekkor létezik egy olyan μ Radon-mérték X-en, amely megegyezik a saját természetes kiterjesztésével, és amelyre*

$$F(f) = \int f \, d\mu \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\text{-re.} \tag{1}$$

Ha κ egy másik Radon-mérték, amelyre szintén teljesül (1), akkor μ a κ természetes kiterjesztése.

Bizonyítás. Legyen

$$\nu(V) = \sup\big\{F(f) : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X),\ 0 \leq f \leq 1 \text{ és } \operatorname{spt}(f) \subset V\big\},$$

ha V nyílt részhalmaza X-nek, és μ a ν-höz tartozó külső mérték. Megmutatjuk, hogy ν premérték a nyílt halmazokon. Tegyük fel, hogy $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$, ahol V, V_i, $i = 1, 2, \ldots$ nyílt halmazok, és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \leq f \leq 1$ és $\operatorname{spt}(f) \subset V$. Mivel $\operatorname{spt}(f)$ kompakt, van olyan n, hogy $\operatorname{spt}(f) \subset \cup_{i=1}^{n} V_i$. Az egység felbontására vonatkozó 11.2.15. tétel szerint léteznek olyan $g_1, g_2, \ldots, g_n$ függvények, hogy $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $0 \leq g_i \leq 1$, $\operatorname{spt}(g_i) \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$, ha $x \in \operatorname{spt}(f)$. Ebből

$$F(f) = \sum_{i=1}^{n} F(g_i f) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i).$$

A bal oldalon szuprémumot véve, kapjuk, hogy $\nu(V) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(V_i)$.

Ha $\varepsilon > 0$ és V, W nyílt halmazok úgy, hogy $\nu(W) < \infty$ és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \le f \le 1$, $\mathrm{spt}(f) \subset V \cap W$ és $F(f) > \nu(V \cap W) - \varepsilon$, akkor ν definíciója értelmében

$$\begin{aligned}\nu(W) &\ge \sup\bigl\{F(f) + F(g) : g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X), 0 \le g \le 1, \mathrm{spt}(g) \subset W \setminus \mathrm{spt}(f)\bigr\}\\ &\ge F(f) + \nu\bigl(W \setminus \mathrm{spt}(f)\bigr) \ge \mu(V \cap W) + \mu(W \setminus V) - \varepsilon,\end{aligned}$$

így ν premérték a nyílt halmazok osztályán. Ebből következik, hogy minden nyílt halmaz μ-mérhető és X bármely részhalmazának a külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek pontos alsó korlátja.

Legyen most K kompakt részhalmaza X-nek és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ olyan függvény, amelyre $0 \le f \le 1$ és $f(x) = 1$, ha $x \in K$. Ha $0 < \alpha < 1$ és $V_\alpha = X(f > \alpha)$, akkor $K \subset V_\alpha$ és $g \le f/\alpha$ minden olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$ függvényre, amelyre $0 \le g \le 1$ és $\mathrm{spt}(g) \subset V_\alpha$. Innen

$$\mu(K) \le \mu(V_\alpha) = \nu(V_\alpha) \le \sup_g F(g) \le \frac{1}{\alpha} F(f),$$

amiből $\alpha \uparrow 1$ határátmenettel

$$\mu(K) \le F(f) < \infty. \tag{2}$$

Végül, ha V nyílt és $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $0 \le f \le 1$ és $\mathrm{spt}(f) \subset V$, akkor az Uriszon-lemma 11.2.14. változatát felhasználva egy olyan W nyílt halmaz kapunk, amely tartalmazza $\mathrm{spt}(f)$-et, de kompakt lezártja V-ben van. Erre

$$\mu(V) \ge \mu(\overline{W}) \ge \mu(W) \ge F(f),$$

amiből

$$\mu(V) \le \sup\bigl\{\mu(K) : K \subset V,\, K \text{ kompakt}\bigr\}.$$

Ezzel megmutattuk, hogy μ teljes Radon-mérték X-en. Nyilván μ természetes kiterjesztése önmaga.

Most megmutatjuk, hogy

$$F(f) = \int f\,d\mu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X).$$

Mivel f folytonos, nyilván μ-mérhető. Legyen $K = \mathrm{spt}(f)$ és (a, b) egy olyan intervallum, amely tartalmazza f értékkészletét. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$$

felosztását $[a, b]$-nek, amelyre $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ $(1 \le i \le n)$. Legyen

$$E_i = K \cap X(y_{i-1} < f \le y_i).$$

Válasszunk olyan V_i nyílt halmazokat, amelyekre $E_i \subset V_i$, $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n$ és

$$f(x) < y_i + \varepsilon \quad \text{minden } x \in V_i\text{-re.}$$

Az egység felbontásáról szóló 11.2.15. tétel szerint léteznek olyan $g_i \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ függvények, hogy $0 \le g_i \le 1$, $\operatorname{spt}(g_i) \subset V_i$ és $\sum_{i=1}^n g_i(x) = 1$, ha $x \in K$. Innen $f = \sum_{i=1}^n g_i f$ és (2) szerint

$$\mu(K) \le F\Big(\sum_{i=1}^n g_i\Big) = \sum_{i=1}^n F(g_i).$$

Mivel $g_i f \le (y_i + \varepsilon) g_i$ és mivel $y_i - \varepsilon < f(x)$, ha $x \in E_i$,

$$\begin{aligned}
F(f) &= \sum_{i=1}^n F(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) F(g_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \big(|a| + y_i + \varepsilon\big) F(g_i) - |a| \sum_{i=1}^n F(g_i) \\
&\le \sum_{i=1}^n \big(|a| + y_i + \varepsilon\big)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) - |a|\mu(K) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n \big(|a| + y_i + \varepsilon\big) \\
&\le \int f\, d\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + |a| + b + \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Mivel ε tetszőleges volt, kapjuk, hogy $F(f) \le \int f\, d\mu$. Alkalmazva ezt $-f$-re,

$$-F(f) = F(-f) \le \int (-f)\, d\mu = -\int f\, d\mu,$$

ami éppen a másik irányú egyenlőtlenség. Most tetszőleges $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$-re $f = f_1 + i f_2$, ahol $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ és így

$$F(f) = F(f_1) + iF(f_2) = \int f_1\, d\mu + i \int f_2\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

Hátravan még annak igazolása, hogy ha κ egy másik Radon-mérték X-en, amelyre

$$F(f) = \int f\, d\kappa \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\text{-re,}$$

akkor μ a természetes kiterjesztése κ-nak. Legyen K kompakt részhalmaza X-nek, $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $K \subset V$ nyílt részhalmazt, amelyre $\kappa(V) \le \kappa(K) + \varepsilon$. Az Uriszon-lemma szerint van olyan $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, hogy

$$0 \le f \le 1,\ \operatorname{spt}(f) \subset V \text{ és } f(x) = 1, \text{ ha } x \in K.$$

Innen (2) szerint

$$\mu(K) \le \int f\,d\mu = F(f) = \int f\,d\kappa \le \kappa(V) \le \kappa(K) + \varepsilon,$$

és így $\mu(K) \le \kappa(K)$. Felcserélve μ és κ szerepét, kapjuk, hogy $\mu(K) = \kappa(K)$ bármely K kompakt részhalmazára X-nek. Mivel μ és κ Radon-mértékek, megegyeznek a nyílt halmazokon is. Ha a κ-hoz tartozó külső mértéket is κ-val jelöljük, akkor

$$\kappa(A) = \inf\{\kappa(V) : A \subset V,\ V \text{ nyílt}\}$$

minden $A \subset X$-re, így $\kappa(A) = \mu(A)$ minden $A \subset X$-re, azaz μ a κ természetes kiterjesztése.

* **7.1.3. Példa.** Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, és

$$F_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,dg \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})\text{-re.}$$

Ekkor F_g monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$-en, így a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint előáll egy teljes Radon-mérték szerinti integrálként. Mivel 4.5.5. szerint

$$F_g(f) = \int f\,d\lambda_g \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}\text{-re,}$$

és mivel, mint könnyen ellenőrizhető, λ_g természetes kiterjesztése önmaga, az F_g-hez a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint tartozó teljes Radon-mérték éppen λ_g.

7.2. A Haar-mérték egyértelműsége

Most már eszközeink elegendőek arra hogy bebizonyítsuk, a Haar-mérték lényegében egyértelmű. Az alapgondolat a Fubini-tételt használni úgy, ahogy azt az 5.2.4. lemma bizonyításában tettük. A gondot az a technikai probléma okozza, hogy két Radon-mérték szorzata általában nem Radon-mérték. Ennek megkerülése vált lehetővé az előző pont eredményei segítségével.

* **7.2.1. Lemma.** *Legyen μ Radon-mérték az X lokálisan kompakt Hausdorff-téren, ν pedig Radon-mérték az Y lokálisan kompakt Hausdorff-téren. Ekkor minden $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X \times Y)$ függvény $\mu \otimes \nu$-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen C a h függvény tartója, $A \subset X$ és $B \subset Y$ pedig kompakt halmazok, amelyekre $C \subset A \times B$. Tekintsük az összes $(x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y)$ alakú függvények osztályát, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$, $g_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(Y)$, ha $k = 1, 2, \ldots, n$. Mivel ezen függvények megszorításai $A \times B$-re egy, a konjugáltképzésre zárt algebrát alkotnak, amely szétválasztja $A \times B$ pontjait és tartalmazza a konstans függvényeket, $h|(A \times B)$ a Weierstrass–Stone-tétel miatt ilyen függvények egyenletes határértéke. Innen következik, hogy a h függvény $\mu \otimes \nu$-mérhető.

* **7.2.2. Lemma.** *Legyen G lokálisan kompakt Hausdorff topologikus csoport, μ egy bal Haar-mérték, ν pedig egy jobb Haar-mérték G-n. Ekkor létezik olyan pozitív, valós értékű folytonos k függvény G-n, hogy ha $f, g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$, akkor*

(1) $k(y) \int g \, d\nu = \int g(yx^{-1}) \, d\mu(x)$, *ha* $y \in G$;

(2) $\int kf \, d\nu = \int f \, d\mu$.

Bizonyítás. A Fubini-tételt és az előző lemmát felhasználva,

$$\begin{aligned}
\int f \, d\mu \int g \, d\nu &= \int \int f(x)g(y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) = \int \int f(yx)g(y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \\
&= \int \int f(yx)g(y) \, d\nu(y) \, d\mu(x) = \int \int f(y)g(yx^{-1}) \, d\nu(y) \, d\mu(x) \\
&= \int f(y) \int g(yx^{-1}) \, d\mu(x) \, d\nu(y).
\end{aligned}$$

Ha rögzítünk egy nemnegatív, nem nulla $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(G)$ függvényt, az (1) összefüggés egy pozitív folytonos k függvényt definiál. Számításunk azt mutatja, hogy erre a k-ra (2) teljesül minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$-re. Azonban a k függvényt a (2) összefüggés egyértelműen jellemzi, így nem függ g választásától. Így azt kapjuk, hogy (1) minden $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$-re fennáll.

* **7.2.3. Tétel.** *Legyen G lokálisan kompakt Hausdorff-csoport. Bármely két bal [jobb] Haar-mérték pozitív konstansszorosa egymásnak.*

Bizonyítás. A bizonyítást bal Haar-mértékekre végezzük, jobb Haar-mértékekre hasonló. Legyenek μ_1 és μ_2 bal Haar-mértékek, ν pedig jobb Haar-mérték. Az előző lemma szerint léteznek olyan k_1, k_2 pozitív valós értékű folytonos függények G-n, hogy $\int k_1 f \, d\mu_1 = \int f \, d\nu$ és $\int k_2 f \, d\mu_2 = \int f \, d\nu$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$-re. Ekkor $h = k_1/k_2$ pozitív valós értékű folytonos függvény, amelyre $\int f \, d\mu_1 = \int k_2 h f \, d\nu = \int hf \, d\mu_2$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$-re. Ha $y \in G$, akkor

$$\begin{aligned}
\int h(x)f(x) \, d\mu_2(x) &= \int f(x) \, d\mu_1(x) = \int f(yx) \, d\mu_1(x) \\
&= \int h(x)f(yx) \, d\mu_2(x) = \int h(y^{-1}x)f(x) \, d\mu_2(x)
\end{aligned}$$

minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(G)$-re, amiből $h(y^{-1}x) = h(x)$ minden $x \in G$-re. Így h konstans G-n, és $\int f \, d\mu_1 = h \int f \, d\mu_2$. Innen a μ_1 mérték a μ_2 mérték h-szorosa.

7.3. Folytonos lineáris funkcionálok

* **7.3.1. Motiváció.** Legyen μ egy valós (vagy komplex) Radon-mérték X-en. Ekkor az

$$F_\mu : f \mapsto \int f\, d\mu$$

megfeleltetés folytonos lineáris funkcionál az egyenletes konvergencia $\| \;\|_u$ normájával (lásd 11.3.5.) ellátott $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\big($vagy $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\big)$ téren. Valóban,

$$\Big|\int f\, d\mu\Big| \le \int |f|\, d|\mu| \le \|f\|_u |\mu|(X).$$

Itt is nagyon fontos ennek az egyszerű ténynek a megfordítása.

* **7.3.2. Riesz-féle reprezentációs tétel.** *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér és F folytonos lineáris funkcionál az egyenletes konvergencia normájával ellátott $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$ $\big($illetve $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)\big)$ téren. Ekkor egy és csak egy teljes valós (illetve komplex) Radon-mérték létezik, amelyre*

$$F(f) = \int f\, d\mu \quad \textit{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)\textit{-re.}$$

Erre a mértékre $\|F\| = |\mu|(X)$.

Bizonyítás. Legyen

$$G(f) = \sup\big\{|F(h)| : h \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X), |h| \le f\big\},$$

ha $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, $f \ge 0$. Nyilván $G(f) \ge 0$ minden f-re, $0 \le f_1 \le f_2$ esetén $G(f_2) \ge G(f_1)$ és $G(cf) = cG(f)$, ha $c \ge 0$.

Megmutatjuk, hogy

$$G(f_1 + f_2) = G(f_1) + G(f_2),$$

ha $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, $f_1, f_2 \ge 0$. Legyen $\varepsilon > 0$. Léteznek olyan $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ függvények, hogy $|h_1| \le f_1$, $|h_2| \le f_2$ és

$$G(f_1) \le \big|F(h_1)\big| + \varepsilon, \quad G(f_2) \le \big|F(h_2)\big| + \varepsilon.$$

Választva olyan α_1, α_2 egységnyi abszolút értékű komplex számokat, amelyekre

$$\alpha_1 F(h_1) = \big|F(h_1)\big| \quad \text{és} \quad \alpha_2 F(h_2) = \big|F(h_2)\big|,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(f_1) + G(f_2) &\le \big|F(h_1)\big| + \big|F(h_2)\big| + 2\varepsilon = F(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\le G\big(|h_1| + |h_2|\big) + 2\varepsilon \le G(f_1 + f_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

így $G(f_1+f_2) \geq G(f_1)+G(f_2)$.

Válasszunk egy olyan $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ függvényt, amelyre $|h| \leq f_1+f_2$ és legyen $V = X(f_1+f_2>0)$, valamint

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in V,$$

egyébként nulla, és

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in V,$$

egyébként nulla. Ekkor $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$, $h_1+h_2=h$, $|h_1| \leq f_1$, $|h_2| \leq f_2$, és így

$$\big|F(h)\big| = \big|F(h_1)+F(h_2)\big| \leq \big|F(h_1)\big| + \big|F(h_2)\big| \leq G(f_1)+G(f_2),$$

amiből

$$G(f_1+f_2) \leq G(f_1)+G(f_2).$$

Ha most $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, akkor legyen

$$G(f) = G(f^+) - G(f^-),$$

és ha $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X)$, akkor legyen

$$G(f_1+if_2) = G(f_1)+iG(f_2).$$

Egyszerű számolások mutatják, hogy G egy monoton lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}(X)$-en, és

$$\big|F(f)\big| \leq G\big(|f|\big) \leq \|F\|\|f\|_u \quad \text{minden } f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)\text{-re.}$$

Jelölje ν a 7.1.2. Riesz-féle reprezentációs tétel szerint G-hez tartozó teljes Radon-mértéket. Mivel

$$\nu(X) = \sup\big\{G(f) : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}(X), 0 \leq f \leq 1\big\},$$

kapjuk, hogy

$$\nu(X) \leq \|F\|.$$

Másrészt

$$\big|F(f)\big| \leq G\big(|f|\big) = \int_X |f|\, d\nu = \|f\|_1, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X).$$

Így F folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$-en a $\|\ \|_1$ normára nézve. Mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$-ben, F-nek létezik egyértelmű kiterjesztése $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$-re az $\mathbb{L}^1$-norma megtartásával; ezt is F-fel fogjuk jelölni. A $\mu(A) = F(\xi_A)$ definícióval valós vagy komplex mértéket kapunk, amelyre $\big|\mu(A)\big| \leq \nu(A)$, tehát $|\mu|(A) \leq \nu(A)$, ha A ν-mérhető. A 6.2.12. Lebesgue–Radon–Nikodym-tétel szerint létezik olyan g függvény, amelyre $\mu(A) = \int_A g\, d\nu$ és $|\mu|(A) = \int_A |g|\, d\nu$, ha A ν-mérhető. Ebből ν-majdnem mindenütt $|g| \leq 1$. Mivel az

$f \mapsto \int fg\,d\nu = \int f\,d\mu$ és $f \mapsto F(f)$ folytonos funkcionálok egybeesnek $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu)$ egyszerű függvényein,

$$F(f) = \int_X fg\,d\nu, \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\nu). \tag{1}$$

Ebből

$$\nu(X) = \int_X |g|\,d\nu \geq \sup\bigl\{|F(f)| : f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X), \|f\|_u \leq 1\bigr\} = \|F\|,$$

tehát $\nu(X) = \|F\|$ és $|g| = 1$ ν-majdnem mindenütt. Így $|\mu| = \nu$, $g = \dfrac{d\mu}{d|\mu|}$ és (1) szerint $F(f) = \int f\,d\mu$, ha $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$.

Végül tegyük fel, hogy két olyan komplex Radon-mérték is létezik, amelyre a fenti előállítás teljesül, és jelölje κ a különbségüket a Borel-halmazokon. Ekkor $\int f\,d\kappa = 0$ minden $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$-re. A 6.2.13. következmény szerint van olyan h Borel-függvény, amelyre $|h| = 1$ és $\kappa(A) = \int_A h\,d|\kappa|$ minden A Borel-halmazra. Ekkor minden $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$-beli f_n sorozatra

$$|\kappa|(X) = \int_X (\overline{h} - f_n)h\,d|\kappa| \leq \int_X |\overline{h} - f_n|\,d|\kappa|$$

és mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}\bigl(|\kappa|\bigr)$-ban, f_n választható úgy, hogy a jobb oldali kifejezés nullához tartson. Így $|\kappa|(X) = 0$, azaz $\kappa = 0$.

* **7.3.3. Definíció.** Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Jelölje $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$ az összes X feletti teljes komplex Radon-mértékek halmazát. Ha $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$, a μ és ν *összegét* a következőképpen értelmezzük: Leszűkítjük μ-t és ν-t X Borel-halmazaira, ott összeadjuk őket, majd vesszük az így kapott komplex Radon-mérték természetes kiterjesztését. Az így kapott mértéket $\mu + \nu$-vel jelöljük: ez nem okoz félreértést. Ha $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor hasonlóan értelmezzük μ *konstansszorosát*, az $\alpha\mu$ mértéket is; ha $\alpha \neq 0$, akkor $\alpha\mu$ és μ értelmezési tartománya megegyezik. Egy $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(X)$ mérték *normáján* a $|\mu|(X)$ számot értjük. Jelölése: $\|\mu\|$. Ha csak valós mértékeket tekintünk, $\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(X)$-et kapjuk.

* **7.3.4. Tétel.** *$\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(X)$ a 7.3.3.-ban definiált összeadással, skalárszorzással és normával $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ konjugált terével izometrikusan izomorf Banach-tér.*

Bizonyítás. A 6.2.16. tétel szerint a 7.3.1.-ben szereplő $\mu \mapsto F_\mu$ leképezés additív és homogén. A 7.3.2. Riesz-féle reprezentációs tétel szerint ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű izometria is. Mivel $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ konjugált tere Banach-tér, $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-tér.

7.4. Korlátos változású függvények

Ebben a fejezetben a monoton és korlátos változású függvények kapcsolatát, valamint a $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ lineáris funkcionáljaival és az $\mathbb{R}$ feletti Radon-mértékekkel való összefüggéseket vizsgáljuk. A 7.1.3. példa alapján azt várjuk, hogy $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ korlátos lineáris funkcionáljait egy alkalmas függvényosztály elemei szerint vett Riemann–Stieltjes-integrálokkal sikerül azonosítani. Ezt a gondolatot dolgozzuk ki a továbbiakban.

7.4.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$ végpontokkal, $f : I \to \mathbb{C}$ egy függvény. Az f *változását a-tól b-ig* a

$$\mathbb{V}_a^b f = \sup\Big\{\textstyle\sum_{j=1}^n \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| : x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n,\ x_0, x_n \in I\Big\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Ha $b < a$, akkor megállapodás szerint legyen $\mathbb{V}_a^b f = -\mathbb{V}_b^a f$. Ha $\mathbb{V}_a^b f$ véges, akkor azt mondjuk, hogy f *korlátos változású I-n.*

7.4.2. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f, g : I \to \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ és $a < b < c$, akkor*

(1) $\mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f = \mathbb{V}_a^c f$;

(2) $\mathbb{V}_a^c (f + g) \leq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_a^c g$;

(3) $\mathbb{V}_a^c (\alpha f) = |\alpha| \mathbb{V}_a^c f$.

Bizonyítás. (1) bizonyításához, ha $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$, $x_0, x_n \in I$ és $x_k \leq b \leq x_{k+1}$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| &\leq \sum_{j=1}^k \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| + \big|f(b) - f(x_k)\big| \\ &\quad + \big|f(x_{k+1}) - f(b)\big| + \sum_{j=k+2}^n \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| \\ &\leq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f,\end{aligned}$$

amiből

$$\mathbb{V}_a^c f \leq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f.$$

Megfordítva, az $\big|f(x_{k+1}) - f(x_k)\big|$ tagot kihagyva az összegzésből,

$$\mathbb{V}_a^c f \geq \sum_{j=1}^k \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| + \sum_{j=k+1}^n \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big|,$$

amiből a jobb oldalon felső határokat véve

$$\mathbb{V}_a^c f \geq \mathbb{V}_a^b f + \mathbb{V}_b^c f.$$

(2) és (3) a

$$\sum_{j=1}^{n}\bigl|f(x_j)+g(x_j)-f(x_{j-1})-g(x_{j-1})\bigr| \le \sum_{j=1}^{n}\bigl|f(x_j)-f(x_{j-1})\bigr| + \sum_{j=1}^{n}\bigl|g(x_j)-g(x_{j-1})\bigr|,$$

illetve a

$$\sum_{j=1}^{n}\bigl|\alpha f(x_j)-\alpha f(x_{j-1})\bigr| = |\alpha|\sum_{j=1}^{n}\bigl|f(x_j)-f(x_{j-1})\bigr|$$

összefüggésekből következnek.

7.4.3. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \to \mathbb{C}$ és $f_r = \Re f$, $f_i = \Im f$, akkor*

(1) $\mathbb{V}_a^b f \le \mathbb{V}_a^b f_r + \mathbb{V}_a^b f_i$;

(2) $\mathbb{V}_a^b f_r \le \mathbb{V}_a^b f$ *és* $\mathbb{V}_a^b f_i \le \mathbb{V}_a^b f$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

7.4.4. Jordan felbontási tétele. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \to \mathbb{R}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Ekkor az*

$$f_+(x) = \frac{\mathbb{V}_a^x f + f(x)}{2} \quad \text{és} \quad f_-(x) = \frac{\mathbb{V}_a^x f - f(x)}{2}, \quad \text{ha} \quad x \in I$$

függvények monoton növekedőek és $f = f_+ - f_-$. Az (f_+, f_-) párt az f Jordan-felbontásának nevezzük.

Bizonyítás. Ha $x, y \in I$, $x \le y$, akkor a $\mathbb{V}_x^y f \ge \bigl|f(x) - f(y)\bigr|$ egyenlőtlenségből $\mathbb{V}_x^y f \ge f(y) - f(x)$, tehát

$$f_-(y) - f_-(x) = \frac{1}{2}\bigl(\mathbb{V}_x^y f - f(y) + f(x)\bigr) \ge 0;$$

$\mathbb{V}_x^y f \ge f(x) - f(y)$, tehát

$$f_+(y) - f_+(x) = \frac{1}{2}\bigl(\mathbb{V}_x^y f - f(x) + f(y)\bigr) \ge 0.$$

7.4.5. Megjegyzések. (1) Az f függvény sokféleképpen felbontható két monoton növekedő függvény különbségére. A lehetséges felbontások között az előző tételben szereplő felbontás „minimális": $\mathbb{V}_a^b f_+ + \mathbb{V}_a^b f_-$ megegyezik $\mathbb{V}_a^b f$-fel és nem nagyobb. Könnyen belátható, hogy két minimális felbontás csak konstansban különbözhet.

(2) Az f függvény pontosan akkor folytonos egy pontban, ha f_+ és f_- folytonosak. Ennek a bizonyításában csak azt nem triviális megmutatni, hogy ha f folytonos $x \in I$-ben, akkor $y \mapsto \mathbb{V}_a^y f$ is folytonos x-ben. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t és egy olyan $\delta > 0$-t, amelyre $x > t > x - \delta$ esetén $\bigl|f(t) - f(x)\bigr| < \varepsilon/2$, továbbá egy olyan $y_0 < y_1 < y_2 < \ldots <$

$y_{n-1} < y_n = x$ beosztást, amelyre $\mathbb{V}_a^x f - \varepsilon/2 < \sum_{j=1}^n \left|f(y_j) - f(y_{j-1})\right|$ és $y_{n-1} \geq x - \delta$. Mivel a jobb oldali összeg utolsó tagja kisebb, mint $\varepsilon/2$,

$$\mathbb{V}_a^x f - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n-1} \left|f(y_j) - f(y_{j-1})\right| \leq \mathbb{V}_a^{y_{n-1}} f.$$

Ebből $t > y_{n-1}$ esetén $\mathbb{V}_a^x f - \mathbb{V}_a^t f < \varepsilon$, azaz $y \mapsto \mathbb{V}_a^y$ balról folytonos x-ben. A jobb oldali folytonosság hasonlóan látható be.

7.4.6. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy zárt intervallum $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ végpontokkal, $f : I \to \mathbb{C}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Legyen $f_r = \Re f$ és $f_i = \Im f$. Ha $f_{r,+}$ és $f_{r,-}$ az f_r függvény, $f_{i,+}$ és $f_{i,-}$ pedig az f_i függvény Jordan-felbontásai, akkor az $(f_{r,+}, f_{r,-}, f_{i,+}, f_{i,-})$ négyest az f *Jordan-felbontásának* nevezzük. Ezt gyakran írjuk $f = \sum_{j=0}^3 i^j f_j$ alakban.

* **7.4.7. Tétel.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy függvény, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} f < \infty$. Ekkor*

(1) *az $f(x+)$ jobb oldali határérték létezik minden $-\infty \leq x < \infty$ pontban és az $f(x-)$ bal oldali határérték létezik minden $-\infty < x \leq \infty$ pontban;*

(2) *f szakadási pontjainak halmaza megszámlálható;*

(3) *létezik pontosan egy olyan $c \in \mathbb{C}$ és pontosan egy olyan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ normalizált függvény, hogy $f(x) = c + g(x)$ az f minden folytonossági pontjában;*

(4) *$x \mapsto \mathbb{V}_{-\infty}^x g$ normalizált függvény és $\mathbb{V}_{-\infty}^x g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f$, ha $-\infty < x \leq \infty$.*

Bizonyítás. (1) és (2) következik Jordan felbontási tételéből. (3)-ból f normalizáltjának létezését már beláttuk a 2.2.4. definíció megjegyzés részében. Az unicitáshoz, ha a g és $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ normalizált függvényekre

$$g(x) + c = f(x) = g^*(x) + c^*$$

az f folytonossági pontjaiban, akkor $x \to -\infty$ határértéket véve $c = c^*$, azaz $g(x) = g^*(x)$ egy sűrű részhalmazán $\mathbb{R}$-nek. Mivel g és g^* balról folytonosak, megegyeznek.

(4) bizonyításához, ha

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x,$$

akkor

$$\sum_{j=1}^n \left|g(x_j) - g(x_{j-1})\right| = \lim_{\delta \downarrow 0} \sum_{j=1}^n \left|f(x_j - \delta) - f(x_{j-1} - \delta)\right| \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f,$$

amiből

$$\mathbb{V}_{-\infty}^x g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^x f.$$

Most legyen $x \in \mathbb{R}$ rögzített, és $\varepsilon > 0$. Válasszunk olyan

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$$

pontokat, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{n}\bigl|g(x_j)-g(x_{j-1})\bigr| > \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g-\varepsilon. \tag{5}$$

Ha $t_0 < t_1 < \ldots < t_m = x_0$, akkor

$$\mathbb{V}_{-\infty}^{x} \geq \sum_{k=1}^{m}\bigl|g(t_k)-g(t_{k-1})\bigr| + \sum_{j=1}^{n}\bigl|g(x_j)-g(x_{j-1})\bigr|,$$

így a jobb oldali első összeg kisebb, mint ε. Ebből $\mathbb{V}_{-\infty}^{x_0} g \leq \varepsilon$, azaz $\lim_{x\to-\infty}\mathbb{V}_{-\infty}^{x} g = 0$. Most legyen $x_{n-1} < t < x_n$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{n-1}\bigl|g(x_j)-g(x_{j-1})\bigr| + \bigl|g(t)-g(x_{n-1})\bigr| \leq \mathbb{V}_{-\infty}^{t} g \leq \lim_{s\uparrow x}\mathbb{V}_{-\infty}^{s} g \leq \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g. \tag{6}$$

Ha $t \uparrow x_n = x$, (6) bal oldala tart az (5) bal oldalához, mivel $g(x) = g(x-)$, és így

$$\mathbb{V}_{-\infty}^{x} g-\varepsilon < \lim_{s\uparrow x}\mathbb{V}_{-\infty}^{s} g,$$

amiből a (6)-beli utolsó egyenlőtlenséggel együtt

$$\mathbb{V}_{-\infty}^{x} g = \lim_{s\uparrow x}\mathbb{V}_{-\infty}^{s} g.$$

* **7.4.8. Riemann–Stieltjes-integrálás.** Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények, és tegyük fel, hogy $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g$ véges. Ha $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallum, az f-nek g-re vonatkozó,

$$\int_a^b f\,dg \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

*Riemann–Stieltjes-integrál*ját az

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{j=0}^{3} i^j\left(\int_a^b \Re f\,dg_j + i\int_a^b \Im f\,dg_j\right)$$

összefüggéssel értelmezzük, ha a jobb oldalon álló integrálok léteznek, ahol $g = \sum_{j=0}^{3} i^j g_j$ a g Jordan-felbontása. A jobb oldalon szereplő, monoton növekedő függvények szerinti Riemann–Stieltjes-integrálokat Szőkefalvi-Nagy [45] könyve, 190. o. szerint értjük, így a 4.5.5. Lebesgue-kritérium használható.

Ha $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor bármely, az f tartóját tartalmazó $[a,b]$ kompakt intervallumra $\int_a^b f\,dg$ ugyanaz a szám; jelölje ezt $\int f\,dg$. Legyen

$$F_g(f) = \int f\,dg, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}).$$

A 7.4.2.–7.4.7. pontok eredményei és a monoton növekedő függvény szerinti Riemann–Stieltjes-integrálás tulajdonságai (lásd Szőkefalvi-Nagy [45]) szerint F_g korlátos lineáris funkcionál az uniform normával ellátott $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ téren. Az F_g-hez 7.3.2. szerint tartozó $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$-beli mértéket λ_g-vel jelöljük, és a *g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték*nek nevezzük.

* **7.4.9. Tétel.** *Legyen $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ és $g(x) = \mu(-\infty, x)$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor*

(1) *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ normalizált függvény;*

(2) *g pontosan akkor folytonos egy $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$;*

(3) *$\mathbb{V}_{-\infty}^{x} g = |\mu|(-\infty, x)$, ha $-\infty < x \le \infty$;*

(4) *ha $\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \mu_j$ a μ Jordan-felbontása, $g = \sum_{j=0}^{3} i^j g_j$ pedig a g Jordan-felbontása, akkor $\mu_j = \lambda_{g_j}$ (a Borel-halmazokon);*

(5) *$\lambda_g = \mu$.*

Megfordítva, legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy függvény, amelyre $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} f < \infty$, és legyen g az f normalizáltja. Ekkor

(6) *$\lambda_f = \lambda_g$;*

(7) *$g(x) = \lambda_g(-\infty, x)$, ha $x \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Ha $x_n \uparrow x$, $x_n, x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, x_n) = \mu(-\infty, x_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{n} \mu[x_{j-1}, x_j) = \mu(-\infty, x) = g(x),$$

azaz g balról folytonos. Hasonlóan adódik, hogy $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ és hogy g pontosan akkor folytonos az $x \in \mathbb{R}$ pontban, ha $\mu\{x\} = 0$.

(3) bizonyításához, ha $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le x$, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \big|g(x_j) - g(x_{j-1})\big| = \sum_{j=1}^{n} \big|\mu[x_{j-1}, x_j)\big| \le |\mu|(-\infty, x),$$

így

$$\mathbb{V}_{-\infty}^{x} g \le |\mu|(-\infty, x),$$

tehát g korlátos változású. Jelölje ν az $x \mapsto \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g$ monoton növekedő normalizált függvényhez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mértéket. Mivel

$$\mu[x, y) = g(x) - g(y), \quad \nu[x, y) = \mathbb{V}_{x}^{y} g,$$

a

$$|\mu(A)| \le \nu(A) \tag{8}$$

egyenlőtlenség teljesül, ha $A = [x, y)$. Mivel minden nyílt intervallum előállítható megszámlálható sok diszjunkt balról zárt, jobbról nyílt intervallum egyesítéseként, azt kapjuk, hogy (8) akkor is teljesül, ha A nyílt intervallum. A nyílt halmazok struktúratételét felhasználva, (8) minden nyílt halmazra teljesül, végül felhasználva, hogy μ és ν Radon-mértékek, (8) minden Borel-halmazra teljesül. Így, $|\mu|$ definíciója szerint

$$|\mu|(A) \le \nu(A),$$

ha A Borel-halmaz. Speciálisan

$$|\mu|(-\infty, x) \leq \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g,$$

amivel (3)-at bebizonyítottuk.

A g függvény definíciójából g valós és képzetes részére

$$g_r(x) = \mu_r(-\infty, x) \quad \text{és} \quad g_i(x) = \mu_i(-\infty, x).$$

Alkalmazva (3)-at

$$g_{r,+}(x) + g_{r,-}(x) = \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g_r = |\mu_r|(-\infty, x) = \mu_{r,+}(-\infty, x) + \mu_{r,-}(-\infty, x).$$

Hasonló egyenletek írhatók fel az imaginárius részekre is. A két egyenletet összevetve, és felhasználva 2.2.5.-öt kapjuk (4)-et.

Ha most $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor a Riemann–Stieltjes- és a Lebesgue–Stieltjes-integrál összehasonlítására vonatkozó tétel szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\, dg = \sum_{j=0}^{3} i^j \int_{-\infty}^{\infty} h\, dg_j = \sum_{j=0}^{3} i^j \int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda_{g_j} = \int_{\mathbb{R}} h\, d\mu,$$

amiből Riesz reprezentációs tételének unicitás részét felhasználva (5) következik.

(6) bizonyításához, ha $\sum_{j=0}^{3} i^j f_j$ az f függvény, $\sum_{j=0}^{3} i^j g_j$ pedig a g függvény Jordan-felbontása, akkor valós részt véve valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal

$$f_0(x) - f_2(x) = g_0(x) - g_2(x) + c$$

az f folytonossági pontjaiban. Ezt az egyenlőséget átrendezve

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\, df_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h\, dg_2 = \int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda_{f_0+g_2} = \int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda_{g_0+f_2} = \int_{-\infty}^{\infty} h\, dg_0 + \int_{-\infty}^{\infty} h\, df_2$$

minden $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$-re. Hasonlóan járhatunk el a képzetes résszel is. A kapott összefüggéseket visszarendezve és kombinálva,

$$\int_{-\infty}^{\infty} h\, dg = \int_{-\infty}^{\infty} h\, df, \quad \text{ha} \quad h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}),$$

amiből $\lambda_g = \lambda_f$.

(7) bizonyításához, legyen $g = \sum_{j=0}^{3} i^j g_j$ a g Jordan-felbontása, és legyen $\mu = \sum_{j=0}^{3} i^j \lambda_{g_j}$. Ha $x_n, x \in \mathbb{R}$, a g_j függvények folytonosak az x, x_n pontokban, $x > x_n$ és $x_n \downarrow -\infty$, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(g(x) - g(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{3} i^j \big(g_j(x) - g_j(x_n)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{3} i^j \lim_{n\to\infty} \lambda_{g_j}[x_n, x) = \sum_{j=0}^{3} i^j \lambda_{g_j}(-\infty, x) = \mu(-\infty, x). \end{aligned}$$

Mivel $g(x)$ és $\mu(-\infty, x)$ is balról folytonos, $g(x) = \mu(-\infty, x)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. (5) szerint $\lambda_g = \mu$, így (7)-et beláttuk.

* **7.4.10. Feladat** [9]. Számítsuk ki az $\int_a^b f\,dg$ integrált, ha

(1) $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$;

(2) $a = -1$, $b = 1$, f tetszőleges és $g(x)$ nulla, ha $x \leq 0$, egy, ha $x > 0$;

(3) $a = 0$, $b = 1$, x_n, $n = 1, 2, \ldots$ a $(0, 1)$ racionális számainak egy sorozatba rendezése, $g(x) = \sum_{x_n < x} 1/2^n$ és f korlátos $[0, 1]$-en.

* **7.4.11. Feladat** [7]. Legyen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, és tegyük fel, hogy $\int_a^b f_n\,dg$ létezik minden n-re. Mutassuk meg, hogy ha f_n egyenletesen konvergál egy f függvényhez, akkor létezik $\int_a^b f\,dg$ is és

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dg.$$

* **7.4.12. Feladat** [8]. Legyenek $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények, mindkettő monoton növekedő és folytonos az a, b pontokban. Igazoljuk, hogy akkor és csak akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, amelyre a $D = \big\{x : g(x) = h(x) + c\big\}$ halmaz sűrű $[a, b]$-ben, ha minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre $\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,dh$.

* **7.4.13. Feladat** [6]. Legyen f a racionális számok halmazának karakterisztikus függvénye és $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény. Mikor létezik az $\int_a^b f\,dg$ integrál?

8. A DIFFERENCIÁLÁS ÉS INTEGRÁLÁS KAPCSOLATA

A 6. fejezetben megismerkedtünk a Radon–Nikodym-derivált fogalmával. Ez a mennyiség a fizikai sűrűségfogalomnak felel meg. Kifejezi, hogy egy halmaz egyik mértéke („tömege") hogyan kapható meg egy függvénynek (a „sűrűségnek") a halmaz felett egy másik mennyiség („térfogat") szerint vett integráljaként. Ennek a fizikai példának az alapján azt várjuk, hogy a Radon–Nikodym-derivált másként is előállítható egy pontban: Veszünk egy, a pontot tartalmazó halmazt, és képezzük a két mérték ezen halmazon felvett értékének hányadosát. Ha a halmazt összehúzzuk az adott pontra, akkor azt várjuk, hogy ennek a hányadosnak a határértéke a Radon–Nikodym-derivált lesz az adott pontban. Ezt a gondolatot fogjuk kidolgozni a 8.2. pontban. Eredményként a mértékek deriválásának egy olyan „lokális" elméletét nyerjük, amely ugyan nem olyan általános, mint a 6. fejezet eredményei, azonban sokkal jobban alkalmazható. A valós függvényekre való alkalmazásokkal a 8.3. pontban foglalkozunk. Mindehhez az alapot a 8.1. pont önmagukban is igen érdekes eredményei adják.

8.1. Lefedési tételek

* **8.1.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ egy *lefedési reláció*, ha

$$\mathcal{C} \subset \big\{(x,S) : x \in S \subset \mathbb{R}^n\big\}.$$

Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, akkor $\mathcal{C}(A)$-val jelöljük az

$$\big\{S : (x,S) \in \mathcal{C} \text{ valamely } x \in A\text{-ra}\big\}$$

halmazt. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ *finom az* $x \in \mathbb{R}^n$ *pontban*, ha

$$\inf\big\{\operatorname{diam}(S) : (x,S) \in \mathcal{C}\big\} = 0.$$

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{V}$ egy μ-*Vitali lefedés*, ha μ teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, $\mathcal{V}$ egy lefedési reláció, minden $(x,S) \in \mathcal{V}$-re S Borel-halmaz, $\mathcal{V}$ finom $\mathbb{R}^n$ minden pontjában, és a következő feltétel teljesül:

(1) ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, és $\mathcal{C}$ finom A minden pontjában, akkor van olyan $\{S_i : i \in I\}$ megszámlálható rendszer, amely diszjunkt $\mathcal{C}(A)$-beli halmazokból áll, és amelyre $\mu(A \setminus \cup_{i\in I} S_i) = 0$.

(Tömören: az A halmaz bármely $\mathcal{V}$-beli finom lefedéséből kiválasztható megszámlálható diszjunkt majdnem lefedése A-nak.)

A következő tétel egyszerű példát ad Vitali-lefedésre.

* **8.1.2. Tétel.** *Legyen μ teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és legyen $i = 1, 2, \ldots$-re $\mathcal{P}_i$ egy megszámlálható sok diszjunkt Borel-halmazból álló lefedése $\mathbb{R}^n$-nek. Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}_1$ minden eleme korlátos, $\mathcal{P}_i$ minden tagja előáll $\mathcal{P}_{i+1}$ elemeinek egyesítéseként, és*

$$\lim_{i\to\infty} \sup\big\{\mathrm{diam}(S) : S \in \mathcal{P}_i\big\} = 0.$$

Ekkor

$$\mathcal{V} = \big\{(x, S) : x \in S \in \mathcal{P}_i \text{ valamely } i = 1, 2, \ldots\text{-re}\big\}$$

egy μ-Vitali lefedés.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, és tekintsük a

$$\mathcal{C}(A) = \big\{S : (x, S) \in \mathcal{C} \text{ valamely } x \in A\text{-ra}\big\}$$

halmazrendszert. Ha $\mathcal{C}$ finom az A minden pontjában, akkor $\mathcal{C}(A)$ lefedi A-t, és így A minden pontja benne van $\mathcal{C}(A)$ egy, a tartalmazásra nézve maximális tagjában, és $\mathcal{C}(A)$ bármely két, a tartalmazásra nézve maximális tagja diszjunkt.

A következő tétel nem ilyen egyszerű és csak a Lebesgue-mértékre vonatkozik, de sokkal jobban használható.

* **8.1.3. Vitali tétele.** *Ha $\mathcal{V}$ egy lefedési reláció, S kompakt halmaz minden $(x, S) \in \mathcal{V}$-re, $\mathcal{V}$ finom minden $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, és van olyan $\alpha > 0$ szám, hogy bármely $(x, S) \in \mathcal{V}$-re S benne van egy $\mathbb{B}(x, r)$ gömbben, amelyre $\lambda^n(S) > \alpha\lambda^n\big(\mathbb{B}(x, r)\big)$, akkor $\mathcal{V}$ egy λ^n-Vitali lefedés.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, és válasszunk egy A-t tartalmazó, korlátos nyílt V halmazt. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$, $\mathcal{C}$ finom az A minden pontjában és $S \subset V$ minden $(x, S) \in \mathcal{C}$-re. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathcal{C}(A)$-nak van olyan $\{S_i : i \in I\}$ diszjunkt halmazokból álló megszámlálható részrendszere, amelyre $\lambda^n(A \setminus \cup_{i\in I} S_i) = 0$. Tekintsük a $\mathcal{C}(A)$ összes olyan diszjunkt halmazokból álló $\mathcal{H}$ részrendszereinek Ω osztályát, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

(1) ha $T \in \mathcal{C}(A)$, akkor vagy minden $S \in \mathcal{H}$-ra $T \cap S = \emptyset$, vagy pedig van olyan $S \in \mathcal{H}$, hogy $T \cap S \neq \emptyset$ és $\mathrm{diam}(T) \leq 2\,\mathrm{diam}(S)$.

Ekkor Ω féligrendezett halmaz a tartalmazásra nézve, és ebben a féligrendezett halmazban minden lánc felülről korlátos. A Zorn-lemma szerint létezik $\mathcal{G}$ maximális eleme Ω-nak. Legyen

$$\mathcal{K} = \mathcal{C}(A) \cap \{T : T \cap \cup\mathcal{G} = \emptyset\}.$$

Ha $\mathcal{K} \neq \emptyset$, akkor kiválaszthatunk egy $W \in \mathcal{K}$-t, amelyre

$$2\,\mathrm{diam}(W) \geq \sup\bigl\{\mathrm{diam}(T) : T \in \mathcal{K}\bigr\}$$

és $\mathcal{G} \cup \{W\} \in \Omega$, ami ellentmond $\mathcal{G}$ maximális voltának. Így $\mathcal{K} = \emptyset$, tehát $\mathcal{G}$ rendelkezik a következő tulajdonsággal:

(2) $\mathcal{G}$ diszjunkt halmazokból áll, és minden $T \in \mathcal{C}(A)$-hoz van olyan $S \in \mathcal{G}$, amelyre $T \cap S \neq \emptyset$ és $\mathrm{diam}(T) \leq 2\,\mathrm{diam}(S)$.

Ha $S \in \mathcal{C}(A)$, legyen

$$\hat{S} = \bigcup\bigl\{T : T \in \mathcal{C}(A), T \cap S \neq \emptyset \text{ és } \mathrm{diam}(T) \leq 2\,\mathrm{diam}(S)\bigr\}.$$

A $\hat{S}$ halmazt az S *nagyításának* nevezzük. Megmutatjuk, hogy van olyan $\beta > 0$, amelyre $\lambda^n(\hat{S}) < \beta\lambda^n(S)$ minden $S \in \mathcal{C}(A)$-ra. Valóban, legyen $x \in A$, és $(x, S) \in \mathcal{C}$. Ekkor valamely $r > 0$-ra $S \subset \mathbb{B}(x,r)$ és $\lambda^n(S) > \alpha\lambda^n\bigl(\mathbb{B}(x,r)\bigr)$. Ebből $\mathrm{diam}(S) \leq 2r$ és $\hat{S} \subset \mathbb{B}(x, 5r)$. Így

$$\lambda^n(\hat{S}) \leq \lambda^n\bigl(\mathbb{B}(x,5r)\bigr) = 5^n\lambda^n\bigl(\mathbb{B}(x,r)\bigr) \leq \frac{5^n}{\alpha}\lambda^n(S).$$

Térjünk vissza $\mathcal{G}$-hez. (2)-ből következik, hogy

$$\cup\mathcal{C}(A) \subset \cup\{\hat{S} : S \in \mathcal{G}\}. \tag{3}$$

Továbbá bármely $\mathcal{H}$ véges részrendszerére $\mathcal{G}$-nek

$$A \setminus \cup\mathcal{H} \subset \cup\{\hat{S} : S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}\}. \tag{4}$$

Valóban, $\cup\mathcal{H}$ zárt, és mivel $\mathcal{C}$ finom az A minden pontjában, $A \setminus \cup\mathcal{H}$ minden eleme benne van egy olyan T elemében $\mathcal{C}(A)$-nak, amelyre $T \cap \cup\mathcal{H} = \emptyset$. Így T belemetsz valamely $S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$-ba, amelyre $\mathrm{diam}(T) \leq 2\,\mathrm{diam}(S)$, innen $T \subset \hat{S}$. Mivel $\lambda^n(V) < \infty$, $S \subset V$ és $\lambda^n(S) > 0$ minden $S \in \mathcal{G}$-re, a $\mathcal{G}$ halmazrendszer megszámlálható, és

$$\sum_{S\in\mathcal{G}} \lambda^n(\hat{S}) \leq \beta \sum_{S\in\mathcal{G}} \lambda^n(S) \leq \beta\lambda^n(V) < \infty.$$

Ebből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\mathcal{H}$ véges részrendszere $\mathcal{G}$-nek, amelyre

$$\sum_{S\in\mathcal{G}\setminus\mathcal{H}} \lambda^n(\hat{S}) < \varepsilon,$$

innen (4) alapján

$$\lambda^n(A \setminus \cup\mathcal{G}) \leq \lambda^n(A \setminus \cup\mathcal{H}) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges volt, a speciális eset bizonyítását befejeztük.

Az általános eset bizonyításához legyen $A \subset \mathbb{R}^n$, V_j, $j = 1, 2, \dots$ az $\mathbb{R}^n$ egész csúcspontú, egységnyi oldalú nyílt kockáinak egy sorozatba rendezése, és $A_j = A \cap V_j$. Ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ és $\mathcal{C}$ finom az A minden pontjában, akkor legyen

$$\mathcal{C}_j = \big\{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{C}, S \subset V_j\big\}.$$

Alkalmazzuk az első lépést $\mathcal{C}_j$-re, A_j-re és V_j-re. A kapott $S_{i,j}$ halmazokat egyesítve,

$$\lambda^n(A \setminus \cup_{i,j} S_{i,j}) \le \lambda^n(A \setminus \cup_{j=1}^{\infty} V_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(A_j \setminus \cup_i S_{i,j}) = 0.$$

8.2. Mértékek lokális deriváltja

* **8.2.1. Definíció.** Legyenek μ és ν teljes Radon-mértékek $\mathbb{R}^n$-en, $\mathcal{V}$ egy μ-Vitali lefedés. Ha f a $\mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$ valamely részosztályán értelmezett bővített valós értékű függvény és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor használjuk a

$$(\mathcal{V}) \operatorname*{limsup}_{S \to x} f(S) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup\big\{f(S) : (x, S) \in \mathcal{V}, \operatorname{diam}(S) < \varepsilon, S \in \operatorname{dmn} f\big\}$$

jelölést. $(\mathcal{V}) \operatorname{liminf}_{S \to x} f(S)$ hasonlóan van definiálva. Ha ez a két érték megegyezik, akkor $(\mathcal{V}) \lim_{S \to x} f(S)$-et írunk. Végül a *$\nu$ mérték μ-re vonatkozó $\mathcal{V}$-derivált*ját a

$$(\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) = (\mathcal{V}) \lim_{S \to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)}$$

összefüggéssel definiáljuk.

* **8.2.2. Lemma.** *Az előző definíció jelölései mellett, tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan Borel-halmaz, amelyre $\nu(A) = 0$. Legyen*

$$B = \left\{x : x \in A, (\mathcal{V}) \frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0\right\}.$$

Ekkor $\mu(A \setminus B) = 0$.

Bizonyítás. Terjesszük ki μ-t külső mértékként $\mathbb{R}^n$ összes részhalmazára. Ha $i = 1, 2, \dots$, legyen P_i azon $x \in A$-k halmaza, amelyekre

$$(\mathcal{V}) \operatorname*{limsup}_{S \to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} > \frac{1}{i}.$$

(Itt legyen $t/0 = \infty$, ha $0 \le t \le \infty$.) Rögzítsük i-t és válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$-t. Mivel $\nu(A) = 0$, van olyan $V \supset A$ nyílt halmaz, amelyre $\nu(V) < \varepsilon$. A

$$\mathcal{C} = \big\{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, S \subset V, \nu(S)/\mu(S) > 1/i\big\}$$

lefedési reláció finom P_i minden pontjában, így van olyan $\mathcal{C}(P_i)$-beli megszámlálható diszjunkt $S_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots$ halmazrendszer, amelyre $\mu(P_i \setminus \cup_j S_{i,j}) = 0$. Ebből

$$\mu(P_i) \le \mu(P_i \setminus \cup_j S_{i,j}) + \sum_j \mu(S_{i,j}) \le i \sum_j \nu(S_{i,j}) \le i\nu(V) < i\varepsilon,$$

ahonnan $\mu(P_i) = 0$. Mivel $A \setminus B \subset \cup_{i=1}^{\infty} P_i$, azt kapjuk, hogy $\mu(A \setminus B) = 0$.

* **8.2.3. Tétel.** *Legyenek μ és ν teljes Radon-mértékek $\mathbb{R}^n$-en, $\nu = \nu_a + \nu_s$ a ν-nek μ-re vonatkozó Lebesgue-felbontása (a Borel-halmazokon), $\mathcal{V}$ pedig egy μ-Vitali lefedés. Ekkor*

(1) $(\mathcal{V})\dfrac{d\nu}{d\mu}(x)$ *létezik μ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re;*

(2) $\nu_a(E) = \displaystyle\int_E (\mathcal{V})\frac{d\nu}{d\mu}(x)\, d\mu(x)$ *minden E Borel-halmazára $\mathbb{R}^n$-nek;*

azaz $(\mathcal{V})\dfrac{d\nu}{d\mu}$ megegyezik a (Borel-halmazokon vett) $\dfrac{d\nu_a}{d\mu}$ Radon–Nikodym-deriválttal.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\nu \ll \mu$ (a Borel-halmazokon), így $\nu_a = \nu$. A Radon–Nikodym-tétel szerint van olyan $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ Borel-függvény, amelyre

$$\nu(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

minden E Borel-halmazára $\mathbb{R}^n$-nek. Ha megmutatjuk, hogy μ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re $f(x) = (\mathcal{V})\dfrac{d\nu}{d\mu}(x)$, akkor készen vagyunk.

Minden r racionális számhoz legyen $A_r = \big\{x : x \in \mathbb{R}^n, f(x) < r\big\}$, és legyen

$$\kappa_r(E) = \int_{E \setminus A_r} \big(f(x) - r\big)\, d\mu(x), \quad \text{ha } E \text{ Borel-halmaz.}$$

Nyilván κ_r Radon-mérték. Mivel $\kappa_r(A_r) = 0$, az előző lemma szerint a

$$B_r = \left\{x : x \in A_r, (\mathcal{V})\frac{d\kappa_r}{d\mu}(x) = 0\right\}$$

halmazra $\mu(A_r \setminus B_r) = 0$. Legyen $P = \cup_r (A_r \setminus B_r)$. Ekkor $\mu(P) = 0$. Legyen $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$ és válasszunk egy olyan r-et, amelyre $r > f(x)$. Ekkor $x \in A_r$ és $x \in B_r$. Mivel

$$\nu(S) - r\mu(S) = \int_S \big(f(y) - r\big)\, d\mu(y) \le \kappa_r(S)$$

minden $S \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^n)$-re, valamint

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \to x} \frac{\kappa_r(S)}{\mu(S)} = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \le r.$$

Ez minden $r > f(x)$ racionális számra igaz, amiből

$$(\mathcal{V}) \limsup_{S \to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \le f(x).$$

Hasonlóan, a

$$\kappa_r(E) = \int_{E\cap A_r} \big(r - f(x)\big)\, d\mu(x)$$

Radon-mértékeket használva egy olyan Q halmazt kapunk, amelyre $\mu(Q) = 0$ és ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, akkor

$$(\mathcal{V}) \liminf_{S\to x} \frac{\nu(S)}{\mu(S)} \geq f(x).$$

Ezzel beláttuk, hogy a $(\mathcal{V})\frac{d\nu}{d\mu}$ és f függvények μ-majdnem mindenütt megegyeznek.

Most legyen $\nu \perp \mu$. Ekkor $\nu_a = 0$ és a 8.2.2. lemma szerint μ-majdnem mindenütt $(\mathcal{V})\frac{d\nu}{d\mu}(x) = 0$, így ekkor is teljesül a tétel állítása. Végül az általános esetben, ha $(\mathcal{V})\frac{d\nu_a}{d\mu}(x)$ és $(\mathcal{V})\frac{d\nu_s}{d\mu}(x)$ léteznek, akkor $(\mathcal{V})\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ is létezik, és

$$(\mathcal{V})\frac{d\nu}{d\mu} = (\mathcal{V})\frac{d\nu_a}{d\mu} \qquad \mu\text{-majdnem mindenütt,}$$

így igaz a tétel állítása.

* **8.2.4. Megjegyzés.** Az előző tételből, ha μ teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, $\mathcal{V}$ egy μ-Vitali lefedés és f nemnegatív integrálható függvény, akkor

$$(1) \qquad (\mathcal{V}) \lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(y)\, d\mu(y) = f(x) \quad \mu\text{-majdnem minden } x \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

Valóban, az előző tételt alkalmazva a

$$\nu(A) = \int_A f(y)\, d\mu(y), \qquad \text{ha } A \ \mu\text{-mérhető}$$

összefüggéssel definiált Radon-mértékre, éppen (1)-et kapjuk. A következő tételben ennek az állításnak egy erősebb formáját bizonyítjuk be.

* **8.2.5. Tétel.** *Legyen μ teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, $\mathcal{V}$ egy μ-Vitali lefedés, f pedig egy $\mathbb{C}^k$-beli értékű μ-mérhető függvény, amely minden kompakt halmazon integrálható. Ekkor*

$$(\mathcal{V}) \lim_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S \big|f(y) - f(x)\big|\, d\mu(y) = 0$$

μ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n$-re.

Bizonyítás. Válasszunk egy P megszámlálható sűrű részhalmazt $\mathbb{C}^k$-ban. Ha $p \in P$, legyen

$$\nu_p(E) = \int_E \big|f(y) - p\big|\, d\mu(y), \qquad \text{ha } E \ \mu\text{-mérhető.}$$

Ekkor ν_p teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, így 8.2.3. szerint van olyan $X_p \subset \mathbb{R}^n$, hogy

$$(\mathcal{V})\frac{d\nu_p}{d\mu}(x) = \bigl|f(x) - p\bigr|, \qquad \text{ha } x \notin X_p,$$

és $\mu(X_p) = 0$. Legyen $X = \cup_{p\in P} X_p$. Ekkor $\mu(X) = 0$. Ha $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$ és $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $p \in P$, hogy $\bigl|f(x) - p\bigr| < \varepsilon$, amiből $\bigl|f(y) - f(x)\bigr| < \bigl|f(y) - p\bigr| + \varepsilon$. Ebből

$$(\mathcal{V})\limsup_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S \bigl|f(y) - f(x)\bigr|\, d\mu(y) \le (\mathcal{V})\limsup_{S\to x} \frac{1}{\mu(S)} \int_S \bigl|f(y) - p\bigr|\, d\mu(y) + \varepsilon \le 2\varepsilon.$$

* **8.2.6. Definíció.** Az előző tétel feltételei mellett, azon $x \in \mathbb{R}^n$ pontokat, amelyekre az előző tételben szereplő (1) összefüggés teljesül, az f függvény $(\mu, \mathcal{V})$ *Lebesgue-pont*jainak nevezzük.

* **8.2.7. Definíció.** Ha μ teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, $\mathcal{V}$ egy μ-Vitali lefedés, A egy μ-mérhető halmaz és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor a

$$(\mathcal{V})\lim_{S\to x} \frac{\mu(S\cap A)}{\mu(S)}$$

határértéket az *A halmaz x pontbeli $(\mu, \mathcal{V})$-sűrűség*ének nevezzük. Speciálisan, ha $\mu = \lambda^n$, és $\mathcal{V}$ az összes zárt gömbökből áll, akkor a

$$\lim_{r\downarrow 0} \frac{\lambda^n\bigl(A\cap \mathbb{B}(x,r)\bigr)}{\lambda^n\bigl(\mathbb{B}(x,r)\bigr)}$$

határértéket az *A halmaz x pontbeli Lebesgue-sűrűség*ének nevezzük.

* **8.2.8. Lebesgue sűrűségi tétele.** *Az előző definíció feltételei mellett μ-majdnem minden $x \in A$-ra*

$$(\mathcal{V})\lim_{S\to x} \frac{\mu(A\cap S)}{\mu(S)} = 1$$

és μ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$-ra

$$(\mathcal{V})\lim_{S\to x} \frac{\mu(A\cap S)}{\mu(S)} = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk 8.2.3.-at a $\nu(B) = \mu(A\cap B)$ mértékre.

8.3. Abszolút folytonos függvények

8.3.1. Definíció. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon egy $f : I \to \mathbb{C}$ függvényt *abszolút folytonos függvény*nek nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy bármely I-beli véges $u_1 < v_1 \leq u_2 < v_2 \leq \ldots \leq u_n < v_n$ sorozat esetén, ha $\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \delta$, akkor $\sum_{i=1}^n \bigl|f(v_i) - f(u_i)\bigr| < \varepsilon$.

8.3.2. Tétel. *Ha egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon $f : I \to \mathbb{C}$ abszolút folytonos, akkor f folytonos és egyenletesen folytonos I-n. Ha $a, b \in I$, akkor $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Ha f Lipschitz-függvény, akkor f abszolút folytonos.*

Bizonyítás. Az első két állítás triviális. Választva $\varepsilon = 1$-hez $\delta > 0$-t, azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{V}_c^d f \leq 1, \text{ ha } a \leq c < d \leq b \text{ és } d - c < \delta.$$

Így $[a, b]$-t előállítva véges sok δ-nál rövidebb intervallum egyesítéseként, kapjuk, hogy $\mathbb{V}_a^b f < \infty$. Az utolsó állítás nyilvánvaló.

8.3.3. Lebesgue tétele monoton függvény deriváltjáról. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény, λ_g a g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték, $\lambda_{g,a}$ és $\lambda_{g,s}$ pedig ennek a λ-ra vonatkozó Lebesgue-féle felbontása (a Borel-halmazokon). Ekkor a g függvény λ-majdnem mindenütt differenciálható és g' a $\lambda_{g,a}$-nak λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.*

A tétel a valós függvénytan egyik legmeglepőbb és legfontosabb eredménye. Legfontosabb állítása, hogy egy monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható. Ennek egy másik bizonyítása található Szőkefalvi-Nagy [45] könyvében (97. o.).

* **Bizonyítás.** Legyen

$$\mathcal{V} = \bigl\{(x, S) : x \in S \subset \mathbb{R},\ S \text{ kompakt intervallum és } \lambda(S) > 0\bigr\}.$$

Vitali tétele szerint $\mathcal{V}$ egy λ-Vitali lefedés, így a 8.2.3. tétel szerint

$$(\mathcal{V})\frac{d\lambda_g}{d\lambda}(x) \in \mathbb{R} \qquad \lambda\text{-majdnem minden } x \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Rögzítve egy ilyen x pontot, és $(\mathcal{V})\frac{d\lambda_g}{d\lambda}(x)$-et c-vel jelölve, minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy

$$(c - \varepsilon)(b - a) \leq \lambda_g[a, b] \leq (c + \varepsilon)(b - a),$$

ha $a \leq x \leq b$ és $0 < b - a < \delta$. Így

$$(c - \varepsilon)(b - a) \leq g(b) - g(a) \leq (c + \varepsilon)(b - a) \tag{1}$$

teljesül, ha g folytonos a-ban és b-ben. Mivel $g(b) - g(a)$ monoton növekvő függvénye b-nek és monoton csökkenő függvénye a-nak, valamint g folytonossági pontjai sűrűek $\mathbb{R}$-ben, (1) akkor is teljesül, ha g nem folytonos a-ban vagy b-ben. Így

$$c - \varepsilon \leq \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leq c + \varepsilon, \quad \text{ha} \quad 0 < |h| < \delta,$$

azaz $g'(x) = c$. Az állítás többi része a 8.2.3. tételből következik.

8.3.4. Tétel. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy függvény, $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g < \infty$, és λ_g a g-hez tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték, $\lambda_{g,a}$ és $\lambda_{g,s}$ pedig ennek a λ-ra vonatkozó Lebesgue-féle felbontása (a Borel-halmazokon). Ekkor g λ-majdnem mindenütt differenciálható és g' a $\lambda_{g,a}$-nak a λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja, továbbá*

$$\int_a^b |g'|\, d\lambda \le \mathbb{V}_a^b g, \quad ha \quad -\infty \le a \le b \le \infty.$$

* **Bizonyítás.** Legyen $g = \sum_{j=0}^{3} i^j g_j$ a g Jordan-felbontása, $\lambda_{g_j,a}$ és $\lambda_{g_j,s}$ pedig a λ_{g_j}-nek λ-ra abszolút folytonos, illetve szinguláris része. Felhasználva a Lebesgue-féle felbontás egyértelműségét, egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\lambda_{g,a} = \sum_{j=0}^{3} i^j \lambda_{g_j,a}, \qquad \lambda_{g,s} = \sum_{j=0}^{3} i^j \lambda_{g_j,s}.$$

Mivel a g_j függvények majdnem mindenütt differenciálhatóak, g is az és

$$\int_B g'\, d\lambda = \sum_{j=0}^{3} i^j \int_B g_j'\, d\lambda = \sum_{j=0}^{3} i^j \lambda_{g_j,a}(B) = \lambda_{g,a}(B),$$

ha B Borel-halmaz, azaz g' a $\lambda_{g,a}$-nak λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja.

Az utolsó állítást elég $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ esetére bebizonyítani. Bevezetve az $s(x) = \mathbb{V}_{-\infty}^{x} g$ jelölést, s monoton növekedő függvény és így Lebesgue tételéből

$$\mathbb{V}_a^b g = s(b) - s(a) \ge \int_a^b s'(x)\, d\lambda(x),$$

másrészt

$$s'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{V}_x^{x+h} g}{h} \ge \lim_{h\to 0} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} = |g'(x)|.$$

8.3.5. Newton–Leibniz-formula. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy függvény, amelyre $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g < \infty$. A következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *$g(b) - g(a) = \int_a^b g'\, d\lambda$ minden $-\infty < a < b < +\infty$-re;*

(2) *$\mathbb{V}_a^b g = \int_a^b |g'|\, d\lambda$ minden $-\infty < a < b < +\infty$-re;*

(3) *g abszolút folytonos;*

(4) *$\lambda_g \ll \lambda$ (a Borel-halmazokon).*

* **Bizonyítás.** (1)-ből következik (2), mivel ha $a \le x_1 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le b$, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} \big|g(x_j) - g(x_{j-1})\big| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} g'\, d\lambda \right| \le \int_a^b |g'|\, d\lambda,$$

amiből
$$\mathbb{V}_a^b g \le \int_a^b |g'|\,d\lambda.$$
A másik irányú egyenlőtlenség az előző tételből következik. (2)-ből (3)-at a
$$\big|g(v)-g(u)\big| \le \mathbb{V}_u^v g = \int_u^v |g'|\,d\lambda, \quad \text{ha} \quad \infty < u \le v < \infty$$
egyenlőtlenség és az integrál abszolút folytonossága felhasználásával kaphatjuk meg. (3)-ból következik, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy
$$-\infty < u_1 < v_1 \le u_2 < v_2 \le \ldots \le u_n < v_n < \infty$$
és $\sum_{j=1}^n (v_j - u_j) < \delta$ esetén $\sum_{j=1}^n \mathbb{V}_{u_j}^{v_j} g \le \varepsilon$. Ebből bármely nyílt V részhalmazára $\mathbb{R}$-nek, ha $\lambda(V) \le \delta$, akkor $|\lambda_g|(V) \le \varepsilon$. Approximációval bármely B Borel-halmazára $\mathbb{R}$-nek, ha $\lambda(B) \le \delta$, akkor $|\lambda_g|(B) \le \varepsilon$, így $\lambda_g \ll \lambda$. Végül (4)-ből következik (1), mivel $\lambda_g = \lambda_{g,a}$, és az előző tétel szerint
$$\lambda_g(a,b) = g(b) - g(a) = \int_a^b g'\,d\lambda.$$

8.3.6. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ és $g(x) = \int_{-\infty}^x f\,d\lambda$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g = \|f\|_1$, a g függvény abszolút folytonos $\mathbb{R}$-en és λ-majdnem mindenütt $g' = f$.*

* **Bizonyítás.** Legyen $\mu(B) = \int_B f\,d\lambda$, ha B Borel-halmaz $\mathbb{R}$-ben. Ekkor μ komplex Radon-mérték, és $g(x) = \mu(-\infty, x)$, így $\mu = \lambda_g$ a Borel-halmazokon. Mivel μ abszolút folytonos λ-ra vonatkozóan, g abszolút folytonos az előző tétel szerint. Mivel f is, és az 8.3.4. tétel szerint g' is μ-nek a λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltja, λ-majdnem mindenütt megegyeznek. Végül a $\mathbb{V}_{-\infty}^{\infty} g = \|f\|_1$ összefüggést az előző tételből határértékképzéssel kapjuk.

→ **8.3.7. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi teljes változásokat:
$$\mathbb{V}_0^{50} e^x, \quad \mathbb{V}_1^2 \ln x, \quad \mathbb{V}_0^{4\pi} \cos x, \quad \mathbb{V}_{-1}^1 (x - x^3).$$

8.3.8. Feladat [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $x \ne 0$, $f(0) = 0$ függvény milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ értékekre lesz $[-1,1]$-en korlátos változású.

* **8.3.9. Feladat [19].** Terjesszük ki az előző két tételt reflexív Banach-térbeli értékű függvényekre. (Egy X Banach-tér reflexív, ha $x \mapsto F_x$ az $(X^*)^*$-ra képez, ahol $F_x(f) = f(x)$.)

* **8.3.10. Feladat [8].** Definiáljuk a $g : (0,1) \to \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_{[0,1]})$ függvényt úgy, hogy $g(x)$ a $[0,x]$ karakterisztikus függvénye, ha $0 < x < 1$. Mutassuk meg, hogy g Lipschitz-függvény, de sehol sem differenciálható, sőt, még az $f \circ g$ fügvények sem differenciálhatóak, ahol $f : \mathbb{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda_{[0,1]}) \to \mathbb{R}$ egy korlátos lineáris funkcionál.

→ **8.3.11. Feladat [8].** Jelölje C a Cantor-halmazt, és ha $x \in C$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n/3^n$, $x_n \in \{0,1\}$, akkor legyen $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/2^n$. Ha $x \in [0,1] \setminus C$, akkor legyen $\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) : t < x, t \in C\}$. Ez a *Lebesgue-féle szinguláris függvény*. Bizonyítsuk be, hogy

(1) φ monoton növekedő;

(2) $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(C) = [0,1]$;

(3) φ folytonos.

8.3.12. Feladat: Fubini tétele monoton függvényekről [16]. Legyenek $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ monoton növekedő függvények, és tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re. Bizonyítsuk be, hogy λ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$. (Lásd Szőkefalvi-Nagy [45].)

8.3.13. Feladat [8]. Adjunk meg olyan $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvényeket, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, de $f'(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(0)$.

→ **8.3.14. Feladat [9].** Jelölje φ a Lebesgue-féle szinguláris függvényt, és terjesszük ki az egész $\mathbb{R}$-re úgy, hogy $x < 0$-ra legyen 0, $x > 1$-re pedig legyen 1. Legyen $a_n = j/2^k$, $b_n = (j+1)/2^k$, ha $n = 2^k + j$, $0 \leq j < 2^k$. Igazoljuk, hogy

(1) minden $x \in \mathbb{R}$-re
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right) = f(x) \in \mathbb{R};$$

(2) f szigorúan monoton növekedő $[0,1]$-en;

(3) f folytonos $[0,1]$-en;

(4) λ-majdnem minden $x \in [0,1]$-re $f'(x) = 0$.

→ **8.3.15. Feladat [10].** Adjunk meg olyan nem nulla λ_g Lebesgue–Stieltjes-mértéket $\mathbb{R}$-en, amely szinguláris a Lebesgue-mértékre. Választható-e g úgy, hogy folytonos legyen? Választható-e g úgy, hogy minden nem üres nyílt halmaz mértéke pozitív legyen? Választható-e g úgy, hogy mindkét feltétel teljesüljön?

→ **8.3.16. Feladat [9].** Legyen $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, ha $0 \neq x \in [-1,1]$ és legyen $f(0) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy f mindenütt differenciálható $[-1,1]$-en, de a deriváltja nem Lebesgue-integrálható.

* **8.3.17. Feladat [6].** Legyen X Banach-tér, $g : [a,b] \to X$ egy folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, $a \leq x \leq b$ függvény differenciálható, és $f'(x) = g(x)$, ha $a \leq x \leq b$.

9. HELYETTESÍTÉSES ÉS PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

Ebben a fejezetben a helyettesítéses és parciális integrálás legfontosabb tételeivel foglalkozunk. Mivel a mértékekről komplex mértékekre, monoton függvényekről korlátos változású függvényekre, valós értékű függvényekről komplex és Banach-térbeli értékű függvényekre történő általánosítások az előző fejezetek eredményei alapján általában könnyen elvégezhetők, itt csak a tételek alapeseteivel foglalkozunk.

9.1. Parciális integrálás

9.1.1. A parciális integrálás tétele Lebesgue–Stieltjes-integrálokra. *Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, $-\infty < a < b < \infty$, és tegyük fel, hogy f balról, g pedig jobbról folytonos. Ekkor*

$$\int_{(a,b]} f \, d\lambda_g + \int_{[a,b)} g \, d\lambda_f = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. Legyen $S = \big\{(x, y) : a \le x < y \le b\big\}$, és alkalmazzuk a Fubini-tételt:

$$(\lambda_f \otimes \lambda_g)(S) = \int_{(a,b]} \big(f(y) - f(a)\big) \, d\lambda_g(y) = \int_{(a,b]} f \, d\lambda_g - f(a)g(b) + f(a)g(a),$$

$$(\lambda_f \otimes \lambda_g)(S) = \int_{[a,b)} \big(g(b) - g(x)\big) \, d\lambda_f(x) = g(b)f(b) - g(b)f(a) - \int_{[a,b)} g \, d\lambda_f.$$

A két egyenlőséget kivonva egymásból, kapjuk az állítást.

9.1.2. Tétel. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan monoton növekedő függvény, amely minden kompakt intervallumon abszolút folytonos. Minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_g = \int_{\mathbb{R}} f g' \, d\lambda. \tag{1}$$

Bizonyítás. Lebesgue tétele szerint λ-majdnem mindenütt g' megegyezik λ_g-nek a λ-ra vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjával. Mivel λ-nullmértékű halmazon megváltoztatva g'-t, a jobb oldal nem változik, a Radon–Nikodym-tételből kapjuk, hogy (1) két oldala egyszerre létezik és egyenlő, ha f Borel-függvény.

Most tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Ekkor van olyan f^* Borel-függvény, amely λ_g-majdnem mindenütt egyenlő f-fel. Válasszunk egy B Borel-halmazt, amely lefedi az $\mathbb{R}(f \neq f^*)$ halmazt, és amelyre $\lambda_g(B) = 0$. Nyilván λ-majdnem minden $x \in B$-re $g'(x) = 0$, így

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda_g &= \int_B f\,d\lambda_g + \int_{\mathbb{R}\setminus B} f^*\,d\lambda_g \\ &= \int_B fg'\,d\lambda + \int_{\mathbb{R}\setminus B} f^* g'\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}} fg'\,d\lambda.\end{aligned} \tag{2}$$

Megfordítva, ha az fg' függvény λ-integrálja létezik, akkor legyen B olyan Borel-halmaz, amely lefedi az $A = \mathbb{R}(g' = 0)$ halmazt, de $\lambda(B \setminus A) = 0$, továbbá fg' megszorítása és g' megszorítása $\mathbb{R} \setminus B$-re Borel-függvény. Legyen

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus B, \\ 0, & \text{ha } x \in B. \end{cases}$$

Ekkor f^* Borel-függvény, mert $\mathbb{R} \setminus B$-n megegyezik fg'/g'-vel, továbbá

$$\lambda_g(B) = \int_B g'\,d\lambda = 0,$$

így az f függvény λ_g-mérhető és a (2) számolás visszafelé elvégezhető.

9.1.3. A parciális integrálás tétele Lebesgue-integrálokra. *Tegyük fel, hogy az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvények abszolút folytonosak $[a, b]$-n. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\int_a^b fg'\,d\lambda + \int_a^b gf'\,d\lambda = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bizonyítás. Kombináljuk az előző két tételt, vagy alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát fg-re.

9.1.4. Leibniz-szabály. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes σ-véges mértéktér, $-\infty < a < b < \infty$, $I = [a, b]$ és $f : X \times I \to \mathbb{R}$ egy függvény, amelyre az $y \mapsto f(x, y)$ függvény abszolút folytonos I-n μ-majdnem minden $x \in X$-re, és a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ függvény $\mu \otimes \lambda$-integrálható $X \times I$-n. Ekkor a*

$$g(y) = \int_X f(x, y)\,d\mu(x)$$

függvény abszolút folytonos I-n, és λ-majdnem minden $y \in I$-re

$$\frac{d}{dy} \int_X f(x, y)\,d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,d\mu(x).$$

A tétel azt mutatja, hogy igen általános feltételek mellett egy paramétertől függő függvény integrálja differenciálható a paraméter szerint, és a deriváltat a függvény paraméter szerinti parciális deriváltjának integrálásával számolhatjuk ki, azaz a differenciálás és az integrálás felcserélhetőek.

Bizonyítás. Legyen λ-majdnem minden $y \in I$-re

$$h(y) = \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, d\mu(x).$$

Ekkor a Fubini-tétel szerint h az I-n λ-integrálható, és

$$\begin{aligned}\int_a^t h(y)\, d\lambda(y) &= \int_a^t \int_X \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, d\mu(x)\, d\lambda(y) = \int_X \int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, d\lambda(y)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \big(f(x, t) - f(x, a)\big)\, d\mu(x) = g(t) - g(a).\end{aligned}$$

Ebből g abszolút folytonos I-n, és λ-majdnem minden $y \in I$-re $g'(y) = h(y)$.

$\to$ **9.1.5. Feladat** [8]. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \le -1, \\ 2, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ x^2 + 3, & \text{ha } x \ge 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki az alábbi Lebesgue–Stieltjes-integrálokat:

(1) $\int_{-2}^{2} x\, d\lambda_g(x)$,

(2) $\int_{-2}^{2} x^2\, d\lambda_g(x)$,

(3) $\int_{-2}^{2} (x^3 + 1)\, d\lambda_g(x)$.

9.2. Helyettesítéses integrálás egyváltozós függvényekre

9.2.1. Definíció. Legyen μ véges mérték X-en. Egy μ-majdnem mindenütt értelmezett, μ-mérhető $\mathbb{R}^n$-beli értékű g függvény *eloszlásfüggvényén* a

$$h(x) = \mu X(g < x), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük.

9.2.2. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, és g egy μ-majdnem mindenütt értelmezett μ-mérhető $\mathbb{R}^n$-beli értékű függvény, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pedig egy Borel-függvény. Jelölje g eloszlásfüggvényét h. Ekkor, ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, úgy létezik a másik is, és*

$$\int_X f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_h^n.$$

A tétel nagyon fontos a valószínűségszámításban, mivel mutatja, hogy egy valószínűségi változó jellemzői (várható érték, szórás, momentumok stb.) kifejezhetők az eloszlásával. A leggyakrabban alkalmazott $n = 1$, $f(x) = x$ esetet könnyű szemléltetni, ha X a $[0, \mu(X)]$ intervallum a Lebesgue-mértékkel: mivel $\int g$ csak a g nívóhalmazainak mértékétől függ, de nem függ azok elhelyezkedésétől, a nívóhalmazokat jobbra eltolva, feltehetjük, hogy g monoton növekedő. Ekkor h lényegében a g inverze, és a jobb oldalon a g alatti területnek az inverz szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrállal való kifejezése áll.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazainak osztálya. Könnyű látni, hogy a $\nu(B) = \mu\big(g^{-1}(B)\big)$ összefüggéssel definiált halmazfüggvény mérték $\mathcal{B}$-n. A mérték folytonossága miatt h minden változójában balról folytonos, és ha $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, akkor

$$\Delta^{(1)}_{[a_1,b_1)} \Delta^{(2)}_{[a_2,b_2)} \cdots \Delta^{(n)}_{[a_n,b_n)} h = \mu\big(g^{-1}[a, b)\big) \geq 0,$$

azaz λ_h^n értelmezve van és megegyezik ν-vel a balról zárt, jobbról nyílt intervallumokon. Egy tetszőleges $V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazhoz legyen V_k azon diszjunkt $[u, v) \subset V$ intervallumok megszámlálható uniója, amelyekre

$$u = \left(\frac{j_1}{2^k}, \frac{j_2}{2^k}, \dots, \frac{j_n}{2^k}\right) \quad \text{és} \quad v = \left(\frac{j_1+1}{2^k}, \frac{j_2+1}{2^k}, \dots, \frac{j_n+1}{2^k}\right)$$

valamely $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$-re. A ν és λ_h^n mértékek nyilván megegyeznek a V_k halmazokon, így a mérték folytonossága miatt a nyílt halmazokon is. Mivel az 1.3.6. tétel szerint ν is Radon-mérték, így ν és λ_h^n egybeesnek a Borel-halmazokon. Ha most $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nemnegatív egyszerű Borel-függvény $y_1, \dots, y_m$ értékekkel, akkor

$$\begin{aligned}\int_X f \circ g \, d\mu &= \sum_{i=1}^m y_i \mu\Big(g^{-1}\big(\mathbb{R}^n(f = y_i)\big)\Big) = \sum_{i=1}^m y_i \nu\big(\mathbb{R}^n(f = y_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^m y_i \lambda_h\big(\mathbb{R}^n(f = y_i)\big) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda_h.\end{aligned}$$

Ebből az approximációs lemma és Beppo Levi tétele miatt kapjuk az állítást nemnegatív, végül az integrál definíciója miatt tetszőleges Borel-függvényekre.

9.2.3. Helyettesítéses integrálás Lebesgue–Stieltjes-integrálokra. *Tegyük fel, hogy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény és $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tetszőleges függvény. Ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h. \tag{1}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy g homeomorfizmus, így $g(\mathbb{R})$ egy nyílt intervallum. Ha $A \subset g(\mathbb{R})$ egy intervallum, az a és b végpontjai $g(\mathbb{R})$-ben vannak és folytonossági pontjai h-nak, akkor $g^{-1}(b)$ és $g^{-1}(a)$ folytonossági pontjai $h \circ g$-nek és

$$h(b) - h(a) = h\Big(g\big(g^{-1}(b)\big)\Big) - h\Big(g\big(g^{-1}(a)\big)\Big),$$

így

$$\lambda_h(A) = \lambda_{h \circ g}\big(g^{-1}(A)\big). \tag{2}$$

Ebből a mérték folytonossága miatt következik, hogy (2) akkor is teljesül, ha $A \subset g(\mathbb{R})$ tetszőleges nyílt intervallum, sőt, akkor is, ha tetszőleges nyílt halmaz. Felhasználva, hogy λ_h és $\lambda_{h \circ g}$ Radon-mértékek, (2) minden $A \subset g(\mathbb{R})$ Borel-halmazra teljesül. Most legyen $B \subset \mathbb{R}$ egy Borel-halmaz, és f a B karakterisztikus függvénye. Ekkor (1) bal oldala $\lambda_{h \circ g}\Big(g^{-1}\big(B \cap g(\mathbb{R})\big)\Big)$, a jobb oldala pedig $\lambda_h\big(B \cap g(\mathbb{R})\big)$, így (2) szerint f-re teljesül (1). Ebből a szokásos approximációs eljárással kapjuk, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvényre a két integrál egyszerre létezik és teljesül (1).

Most tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Ekkor létezik olyan $C \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz és $k : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvény, amelyre $\lambda_{h \circ g}(C) = 0$ és $f\big(g(x)\big) = k(x)$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Ebből $g(C) = D$ Borel-halmaz, $\lambda_h(D) = 0$ és az

$$l(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y \notin g(\mathbb{R}), \\ k\big(g^{-1}(y)\big), & \text{ha } y \in g(\mathbb{R}) \end{cases}$$

függvény Borel-függvény, amelyre

$$l(y) = f(y), \quad \text{ha} \quad y \in g(\mathbb{R}) \setminus D, \tag{3}$$

azaz $l\big(g(x)\big) = f\big(g(x)\big)$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus C$ teljesül, így

$$\int_{\mathbb{R}} f \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{\mathbb{R}} l \circ g \, d\lambda_{h \circ g} = \int_{g(\mathbb{R})} l \, d\lambda_h = \int_{g(\mathbb{R})} f \, d\lambda_h. \tag{4}$$

Megfordítva, ha (1) jobb oldala létezik, akkor választva egy $D \subset g(\mathbb{R})$ Borel-halmazt és egy $l : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-függvényt úgy, hogy $\lambda_h(D) = 0$ és (3) teljesüljön, a (4) számolás visszafelé elvégezhető.

A következő célunk az, hogy bebizonyítsuk a helyettesítéses integrálás szokásos formulájának egy, a Lebesgue-integrálokra vonatkozó igen általános változatát. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára és egy definícióra.

* **9.2.4. Lemma.** *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, λ-majdnem mindenütt differenciálható függvény, és $\alpha > 1$. Ekkor g' mérhető és léteznek $E_1, E_2, \dots$ korlátos mérhető halmazok és $c_1, c_2, \dots$ valós számok úgy, hogy*

(1) $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E = \mathbb{R}(g' \neq 0)$;

(2) $g|E_n$ *kölcsönösen egyértelmű;*

(3) $\alpha^{-1} c_n \leq \bigl|g'(x)\bigr| \leq c_n \alpha$, *ha* $x \in E_n$;

(4) $\alpha^{-1} c_n |x-y| \leq \bigl|g(x) - g(y)\bigr| \leq \alpha c_n |x-y|$, *ha* $x, y \in E_n$.

Bizonyítás. Mivel

$$g'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x+1/n) - g(x)}{1/n}$$

λ-majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re, a g' derivált λ-mérhető. Válasszunk olyan $\varepsilon > 0$-t, amelyre $\alpha^{-1} + \varepsilon < 1 < \alpha - \varepsilon$. Minden i természetes számra, j egész számra és r pozitív racionális számra legyen $E(r,i,j)$ azon $x \in E$ valós számok halmaza, amelyekre

$$(5)\qquad \begin{aligned} &r(\alpha^{-1} + \varepsilon) \leq \bigl|g'(x)\bigr| \leq (\alpha - \varepsilon) r; \\ &\bigl|g(z) - g(x) - g'(x)(z-x)\bigr| \leq \varepsilon r |z-x|, \text{ ha } |z-x| \in \mathbb{Q} \text{ és } |z-x| < 1/i; \\ &|x - j/i| \leq 1/(2i). \end{aligned}$$

Az $E(r,i,j)$ halmazok mérhetőek, mivel megszámlálható sok mérhető halmaz metszeteként állnak elő. Továbbá, ha $x \in E(r,i,j)$, akkor (5) minden olyan $z \in \mathbb{R}$-re teljesül, amelyre $|z-x| \leq 1/i$, mert mindkét oldal folytonosan függ z-től. Az $E(r,i,j)$-k egyesítése nyilván E, így $c_n = r$ választással (1) és (3) teljesül. Most rögzítsük r,i,j-t. Ha $x, y \in E(r,i,j)$, akkor $|x-y| \leq 1/i$, így $\bigl|g(y)-g(x)\bigr| \leq \bigl|g'(x)(y-x)\bigr| + \varepsilon r|y-x| \leq \alpha r |y-x|$, $\bigl|g(y) - g(x)\bigr| \geq \bigl|g'(x)(y-x)\bigr| - \varepsilon r |y-x| \geq \alpha^{-1} r |y-x|$, azaz teljesül (2) és (4).

9.2.5. Definíció. Ha X és Y halmazok, egy $g : X \to Y$ függvény *multiplicitásán* azt az $N_g : Y \to [0,\infty]$ függvényt értjük, amelynek értéke egy $y \in Y$ helyen $X(g = y)$ elemeinek száma. (Ez lehet esetleg ∞ is.)

9.2.6. Helyettesítéses integrálás Lebesgue-integrálokra. *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ minden kompakt intervallumon abszolút folytonos függvény, A korlátos Lebesgue-mérhető részhalmaza $\mathbb{R}$-nek és $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy tetszőleges függvény. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$(1)\qquad \int_A (f \circ g) \cdot |g'| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A} \, d\lambda.$$

Továbbá, ha $-\infty < a < b < \infty$ és az $y \mapsto f(y)N_{g|[a,b]}(y)$ leképezés λ-integrálja létezik, akkor

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda = \int_{g(a)}^{g(b)} f \, d\lambda. \tag{2}$$

A tétel a helyettesítéses integrálás szokásos formulájának messzemenő általánosítása. A második formulában, ha g kölcsönösen egyértelmű, a $g(a) < g(b)$ eset az értékkészlet pozitív, a másik eset az értékkészlet negatív irányításának felel meg. Ha g nem kölcsönösen egyértelmű, a jobb oldal nem függ f-nek $g\big([a,b]\big)$ azon pontjaiban felvett értékétől, amelyek nem esnek $g(a)$ és $g(b)$ közé. Ez azért van, mert ezeket a pontokat g „ugyanannyiszor futja be” növekedve, mint csökkenve, és így az integrálból kiesnek. Az első formula viszont irányításmentes, így ebben g' helyére a bal oldalon $|g'|$ kerül, és az egyes pontok többször történő befutását, az irány figyelembevétele nélkül az $N_{g|A}$ multiplicitás reprezentálja.

* **Bizonyítás.** Válasszunk egy A-t tartalmazó I kompakt intervallumot. (1) bizonyításával kezdjük. A bizonyítást több lépésben végezzük.

Az első lépésben tegyük fel, hogy $B \subset A$, $\lambda(B) = 0$ és legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha

$$u_1 \le v_1 \le u_2 \le v_2 \le \ldots \le u_n \le v_n$$

I-beli számok, akkor $\sum_{i=1}^n (v_i - u_i) < \delta$ esetén $\sum_{i=1}^n \big|g(v_i) - g(u_i)\big| \le \varepsilon$. Fedjük le δ-nál kisebb összhosszúságú $[x_j, y_j]$, $j = 1, 2, \ldots$ intervallumrendszerrel B-t. Az $[x_j, y_j]$, $j = 1, 2, \ldots, m$ intervallumokat kisebb intervallumokra felbontva, olyan

$$z_1 \le w_1 \le y_2 \le w_2 \le \ldots \le z_{n_m} \le w_{n_m}$$

számokat kapunk, amelyekre

$$\bigcup_{j=1}^m [x_j, y_j] = \bigcup_{i=1}^{n_m} [z_i, w_i].$$

A $z_i \le u_i \le v_i \le w_i$-t úgy választva, hogy $\big|g(v_i) - g(u_i)\big|$ maximális legyen, azt kapjuk, hogy

$$\lambda\Big(g\big(\cup_{j=1}^m [x_j, y_j]\big)\Big) \le \varepsilon.$$

Innen $m \to \infty$ határátmenettel $\lambda\big(g(B)\big) \le \varepsilon$. Mivel ε tetszőleges volt, $\lambda\big(g(B)\big) = 0$.

A második lépésben tegyük fel, hogy $B \subset A(g' = 0)$. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t és egy $V \supset B$ nyílt halmazt, amelyre $\lambda(V) < \lambda(B) + \varepsilon$. Mivel

$$\mathcal{V} = \Big\{\big(x, [x - r, x + r]\big) : x \in \mathbb{R}, r > 0\Big\}$$

Vitali-lefedés, így a B-t finoman lefedő

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \Big\{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, S \subset V, \big|g(y) - g(x)\big| \le \varepsilon|y - x|, \text{ ha } y \in S\Big\}$$

lefedési relációból kiválasztható egy (x_i, S_i), $i = 1, 2, \ldots$ diszjunkt rendszer, amelyre $\lambda(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i) = 0$. Ekkor $\lambda\big(g(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i)\big) = 0$ és $\lambda\big(g(S_i)\big) \le \varepsilon\lambda(S_i)$. Ebből

$$\lambda\big(g(B)\big) \le \lambda\big(g(B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} S_i)\big) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\big(g(S_i)\big) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(S_i) \le \varepsilon\lambda(V) \le \varepsilon\lambda(B) + \varepsilon^2,$$

és így $\lambda\big(g(B)\big) = 0$.

A harmadik lépésben tegyük fel, hogy f egy λ-mérhető

$$B \subset \big\{x : x \in A, g'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \ne 0\big\}$$

halmaz $g(B)$ képének a karakterisztikus függvénye. Legyen $\alpha > 1$. Az előző lemma felhasználásával olyan $B_1, B_2, \ldots$ diszjunkt, mérhető, korlátos halmazokat és $c_1, c_2, \ldots$ valós számokat kaphatunk, amelyekre

(3) $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = B$;

(4) $g|B_i$ kölcsönösen egyértelmű;

(5) $\alpha^{-1} c_i \le \big|g'(x)\big| \le \alpha c_i$;

(6) $\alpha^{-1} c_i |y - x| \le \big|g(y) - g(x)\big| \le \alpha c_i |y - x|$, ha $x, y \in B_i$.

Mivel az 1.3.5. tétel szerint a B_i halmaz előáll egy σ-kompakt és egy nulla mértékű halmaz egyesítéseként, az első lépés alapján a $g(B_i)$ halmaz λ-mérhető. (5)-ből

$$\alpha^{-1} c_i \lambda(B_i) \le \int_{B_i} \big|g'(x)\big| \, d\lambda(x) \le \alpha c_i \lambda(B_i),$$

(6)-ból pedig, a Lipschitz-függvényekre vonatkozó 2.4.7. lemmát alkalmazva $g|B_i$-re és $\big(g|B_i\big)^{-1}$-re,

$$\alpha^{-1} c_i \lambda(B_i) \le \lambda\big(g(B_i)\big) \le \alpha c_i \lambda(B_i).$$

Összevetve ezt a két egyenlőtlenséget,

$$\alpha^{-2} \lambda\big(g(B_i)\big) \le \int_{B_i} |g'| \, d\lambda \le \alpha^2 \lambda\big(g(B_i)\big).$$

Összegezve i-re,

$$\alpha^{-2} \int_{\mathbb{R}} N_{g|B} \, d\lambda \le \int_B |g'| \, d\lambda \le \alpha^2 \int_R N_{g|B} \, d\lambda.$$

Ebből (1)-et kapjuk, ha $\alpha \downarrow 1$.

A negyedik lépésben tegyük fel, hogy f egy $T \subset g(A)$ mérhető halmaz karakterisztikus függvénye, és legyen $B = g^{-1}(T) \cap A$. Ha T Borel-halmaz, akkor $g^{-1}(T)$ is az, így B mérhető. Az eddigi lépéseket összegezve,

$$\int_A (f \circ g) \cdot |g'| \, d\lambda = \int_B |g'| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} N_{g|B} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A} \, d\lambda.$$

Ebből mindkét oldal nulla, ha $T \subset g(A)$ és $\lambda(T) = 0$, így (1) fennáll, ha T mérhető részhalmaza $g(A)$-nak. A szokásos approximációs eljárással kapjuk, hogy (1) fennáll, ha $f|g(A)$ mérhető függvény.

Az ötödik lépésben megmutatjuk, hogy van olyan $C \subset A$ mérhető halmaz, amelyre $g|C$ kölcsönösen egyértelmű és amelyre $\lambda\big(g(A) \setminus g(C)\big) = 0$. A

$$B = \big\{x : x \in A, g'(x) \in \mathbb{R}, g'(x) \neq 0\big\}$$

halmazhoz és egy tetszőleges $\alpha > 1$-hez válasszunk a harmadik lépés szerint B_i halmazokat. Minden i-re válasszunk egy olyan σ-kompakt $D_i \subset B_i$ halmazt, amelyre $\lambda(B_i \setminus D_i) = 0$. Legyen $D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$, $C_i = D_i \setminus \cup_{j=1}^{i-1} g^{-1}\big(g(D_j)\big)$, és legyen $C = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Világos, hogy a C_i halmazok Borel-halmazok, $g|C$ kölcsönösen egyértelmű, és $g(D) = g(C)$. A $B \setminus D$ halmaz nulla mértékű, és

$$g(A) \setminus g(C) \subset g(A \setminus B) \cup g(B \setminus D).$$

Innen

$$\begin{aligned}\lambda\big(g(A) \setminus g(C)\big) &\leq \lambda\big(g(A \setminus B)\big) + \lambda\big(g(B \setminus D)\big)\\ &= \int_{A\setminus B} |g'|\, d\lambda + \int_{B\setminus D} |g'|\, d\lambda = 0.\end{aligned}$$

Hatodik lépésként, hogy (1) bizonyítása teljes legyen, meg kell mutatnunk, hogy ha (1) valamelyik oldala létezik, akkor $f|g(A)$ mérhető. Legyen

$$B = \big\{x : x \in A,\ g'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \neq 0\big\}.$$

Tegyük fel, hogy (1) bal oldala létezik. Válasszuk a C halmazt az ötödik lépés szerint. Mivel $f \circ g$ a B felett megegyezik az

$$\frac{(f \circ g) \cdot |g'|}{|g'|}$$

függvénnyel, $f \circ g|B$ mérhető. Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. Mivel

$$W = C \cap (f \circ g)^{-1}(V)$$

mérhető, úgy, mint a harmadik lépésben, kapjuk, hogy $g(W)$ is mérhető. Mivel

$$g(W) \subset g(A) \cap f^{-1}(V) \subset g(W) \cup \big(g(A) \setminus g(C)\big),$$

az előző lépés alapján azt kapjuk, hogy $g(A) \cap f^{-1}(V)$ is mérhető, azaz $f|g(A)$ mérhető.

Ha (1) jobb oldala létezik, akkor a negyedik lépés szerint $N_{g|A}$ mérhető és majdnem mindenütt véges. Az $\big\{y : N_{g|A}(y) = i\big\}$ halmaz karakterisztikus függvényét h_i-vel jelölve,

$$f(y) = f(y) N_{g|A}(y) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i(y)}{i}$$

majdnem minden $y \in g(A)$-ra, így $f|g(A)$ mérhető.

Utolsó lépésként (1)-ből bebizonyítjuk (2)-t. Tegyük fel, hogy $g(a) \le g(b)$, és tekintsük az

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x : a < x < b, g'(x) > 0\}, \\ A_2 &= \{x : a < x < b, g'(x) < 0\}, \\ A_3 &= [a,b] \setminus (A_1 \cup A_2) \end{aligned}$$

halmazokat. Alkalmazva (1)-et $f \equiv 1$-gyel, azt kapjuk, hogy majdnem minden $y \in \mathbb{R}$-re

$$N_{g|A_1 \cup A_2}(y) < \infty \quad \text{és} \quad N_{g|A_3}(y) = 0.$$

Ha egy $y \in \mathbb{R}$-re ezek a feltételek teljesülnek, akkor

$$N_{g|A_1}(y) - N_{g|A_2}(y)$$

1-gyel egyenlő, ha $g(a) < y < g(b)$, és 0 egyébként. Végül, (1)-et tetszőleges olyan f-re alkalmazva, amelyre létezik az $f \cdot N_{g|A_1 \cup A_2}$ függvény λ-integrálja, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A_1} \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f \cdot N_{g|A_2} \, d\lambda \\ &= \int_{A_1} (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda - \int_{A_2} (f \circ g) \cdot (-g') \, d\lambda \\ &= \int_{A_1 \cup A_2} (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda = \int_a^b (f \circ g) \cdot g' \, d\lambda. \end{aligned}$$

9.3. Helyettesítéses integrálás többváltozós függvényekre

Ennek a résznek a fő eredménye az úgynevezett felszínképlet. Ez magába foglalja és általánosítja mindazokat a formulákat, amelyeket az ívhossz, felszín, görbe menti és felületi integrálok kiszámítására szokás felhasználni. Levezethető belőle egy integráltranszformációs formula is. Bizonyítás nélkül ismertetünk még két eredményt: a felszínképlet duálisát, az úgynevezett kofelszínképletet, és a Gauss–Osztrogradszkij-formulát. Ezek bizonyítása — ilyen általános feltételek mellett — túl messzire vezetne.

A felszínképlet bizonyításához is nehéz út vezet. Ennek egyik fontos állomásaként először azt bizonyítjuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a Lebesgue-mérték és az n-dimenziós Hausdorff-mérték egybeesik.

* **9.3.1. Steiner-szimmetrizáció.** Legyen V egy $(n-1)$-dimenziós altere $\mathbb{R}^n$-nek és bármely $S \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazhoz rendeljük hozzá S-nek a V *szerinti szimmetrizált*ját, azaz azt a T halmazt, amelyre minden V-re merőleges L egyenesre vagy $L \cap S = \emptyset$ és $L \cap T = \emptyset$, vagy $L \cap S \neq \emptyset$ és $L \cap T$ egy zárt szakasz, amelynek középpontja V-ben van, és amelyre $\chi^1(L \cap T) = \chi^1(L \cap S)$.

* **9.3.2. Tétel.** *Az előző pont jelöléseivel, ha S kompakt konvex halmaz, akkor*

(1) $\operatorname{diam}(T) \le \operatorname{diam}(S)$;

(2) *T is kompakt konvex halmaz;*

(3) $\lambda^n(S) = \lambda^n(T)$;

(4) *ha u egy, a V-re ortogonális egységvektor, és $\varrho_u(x) = x - 2\langle x, u\rangle u$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ a V-re történő tükrözés, akkor $\varrho_u(T) = T$;*

(5) *ha $S \subset \mathbb{B}(0,r)$, akkor $T \subset \mathbb{B}(0,r)$ és*

$$\big(\mathbb{S}(0,r) \setminus S\big) \cup \varrho_u\big(\mathbb{S}(0,r) \setminus S\big) = \mathbb{S}(0,r) \setminus T.$$

Itt, mivel S kompakt konvex halmaz, minden V-re merőleges L egyenesre $S \cap L$, ha nem üres, akkor zárt szakasz.

Bizonyítás. A (4)-ben említett u egységvektort használva, ha $x_1, x_2 \in T$ és $x_i = \alpha_i u + v_i$, ahol $v_i \in V$ és $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, akkor léteznek olyan $\beta_i \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$y_i = (\beta_i + \alpha_i)u + v_i \in S \quad \text{és} \quad z_i = (\beta_i - \alpha_i)u + v_i \in S.$$

E között a négy pont között van kettő, amelyek távolsága nem kisebb, mint x_1 és x_2 távolsága, így kapjuk (1)-et. Hasonlóan, ha $0 \le \gamma \le 1$, akkor

$$y = \gamma y_1 + (1-\gamma)y_2 \quad \text{és} \quad z = \gamma z_1 + (1-\gamma)z_2$$

az S-ben vannak, mindketten a

$$\big\{\delta u + \gamma v_1 + (1-\gamma)v_2 : \delta \in \mathbb{R}\big\}$$

egyenesen, és távolságuk $2 \cdot \big|\gamma\alpha_1 + (1-\gamma)\alpha_2\big|$, így

$$x = \gamma x_1 + (1-\gamma)x_2 = \big(\gamma\alpha_1 + (1-\gamma)\alpha_2\big)u + \gamma v_1 + (1-\gamma)v_2 \in T,$$

azaz T konvex.

Most tegyük fel, hogy $x_n = \alpha_n u + v_n \in T$ és $x_n \to x$. Ekkor léteznek olyan $\beta_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy

$$y_n = (\beta_n + \alpha_n)u + v_n \in S \quad \text{és} \quad z_n = (\beta_n - \alpha_n)u + v_n \in S.$$

Alkalmas részsorozatokat választva, feltehetjük, hogy $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ és $v_n \to v$. Ekkor

$$y = (\beta + \alpha)u + v \in S \quad \text{és} \quad z = (\beta - \alpha)u + v \in S,$$

így $\alpha u + v \in T$. A belső szorzat folytonossága miatt

$$\langle x, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u\rangle = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha,$$

és

$$x - \alpha u = \lim_{n\to\infty} (\alpha_n u + v_n - \alpha u) = v,$$

így $x = \alpha u + v \in T$.

(3) egy alkalmas forgatás után, amely V-t az $\big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_n = 0\big\}$ hipersíkba viszi, a Fubini-tételből következik. (4) és (5) nyilvánvaló számolással adódnak.

* **9.3.3. Izodiametrikus egyenlőtlenség.** *Ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, akkor*

$$\lambda^n(A) \leq \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)}{2^n}\big(\operatorname{diam}(A)\big)^n.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $0 < \alpha < \beta < \infty$ valós számok, és létezik olyan $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, amelyre

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}(n)}{2^n}\big(\operatorname{diam}(A)\big)^n \leq \alpha, \tag{1}$$

és

$$\lambda^n(A) \geq \beta. \tag{2}$$

Ha $x \in \mathbb{R}^n$, akkor $|z-x| \leq \sup_{y\in A}|y-x|$ minden $z \in \operatorname{conv}(A)$-ra. Ezt kétszer alkalmazva, $\operatorname{diam}\big(\operatorname{conv}(A)\big) = \operatorname{diam}(A)$, így A-t konvex burkának a lezártjával helyettesítve, (1) és (2) változatlanul fennállnak. Így azon kompakt konvex halmazok $\mathcal{C}$ rendszere, amelyekre (1) és (2) fennállnak, nem üres. Az előző tétel szerint $\mathcal{C}$-ből nem vezet ki a Steiner-szimmetrizáció. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{C}$ zárt a Hausdorff-távolságra nézve.

Mivel a 11.2.24. tétel szerint a kompakt konvex halmazok zárt alteret alkotnak, és $A \mapsto \operatorname{diam}(A)$ folytonos a Hausdorff-távolságra nézve, csak azt kell megmutatnunk, hogy ha A egy kompakt halmaz, amelyre $\lambda^n(A) < \beta$, akkor ez teljesül a hozzá közeliekre is. Választva egy V nyílt halmazt, amelyre $\lambda^n(V) < \beta$ és $A \subset V$, az A-hoz $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^n\setminus V)$-nél közelebb lévő halmazokra sem teljesül (2).

Legyen most

$$r = \inf\big\{s : T \subset \mathbb{B}(0,s) \text{ valamely } T \in \mathcal{C}\text{-re}\big\}.$$

Ekkor (2) miatt $r > 0$. Az $\mathcal{F}_{0,r+1} \cap \mathcal{C}$ halmazrendszer kompaktságából (lásd 11.2.24. jelöléseit), van olyan $S \in \mathcal{C}$, amelyre $S \subset \mathbb{B}(0,r)$. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{S}(0,r) \subset S$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{B}(a,\varepsilon) \cap S = \emptyset$ valamely $a \in \mathbb{S}(0,r)$-re és $\varepsilon > 0$-ra. Ekkor választhatunk $\mathbb{S}(0,r)$-beli különböző $a = y_0, y_1, \dots, y_k$ pontokat úgy, hogy $\mathbb{S}(0,r) \subset \cup_{j=0}^k \mathbb{B}(y_j,\varepsilon)$ teljesüljön. Konstruáljuk meg az $S = T_0, T_1, \dots, T_k \in \mathcal{C}$ halmazokat úgy, hogy T_j-t a T_{j-1}-ből a $\big\{v : v \in \mathbb{R}^n, \langle v, u_j\rangle = 0\big\}$ altérre történő Steiner-szimmetrizációval kapjuk, ahol $u_j = (y_j - a)/|y_j - a|$. A 9.3.2. tétel (5) részéből következik, hogy $T_k \subset \mathbb{B}(0,r)$ és $T_k \cap \mathbb{S}(0,r) = \emptyset$. Ebből $T_k \subset \mathbb{B}(0,s)$ valamely $0 < s < r$-re, ami ellentmond r választásának. Így $\mathbb{S}(0,r) \subset S$, amiből $S = \mathbb{B}(0,r)$. Ebből

$$\beta \leq \lambda^n\big(\mathbb{B}(0,r)\big) = \boldsymbol{\alpha}(n)r^n = \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)}{2^n}\Big(\operatorname{diam}\big(\mathbb{B}(0,r)\big)\Big)^n \leq \alpha,$$

ami ellentmondás.

9.3.4. Tétel. *Ha $A \subset \mathbb{R}^n$, akkor $\chi^n(A) = \lambda^n(A)$.*

* **Bizonyítás.** A Hausdorff-mérték definíciójánál használt jelölésekkel, az előző tétel szerint $\lambda^n(A) \leq \nu^n(A)$, ha $A \subset \mathbb{R}^n$. Ebből a λ^n külső mérték σ-szubadditivitása miatt, $\lambda^n(A) \leq \chi^n_\delta(A)$ minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re és $\delta > 0$-ra, így $\lambda^n(A) \leq \chi^n(A)$, ha $A \subset \mathbb{R}^n$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához legyen $\delta > 0$. Az 5.2.2. tétel szerint, tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan V nyílt halmaz, amelyre $A \subset V$ és $\lambda^n(V) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon$. Válasszunk olyan $j_0 \geq 1$ egész számot, amelyre $1/2^{j_0} < \delta/\sqrt{n}$ és tekintsük az összes $[a, a + e/2^j)$ balról zárt n-dimenziós kockákat, ahol $j \geq j_0$, $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ és $a = (k_1/2^j, k_2/2^j, \dots, k_n/2^j)$ valamely $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$-re. Két ilyen kocka vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat. Ha ezen kockák közül $\mathcal{F}$ jelöli azok halmazát, amelyek részei V-nek, akkor $\mathcal{F}$-nek a tartalmazásra nézve maximális elemei diszjunkt, megszámlálható lefedését alkotják V-nek. A kapott lefedés bármely W elemére, ha annak r az élhossza, $\operatorname{diam}(W) \leq r\sqrt{n} \leq \delta$, és így

$$\nu^n(W) = \boldsymbol{\alpha}(n)\big(\operatorname{diam}(W)\big)^n \leq \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)}{2^n} n^{n/2} r^n \leq c\lambda^n(W),$$

ahol

$$c = \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)}{2^n} n^{n/2}.$$

Ebből $\chi^n_\delta(A) \leq c\big(\lambda^n(A) + \varepsilon\big)$, amiből

$$\chi^n(A) \leq c\lambda^n(A). \tag{2}$$

Hogy belássuk, ez az egyenlőtlenség $c = 1$-re is teljesül, Vitali tételét alkalmazzuk a

$$\mathcal{V} = \Big\{\big(x, \mathbb{B}(x, r)\big) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\Big\}$$

lefedési relációra. E szerint a

$$\mathcal{C} = \big\{(x, S) : (x, S) \in \mathcal{V}, x \in A, \operatorname{diam}(S) \leq \delta, S \subset V\big\}$$

rendszerből kiválasztható olyan (x_i, S_i), $i = 1, 2, \dots$ diszjunkt részrendszer, amelyre $\lambda^n(A \setminus \cup_i S_i) = 0$. Ebből (2) miatt $\chi^n_\delta(A \setminus \cup_i S_i) = 0$, így

$$\begin{aligned}\chi^n_\delta(A) &\leq \chi^n_\delta(A \setminus \cup_i S) + \chi^n_\delta(\cup_i S_i) \leq \sum_i \chi^n_\delta(S_i) \leq \sum_i \nu^n_\delta(S_i) \\ &= \sum_i \lambda^n(S_i) \leq \lambda^n(V) \leq \lambda^n(A) + \varepsilon,\end{aligned}$$

amiből $\chi^n_\delta(A) \leq \lambda^n(A)$. Mivel ε tetszőleges volt, a bizonyítás kész.

A többváltozós függvények esetén azt a szerepet, amit egy változóban az abszolút folytonos függvények játszottak, a lokálisan Lipschitz-függvények veszik át. A következő fontos tétel mutatja, hogy ezek a függvények majdnem mindenütt differenciálhatóak.

9.3.5. Rademacher tétele. *Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek. Egy $g : V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény λ^m-majdnem minden $x \in V$ pontban differenciálható, és a g' derivált λ^m-mérhető.*

* **Bizonyítás.** Nyilván feltehetjük, hogy V egy korlátos nyílt gömb, g Lipschitz-függvény M Lipschitz-konstanssal és $n = 1$. Legyen $e_1, e_2, \dots, e_m$ az $\mathbb{R}^m$ szokásos bázisa. Ekkor a

$$h_{i,j}(x) = \sup\left\{\frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{j}, t \in \mathbb{Q}, x + te_i \in V\right\}, \quad \text{ha} \quad x \in V \tag{1}$$

és

$$k_{i,j}(x) = \inf\left\{\frac{g(x + te_i) - g(x)}{t} : 0 < |t| < \frac{1}{j}, t \in \mathbb{Q}, x + te_i \in V\right\}, \quad \text{ha} \quad x \in V \tag{2}$$

összefüggésekkel definiált függvények Borel-függvények. Mivel $h_{i,j} \geq h_{i,j+1}$ és $k_{i,j} \leq k_{i,j+1}$, léteznek és Borel-függvények a

$$h_i = \lim_{j\to\infty} h_{i,j} \quad \text{és} \quad k_i = \lim_{j\to\infty} k_{i,j}$$

pontonkénti határértékek, így az

$$A_i = \{x : x \in V, -\infty < k_i(x) = h_i(x) < \infty\}$$

halmazok Borel-halmazok. A fenti függvények g folytonossága miatt semmit sem változnak, ha (1)-ben és (2)-ben $\mathbb{Q}$ helyére $\mathbb{R}$-et írunk. Így az $f_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ parciális derivált az A_i Borel-halmazon értelmezett Borel-függvény ($i = 1, 2, \dots, m$). Mivel g lokálisan Lipschitz, az x koordinátái közül egy kivételével mindet rögzítve, a kapott függvény lokálisan Lipschitz, így a 8.3.2. tétel szerint értelmezési tartománya kompakt intervallumain abszolút folytonos. Mivel a 8.3.4. tétel szerint abszolút folytonos függvény majdnem mindenütt differenciálható, $V \setminus A_i$ minden, az i-edik koordinátatengellyel párhuzamos egyenessel való metszete nulla Lebesgue-mértékű. A Fubini-tétel miatt $\lambda^m(V \setminus A_i) = 0$.

Ha $1 \leq i \leq m$, j és p pedig pozitív egész számok, legyen $B(i, j, p)$ azon $x \in A_i$ pontok halmaza, amelyekre

$$\left|g(x + te_i) - g(x) - tf_i(x)\right| \leq \frac{|t|}{j}, \quad \text{ha} \quad 0 < |t| < \frac{1}{p}.$$

Mivel g folytonos, ezek a halmazok nem változnak, ha t csak racionális lehet. Így a $B(i, j, p)$ halmazok Borel-halmazok, $B(i, j, p) \subset B(i, j, p + 1)$, és

$$A_i = \bigcup_{p=1}^{\infty} B(i, j, p) \quad \text{minden } i, j\text{-re.}$$

Legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy olyan $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sorozatot, amelyre

$$\lambda^m\big(A_i \setminus B(i,j,p_j)\big) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

A Luzin-tétel szerint választhatunk olyan K_i kompakt halmazokat, amelyekre $f_i|K_i$ folytonos, és $\lambda^m(V \setminus K_i) < \varepsilon$. Ha most

$$H = \bigcap_{i=1}^{m}\Big(K_i \cap \big(\cup_{j=1}^{\infty} B(i,j,p_j)\big)\Big),$$

akkor $\lambda^m(V \setminus H) < 2m\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy g differenciálható azon H-beli pontokban, amelyekben H sűrűsége 1.

Legyen a egy ilyen pont, j természetes szám, és legyen $0 < \delta < 1/m$. Válasszunk egy olyan kicsiny η pozitív valós számot, amelyre $\eta < 1/p_j$, $\mathbb{B}(a,\eta) \subset V$, és

$$\big|f_i(y) - f_i(a)\big| < \delta, \quad \text{ha} \quad y \in K_i \quad \text{és} \quad |y-a| \le 2\eta,$$

továbbá

$$\lambda^m\big(\mathbb{B}(a,2r) \setminus H\big) < \delta^m r^m \boldsymbol{\alpha}(m), \quad \text{ha} \quad 0 < r \le \eta. \tag{3}$$

Tegyük fel, hogy $|x-a| \le \eta$ és legyen $r = |x-a|$. Olyan $v_1, v_2, \ldots, v_m$ valós számokat választva, amelyekre $x - a = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_me_m$, indukcióval definiáljunk olyan H-beli elemekből álló $a = x_1, x_2, \ldots, x_m$ sorozatot, amelyre

$$|x_i + v_ie_i - x_{i+1}| \le \delta r, \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le m. \tag{4}$$

Ez lehetséges, mivel az $x_i + v_ie_i$ pont távolsága a-tól

$$\begin{aligned} |x_i + v_ie_i - a| &\le |v_1e_1 + \cdots + v_ie_i| + \sum_{k=1}^{i-1}|x_{k+1} - x_k - v_ke_k| \\ &< r + (i-1)\delta r < \frac{m+i-1}{m}r < 2r - \delta r, \end{aligned}$$

így a köré írt δr sugarú gömb teljes egészében $\mathbb{B}(a,2r)$-ben van. Mivel ennek a gömbnek a térfogata $\delta^m r^m \boldsymbol{\alpha}(m)$, (3) miatt kell hogy tartalmazzon H-beli pontot. Vegyük észre, hogy

$$|x_m + v_me_m - x| \le \sum_{k=1}^{m-1}|x_k + v_ke_k - x_{k+1}| \le (m-1)\delta r$$

és

$$\big|g(x_i + v_ie_i) - g(x_i) - v_if_i(x_i)\big| \le \frac{|v_i|}{j}, \quad \text{ha} \quad 1 \le i \le m.$$

Felhasználva, hogy g Lipschitz-függvény,

$$\begin{aligned}
\Big|g(x)-g(a)-\sum_{i=1}^{m} v_i f_i(a)\Big| &\le \sum_{i=1}^{m} |v_i|\big|f_i(x_i)-f_i(a)\big| + \Big|g(x)-g(a)-\sum_{i=1}^{m} v_i f_i(x_i)\Big| \\
&\le m\delta r + \big|g(x)-g(x_m+v_m e_m)\big| + \sum_{i=1}^{m-1}\big|g(x_{i+1})-g(x_i+v_i e_i)\big| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\big|g(x_i+v_i e_i)-g(x_i)-v_i f_i(x_i)\big| \\
&\le m\delta r + (m-1)M\delta r + (m-1)M\delta r + mr/j \\
&< rm\big((2M+1)\delta+1/j\big) = |x-a|m\big((2M+1)\delta+1/j\big).
\end{aligned}$$

Mivel δ és j tetszőlegesek voltak, g differenciálható a-ban. Az ε tetszőleges volt, így a g függvény λ^m-majdnem mindenütt differenciálható V-ben. Mivel a $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ függvények mérhetőek, g' is mérhető.

A következő definíció a Jacobi-determináns fogalmát általánosítja.

9.3.6. Definíció. Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek. Ha a $g : V \to \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható egy $x \in V$ pontban és $A = g'(x)$, akkor legyen

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A^* \circ A)}, \quad \text{ha} \quad m \le n,$$

és

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A \circ A^*)}, \quad \text{ha} \quad m \ge n.$$

9.3.7. Megjegyzés. Ez a jelölés összhangban van 5.2.3. és 5.2.5. jelöléseivel. Ha ugyanis $m = n$, akkor

$$Jg(x) = \sqrt{\det(A^*)\det(A)} = \big|\det(A)\big|,$$

így speciálisan, ha $g(x) = A(x)+b$, ahol $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris és $b \in \mathbb{R}^n$, akkor $g'(x) = A$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re, így $Jg(x) = \big|\det(A)\big|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re.

Az alábbi lemma a 9.2.4. lemma többdimenziós általánosítása.

* **9.3.8. Lemma.** *Ha V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $\alpha > 1$, $m \le n$ és $g : V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, akkor léteznek olyan λ^m-mérhető $E_1, E_2, \dots$ halmazok és $\mathbb{R}^m$-et önmagába képező kölcsönösen egyértelmű $s_1, s_2, \dots$ lineáris leképezések, hogy*

(1) $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = E = V(Jg \ne 0)$;

(2) $g|E_k$ *kölcsönösen egyértelmű;*

(3) $\alpha^{-m}\big|\det(s_k)\big| \le Jg(x) \le \alpha^m\big|\det(s_k)\big|$, *ha* $x \in E_k$;

(4) $\operatorname{Lip}\big((g|E_k)\circ s_k^{-1}\big) \le \alpha$ *és* $\operatorname{Lip}\big(s_k \circ (g|E_k)^{-1}\big) \le \alpha$.

Bizonyítás. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t, amelyre $\alpha^{-1} + \varepsilon < 1 < \alpha - \varepsilon$. Tekintsük az $\mathbb{R}^m$-et $\mathbb{R}^m$-be képező invertálható lineáris leképezések terét az operátornormával, és válasszunk ebben egy S megszámlálható sűrű részhalmazt. Legyen T megszámlálható sűrű részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek. Minden $s \in S$-re, i pozitív egész számra és $t \in T$-re legyen $E(s,i,t)$ azon $x \in E$ pontok halmaza, amelyekre a következő feltételek teljesülnek:

(5) $\alpha^{-m}\big|\det(s)\big| \le Jg(x) \le \alpha^m\big|\det(s)\big|$;

(6) $(\alpha^{-1}+\varepsilon)\big|s(v)\big| \le \big|g'(x)(v)\big| \le (\alpha-\varepsilon)\big|s(v)\big|$, ha $v \in T$;

(7) $\big|g(y)-g(x)-g'(x)(y-x)\big| \le \varepsilon\big|s(y-x)\big|$, ha $|y-x| \le 1/i$ és $y-x \in T$;

(8) $|x-t| \le 1/(2i)$.

$E(s,i,t)$ mérhető, mert (6) és (7) csak megszámlálható sok feltétel teljesülését követeli meg, és g' Rademacher tétele szerint mérhető. Továbbá, ha $x \in E(s,i,t)$, akkor (6) minden $v \in \mathbb{R}^m$-re fennáll, mivel mindkét oldal folytonosan függ v-től. Hasonlóan, (7) is fennáll minden olyan $y \in \mathbb{R}^m$-re, amelyre $|y-x| \le 1/i$.

Megmutatjuk, hogy az $E(s,i,t)$ halmazok lefedik E-t. Legyen $x \in E$. A 11.3.32. tétel szerint az $A = g'(x)$ lineáris leképezés előállítható $C \circ B$ alakban, ahol $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ önadjungált lineáris leképezés, $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ pedig ortogonális injekció. Mivel a 11.3.33. lemma szerint $Jg(x) = \big|\det(B)\big|$, az s-et elég közel választva B-hez, teljesül (5), továbbá

$$\|s \circ B^{-1}\| < (\alpha^{-1}+\varepsilon)^{-1} \quad \text{és} \quad \|B \circ s^{-1}\| < \alpha - \varepsilon.$$

Ebből

$$\big|B(v)\big| \le (\alpha-\varepsilon)\big|s(v)\big| \quad \text{és} \quad \big|s(v)\big| \le (\alpha^{-1}+\varepsilon)^{-1}\big|B(v)\big|$$

minden $v \in \mathbb{R}^m$-re. Mivel $\big|B(v)\big| = \big|A(v)\big|$ minden $v \in \mathbb{R}^m$-re, teljesül (6). Felhasználva, hogy $|y-x| \le \|s^{-1}\|\big|s(y-x)\big|$, a derivált definíciója miatt választhatunk olyan i-t, hogy (7) is teljesüljön. Végül válasszuk meg t-t úgy, hogy (8) teljesüljön. Ezzel megmutattuk, hogy az $E(s,i,t)$ halmazok lefedik E-t, azaz (1) teljesül.

Ha most $x, y \in E(s,i,t)$, akkor $|y-x| \le 1/i$, így (6) és (7) miatt

$$\begin{aligned}\big|g(y)-g(x)\big| &\le \big|g'(x)(y-x)\big| + \varepsilon\big|s(y-x)\big| \le \alpha\big|s(y)-s(x)\big|,\\ \big|g(y)-g(x)\big| &\ge \big|g'(x)(y-x)\big| - \varepsilon\big|s(y-x)\big| \ge \alpha^{-1}\big|s(y)-s(x)\big|.\end{aligned}$$

Ebből következik (2) és (4).

A következő tétel ennek a fejezetnek a fő eredménye.

* **9.3.9. Felszínképlet.** *Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $m \le n$ és $g : V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor*

(1) *bármely λ^m-mérhető $A \subset V$-re*

$$\int_A Jg(x)\,d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|A}(y)\,d\chi^m(y);$$

(2) *ha az $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényre a bal oldali integrál létezik, akkor*

$$\int_V f(x) Jg(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x) \Big)\, d\chi^m(y).$$

Bizonyítás. Mivel (2) éppen (1)-re redukálódik, ha f az A karakterisztikus függvénye, (2)-t megkaphatjuk (1)-ből a szokásos approximációs eljárással. Így elég (1)-et megmutatnunk. Mivel (1) mindkét oldala σ-additív függvénye A-nak, elég (1)-et olyan $B \subset A$ halmazokra igazolni, amelyek λ^m-mérhetőek, $\lambda^m(B) < \infty$ és $g|B$ Lipschitz-függvény. Tovább osztva B-t, három esetet fogunk megvizsgálni: $\lambda^m(B) = 0$, $B \subset V(Jg \neq 0)$ és $B \subset V(Jg = 0)$. Az első esetben a 2.4.7. lemma és a 9.3.4. tétel szerint $\chi^m\big(g(B)\big) = 0$, így (1) mindkét oldala nulla. Marad tehát két eset.

Tegyük fel, hogy $B \subset V(Jg \neq 0)$. Az előző lemma szerint, ha $\alpha > 1$, akkor léteznek olyan $B_1, B_2, \ldots$ mérhető halmazok és $\mathbb{R}^m$-et önmagába képező kölcsönösen egyértelmű $s_1, s_2, \ldots$ lineáris leképezések, hogy

(3) $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$;

(4) $g|B_i$ kölcsönösen egyértelmű;

(5) $\alpha^{-m}\big|\det(s_i)\big| \le Jg(x) \le \alpha^m\big|\det(s_i)\big|$, ha $x \in B_i$;

(6) $\mathrm{Lip}\big((g|B_i) \circ s_i^{-1}\big) \le \alpha$ és $\mathrm{Lip}\big(s_i \circ (g|B_i)^{-1}\big) \le \alpha$.

Nyilván feltehetjük, hogy a B_i halmazok diszjunktak. Integrálva B_i felett (5)-ből

$$\alpha^{-m}\big|\det(s_i)\big|\lambda^m(B_i) \le \int_{B_i} Jg(x)\, d\lambda^m(x) \le \alpha^m\big|\det(s_i)\big|\lambda^m(B_i). \tag{7}$$

Mivel az 1.3.5. tétel szerint B_i előáll egy σ-kompakt halmaz és egy nulla mértékű halmaz egyesítéseként, a $g(B_i)$ halmaz χ^m-mérhető. Továbbá $g(B_i) = \big((g|B_i) \circ s_i^{-1}\big)\big(s_i(B_i)\big)$ miatt (6)-ból a 2.4.7. lemma felhasználásával

$$\chi^m\big(g(B_i)\big) \le \alpha^m \chi^m\big(s_i(B_i)\big). \tag{8}$$

Hasonlóan $s_i(B_i) = \big(s_i \circ (g|B_i)^{-1}\big)\big(g(B_i)\big)$ miatt

$$\chi^m\big(s_i(B_i)\big) \le \alpha^m \chi^m\big(g(B_i)\big). \tag{9}$$

Összevetve (8)-at és (9)-et és felhasználva a 9.3.4. és 5.2.5. tételeket, amelyek szerint

$$\chi^m\big(s_i(B_i)\big) = \lambda^m\big(s_i(B_i)\big) = \big|\det(s_i)\big|\lambda^m(B_i),$$

azt kapjuk, hogy

$$\alpha^{-m}\big|\det(s_i)\big|\lambda^m(B_i) \le \chi^m\big(g(B_i)\big) \le \alpha^m\big|\det(s_i)\big|\lambda^m(B_i).$$

Ebből (7)-et felhasználva, az adódik, hogy

$$\alpha^{-2m}\chi^m\big(g(B_i)\big) \le \int_{B_i} Jg(x)\,d\lambda^m(x) \le \alpha^{2m}\chi^m\big(g(B_i)\big).$$

Összegezve i-re és Beppo Levi tételét alkalmazva

$$\alpha^{-2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_{g|B}(y)\,d\chi^m(y) \le \int_B Jg(x)\,d\lambda^m(x) \le \alpha^{2m}\int_{\mathbb{R}^n} N_{g|B}(y)\,d\chi^m(y).$$

Innen $\alpha \downarrow 1$ esetén kapjuk, hogy (1) teljesül B-re.

Végül tegyük fel, hogy $B \subset V(Jg = 0)$. Ha $\varepsilon > 0$, bontsuk fel g-t $p \circ q$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} &q : V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad q(x) = (g(x), \varepsilon x), \quad \text{ha} \quad x \in V,\\ &p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad p(y,z) = y, \quad \text{ha} \quad (y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ha $x \in B$, akkor $g'(x)$ nem kölcsönösen egyértelmű, így $\mathbb{R}^m$ valamely L egydimenziós alterét a nullába képezi le. Ebből $c = \mathrm{Lip}(g|B)$ jelöléssel

$$\big|q'(x)(v)\big| = \varepsilon|v|, \quad \text{ha} \quad v \in L,$$

és

$$\big|q'(x)(v)\big| = \Big|\big(g'(x)(v), \varepsilon v\big)\Big| \le (c+\varepsilon)|v|, \quad \text{ha} \quad v \notin L.$$

Mivel $q'(x)$ nyilván kölcsönösen egyértelmű, 11.3.33. szerint

$$0 < Jq(x) \le \varepsilon(c+\varepsilon)^{m-1}.$$

Alkalmazva az eddig bizonyítottakat és a 2.4.7. lemmát p-re és a $q(B)$ halmazra, és felhasználva, hogy $\mathrm{Lip}(p) = 1$, azt kapjuk, hogy

$$\chi^m\big(g(B)\big) \le \chi^m\big(q(B)\big) = \int_B Jq(x)\,d\lambda^m(x) \le \varepsilon(c+\varepsilon)^{m-1}\lambda^m(B).$$

Ebből $\varepsilon \downarrow 0$ esetén $\chi^m\big(g(B)\big) = 0$. Így ebben az esetben (1) mindkét oldala nulla.

9.3.10. Integráltranszformációs formula. *Ha V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $g : V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ egy χ^m-mérhető függvény, $m \le n$, és A egy λ^m-mérhető részhalmaza V-nek, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$\int_A f\big(g(x)\big)Jg(x)\,d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)N_{g|A}(y)\,d\chi^m(y).$$

Ez az integrálszámítás talán leggyakrabban alkalmazott formulája *görbe menti* és *felületi integrál*ok kiszámítására, *helyettesítéses integrálás*ra. Gyakran g kölcsönösen egyértelmű A-n. Ekkor a jobb oldal $\int_{g(A)} f(y)\,d\chi^m(y)$. Ha $f \equiv 1$, akkor a felszínképletet kapjuk vissza: $m = 1, 2, 3$ esetén rendre *ívhossz*, *felszín*, illetve *térfogat* kiszámítására alkalmas formulát. Vizsgáljuk meg formulánk geometriai jelentését ebben a speciális esetben. Mivel A-t megfelelően felosztva elérhetjük, hogy egy kis részen g már nagyon jól közelíthető legyen egy affin leképezéssel, azaz egy lineáris leképezés és egy eltolás összetételével, elég azt az esetet megvizsgálnunk, amikor g affin. Mivel az eltolások, mint izometriák, nem változtatják meg a Hausdorff külső mértéket, elég azt az esetet vizsgálnunk, amikor g lineáris, és így $g'(x) = g$ minden x-re. Ekkor $Jg(x)$ geometriai jelentése a $[0,1]^m$ egységkocka képének χ^m-mértéke, azaz a szokásos bázisvektorok képei által kifeszített paralelepipedon χ^m-mértéke. Ha $m = n$, akkor $g'(x)^*$ és $g'(x)$ determinánsa megegyezik, így $Jg(x) = \left|\det g'(x)\right|$. Az általános esetben $g'(x)$ mátrixa nem négyzetes, és a négyzetgyökjel alatt a szokásos bázis vektorai képeinek belső szorzataiból alkotott mátrix determinánsa áll.

* **Bizonyítás.** Mivel mindkét oldal σ-additív függvénye A-nak, elég a tételt arra az esetre megmutatnunk, amikor $g|A$ Lipschitz-függvény és $\lambda^m(A) < \infty$. Ekkor $\chi^m\big(g(A)\big) < \infty$. Az előző tétel és az 1.3.5. tétel szerint azt is feltehetjük, hogy az A halmaz σ-kompakt, így $g(A)$ Borel-halmaz, továbbá hogy $f(y) = 0$, ha $y \in \mathbb{R}^n \setminus g(A)$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor az f a $g(A)$ egy χ^m-mérhető T részhalmazának a karakterisztikus függvénye. Ha T Borel-halmaz, akkor az előző tétel alkalmazható $A \cap g^{-1}(T)$-re, és

$$\int_A (f \circ g) \cdot Jg \, d\lambda^m = \int_{A \cap g^{-1}(T)} Jg \, d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^n} N_{g|A \cap g^{-1}(T)} \, d\chi^m = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot N_{g|A} \, d\chi^m.$$

Ebből, 2.4.6. felhasználásával, mindkét oldal nulla akkor is, ha T tetszőleges részhalmaza $g(A)$-nak, amelyre $\chi^m(T) = 0$. Ha most $T \subset g(A)$ és a T halmaz χ^m-mérhető, akkor $g(A) \setminus T$-re alkalmazva a 2.4.6. tételt, T-t előállíthatjuk egy Borel-halmaz és egy χ^m-nullmértékű halmaz egyesítéseként, így ismét teljesül (1). Végül a szokásos approximációs eljárással kapjuk az általános esetet.

A következő tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk, a felszínképlet duálisa.

* **9.3.11. Kofelszínképlet.** *Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $m \geq n$ és $g : V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor*

(1) *bármely λ^m-mérhető A részhalmazára V-nek*

$$\int_A Jg(x) \, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi^{m-n}\big(A \cap g^{-1}(y)\big) \, d\lambda^n(y);$$

(2) *ha az $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény λ^m-mérhető, és a bal oldali integrál létezik, akkor*

$$\int_V f(x) Jg(x) \, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{g^{-1}(y)} f(x) \, d\chi^{m-n}(x) \, d\lambda^n(y).$$

Az $m = n$ eset az integráltranszformációs formula. Ha g az utolsó $m - n$ koordináta elhagyásával létrejövő projekció, akkor a Fubini-tételt kapjuk. Az általános eset ezek kombinációjának tekinthető, és gyakran kényelmesebb használni, mint egy helyettesítést és a Fubini-tételt. A bizonyítás megtalálható Federer [8] könyvében, 3.2.12. tétel.

Ezen pont utolsó tételét szintén bizonyítás nélkül közöljük. Kimondásához szükségünk lesz az alábbi definícióra.

* **9.3.12. Definíció.** Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és $f : V \to \mathbb{R}^n$ egy függvény. Ha $x \in V$ és $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ differenciálható x-ben, akkor az x-beli *divergenciáján* a $\operatorname{div} f(x) = \operatorname{sp} f'(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x)$ számot értjük.

A divergencia fizikai jelentésének megértéséhez tekintsünk egy

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

n-dimenziós intervallumot. Ha f folytonosan differenciálható, akkor $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ jelöléssel

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 f_1(x_1, x')\, dx_1 = f_1(b_1, x') - f_1(a_1, x').$$

Jelölje $\mathbf{n}(x, T)$ az $\mathbb{R}^n$-beli I intervallum oldallapjának egy x pontjában a kifelé mutató, az oldallapra merőleges egységvektort, $n_i(x, I)$ az $\mathbf{n}(x, I)$ vektor i-edik koordinátáját. Ennek segítségével a jobb oldal $n_1(b_1, x', I) f_1(b_1, x') + n_1(a_1, x', I) f_1(a_1, x')$ alakban írható. Mindkét oldalt integrálva x' szerint, azt kapjuk, hogy

$$\int_I \partial_1 f_1(x)\, dx = \int_{\partial I} n_1(x, I) f_1(x)\, d\chi^{n-1}(x),$$

ahol ∂I az I határát jelöli. Az integrálást az $\{x : x_1 = a_1\}$ és $\{x : x_1 = b_1\}$ oldallapokról azért terjeszthetjük ki az intervallum határára, mert a többi lapon $n_1(x)$ nulla. Hasonlóan járva el $\partial_i f_i$-vel is, és összegezve i-re, azt kapjuk, hogy

$$\int_I \operatorname{div} f(x)\, dx = \int_{\partial I} \big\langle f(x), \mathbf{n}(x, I) \big\rangle\, d\chi^{n-1}(x).$$

Formulánk a Gauss–Osztrogradszkij-tétel (Gauss–Green-tétel vagy divergenciatétel) speciális esete. Az igen nehezen bizonyítható optimális változatot lásd a következő pontban.

Itt $\langle f, \mathbf{n} \rangle$ az f vektormezőnek a normális irányú komponense. Ennek felületi integrálja a vektormező által jellemzett áramlásban a felületen időegység alatt átáramló mennyiség. A jobb oldal fizikai jelentése tehát a I intervallumból időegység alatt kiáramló mennyiség. Összehúzva I-t egy pontra, azt kapjuk, hogy $\operatorname{div} f$ fizikai jelentése az f vektormező forrásintenzitása.

* **9.3.13. Gauss–Osztrogradszkij-tétel.** *Legyen A korlátos nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és $f : \overline{A} \to \mathbb{R}^n$ egy Lipschitz-függvény. Legyen B azon $\mathbb{R}^n$-beli pontok halmaza, amelyekben A Lebesgue-sűrűsége nem létezik, vagy létezik, de nullától és egytől különbözik. Tegyük fel, hogy $\chi^{n-1}(B) < \infty$. Ekkor*

(1) *χ^{n-1}-majdnem minden $x \in B$ pontban egy és csak egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{n}(x, A)$ egységvektor létezik, az A* külső normálisa az x pontban, *amelyre az*

$$\Big\{ y : y \notin A, \big\langle y - x, \mathbf{n}(x, A) \big\rangle < 0 \Big\} \quad \textit{és} \quad \Big\{ y : y \in A, \big\langle y - x, \mathbf{n}(x, A) \big\rangle > 0 \Big\}$$

halmazok Lebesgue-sűrűsége x-ben nulla;

(2) *az alábbi két integrál létezik és*

$$\int_A \operatorname{div} f(x)\, d\lambda^n(x) = \int_B \big\langle f(x), \mathbf{n}(x,A)\big\rangle\, d\chi^{n-1}(x).$$

A tétel Federer [8] könyve 4.5.6, 4.5.5., 2.10.43., 4.5.11. és 3.3.13. pontjainak eredményeit kombinálva adódik.

→ **9.3.14. Feladat [5].** Számítsuk ki az integráltranszformációs formula segítségével egy ellipszis területét.

→ **9.3.15. Feladat [6].** Számítsuk ki az integráltranszformációs formula segítségével egy ellipszoid térfogatát.

→ **9.3.16. Feladat [5].** Határozzuk meg a felszínképlet segítségével a

$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

csavarvonal ívhosszát.

→ **9.3.17. Feladat [7].** Számítsuk ki a gömb felszínét.

→ **9.3.18. Feladat [8].** Az $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d\lambda(x)\, d\lambda(y)$ integrált polárkoordinátákban is kiszámítva, vezessük le az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$ összefüggést.

9.3.19. Feladat [7]. Határozzuk meg egy homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva.

9.3.20. Feladat [6]. Mekkora erővel vonzza az origóban lévő m tömeget az $x^2+y^2 = r^2$, $y \geq 0$ félkoríven egyenletesen eloszló M tömeg?

9.3.21. Feladat [7]. Milyen erős mágneses teret létesít az 1 m átmérőjű, kör alakú vezetőben folyó 1 A erősségű áram a kör középpontjában?

9.3.22. Feladat [8]. Az $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$ félgömb felületén egyenletesen eloszló Q töltés milyen erővel vonzza az origóban lévő, q nagyságú, ellenkező előjelű töltést?

* **9.3.23. Feladat [18].** Legyen $V \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, $f : V \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény. Igazoljuk, hogy f' Borel-függvény.

10. FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ

A Fourier-transzformáció az integráltranszformációk körébe tartozik. Egy integráltranszformáció függvények valamely osztályának egy másik függvényosztályba való olyan $f \mapsto \hat{f}$ leképezése, amely

$$\hat{f}(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$$

alakban adható meg. Itt K az úgynevezett magfüggvény. A Fourier-transzformáció magfüggvénye

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\langle x,y\rangle}, \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

és az integrálás az n-dimenziós Lebesgue-mérték szerint történik. Egy integráltranszformáció jelentősége rendszerint abban van, hogy függvények közötti bonyolult műveleteket egyszerűbb műveletekbe visz át. Például a Fourier-transzformációt két függvény

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x-y) g(y)\, dy$$

összefüggéssel értelmezett konvolúciójára alkalmazva a két függvény Fourier-transzformáltjának a szorzatát kapjuk.

Mivel az integráltranszformációk közül a Fourier-transzformáció a legjelentősebb, és ennek a legszorosabb a kapcsolata a mértékelmélettel, itt csak a Fourier-transzformációval foglalkozunk.

10.1. Függvények konvolúciója

Ebben a részben a különböző alkalmazásokban fontos szerepet játszó konvolúcióval foglalkozunk. Különböző konstansok megjelenésének elkerülésére előnyös lesz, ha a Lebesgue-mérték helyett annak egy konstansszorosát használjuk.

* **10.1.1. Definíció.** Legyen

$$\beta^n(A) = (2\pi)^{-n/2}\lambda^n(A), \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{L}^n.$$

A β^n mértéket *normalizált Lebesgue-mérték*nek nevezzük.

* **10.1.2. Definíció.** Ha f az $\mathbb{R}^n$ valamely részhalmazán értelmezett függvény és $x \in \mathbb{R}^n$, akkor legyen $\tau_x f$ és $\check{f}$ a

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x), \quad \text{illetve} \quad \check{f}(y) = f(-y)$$

összefüggéssel értelmezve.

* **10.1.3. Definíció.** Legyenek f és g valós vagy komplex értékű, β^n-majdnem mindenütt értelmezett függvények. Az f és g *konvolúció*ját az

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\, d\beta^n(y)$$

összefüggéssel értelmezzük minden olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, ahol a jobb oldali integrál létezik.

A következő tételt annak bizonyítására fogjuk használni, hogy két integrálható függvény konvolúciója létezik.

* **10.1.4. Tétel.** *Legyen $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény úgy, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|K(x,y)\big|\, d\beta^n(x) \le c \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \big|K(x,y)\big|\, d\beta^n(y) \le c$$

valamely $c \in \mathbb{R}$-re. Ha $1 \le p \le \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, akkor a

$$(T_K f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y)\, d\beta^n(y)$$

integrál minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik, és $T_K f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, továbbá $\|T_K f\|_p \le c\|f\|_p$.

A $T_K : \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\beta^n) \to \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ folytonos lineáris operátort *integráltranszformáció*nak nevezzük, K a *magfüggvény*.

Bizonyítás. A $p = \infty$ eset triviális. Ha $1 < p < \infty$, legyen $q = p/(p-1)$. A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva az $y \mapsto \left|K(x,y)\right|^{1/q}$ és $y \mapsto \left|K(x,y)\right|^{1/p}\left|f(y)\right|$ függvényekre,

$$\begin{aligned}\left|(T_K f)(x)\right| &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|K(x,y)\right| d\beta^n(y)\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|K(x,y)\right|\left|f(y)\right|^p d\beta^n(y)\right)^{1/p} \\ &\le c^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|K(x,y)\right|\left|f(y)\right|^p d\beta^n(y)\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Innen a Fubini-tételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left|(T_K f)(x)\right|^p d\beta^n(x) &\le \int_{\mathbb{R}^n} c^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left|K(x,y)\right|\left|f(y)\right|^p d\beta^n(y)\, d\beta^n(x) \\ &\le c^{1+p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left|f(y)\right|^p d\beta^n(y) = c^p \|f\|_p^p,\end{aligned}$$

azaz $\|T_K f\|_p \le c\|f\|_p$.

Végül a $p = 1$ eset közvetlenül következik a Fubini-tételből.

* **10.1.5. Tétel.** *Legyen* $1 \le p \le \infty$, $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ *és* $g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$. *Ekkor* $f * g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$, $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$, *továbbá* β^n*-majdnem mindenütt* $f * g = g * f$.

Bizonyítás. Legyen $K(x,y) = f(x-y)$ és alkalmazzuk az előző tételt $c = \|f\|_1$ értékkel. A konvolúció kommutativitása abból adódik, hogy a Lebesgue-mérték, és így a Lebesgue-integrál is eltolásinvariáns.

* **10.1.6. Tétel.** *A konvolúcióval mint szorzással* $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ *kommutatív Banach-algebra* $\mathbb{K}$ *felett.*

Bizonyítás. Az előző tételhez hasonlóan adódik, felhasználva a Fubini-tételt is, a szorzás asszociativitása. A többi tulajdonság bizonyítása egyszerű számolás.

Az $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ algebrában nincs egységelem: ez következik majd 10.3. eredményeiből. Lehet azonban „közelítő egységeket” találni.

* **10.1.7. Definíció.** Az integrálható függvényekből álló u_k, $k = 1, 2, \ldots$ függvénysorozatot *közelítő egységnek* nevezzük, ha

(1) $u_k : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, ha $k = 1, 2, \ldots$;

(2) $\int_{\mathbb{R}^n} u_k(x)\, d\beta^n(x) = 1$;

(3) $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(x)\, d\beta^n(x) = 0$ minden, az origót tartalmazó V nyílt halmazra.

Mutatunk egy példát közelítő egységre.

* **10.1.8. Példa.** A L'Hospital-szabály alkalmazásával könnyen belátható, hogy az

$$f(r) = \begin{cases} e^{-1/r}, & \text{ha } r > 0, \\ 0, & \text{ha } r \ge 0 \end{cases}$$

függvény akárhányszor differenciálható, és nyilvánvalóan monoton növekedő. Legyen $g(x) = f\big(1 - |x|^2\big)$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor g akárhányszor differenciálható, továbbá $g(x) > 0$, ha $|x| < 1$, és $g(x) = 0$, ha $|x| \geq 1$. Végül legyen $u(x) = g(x)/\int_{\mathbb{R}^n} g\, d\beta^n$ és $u_k(x) = k^n u(kx)$, ha $x \in \mathbb{R}^n$. Ekkor u_k, $k = 1, 2, \ldots$ egy közelítő egység, amely akárhányszor differenciálható függvényekből áll.

A közelítő egység elnevezést a 10.1.10. tétel indokolja. Bizonyításához szükségünk lesz az alábbi tételre:

* **10.1.9. Tétel.** *Ha $1 \leq p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$, akkor az $x \mapsto \tau_x f$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ függvény egyenletesen folytonos leképezése $\mathbb{R}^n$-nek $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$-be.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és válasszunk egy $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Ekkor $\|\tau_x f - \tau_x g\|_p < \varepsilon/3$ bármely $x \in \mathbb{R}^n$-re. Válasszunk egy $r > 0$-t, amelyre $\operatorname{spt}(g) \subset \mathbb{B}(0, r)$, és legyen $c = \beta^n\big(\mathbb{B}(0, r + 1)\big)$. Mivel g egyenletesen folytonos, van olyan $0 < \delta < 1$, hogy

$$\|\tau_x g - g\|_u < \frac{\varepsilon}{3c^{1/p}}, \quad \text{ha} \quad |x| < \delta.$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{spt}(\tau_x g) \subset \mathbb{B}(0, r + 1)$, ha $|x| < \delta$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x g - g|^p \, d\beta^n = \int_{\mathbb{B}(0,r+1)} |\tau_x g - g|^p \, d\beta^n \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p, \quad \text{ha} \quad |x| < \delta,$$

$$\|\tau_x f - f\| \leq \|\tau_x f - \tau_x g\|_p + \|\tau_x g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon,$$

ha $|x| < \delta$. Mivel

$$\|\tau_x f - \tau_y f\|_p = \|\tau_{x-y} f - f\|_p,$$

készen vagyunk.

* **10.1.10. Tétel.** *Legyen u_k, $k = 1, 2, \ldots$ egy közelítő egység, $1 \leq p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$. Ekkor*

$$\lim_{k \to \infty} \|f * u_k - f\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Először vizsgáljuk a $p = 1$ esetet. Legyen $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$. Az előző tétel szerint van olyan V környezete az origónak, amelyre

$$\|\tau_y f - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad y \in V.$$

Válasszunk egy olyan k_0-at, amelyre

$$4\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(y)\, d\beta^n(y) < \varepsilon \quad \text{minden } k \geq k_0\text{-ra}.$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $k \geq k_0$-at. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \big|(f * u_k)(x) - f(x)\big| \, d\beta^n(x) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big(f(x-y)u_k(y) - f(x)u_k(y)\big) \, d\beta^n(y) \right| d\beta^n(x) \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|u_k(y)\big| \int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y) - f(x)\big| \, d\beta^n(x) \, d\beta^n(y) \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|u_k(y)\big| \|\tau_y f - f\|_1 \, d\beta^n(y) \\
&\quad \leq \int_V u_k(y) \frac{\varepsilon}{2} \, d\beta^n(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus V} u_k(y) 2\|f\|_1 \, d\beta^n(y) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Az $1 < p < \infty$ eset vizsgálatához vegyük észre, hogy ha egy $h \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ függvényre $\|h\|_u \leq M$, akkor

$$\|h\|_p^p = \int |h|^p \, d\beta^n \leq M^{p-1} \int |h| \, d\beta^n = M^{p-1} \|h\|_1,$$

így $\|h\|_p \leq M^{(p-1)/p} \|h\|_1^{1/p}$.

Ha $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$, akkor válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon$, és egy olyan M számot, amelyre $\|g\|_u < M/2$. Ekkor $\|g * u_k\|_u \leq M/2$, és így a $g * u_k - g$ függvényre alkalmazható az előbbi észrevétel, azaz

$$\begin{aligned}
\|f * u_k - f\|_p &\leq \|f * u_k - g * u_k\|_p + \|g * u_k - g\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leq \|f - g\|_p \|u_k\|_1 + \|f - g\|_p + M^{(p-1)/p} \|g * u_k - g\|_1^{1/p} \\
&\leq 2\varepsilon + M^{(p-1)/p} \|g * u_k - g\|_1 \to 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

ha $k \to \infty$. Mivel ε tetszőleges volt, $\|f * u_k - f\|_p \to 0$, ha $k \to \infty$.

A közelítő egységeket felhasználhatjuk arra, hogy „nagyon sima” függvényekkel közelítsünk integrálható függvényeket. Az ilyen „nagyon sima” függvények terei sok szempontból jobban kezelhetőek, mint $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$. Ez indokolja a következő három definíciót.

* **10.1.11. Definíció.** Ha V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, jelölje $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(V)$ az olyan $f : V \to \mathbb{K}$ függvények lineáris terét, amelyek kompakt tartójúak és akárhányszor differenciálhatóak.

* **10.1.12. Definíció.** Ha $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ egy természetes számokból álló *multiindex*, akkor legyen $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ és $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$. Jelölje továbbá ∂_α az

$$\left(\frac{1}{i}\partial_1\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\partial_n\right)^{\alpha_n}$$

differenciáloperátort, ahol ∂_j a j-edik változó szerinti parciális differenciálás operátora. Ha

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

akkor jelölje ξ^α a

$$\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

*monom*ot. Ha

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \xi^\alpha$$

egy legfeljebb k-ad fokú polinom, akkor a $P(\partial)$ és $P(-\partial)$ differenciáloperátorokat a

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha \partial_\alpha \quad \text{és} \quad P(-\partial) = \sum_{|\alpha| \le k|} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial_\alpha$$

összefüggésekkel értelmezzük.

* **10.1.13. Definíció.** Legyen V nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Egy $f : V \to \mathbb{K}$ függvényt *gyorsan csökkenő*nek nevezünk, ha akárhányszor differenciálható és $P \cdot \partial_\alpha f$ korlátos minden n-változós P polinomra és minden α multiindexre. Az ilyen f függvények terét $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(V)$-vel jelöljük.

* **10.1.14. Tétel.** *Ha* $1 \le p < \infty$, *akkor* $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ *és* $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ *sűrű részhalmazai* $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$*-nek a* $\| \;\|_p$ *normára nézve.*

Bizonyítás. Mivel $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, elegendő belátnunk, hogy $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ és hogy $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$-ben. Ha $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $x \mapsto (1 + |x|^{2n}) f(x)$ korlátos függvény, így elég igazolnunk, hogy a $g(x) = 1/(1 + |x|^{2n})$ függvény benne van $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$-ben. Mivel $|g|^p \le g$, elég megmutatnunk, hogy g integrálható. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $2^k < |x| \le 2^{k+1}$, akkor $0 \le g(x) \le 1/2^{2kn}$, így

$$\int_{\mathbb{B}(0,2^{k+1}) \setminus \mathbb{B}(0,2^k)} g(x)\, d\beta^n(x) \le \frac{1}{2^{2kn}} \boldsymbol{\alpha}(n) 2^{n(k+1)} (2\pi)^{-n/2}.$$

Összegezve k-ra, és felhasználva, hogy g korlátos $\mathbb{B}(0,1)$-n, kapjuk, hogy g integrálható.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$-ben. Legyen $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\beta^n)$, $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$.

Legyen u_k, $k = 1, 2, \dots$ a 10.1.8. példában adott közelítő egység. Mivel 10.1.10. szerint $\|g - g * u_k\|_p \to 0$, ha $k \to \infty$, elég nagy k-ra $\|g - g * u_k\|_p < \varepsilon/2$, azaz $\|f - g * u_k\|_p < \varepsilon$. Mivel $g, u_k \in \mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, a $g * u_k$ függvény is $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$-beli. Ha igazoljuk, hogy $g * u_k$ akárhányszor differenciálható, akkor készen vagyunk. Legyen $e_1, \dots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisa. Ekkor

$$\frac{(u_k * g)(x + h e_j) - (u_k * g)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u_k(x - y + h e_j) - u_k(x - y)}{h} g(y)\, d\beta^n(y).$$

Mivel $\partial_j u_k$ korlátos, a jobb oldali integrálban lévő tört korlátos, és $\partial_j u_k(x - y)$-hoz tart, ha $h \to 0$, így Lebesgue majorált konvergencia tételét alkalmazva, $\partial_j(u_k * g) = (\partial_j u_k) * g$. Mivel $u_k * g$ minden parciális deriváltja folytonos, $u_k * g$ differenciálható. Teljes indukcióval folytatva az eljárást, kapjuk, hogy $u_k * g$ akárhányszor differenciálható.

10.2. Függvények Fourier-transzformációja

* **10.2.1. Definíció.** Minden $t \in \mathbb{R}^n$-hez legyen $\mathbf{e}_t$ az

$$\mathbf{e}_t(x) = e^{i\langle t,x\rangle} = e^{i(t_1x_1+t_2x_2+\cdots t_nx_n)}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel definiált függvény. Ezeket a függvényeket *karakter*eknek nevezzük.

* **10.2.2. Megjegyzés.** Minden $t \in \mathbb{R}^n$-re $\mathbf{e}_t$ eleget tesz az

$$\mathbf{e}_t(x+y) = \mathbf{e}_t(x)\mathbf{e}_t(y), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

függvényegyenletnek, így $\mathbf{e}_t$ egy, az $\mathbb{R}^n$ additív csoportját az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportjába képező homomorfizmus. Minden $\mathbf{e}_t$ folytonos.

* **10.2.3. Definíció.** Egy $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ függvény *Fourier-transzformált*ját az

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{e}_{-t}(x)\,d\beta^n(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\lambda^n(x)$$

összefüggéssel értelmezzük.

* **10.2.4. Riemann–Lebesgue-lemma.** *A Fourier-transzformáció lineáris leképezése $\mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$-nek $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-be, és*

$$\|\hat{f}\|_u \le \|f\|_1, \quad \textit{ha} \quad f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n).$$

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy

$$\big|\hat{f}(t)\big| = \left|\int f\mathbf{e}_{-t}\,d\beta^n\right| \le \int |f||\mathbf{e}_{-t}|\,d\beta^n = \int |f|\,d\beta^n = \|f\|_1.$$

A linearitás nyilvánvaló. Mutassuk meg, hogy $\hat{f}$ folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f-g\|_1 < \varepsilon/3$. Ekkor

$$\begin{aligned}\big|\hat{g}(t+t^*) - \hat{g}(t)\big| &\le \int |g||\mathbf{e}_{-(t+t^*)} - \mathbf{e}_{-t}|\,d\beta^n \\ &= \int \big|g(x)\big|\big|e^{-i\langle t^*,x\rangle} - 1\big|\,d\beta^n(x).\end{aligned} \tag{1}$$

Mivel az exponenciális függvény folytonos, van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\left|e^{-i\langle t^*,x\rangle} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3\|g\|_1}, \quad \text{ha} \quad x \in \operatorname{spt}(g) \quad \text{és} \quad |t^*| < \delta.$$

Így $|t^*| < \delta$ esetén (1) jobb oldala nem nagyobb, mint $\varepsilon/3$. Ebből

$$\begin{aligned}\big|\hat{f}(t+t^*) - \hat{f}(t)\big| &\le \big|\hat{f}(t+t^*) - \hat{g}(t+t^*)\big| + \big|\hat{g}(t+t^*) - \hat{g}(t)\big| + \big|\hat{g}(t) - \hat{f}(t)\big| \\ &\le 2\|f-g\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Annak bizonyítására, hogy $\hat{f}$ eltűnik a végtelenben, vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) = -e^{-i\pi}\hat{f}(t) &= -e^{-i\pi}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\langle t,x+\pi t/|t|^2\rangle}\,d\beta^n(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f\big(x-\pi t/|t|^2\big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x).\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}2\big|\hat{f}(t)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Big(f(x)-f\big(x-\pi t/|t|^2\big)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x)\right|\\ &\le \int_{\mathbb{R}^n}\Big|f(x)-f\big(x-\pi t/|t|^2\big)\Big|\,d\beta^n(x).\end{aligned}$$

A 10.1.9. tétel szerint a jobb oldal nullához tart, ha $|t|\to\infty$.

* **10.2.5. Tétel.** *Ha $f,g\in\mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, akkor $(f*g)\hat{}=\hat{f}\hat{g}$.*

Bizonyítás. A Fubini-tételt felhasználva, minden $t\in\mathbb{R}^n$-re

$$\begin{aligned}(f*g)\hat{}(t) &= \int (f*g)\mathbf{e}_{-t}\,d\beta^n\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,d\beta^n(y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x)\,d\beta^n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-i\langle t,y+u\rangle}\,d\beta^n(u)\,d\beta^n(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-i\langle t,y\rangle}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-i\langle t,u\rangle}\,d\beta^n(u)\,d\beta^n(y).\end{aligned}$$

10.2.6. Megjegyzés. Az előző két tétel azt mutatja, hogy a Fourier-transzformáció az $\mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ algebra-izomorf folytonos leképezése $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-be. Meg lehet mutatni, hogy $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ nem minden eleme lép fel képként.

A Fourier-transzformáció fontos tulajdonsága, hogy a „sima” függvényeket „végtelenben gyorsan eltűnő” függvényekbe viszi át és viszont: a deriválást polinommal való szorzássá, a polinommal való szorzást pedig deriválássá változtatja. Ezt bizonyítja a következő két tétel.

* **10.2.7. Tétel.** *Ha az $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ függvény m-szer folytonosan differenciálható és minden $|\alpha|\le m$-re a $\partial_\alpha f$ parciális derivált β^n-integrálható, akkor a $t\mapsto\hat{f}(t)|t|^m$ függvény $\mathcal{C}_{0,\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-ben van, és $\big(P(\partial)f\big)\hat{}=P\cdot\hat{f}$ minden, legfeljebb m-edfokú P polinomra.*

Bizonyítás. Teljes indukciót használva, elég azt megmutatnunk, hogy ha $1\le j\le n$, akkor

$$(\partial_j f)\hat{}(t) = it_j\hat{f}(t). \tag{1}$$

Az $x^* = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jelöléssel, $x = (x^*, x_j)$ és így a Fubini-tétel miatt majdnem minden $x^* \in \mathbb{R}^{n-1}$-re az

$$x_j \mapsto f(x^*, x_j) \quad \text{és} \quad x_j \mapsto (\partial_j f)(x^*, x_j)$$

függvények β^1-integrálhatóak. Mivel ilyen x^*-okra

$$f(x^*, b) - f(x^*, a) = \int_a^b (\partial_j f)(x^*, x_j)\, d\beta^1(x_j),$$

léteznek a

$$\lim_{x_j \to -\infty} f(x^*, x_j) \quad \text{és} \quad \lim_{x_j \to \infty} f(x^*, x_j)$$

határértékek. Ezek a határértékek csak nullák lehetnek, mivel $x_j \mapsto f(x^*, x_j)$ integrálható. Így parciális integrálással minden $N > 0$-ra

$$\int_{-N}^{N} e^{-i\langle t,x\rangle}(\partial_j f)(x^*, x_j)\, d\beta^1(x_j) = e^{-i\langle t,(x^*,N)\rangle} f(x^*, N) - e^{-i\langle t,(x^*,-N)\rangle} f(x^*, -N)$$
$$+ it_j \int_{-N}^{N} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x^*, x_j)\, d\beta^1(x_j),$$

amiből Lebesgue majorált konvergencia tételét felhasználva határátmenettel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle t,x\rangle}(\partial_j f)(x^*, x_j)\, d\beta^1(x_j) = it_j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle t,x\rangle} f(x^*, x_j)\, d\beta^1(x_j).$$

Most a Fubini-tételt alkalmazva kapjuk (1)-et.

* **10.2.8. Tétel.** *Legyen $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ és tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$-re az $x \mapsto f(x)|x|^m$ függvény integrálható. Ekkor az $\hat{f}$ Fourier-transzformált m-szer folytonosan differenciálható és minden m-nél nem magasabb fokú P polinomra $(P \cdot f)\hat{} = P(-\partial)\hat{f}$.*

Bizonyítás. A $t^* = (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)$ és $t = (t^*, t_j)$ jelölésekkel

$$\frac{\hat{f}(t^*, t_j + \varepsilon) - \hat{f}(t^*, t_j)}{-i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) e^{-i\langle t,x\rangle} \frac{e^{-ix_j\varepsilon} - 1}{-ix_j\varepsilon}\, d\beta^n(x).$$

Mivel $|x_j| \le |x|$, az $x \mapsto x_j f(x)$ függvény integrálható. Felhasználva, hogy

$$y \mapsto \frac{e^{-iy} - 1}{-iy}$$

korlátos függvény $\mathbb{R}$-en, és 1-hez tart, ha $y \to 0$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint $\partial_j \hat{f}$ létezik és

$$-\frac{1}{i}(\partial_j \hat{f})(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, d\beta^n(x).$$

Ebből teljes indukcióval kapjuk az állítást.

* **10.2.9. Tétel.** *Legyen* $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ *és* $x \in \mathbb{R}^n$. *Ekkor*

(1) $(\tau_x f)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\hat{f}$;

(2) $(\mathbf{e}_x f)\hat{} = \tau_x \hat{f}$;

(3) *ha* $\alpha > 0$ *és* $h(x) = f(x/\alpha)$, *akkor* $\hat{h}(t) = \alpha^n \hat{f}(\alpha t)$.

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

* **10.2.10. Lemma.** *Legyen* $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$. *Ekkor* $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi} = \varphi$ *és* $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, d\beta^n = 1$.

Bizonyítás. Az világos, hogy $\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Ha $x \in \mathbb{R}$ esetén $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, akkor ψ eleget tesz az $y'(x) + xy(x) = 0$ differenciálegyenletnek. A 10.2.7. és 10.2.8. tételek szerint $\hat{\psi}$ is eleget tesz ennek a differenciálegyenletnek. Így

$$\left(\frac{\hat{\psi}}{\psi}\right)'(x) = \frac{\hat{\psi}'(x)\psi(x) - \psi'(x)\hat{\psi}(x)}{\psi(x)^2} = \frac{-x\hat{\psi}(x)\psi(x) + x\psi(x)\hat{\psi}(x)}{\psi(x)^2} = 0.$$

Mivel

$$\hat{\psi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, d\lambda(x) = 1 = \psi(0),$$

kapjuk, hogy $\psi = \hat{\psi}$. Mivel

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n), \quad \text{ha} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\hat{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)\cdots\hat{\psi}(x_n), \quad \text{ha} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

kapjuk, hogy $\varphi = \hat{\varphi}$.

* **10.2.11. Inverziós tétel.** *Ha* $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ *és* $\hat{f} \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, *akkor* β^n*-majdnem mindenütt* $\hat{\hat{f}} = \check{f}$.

Bizonyítás. Legyen φ az előző lemmában szereplő függvény, és $\varphi_\alpha = \alpha^n \varphi(\alpha x)$, ha $\alpha > 0$. A Fubini-tételt felhasználva és φ párosságát figyelembe véve

$$\begin{aligned}
(f * \varphi_\alpha)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\varphi_\alpha(y)\, d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\alpha^n \varphi(\alpha y)\, d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) e^{-i\langle t, y\rangle}\, d\beta^n(t)\, d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) e^{-i\langle t, y\rangle}\, d\beta^n(y)\, d\beta^n(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle t, x - z\rangle}\, d\beta^n(z)\, d\beta^n(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t/\alpha) \hat{f}(-t) e^{-i\langle t, x\rangle}\, d\beta^n(t).
\end{aligned}$$

Mivel $\varphi(t/\alpha) \to 1$, amint $\alpha \to \infty$, Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint a jobb oldal $\hat{\hat{f}}(-x)$-hez konvergál, amint $\alpha \to \infty$. Mivel $\mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$-ben 10.1.10. szerint $f * \varphi_\alpha \to f$, ha $\alpha \to \infty$, van olyan α_k részsorozat, amelyre a bal oldal β^n-majdnem mindenütt konvergál f-hez. Így β^n-majdnem mindenütt $f = (\hat{\hat{f}})\check{}$.

* **10.2.12. Unicitási tétel.** *Ha $f, g \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ és $\hat{f} = \hat{g}$, akkor β^n-majdnem mindenütt $f = g$.*

Bizonyítás. Mivel $(f - g)\hat{} = \hat{f} - \hat{g} = 0$, az előző tétel szerint az $f - g$ függvény β^n-majdnem mindenütt nulla.

A következő tétel $\mathcal{S}$-en írja le a Fourier-transzformáció viselkedését.

* **10.2.13. Tétel.** *Az $f \mapsto \hat{f}$ Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-nek önmagára, és $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ minden $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-re. Továbbá ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $fg \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $f * g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$, és $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.*

Bizonyítás. A 10.2.8. és 10.2.7. tételekből következik, hogy $f \mapsto \hat{f}$ az $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-et önmagába képezi. Az inverziós tételből következik, hogy

$$f = \check{\check{f}} = (\check{f})\hat{} = \hat{\hat{\hat{f}}},$$

azaz a Fourier-transzformáció $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-re képez. Ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor a szorzat differenciálására vonatkozó tétel szerint $fg \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Azt már láttuk, hogy $(f * g)\hat{} = \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, kapjuk, hogy $f * g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Végül

$$(\hat{f} * \hat{g})\hat{} = \hat{\hat{f}}\hat{\hat{g}} = \check{f}\check{g} = (fg)\check{} = (fg)\hat{\hat{}},$$

és így mindkét oldalra alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, $(fg)\hat{} = \hat{f} * \hat{g}$.

* **10.2.14. Plancherel-tétel.** *Létezik egy és csak egy olyan $f \mapsto F(f)$ lineáris izometrikus leképezése $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\beta^n)$-nek önmagára, amelyre $F(f)$ az f Fourier-transzformáltja, ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n) \cap \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\beta^n)$.*

Bizonyítás. Ha $f, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, akkor

$$\begin{aligned}\int f\,\overline{g}\,d\beta^n &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(t)\,d\beta^n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{g}(x)e^{i\langle t,x\rangle}\,d\beta^n(x)\,d\beta^n(t) = \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,d\beta^n.\end{aligned}$$

Ebből $f \mapsto \hat{f}$ izometrikus leképezése $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-nek önmagára a $\|\ \|_2$ normából származó metrikára nézve. Mivel $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sűrű $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\beta^n)$-ben, és egy metrikus tér egy sűrű alterén értelmezett, teljes metrikus térbe képező egyenletesen folytonos leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki az egész téren értelmezett folytonos leképezéssé, ez a leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki egy izometriává, amelynek értékkészlete $\mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\beta^n)$.

Ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n) \cap \mathbb{L}^2_{\mathbb{C}}(\beta^n)$ és $\varepsilon > 0$, akkor ugyanúgy, mint a 4.4.6. tétel bizonyításában, találhatunk olyan $h \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f-h\|_1 < \varepsilon$ és $\|f-h\|_2 < \varepsilon$. Ha u_k a 10.1.8. példában szereplő approximatív egység, akkor, mint azt a 10.1.14. tétel bizonyításában láttuk, $u_k * h \to h$ a $\|\ \|_1$ és $\|\ \|_2$ normában is, így van olyan $g \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, amire $\|f-g\|_1 < 2\varepsilon$ és $\|f-g\|_2 < 2\varepsilon$. Választva egy olyan $g_k \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ sorozatot, amely $\|\ \|_1$-ben és $\|\ \|_2$-ben is f-hez konvergál, $\hat{g}_k$ az $\hat{f}$-höz konvergál egyenletesen, és $F(f)$-hez $\|\ \|_2$-ben. Egy részsorozatra áttérve, kapjuk, hogy β^n-majdnem mindenütt $\hat{f} = F(f)$.

10.3. Mértékek Fourier-transzformációja

Ebben a fejezetben az $\mathbb{R}^n$ feletti valós és komplex Radon-mértékekre általánosítjuk a Fourier-transzformációt és a konvolúciót.

* **10.3.1. Definíció.** Legyen $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz, legyen

$$\kappa(B) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y).$$

Nyilván κ egy $\mathbb{K}$-beli értékű mérték $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazain. Ennek természetes kiterjesztését μ és ν *konvolúció*jának nevezzük, és $\mu * \nu$-vel jelöljük.

* **10.3.2. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, $\mu * \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, $\|\mu * \nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$, és ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}\big(|\mu| * |\nu|\big)$, akkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f\, d(\mu * \nu) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x+y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned} \tag{1}$$

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\mu * \nu$ teljes $\mathbb{K}$-beli értékű Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ Borel-halmaz, akkor $\varphi_\mu = d\mu/d|\mu|$ és $\varphi_\nu = d\nu/d|\nu|$ jelölésekkel, $\mu \otimes \nu$ definíciója és a Fubini-tétel szerint

$$\begin{aligned}\kappa(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(t)\, d(\mu * \nu)(t) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y) \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(y)\, d\big(|\mu| \otimes |\nu|\big)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned} \tag{2}$$

Ebből

$$(3) \qquad \big|(\mu * \nu)(B)\big| = \big|\kappa(B)\big| \le \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d\big(|\mu| \otimes |\nu|\big)(x,y) = \big(|\mu| * |\nu|\big)(B)$$

minden B Borel-halmazára $\mathbb{R}^n$-nek. Ezt felhasználva

$$(4) \qquad \big(|\mu * \nu|\big)(B) = |\kappa|(B) \le \big(|\mu| * |\nu|\big)(B) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\, d\big(|\mu| \otimes |\nu|\big)(x,y)$$

minden B Borel-halmazra, és így

$$\|\mu * \nu\| = \|\kappa\| \le \|\mu\| \|\nu\|.$$

Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ egy egyszerű Borel-függvény, amely $|\mu| * |\nu|$-integrálható, akkor (3)-ból következik, hogy $|\mu * \nu|$-integrálható is, és fennáll rá (1).

Végül egy tetszőleges $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}\big(|\mu| * |\nu|\big)$ függvényhez választva egy olyan egyszerű Borel-függvényekből álló $|s_n| \le |f|$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatot, amely $|\mu| * |\nu|$-majdnem mindenütt f-hez konvergál, (4) felhasználásával azt kapjuk, hogy $|\mu * \nu|$-majdnem minden $t \in \mathbb{R}^n$-re $s_n(t) \to f(t)$ és $|\mu| \otimes |\nu|$-majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$-re $s_n(x + y) \to f(x + y)$, így Lebesgue majorált konvergencia tétele szerint (1) teljesül f-re is.

* **10.3.3. Tétel.** *Az $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ Banach-tér a konvolúcióval mint szorzással egységelemes kommutatív Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett.*

Bizonyítás. Az előző tételből következik, hogy ha $\mu, \nu \in \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$, akkor $\mu * \nu$ és $\nu * \mu$ egybeesnek a Borel-halmazokon, így azonosak. Ha még $\kappa \in \mathbb{M}_K(\mathbb{R}^n)$, akkor a Fubini-tétel segítségével végzett számolás mutatja, hogy $(\mu * \nu) * \kappa$ és $\mu * (\nu * \kappa)$ is egybeesnek a Borel-halmazokon, így azonosak. Az $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$ térben a

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \in A \subset \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } 0 \notin A \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

összefüggéssel definiált δ Dirac-mérték egységelem. A többi tulajdonság bizonyítása egyszerű.

* **10.3.4. Tétel.** *Ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$, legyen*

$$\kappa_f(B) = \int_B f\, d\beta^n,$$

ha B Borel-halmaz $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor κ_f egy $\mathbb{K}$-beli értékű Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en. Jelölje μ_f a κ_f természetes kiterjesztését. Ekkor az $f \mapsto \mu_f$ leképezés izometrikusan izomorf beágyazása az $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$ Banach-algebrának $\mathbb{M}_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^n)$-be.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy κ_f Radon-mérték. A Radon–Nikodym-tétel szerint

$$|\kappa_f|(B) = \int_B |f|\, d\beta^n,$$

ha B Borel-halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, így $\|\kappa_f\| = \|\mu_f\| = \|f\|_1$. Az, hogy a fenti leképezés additív, nyilvánvaló. Ha $f, g \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\beta^n)$, akkor $\mathbb{R}^n$ bármely B Borel-halmazára

$$\begin{aligned}
\mu_{f*g}(B) &= \int_B (f*g)(x)\,d\beta^n(x) \\
&= \int_B \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,d\beta^n(y)\,d\beta^n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_B f(x-y)g(y)\,d\beta^n(x)\,d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x)f(x-y)g(y)\,d\beta^n(x)\,d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)f(x)g(y)\,d\beta^n(x)\,d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \xi_B(x+y)\,d\mu_f(x)\,d\mu_g(y) = (\mu_f * \mu_g)(B).
\end{aligned}$$

* **10.3.5. Definíció.** Legyen $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. A μ *Fourier-transzformált*ját a

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}\,d\mu, \quad \text{ha} \quad t \in \mathbb{R}^n$$

összefüggéssel értelmezzük. Megjegyezzük, hogy $\hat{\mu}$ egy $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{C}$-be képező függvény és 10.3.4. jelöléseivel, ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, akkor $\hat{f} = (\mu_f)\hat{}$.

Hogy a Fourier-transzformáció legfontosabb tulajdonságait megvizsgálhassuk, szükségünk lesz egy fogalomra és egy tételre.

* **10.3.6. Definíció.** Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvényt *trigonometrikus polinom*nak nevezünk, ha előáll karakterek véges lineáris kombinációjaként. Az összes trigonometrikus polinomok lineáris terét $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük.

* **10.3.7. Tétel.** *Ha μ véges teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en és $1 \le p < \infty$, akkor $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ sűrű részhalmaza $\mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$-nek.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ és $0 < \varepsilon < 1$. Válasszunk egy olyan $g \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ függvényt, amelyre $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Válasszuk meg az $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ pozitív számokból álló vektort úgy, hogy az

$$A = [-\pi a_1, \pi a_1) \times [-\pi a_2, \pi a_2) \times \cdots [-\pi a_n, \pi a_n)$$

halmaz belsejében tartalmazza g tartóját, továbbá

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) < \frac{\varepsilon^p}{4^p(\|g\|_u + 1)^p}$$

teljesüljön. Ekkor a $h : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ függvényt a

$$h(e^{ix_1}, \dots, e^{ix_n}) = g(a_1x_1, \dots, a_nx_n)$$

összefüggés egyértelműen definiálja és h folytonos $\mathbb{T}^n$-en. Tekintsük az összes

$$\sum_{|\gamma|,|\delta|\le m} c_{\gamma,\delta} z^{\gamma} z^{-\delta}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{T}^n$$

alakú függvények $\mathcal{H}$ osztályát, ahol $m \in \mathbb{N}$, γ és δ multiindexek, és $c_{\gamma,\delta} \in \mathbb{C}$. A $\mathcal{H}$ függvényosztály $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$ egy részalgebrája, tartalmazza az azonosan 1 függvényt, szétválasztja $\mathbb{T}^n$ pontjait, és zárt a komplex konjugált képzésére, így a 11.3.13. (komplex) Weierstrass–Stone-tétel szerint $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}^n)$-ben az uniform normára nézve. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$k(z) = \sum_{|\gamma|,|\delta|\le m} c_{\gamma,\delta} z^{\gamma} z^{-\delta}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{T}^n$$

függvény, amelyre

$$\bigl|h(z) - k(z)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p}+1}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{T}^n,$$

azaz

$$\Bigl|g(a_1x_1,\dots,a_nx_n) - \sum_{|\gamma|,|\delta|\le m} c_{\gamma,\delta} e^{i(\gamma_1-\delta_1)x_1}\cdots e^{i(\gamma_n-\delta_n)x_n}\Bigr| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p}+1}.$$

Az a_jx_j helyére y_j-t írva, azt kapjuk, hogy van olyan t trigonometrikus polinom, amely a j-edik változójában $2\pi a_j$ szerint periodikus, és teljesül rá, hogy

$$\bigl|g(y) - t(y)\bigr| < \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p}+1}, \quad \text{ha} \quad y \in A.$$

Mivel t periodikus, uniform normája megegyezik abszolút értékének az $\overline{A}$-on felvett szuprémumával, azaz

$$\|t\|_u \le \|g\|_u + \frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p}+1} \le \|g\|_u + 1.$$

Ebből

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |g-t|^p\, d\mu &\le \int_A \left(\frac{\varepsilon}{4\|\mu\|^{1/p}+1}\right)^p d\mu + \int_{\mathbb{R}^n\setminus A} \bigl(\|g\|_u+1\bigr)^p\, d\mu \\ &\le \frac{\varepsilon^p}{4^p} + \frac{\varepsilon^p}{4^p} \le \frac{\varepsilon^p}{2^p}.\end{aligned}$$

* **10.3.8. Tétel.** *A $\mu \mapsto \hat{\mu}$ Fourier-transzformáció $\mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-nek $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-be való algebra-izomorf leképezése. Minden $\mu \in \mathbb{M}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$-re $\hat{\mu}$ egyenletesen folytonos, és $\|\hat{\mu}\|_u \le \|\mu\|$.*

Bizonyítás. Mivel $\bigl|\hat{\mu}(t)\bigr| \le \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{e}_{-t}|\, d|\mu| \le \|\mu\|$, kapjuk, hogy $\|\hat{\mu}\|_u \le \|\mu\|$. Megmutatjuk, hogy $\hat{\mu}$ egyenletesen folytonos. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazt, amelyre $|\mu|(\mathbb{R}^n \setminus K) < \varepsilon/4$. Létezik olyan $\delta > 0$, amelyre

$$\Bigl|e^{i\langle t,x\rangle} - 1\Bigr| < \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}, \quad \text{ha } x \in K,\ t \in \mathbb{R}^n \text{ és } |t| < \delta.$$

Ha $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^n$, $|t_1 - t_2| < \delta$, akkor

$$\left|\hat{\mu}(t_1) - \hat{\mu}(t_2)\right| \le \int_K |\mathbf{e}_{-t_1} - \mathbf{e}_{-t_2}|\, d|\mu| + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} 2\, d|\mu| < \varepsilon.$$

Legyen most $\mu, \nu \in \mathbb{M}$. A komplex mértékek szerinti integrál tulajdonságaiból következik, hogy $(c\mu)\hat{} = c\hat{\mu}$ és $(\mu + \nu)\hat{} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$. Másrészt a 10.3.2. tétel szerint

$$\begin{aligned}(\mu * \nu)\hat{}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}\, d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}(x + y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}_{-t}(x) \mathbf{e}_{-t}(y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \hat{\mu}(t)\hat{\nu}(t).\end{aligned}$$

Hátravan még annak bizonyítása, hogy ha $\hat{\mu}(t) = 0$ minden $t \in \mathbb{R}^n$-re, akkor $\mu = 0$. Valóban, ekkor $\int_{\mathbb{R}^n} g\, d\mu = 0$ minden $g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$-re. Legyen $\varepsilon > 0$. Az előző tétel szerint a $\varphi = d\mu/d|\mu|$ függvény konjugáltjához van olyan g trigonometrikus polinom, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\varphi} - g|\, d|\mu| < \varepsilon$. Ebből

$$\begin{aligned}\|\mu\| &= \int_{\mathbb{R}^n} 1\, d|\mu| = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}\varphi\, d|\mu| = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi}\, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\overline{\varphi} - g)\, d\mu \le \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{\varphi} - g|\, d|\mu| < \varepsilon.\end{aligned}$$

* **10.3.9. Definíció.** Egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ függvényt *pozitív definit*nek nevezünk, ha

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha}_j \alpha_k \varphi(t_k - t_j) \ge 0,$$

valahányszor $t_1, t_2, \dots, t_m$ különböző $\mathbb{R}^n$-beli elemek és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ komplex számok.

* **10.3.10. Tétel.** *Ha μ véges teljes Radon-mérték $\mathbb{R}^n$-en, akkor $\hat{\mu}$ pozitív definit függvény.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha}_j \alpha_k \hat{\mu}(t_k - t_j) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha}_j \alpha_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{e}(t_j - t_k)\, d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \overline{\alpha}_j \alpha_k e^{i\langle t_j, x\rangle} e^{-i\langle t_k, x\rangle}\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e^{i\langle t_j, x\rangle} \right|^2 d\mu(x) \ge 0.\end{aligned}$$

Ennek az egyszerű állításnak a megfordítása igen fontos.

* **10.3.11. Bochner tétele.** *Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ egy folytonos pozitív definit függvény. Ekkor egy és csak egy olyan μ véges teljes Radon-mérték létezik $\mathbb{R}^n$-en, amelyre $\hat{\mu} = \varphi$.*

Mivel a bizonyítás mély funkcionálanalízisbeli eszközöket igényel, elhagyjuk. Megtalálható például Dieudonné [6] könyvében, 22.10.

11. FÜGGELÉK

11.1. Topológiai alapfogalmak

11.1.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{T}$ *topológia az X halmazon*, ha $\mathcal{T}$ az X részhalmazaiból álló halmazrendszer, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) $X \in \mathcal{T}$;

(2) ha $\gamma \in \Gamma$ esetén $V_\gamma \in \mathcal{T}$, akkor $\cup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma \in \mathcal{T}$;

(3) ha $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$, akkor $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$.

Az $(X, \mathcal{T})$ párt, vagy legtöbbször magát X-et, *topologikus tér*nek nevezzük. A $\mathcal{T}$ elemeit *nyílt* halmazoknak nevezzük.

11.1.2. Példák. (1) Bármely (X, d) metrikus tér egyben topologikus tér is, ha a nyílt halmazokat a szokásos módon definiáljuk: Egy $V \subset X$ halmaz tartozzon $\mathcal{T}$-hez, ha bármely $x \in V$-hez van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az

$$\mathbb{U}(x, \varepsilon) = \big\{y : y \in X, d(x, y) < \varepsilon\big\}$$

x középpontú, ε sugarú nyílt gömb része V-nek. Ugyanazt kapjuk, ha a nyílt gömbök helyett a

$$\mathbb{B}(x, \varepsilon) = \big\{y : y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\big\}$$

*x középpontú, ε sugarú zárt gömb*öket használjuk. Ezt a $\mathcal{T}$-t a *metrikából származó topológiá*nak nevezzük. Több különböző metrikából származhat ugyanaz a topológia. Ha valamely topologikus tér topológiája metrikából származtatható, akkor a teret *metrizálható*nak nevezzük. Az $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ terek *szokásos topológiá*ján a $d(x, y) = |x - y|$ távolságból származó topológiát értjük. Használni fogjuk az $\mathbb{S}(x, \varepsilon) = \mathbb{B}(x, \varepsilon) \setminus \mathbb{U}(x, \varepsilon)$ jelölést: $\mathbb{S}(x, \varepsilon)$ az *x középpontú, ε sugarú gömbfelület*. Egy $A \subset X$ halmaz *átmérő*je a

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\big\{d(x, y) : x, y \in A\big\}$$

bővített valós szám. Ha $A, B \subset X$, legyen

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\big\{d(x, y) : x \in A, y \in B\big\}$$

az A és B *halmazok távolsága*. Ha $A = \{x\}$, akkor $\operatorname{dist}(x, B)$-t írunk. Gyakran, ha nem kívánjuk megadni a távolságfüggvényt, két pont távolságát $\operatorname{dist}(x, y)$-nal jelöljük.

(2) A metrikus térnél általánosabb fogalmat kapunk, ha egy X halmazon egy $d : X \times X \to [0, \infty]$ függvényt tekintünk, amelyre

$$d(x,y) = d(y,x), \quad \text{ha} \quad x, y \in X;$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \quad \text{ha} \quad x, y, z \in X.$$

Egy ilyen függvényt *eltérés*nek, az (X, d) párt *félmetrikus tér*nek nevezzük, és az X-nek a d *eltérésből származó topológiá*ja ugyanúgy definiálható, mint metrikus tér esetében.

(3) Bármely X halmaz topologikus térré tehető, ha $\mathcal{T}$-nek 2^X-et, az X összes részhalmazainak rendszerét választjuk. Az így kapott teret *diszkrét topologikus tér*nek nevezzük. Ha $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, akkor az *indiszkrét ter*et kapjuk.

(4) Ha X lineárisan rendezett a $<$ relációval, akkor X topologikus térré tehető. Az $\{x : x \in X, a < x < b\}$, $\{x : x \in X, a < x\}$, $\{x : x \in X, x < b\}$ alakú halmazokat, ahol $a, b \in X$, *nyílt intervallum*oknak nevezzük. Egy $V \subset X$ halmaz tartozzon $\mathcal{T}$-hez, ha minden $x \in V$-hez van olyan I nyílt intervallum, hogy $x \in I \subset V$. Az így kapott topológiát az X *rendezéstopológiá*jának nevezzük. A *bővített valós számok szokásos topológiáján* az $\overline{\mathbb{R}}$ természetes rendezéséből származó topológiát értjük.

11.1.3. Definíció. Egy X topologikus térben az E halmazt az x pont *környezet*ének nevezzük, ha tartalmaz x-et tartalmazó nyílt halmazt. Ilyenkor x-et E *belső pont*jának nevezzük. Az E *belsején* az E összes belső pontjainak halmazát értjük, ezt E°-rel jelöljük. Az E halmazt *zárt*nak nevezzük, ha a komplementere nyílt. Az x pontot E *torlódási pont*jának nevezzük, ha x minden környezete tartalmazza E-nek x-től különböző pontját. Ha x minden környezete E-nek megszámlálhatónál több pontját tartalmazza, akkor x-et az E *kondenzációs pont*jának nevezzük. Az E halmaz $\overline{E}$-sal jelölt *lezárt*ján E-nek és E torlódási pontjai halmazának az unióját értjük. Az E halmaz ∂E *határ*a az $\overline{E} \setminus E^\circ$ halmaz. Az E egy x pontját *izolált pont*nak nevezzük, ha x nem torlódási pontja E-nek. Az E-t *perfekt*nek nevezzük, ha zárt és nincs izolált pontja. Az E-t *sűrű*nek nevezzük, ha lezártja az egész X. Az E halmazt *sehol sem sűrű*nek nevezzük, ha lezártjának nincs belső pontja. Ha E előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként, akkor *első kategóriájú*nak nevezzük, egyébként pedig *második kategóriájú*nak.

Ezek a fogalmak ismertek a metrikus terek elméletében. A rájuk vonatkozó egyszerű állítások érvényben maradnak topologikus terekben is, és a bizonyítások is hasonlóak.

11.1.4. Definíció. Legyenek X és Y topologikus terek és $f : X \to Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az $x \in X$ pontban*, ha $f(x)$ minden V környezetéhez van olyan U környezete x-nek, amelyre $f(U) \subset V$. Azt mondjuk, hogy f folytonos X-en, ha f folytonos X minden pontjában. Egy függvény pontosan akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt. Folytonos függvények kompozíciója is folytonos.

11.1.5. Definíció. Legyenek X és Y topologikus terek és f egy X-et Y-ra képező kölcsönösen egyértelmű függvény. Ha f és f^{-1} is folytonos, akkor f-et *homeomorfizmus*nak nevezzük. Ha X és Y között létezik homeomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy X és Y *homeomorf*ak.

Használni fogjuk a következő, a folytonosságnál, sőt, az egyenletes folytonosságnál is erősebb fogalmat:

11.1.6. Definíció. Legyenek X és Y metrikus terek. Egy $f : X \to Y$ függvényt *Lipschitz-függvény*nek nevezünk, ha létezik olyan M valós szám, hogy

$$\operatorname{dist}\bigl(f(x), f(y)\bigr) \le M \operatorname{dist}(x, y)$$

bármely $x, y \in X$-re. Az M-re azt mondjuk, hogy *Lipschitz-konstans* f részére. Minden Lipschitz-függvényhez létezik egy legkisebb Lipschitz-konstans, amelyet $\operatorname{Lip}(f)$-fel jelölünk. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan Lipschitz függvény*, ha X minden pontjának van olyan V környezete, amelyre $f|V$ Lipschitz-függvény.

11.1.7. Definíció. Egy X topologikus tér egy A részhalmazát $\mathcal{F}_\sigma$*-halmaz*nak nevezzük, ha előáll megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként. Az X egy B részhalmazát $\mathcal{G}_\delta$*-halmaz*nak nevezzük, ha előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. A definícióból világos, hogy $\mathcal{F}_\sigma$-halmazok véges metszete és megszámlálható uniója is $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, valamint $\mathcal{G}_\delta$-halmazok véges uniója és megszámlálható metszete is $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

11.1.8. Tétel. *Metrikus térben minden nyílt halmaz $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz és minden zárt halmaz $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.*

Bizonyítás. Ha V nyílt halmaz, akkor

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigl\{x : x \in X, \operatorname{dist}(x, X \setminus V) \ge 1/n\bigr\}.$$

Hasonlóan, ha F zárt részhalmaza X-nek, akkor

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigl\{x : x \in X, \operatorname{dist}(x, F) < 1/n\bigr\}.$$

11.1.9. Definíció. Az X topologikus tér nyílt részhalmazainak egy $\mathcal{B}$ rendszerét a *topológia bázisá*nak nevezzük, ha minden nyílt halmaz előállítható $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Nyílt halmazok egy $\mathcal{S}$ rendszerét a *topológia szubbázisá*nak nevezzük, ha az $\mathcal{S}$-beli halmazok összes véges metszetei bázisát alkotják X topológiájának.

11.1.10. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{T})$ topologikus tér és $Y \subset X$. Ekkor Y topologikus tér lesz, ha topológiának a

$$\{V \cap Y : V \in \mathcal{T}\}$$

halmazrendszert választjuk. Ezt a topológiát Y *altértopológiá*jának nevezzük, Y-t pedig ezzel a topológiával X *alter*ének.

Metrizálható tér minden altere metrizálható: metrikának választhatjuk az X metrikájának $Y \times Y$-ra való megszorítását. Ezzel a metrikával Y-t az X *metrikus tér alter*ének nevezzük.

Ha mást nem mondunk, egy topologikus, illetve metrikus tér alterét mindig az altértopológiával, illetve az altérmetrikával látjuk el. Például az $[a, b]$, (a, b) stb. intervallumokat az $\mathbb{R}$, a $\mathbb{T} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ komplex egységkört a $\mathbb{C}$ altereként metrizáljuk és topologizáljuk.

11.1.11. Definíció. Legyen X_γ, $\gamma \in \Gamma$ topologikus terek egy rendszere, és legyen $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Legyen $\mathcal{S}$ az összes $\prod_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ alakú halmazok osztálya, ahol V_γ nyílt részhalmaza X_γ-nak minden $\gamma \in \Gamma$-ra, és legfeljebb egy olyan $\gamma_0 \in \Gamma$ létezik, amelyre $V_{\gamma_0} \neq X_{\gamma_0}$. Jelölje $\mathcal{B}$ az $\mathcal{S}$-beli halmazok véges metszeteként előálló halmazokat. Végül legyen $\mathcal{T}$ az X olyan részhalmazainak osztálya, amelyek előállnak $\mathcal{B}$-beli halmazok egyesítéseként. Ekkor $\mathcal{T}$ topológia X-en, amelyet az X *szorzattopológiá*jának nevezünk, X-et pedig ezzel a topológiával az X_γ, $\gamma \in \Gamma$ terek *szorzat*ának.

Észrevehetjük, hogy $\mathcal{S}$ szubbázisa, $\mathcal{B}$ pedig bázisa a szorzattopológiának, és hogy $\mathcal{S}$-ben pontosan a $p_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ alakú halmazok vannak, ahol V_γ tetszőleges nyílt részhalmaza X_γ-nak, $p_\gamma : (x) \mapsto x_\gamma$ pedig a γ-adik projekció.

Véges vagy megszámlálható sok metrizálható tér szorzata is metrizálható: ha d_i metrika X_i-n, $i = 1, 2, \dots$, akkor véges esetben a

$$\max_i d_i, \qquad \sum_i d_i \qquad \text{vagy} \qquad \sqrt{\textstyle\sum_i d_i^2}$$

metrikákat, végtelen esetben a

$$\sum_i \frac{1}{2^i}\frac{d_i}{1+d_i}$$

metrikát szokás választani. Látjuk, hogy a szorzattér metrikája nem egyértelmű, és még a tényezők sorrendjétől is függhet, de mindig a szorzattér topológiáját adja vissza.

→ **11.1.12. Feladat** [5]. Igaz-e, hogy egy topologikus tér egy alterének minden nyílt részhalmaza nyílt az eredeti térben, és minden zárt részhalmaza zárt az eredeti térben?

→ **11.1.13. Feladat** [6]. Legyen X metrikus tér, $A \subset X$. Mutassuk meg, hogy $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ Lipschitz-függvény és $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ pontosan akkor, ha $x \in \overline{A}$.

→ **11.1.14. Feladat** [5]. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}$ és $(0, 1)$, illetve $\overline{\mathbb{R}}$ és $[0, 1]$ homeomorfak.

→ **11.1.15. Feladat** [9]. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{T}$ terek között nincs két homeomorf.

11.1.16. Feladat [5]. Van-e olyan, nyílt intervallummal homeomorf térgörbe, amely értékkészletének lezártja az egész tér?

* **11.1.17. Feladat** [10]. Mutassuk meg, hogy teljes metrikus tér bármely nem üres perfekt részhalmaza tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt.

11.1.18. Feladat [5]. Igazoljuk, hogy egy halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a komplementere tartalmaz sűrű nyílt halmazt.

11.1.19. Feladat [7]. Bizonyítsuk be, hogy egy sehol sem sűrű halmaz minden részhalmaza és véges sok sehol sem sűrű halmaz egyesítése is sehol sem sűrű.

11.1.20. Feladat [6]. Mutassuk meg, hogy egy első kategóriájú halmaz minden részhalmaza és megszámlálható sok első kategóriájú halmaz egyesítése is első kategóriájú.

* **11.1.21. Feladat: Baire-tétel [13].** Bizonyítsuk be, hogy teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű, azaz teljes metrikus tér második kategóriájú.

* **11.1.22. Feladat [12].** Konstruáljunk a számegyenesen olyan egymással homeomorf A és B halmazokat, amelyekre A első, B második kategóriájú.

11.1.23. Feladat [10]. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$-ben $\mathcal{F}_\sigma$-halmaz, de nem $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

11.1.24. Feladat: oszcillációs függvény [9]. Legyenek X, Y metrikus terek és $f : X \to Y$. Legyen $\omega_f(x)$ a $\operatorname{diam}\bigl(f(V)\bigr)$ bővített valós számok infímuma, ahol V befutja x környezeteit. Az ω_f függvényt az f *oszcillációs függvény*ének nevezzük. Mutassuk meg, hogy f pontosan akkor folytonos az x pontban, ha $\omega_f(x) = 0$. Igazoljuk, hogy minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re az $\bigl\{x : x \in X, \omega_f(x) < \alpha\bigr\}$ halmaz nyílt.

11.1.25. Feladat [10]. Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvényt, amely pontosan az irracionális pontokban folytonos. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvény, amely pontosan a racionális pontokban folytonos.

* **11.1.26. Feladat [13].** Mutassuk meg, hogy egy (a, b) intervallumon differenciálható függvény deriváltjának folytonossági helyei mindenütt sűrűek (a, b)-ben.

11.2. Topologikus terek fajtái

11.2.1. Definíció. Egy X topologikus teret *Hausdorff-tér*nek nevezünk, ha bármely két különböző x, y pontja nyílt halmazzal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V diszjunkt nyílt halmazok, hogy $x \in U$ és $y \in V$. Az X Hausdorff-teret *reguláris*nak nevezzük, ha bármely F zárt halmaz és rajta kívül eső x pont nyílt halmazokkal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V nyílt, diszjunkt halmazok, hogy $F \subset U$ és $x \in V$. Egy Hausdorff-teret *teljesen reguláris*nak nevezünk, ha bármely F zárt részhalmaza és rajta kívül eső x pont folytonos függvénnyel szétválasztható, azaz létezik olyan $f : X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely az F halmazon 0-t, az x pontban pedig 1-et vesz fel értékként. Végül az X Hausdorff-teret *normális*nak nevezzük, ha bármely két diszjunkt zárt E, F részhalmaza nyílt halmazzal szétválasztható, azaz léteznek olyan U és V diszjunkt nyílt halmazok, amelyekre $E \subset U$ és $F \subset V$.

Mivel Hausdorff-térben az egyelemű halmazok zártak, minden normális tér egyben reguláris is. Ha az f függvény szétválasztja az F halmazt és az x pontot, akkor az $f^{-1}\bigl((-\infty, 1/2)\bigr)$ és $f^{-1}\bigl((1/2, \infty)\bigr)$ nyílt halmazok szétválasztják F-et és x-et, azaz teljesen reguláris tér egyben reguláris is. Nem világos azonban, hogy mi a kapcsolat a teljesen reguláris terek és a normális terek között, továbbá nem kapunk-e új térfajtát, ha azt követeljük meg, hogy bármely két diszjunkt zárt halmaz függvénnyel szétválasztható legyen. Mindkét kérdésre választ ad a következő tétel.

11.2.2. Uriszon-lemma. *Egy X normális topologikus tér bármely két diszjunkt E, F zárt részhalmazához létezik olyan $f : X \to [0,1]$ folytonos függvény, amely 0 az E minden pontjában, és 1 az F minden pontjában.*

Bizonyítás. Nyílt halmazok egy $V(r)$, $r \in R$ rendszerét fogjuk megkonstruálni, ahol R a $[0,1]$ diadikus racionális számainak halmaza, azaz

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : n = 0, 1, 2, \dots ; k = 0, 1, 2, \dots, 2^n \right\}.$$

Legyen $V(1) = X \setminus F$, és válasszunk egy $V(0)$ nyílt halmazt, amelyre $E \subset V(0)$ és $\overline{V(0)} \subset V(1)$. Indukciót használva tegyük fel, hogy egy n-re a $V(k/2^n)$ halmazok már meg vannak választva úgy, hogy $\overline{V(k/2^n)} \subset V\big((k+1)/2^n\big)$, ha $0 \le k < 2^n$ és minden $(2k+1)/2^{n+1}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ alakú diadikus racionális számhoz válasszunk egy $V\big((2k+1)/2^{n+1}\big)$ nyílt halmazt, amelyre

$$\overline{V(k/2^n)} \subset V\big((2k+1)/2^{n+1}\big) \quad \text{és} \quad \overline{V\big((2k+1)/2^{n+1}\big)} \subset V\big((k+1)/2^n\big).$$

Most legyen

$$f(x) = \inf\big\{1, r : r \in R, x \in V(r)\big\}, \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Megjegyezzük, hogy metrikus térben az állítás triviális, mert

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, E)}{\operatorname{dist}(x, E) + \operatorname{dist}(x, F)}$$

választható.

11.2.3. Definíció. Legyen X topologikus tér, A Abel-csoport és $f : X \to A$ egy függvény. Az f *tartóján* az $\operatorname{spt}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ halmazt értjük.

* **11.2.4. Az egység felbontása.** *Legyen X egy normális tér, F zárt részhalmaza X-nek, és $V_1, V_2, \dots, V_n$ nyílt részhalmazai X-nek úgy, hogy $F \subset \cup_{k=1}^n V_k$. Ekkor léteznek $h_k : X \to [0,1]$ folytonos függvények úgy, hogy*

(1) $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ *minden* $x \in F$*-re;*

(2) $\operatorname{spt}(h_k) \subset V_k$, *ha* $k = 1, 2, \dots, n$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Megmutatjuk, hogy az $A_1, \dots, A_n$ zárt halmazok megválaszthatók úgy, hogy $\cup_{k=1}^n A_k = X$ és $A_k \subset V_k$ teljesüljön. Az állítás nyilvánvaló, ha $n = 1$. Ha $n = 2$, válasszunk olyan W_1, W_2 diszjunkt nyílt halmazokat, amelyek az $X \setminus V_1$ és $X \setminus V_2$ diszjunkt zárt halmazokat elválasztják egymástól, és legyen $A_1 = X \setminus W_1$, $A_2 = X \setminus W_2$. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül $n-1$-re, és legyen $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Mivel $X = \big(\cup_{k=1}^{n-1} V_k\big) \cup V_n$, léteznek A és A_n zárt halmazok, amelyekre $A \subset \cup_{k=1}^{n-1} V_k$, $A_n \subset V_n$ és $A \cup A_n = X$. Most $k = 1, 2, \dots, n-1$-re legyen $W_k = V_k \cap A$. Az A zárt altérre alkalmazva az indukciós feltevést, olyan $A_1, \dots, A_{n-1}$ zárt halmazokat kapunk, amelyekre $\cup_{k=1}^n A_k = X$.

Először tegyük fel, hogy $F = X$. Ekkor $\cup_{k=1}^n V_k = X$. Ha az $A_1, \dots, A_n$ halmazok az előző lépés szerint vannak meghatározva, az Uriszon-lemma szerint léteznek olyan f_k :

$X \to [0,1]$ folytonos függvények, amelyekre $f_k(A_k) = 1$ és $\operatorname{spt}(f_k) \subset V_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Legyen

$$h_k(x) = \frac{f_k(x)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Végül, az általános esetben, legyen $V_0 = X \setminus F$ és alkalmazzuk az előző lépést. Mivel $h_0(F) = 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1, \quad \text{ha} \quad x \in F.$$

11.2.5. Tétel. *Metrizálható tér normális.*

Bizonyítás. Ha E és F nem üres, diszjunkt zárt halmazok, akkor legyen

$$U = \{x : x \in X, \operatorname{dist}(x, E) < \operatorname{dist}(x, F)\},$$
$$V = \{x : x \in X, \operatorname{dist}(x, F) < \operatorname{dist}(x, E)\}.$$

11.2.6. Definíció. Egy topologikus teret *megszámlálható bázisú*nak nevezünk, ha van megszámlálható bázisa. Nyilvánvaló, hogy megszámlálható bázisú tér minden altere is megszámlálható bázisú. A legegyszerűbb példa megszámlálható bázisú térre $\mathbb{R}$ a szokásos topológiával: a racionális végpontú nyílt intervallumok megszámlálható bázisát alkotják $\mathbb{R}$-nek.

Az $\mathbb{R}$ topológiájának egy speciális vonása, hogy bármely nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum egyesítéseként: ez a *nyílt halmazok struktúratétele*. Bizonyításához tekintsük egy adott nyílt halmaz olyan részintervallumait, amelyeknek végpontjai már nincsenek az adott nyílt halmazban. Ezek könnyen láthatóan diszjunktak, és legfeljebb megszámlálható sok ilyen intervallum van, mert mindegyik tartalmaz racionális számot.

11.2.7. Tétel. *Megszámlálható sok megszámlálható bázisú topologikus tér szorzata is megszámlálható bázisú.*

Bizonyítás. Legyen I egy megszámlálható halmaz és minden $i \in I$-re $\mathcal{B}_i$ az X_i tér egy megszámlálható bázisa. Ha $\mathcal{B}$ az összes olyan $V = \prod_{i \in I} V_i$ alakú halmazokból áll, amelyekre $V_i = X_i$ vagy $V_i \in \mathcal{B}_i$ és véges sok i kivételével az első eset áll fenn, akkor $\mathcal{B}$ az X egy megszámlálható bázisa.

11.2.8. Tétel. *Megszámlálható bázisú tér bármely bázisából kiválasztható megszámlálható bázis.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ egy tetszőleges bázisa X-nek, $\mathcal{B}'$ pedig egy megszámlálható bázisa X-nek. Minden olyan $B_1', B_2' \in \mathcal{B}'$ párhoz, amelyhez ez lehetséges, válasszunk ki egy $B^* \in \mathcal{B}$ halmazt, amelyre $B_1' \subset B^* \subset B_2'$. Ha $\mathcal{B}^*$ az így kiválasztott B^* nyílt halmazok rendszere, akkor $\mathcal{B}^*$ megszámlálható bázisa X-nek.

11.2.9. Definíció. Egy topologikus teret *szeparábilis*nak nevezünk, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza. Megszámlálható bázisú topologikus tér mindig szeparábilis: egy bázis minden eleméből választva egy pontot, sűrű halmazt kapunk. A megfordítás általában nem igaz, de metrizálható terekben igen: egy sűrű halmaz minden eleme körül véve az összes racionális sugarú nyílt gömböt, bázist kapunk.

11.2.10. Definíció. Egy topologikus teret *kompakt*nak nevezünk, ha minden nyílt lefedéséből kiválasztható véges lefedés. A topologikus tér egy *részhalmazát kompakt*nak nevezzük, ha mint altér, kompakt. Egy részhalmazt *σ-kompakt*nak nevezünk, ha előállítható megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítéseként. Egy *topologikus teret σ-kompakt*nak nevezünk, ha mint önmaga részhalmaza, σ-kompakt. Egy topologikus teret *lokálisan kompakt*nak nevezünk, ha minden pontjának van kompakt környezete. Az X topologikus téren értelmezett f függvényt *kompakt tartójú*nak nevezzük, ha $\operatorname{spt}(f)$ kompakt.

Halmazok egy rendszerét *centrált*nak szokás nevezni, ha a halmazrendszerből tetszés szerint választva véges sok halmazt, azoknak van közös pontja. Komplementerekre térve át következik, hogy egy topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha benne zárt halmazok bármely centrált rendszerének van közös pontja. Könnyű látni, hogy kompakt tér zárt részhalmaza is kompakt. Megfordítva, Hausdorff-tér kompakt részhalmaza zárt. Hasonlóan, σ-kompakt tér minden zárt részhalmaza σ-kompakt. Kompakt tér folytonos képe is kompakt. Ha f egy kompakt térnek egy Hausdorff-térbe való folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezése, akkor f homeomorfizmus. Emlékeztetünk a Heine–Borel-tételre: $\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n$ egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Ebből következik, hogy $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{C}^n$ lokálisan kompakt terek.

* **11.2.11. Alexander tétele.** *Legyen $\mathcal{S}$ egy szubbázisa az X tér topológiájának. Az X tér pontosan akkor kompakt, ha minden $\mathcal{S}$-beli halmazokból álló lefedéséből kiválasztható véges lefedés.*

Bizonyítás. A szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan nyílt halmazokból álló lefedés, amelyből nem választható ki véges lefedés. Tekintsük az ilyen lefedések rendszerét. Ez féligrendezett a tartalmazásra nézve, és benne minden lánc felülről korlátos, így a Zorn-lemma szerint tartalmaz egy $\mathcal{V}$ maximális lefedést. Legyen $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cap \mathcal{S}$. Ekkor $\mathcal{W}$ egyetlen véges részrendszere sem fedi le X-et, így $\mathcal{W}$ nem lehet lefedése X-nek. Legyen $x \in X \setminus (\cup\mathcal{W})$ és válasszunk egy $V \in \mathcal{V}$ halmazt, amely lefedi x-et. Mivel $\mathcal{S}$ szubbázis, léteznek $S_1, \dots, S_n$ halmazok $\mathcal{S}$-ből, amelyekre $x \in \cap_{j=1}^n S_j \subset V$. Mivel $x \notin \cup\mathcal{W}$, egyetlen S_j sincs a $\mathcal{V}$-ben. Mivel $\mathcal{V}$ maximális, minden j-re van egy olyan A_j halmaz, amely véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítése, és amelyre $S_j \cup A_j = X$. Innen

$$V \cup (\cup_{j=1}^n A_j) \supset (\cap_{j=1}^n S_j) \cup (\cup_{j=1}^n A_j) = X,$$

és így X előáll véges sok $\mathcal{V}$-beli halmaz egyesítéseként. Ez ellentmond $\mathcal{V}$ kiválasztásának.

* **11.2.12. Tyihonov tétele.** *Kompakt terek szorzata kompakt.*

Bizonyítás. Legyen $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ a szóban forgó szorzattér és legyen $\mathcal{S}$ ennek a 11.1.11. pontban leírt szubbázisa. Alexander tételét felhasználva, elég egy $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ lefedést vizsgálni. Legyen minden $\gamma \in \Gamma$-ra $\mathcal{U}_\gamma$ az összes olyan $U_\gamma \subset X_\gamma$ nyílt halmazok osztálya, amelyekre $p_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{U}$, ahol p_γ a γ-adik projekció. Megmutatjuk, hogy van olyan $\eta \in \Gamma$, amelyre $\cup\mathcal{U}_\eta = X_\eta$. Valóban, ha nem ez lenne a helyzet, akkor létezne olyan $x \in X$ pont, amely nem lenne $\cup\mathcal{U}$-ban. Mivel X_η kompakt, létezik véges sok $U_{\eta,1}, \dots, U_{\eta,n}$ halmaz $\mathcal{U}_\eta$-ban, amelyre $X_\eta = \cup_{j=1}^n U_{\eta,j}$. Nyilván $p_\eta^{-1}(U_{\eta,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$ egy véges lefedése X-nek.

Most megvizsgáljuk a kompaktság és lokális kompaktság kapcsolatát a szétválasztási tulajdonságokkal.

11.2.13. Tétel. *Kompakt Hausdorff-tér normális.*

Bizonyítás. Legyenek E és F diszjunkt zárt halmazok. Ha $x \in E$, $y \in F$, akkor léteznek $U_{x,y}$ és $V_{x,y}$ nyílt halmazok úgy, hogy $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Mivel E kompakt, minden $y \in F$-re létezik véges sok $x_1, \dots, x_n$, hogy $U_y = \cup_{i=1}^n U_{x_i,y}$ lefedi E-t. Nyilván U_y a $V_y = \cap_{i=1}^n V_{x_i,y}$ halmazba nem metsz bele. Most F kompaktságát felhasználva, létezik $y_1, \dots, y_m$, hogy $V = \cup_{j=1}^m V_{y_j}$ lefedi F-et. Nyilván V az $U = \cap_{j=1}^m U_{y_j}$ halmazba nem metsz bele.

Lokálisan kompakt Hausdorff-tér általában nem normális, de teljesen reguláris, mert igaz az Uriszon-lemma alábbi változata.

11.2.14. Tétel. *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt részhalmaza X-nek, F egy K-tól diszjunkt zárt részhalmaza X-nek. Ekkor létezik olyan $f : X \mapsto [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $f(K) = 1$ és $f(F) = 0$.*

Bizonyítás. Minden $x \in K$-hoz válasszunk egy olyan V_x kompakt lezártú nyílt környezetét x-nek, amely része $X \setminus F$-nek. Kiválasztva a V_x, $x \in K$ lefedésből egy véges részlefedést, és ennek unióját V-vel jelölve, V nyílt, lezártja kompakt, és $K \subset V \subset X \setminus F$. A $\overline{V}$ kompakt Hausdorff-térben egy g folytonos függvénnyel szétválasztva a K és a ∂V zárt halmazokat, legyen

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ha } x \in \overline{V}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A következő tétel az egység felbontásának lokálisan kompakt Hausdorff-terekre vonatkozó változata.

* **11.2.15. Tétel.** *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt részhalmaza X-nek, $V_1, \dots, V_n$ pedig nyílt halmazok úgy, hogy $K \subset \cup_{k=1}^n V_k$. Ekkor léteznek $h_k : X \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvények úgy, hogy*

(1) $\sum_{k=1}^n h_k(x) = 1$ *minden $x \in K$-ra;*

(2) $\operatorname{spt}(h_k) \subset V_k$, *ha $k = 1, 2, \dots, n$.*

Bizonyítás. Válasszunk egy V kompakt lezártú nyílt halmazt, amelyre

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset \cup_{k=1}^n V_k$$

és alkalmazzuk az egység felbontását a $\overline{V}$ normális tér zárt részhalmazára és $V \cap V_k$ nyílt részhalmazaira, majd a kapott függvényeket terjesszük ki $X \setminus V$-re úgy, hogy ott nullák legyenek.

11.2.16. Tétel. *Lokálisan kompakt megszámlálható bázisú Hausdorff-térben minden nyílt halmaz σ-kompakt.*

Bizonyítás. Válasszunk X-ben egy kompakt lezártú nyílt halmazokból álló megszámlálható bázist. Ha V nyílt részhalmaza X-nek, akkor

$$V = \cup\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}, \overline{B} \subset V\}.$$

* **11.2.17. Topologikus csoportok.** Topologikus algebrai struktúrák definiálásának alapgondolata, hogy megköveteljük a műveletek folytonosságát. Egy *topologikus csoport* egy olyan G csoport, amely egyben topologikus tér is, úgy, hogy a szorzás, azaz az $(x, y) \mapsto xy$ leképezése $G \times G$-nek G-be, és az inverzképzés, azaz az $x \mapsto x^{-1}$ leképezése G-nek G-be folytonosak. Minden csoportelméleti és topológiai fogalmat használhatunk topologikus csoportokra is, így például beszélhetünk kommutatív, Hausdorff-, lokálisan kompakt stb. topologikus csoportokról.

A szorzás folytonossága miatt rögzített $a \in G$ esetén az $x \mapsto ax$ és $x \mapsto xa$ bal, illetve jobb eltolások is folytonosak. Mivel az inverzeik is hasonló leképezések, a bal és jobb eltolások és az inverzképzés homeomorfizmusok. Ha $A, B \subset G$ és B nyílt, akkor AB és BA nyíltak, mert aB, illetve Ba alakú nyílt halmazok egyesítései. Ha A és B kompaktak, akkor AB is kompakt, mert a szorzás az $A \times B$ kompakt halmazt erre a halmazra képezi.

Az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelem olyan V környezetét, amelyre $V^2 \subset U$; valóban a szorzás folytonossága miatt léteznek olyan V_1, V_2 környezetei az egységelemnek, amelyekre $V_1 V_2 \subset U$, így $V = V_1 \cap V_2$ választható. Egy $A \subset G$ halmazt *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $A = A^{-1}$. Az egységelem bármely U környezete tartalmazza az egységelem egy V szimmetrikus környezetét: legyen $V = U \cap U^{-1}$.

A legfontosabb példák topologikus csoportokra $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ és egyéb normált terek additív csoportjai, a $\mathbb{T}$ multiplikatív csoport, egy Banach-tér vagy egy Hilbert-tér lineáris homeomorfizmusainak csoportja és ennek különböző részcsoportjai (az unitér operátorok csoportja, véges dimenzióban az egy determinánsú operátorok csoportja stb.), ezek metrizálhatók.

Topologikus csoportokkal kapcsolatban Bourbaki [3] művének II. könyve tartalmazza az alapfogalmakat.

* **11.2.18. Tétel.** *Legyen G topologikus csoport, C kompakt részhalmaza G-nek, U pedig egy C-t tartalmazó nyílt halmaz. Ekkor létezik az egységelemnek olyan V nyílt környezete, amelyre $CV \subset U$ és $VC \subset U$.*

Bizonyítás. Minden $x \in C$-hez léteznek olyan W_x és V_x nyílt környezetei az egységelemnek, amelyekre $V_x^2 \subset W_x$ és $xW_x \subset U$. Mivel az xV_x, $x \in C$ halmazok lefedik C-t, léteznek $x_1, \dots, x_n \in C$, hogy $C \subset \cup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Innen $V = \cap_{k=1}^n V_{x_k}$-ra

$$CV \subset \cup_{k=1}^n (x_k V_{x_k} V) \subset \cup_{k=1}^n (x_k W_{x_k}) \subset U.$$

A másik eset hasonló, és a kapott két halmaz metszetét vesszük.

* **11.2.19. Következmény.** *Ha G Hausdorff topologikus csoport, C_1, C_2 diszjunkt kompakt részhalmazai G-nek, akkor van olyan U szimmetrikus nyílt környezete az egységelemnek, amelyre $(C_1U) \cap (C_2U) = \emptyset$ és $(UC_1) \cap (UC_2) = \emptyset$.*

Bizonyítás. Válasszunk olyan V_1, V_2 nyílt környezeteit az egységelemnek, amelyekre $(C_1V_1) \cap C_2 = \emptyset$ és $(C_2V_2) \cap C_1 = \emptyset$. Legyen W olyan környezete az egységelemnek, amelyre $W^2 \subset V_1 \cap V_2$ és legyen $U = W \cap W^{-1}$, erre $(C_1U) \cap (C_2U) = \emptyset$. A másik eset hasonló, és a kapott két halmaz metszetét vesszük.

A továbbiakban metrikus terek kompaktságával foglalkozunk.

11.2.20. Definíció. Legyen X egy metrikus tér, és $\varepsilon > 0$. Azt mondjuk, hogy $H \subset X$ egy *ε-háló X-ben*, ha az $\mathbb{U}(x, \varepsilon)$, $x \in H$ gömbök rendszere lefedi X-et. Egy metrikus teret *teljesen korlátos*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-ra tartalmaz véges ε-hálót.

11.2.21. Tétel. *Ha (X, d) metrikus tér, akkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *X kompakt;*

(2) *X teljes és teljesen korlátos;*

(3) *bármely X-beli sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X kompakt. Ha egy x_n, $n = 1, 2, \dots$ sorozatnak nem lenne konvergens részsorozata, akkor az $U_n = X \setminus \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ nyílt halmazok olyan lefedését alkotnák X-nek, amelynek nem lenne véges részlefedése.

Tegyük fel, hogy bármely X-beli sorozatnak van konvergens részsorozata. Ekkor X teljes, mivel bármely metrikus térben, ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens. Ha X nem lenne teljesen korlátos, akkor valamely $\varepsilon > 0$-ra indukcióval kiválaszthatnánk egy olyan x_n, $n = 1, 2, \dots$ sorozatot, amelyre $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, ha $i \neq j$. Ez ellentmond (3)-nak.

Végül tegyük fel, hogy X teljes és teljesen korlátos, de van olyan nyílt lefedése, amelyből nem választható ki véges részlefedés. Felhasználva, hogy X teljesen korlátos, válasszunk olyan $\mathbb{B}(x_1, 1/2)$ gömböt, amely nem fedhető le véges sok V_γ, $\gamma \in \Gamma$-beli halmazzal. Teljes indukcióval folytatva, válasszunk olyan $\mathbb{B}(x_n, 1/2^n)$, $n = 1, 2, \dots$ gömböket, amelyek egyike sem fedhető le V_γ, $\gamma \in \Gamma$ egyetlen véges részrendszerével sem, továbbá

$$\mathbb{B}(x_{n-1}, 1/2^{n-1}) \cap \mathbb{B}(x_n, 1/2^n) \neq \emptyset.$$

Ekkor

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

így ha $n < m$, akkor

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Ez azt jelenti, hogy x_n, $n = 1, 2, \dots$ Cauchy-sorozat. Legyen $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Mivel $x \in V_\eta$ valamely $\eta \in \Gamma$-ra és V_η nyílt, elég nagy n-re $\mathbb{B}(x_n, 1/2^n) \subset V_\eta$, ami ellentmondás.

11.2.22. Definíció. Egy valós vagy komplex lineáris tér egy C részhalmazát *konvexnek* nevezzük, ha $x, y \in C$, $0 < \alpha < 1$ esetén $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. Egy A halmaz $\operatorname{conv}(A)$ *konvex burkán* az összes, A-t tartalmazó konvex halmazok metszetét értjük. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$\operatorname{conv}(A) = \big\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}^+,\ x_i \in A,\ 0 \le \alpha_i \le 1,\ \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\big\}.$$

A továbbiakban egy speciális kérdéssel foglalkozunk, $\mathbb{R}^n$ kompakt részhalmazai között értelmezünk távolságot.

11.2.23. Definíció. Jelölje $\mathcal{F}$ az $\mathbb{R}^n$ összes nem üres kompakt részhalmazainak osztályát. Ha $C, D \in \mathcal{F}$, értelmezzük a C és D halmazok $d(C, D)$ *Hausdorff-távolságát*, mint a $\sup\{\operatorname{dist}(x, C) : x \in D\}$ és $\sup\{\operatorname{dist}(x, D) : x \in C\}$ számok nagyobbikát.

* **11.2.24. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel*

(1) *$\mathcal{F}$ teljes metrikus tér d-vel;*

(2) *ha $a \in \mathbb{R}^n$ és $0 < r < \infty$, akkor az $\mathcal{F}_{a,r} = \big\{C : C \in \mathcal{F}, C \subset \mathbb{B}(a, r)\big\}$ halmazok kompaktak $\mathcal{F}$-ben;*

(3) *a nem üres kompakt konvex halmazok zárt alteret alkotnak $\mathcal{F}$-ben;*

(4) *$C \mapsto \operatorname{diam}(C)$ folytonos függvény $\mathcal{F}$-en.*

Bizonyítás. A metrikus tér axiómái egyszerű számolással adódnak. Ha C_i, $i = 1, 2, \dots$ egy Cauchy-sorozat $\mathcal{F}$-ben, akkor legyen $C = \cap_{i=1}^\infty \overline{\cup_{j=i}^\infty C_j}$. Megmutatjuk, hogy $d(C_i, C) \to 0$, ha $i \to \infty$. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk egy olyan i-t, amelyre $d(C_s, C_t) < \varepsilon/2$, ha $s, t \ge i$. Ha $x \in C$, akkor $x \in \overline{\cup_{j=i}^\infty C_j}$, így van olyan $s \ge i$, amelyre $\operatorname{dist}(x, C_s) < \varepsilon/2$. Mivel $d(C_s, C_t) < \varepsilon/2$, ha $s, t \ge i$, $\operatorname{dist}(x, C_t) \le \varepsilon$, ha $t \ge i$. Ha most $x \in C_t$, akkor a $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \overline{\cup_{j=s}^\infty C_j}$ kompakt halmazok nem üresek egyetlen s-re sem. Ebből $\operatorname{dist}(x, C) \le \varepsilon$, ha $t \ge i$.

(2) bizonyításához, mivel $\mathcal{F}_{a,r}$ nyilván zárt részhalmaza $\mathcal{F}$-nek, elég megmutatnunk, hogy teljesen korlátos. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\mathbb{B}(a, r)$ kompakt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, így teljesen korlátos, azaz van $Z \subset \mathbb{B}(a, r)$ véges ε-háló $\mathbb{B}(a, r)$-hez. Megmutatjuk, hogy Z összes nem üres részhalmazai ε-hálót alkotnak $\mathcal{F}_{a,r}$-hez . Valóban, ha $C \in \mathcal{F}_{a,r}$ és $Z_C = \big\{z : z \in Z, \mathbb{B}(z, \varepsilon) \cap C \ne \emptyset\big\}$, akkor $d(C, Z_C) \le \varepsilon$.

(3) bizonyításához, legyen $C \in \mathcal{F}$ és tegyük fel, hogy nem konvex. Ekkor létezik $x, y \in \mathbb{C}$ és $0 < \alpha < 1$, hogy $z = \alpha x + (1-\alpha)y \notin C$. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t, amelyre $\mathbb{B}(z, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Ha most $D \in \mathcal{F}$, $d(C, D) < \varepsilon/3$, akkor léteznek $x', y' \in D$, amelyekre $|x - x'| < \varepsilon/3$ és $|y - y'| < \varepsilon/3$. Ha $z' = \alpha x' + (1-\alpha)y'$, akkor $|z - z'| < \varepsilon/3$, így $\mathbb{B}(z', \varepsilon/3) \cap D \ne \emptyset$, azaz D nem konvex.

Végül, ha $C, D \in \mathcal{F}$, $d(C, D) \le \varepsilon$, akkor

$$|x - y| \le \operatorname{dist}(x, D) + \operatorname{diam}(D) + \operatorname{dist}(y, D) \le \operatorname{diam}(D) + 2\varepsilon,$$

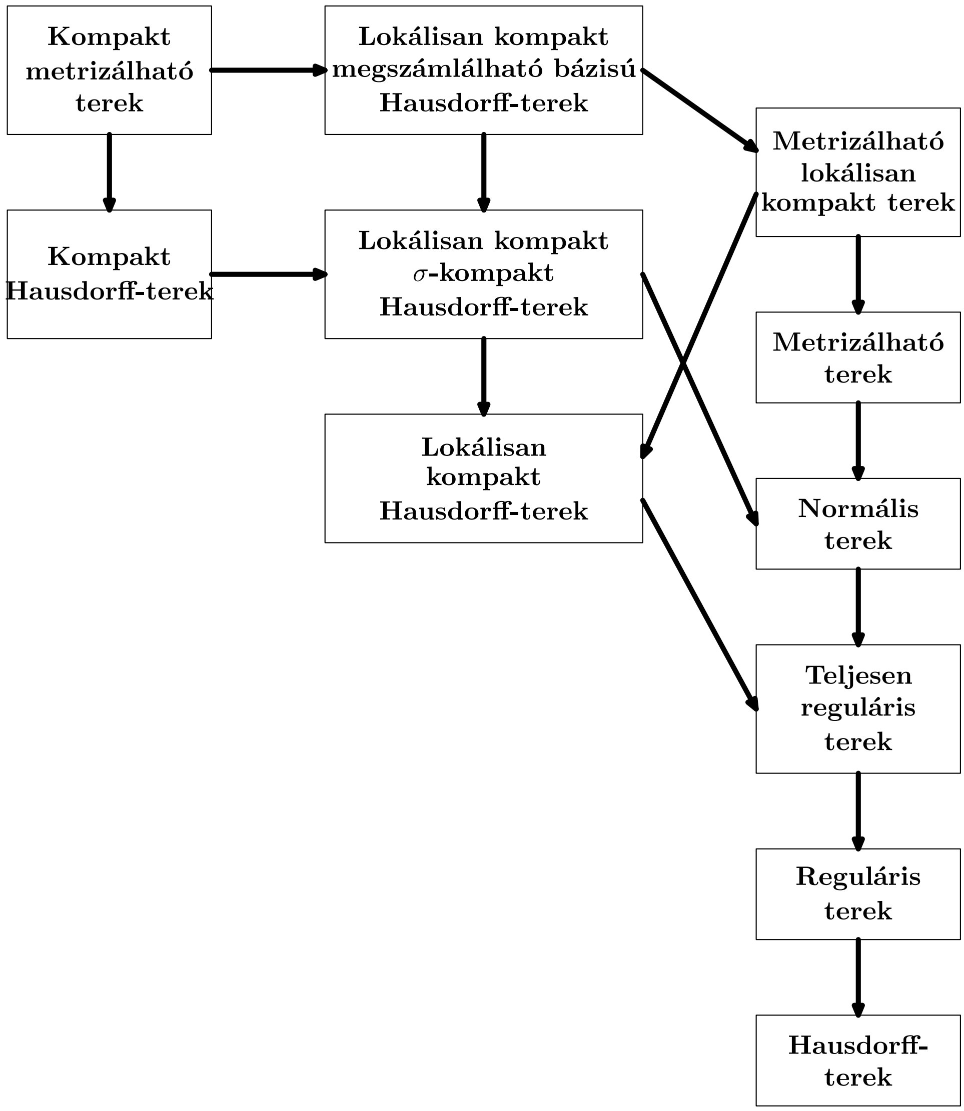
ha $x, y \in C$, amiből $\operatorname{diam}(C) \le \operatorname{diam}(D) + 2\varepsilon$. A C és D szerepének felcserélésével,

$$\big|\operatorname{diam}(C) - \operatorname{diam}(D)\big| \le 2\varepsilon,$$

ami (4)-et bizonyítja.

* **11.2.25. Feladat [15].** Mutassuk meg, hogy szeparábilis metrikus tér bármely zárt részhalmaza előáll egy megszámlálható és egy perfekt halmaz egyesítéseként.

11.2.26. Összefüggések a topologikus terek fontosabb fajtái között.



11.3. Normált terek

Ebben a pontban normált terekkel foglalkozunk. Ahogyan a topologikus terek, illetve a metrikus terek arra alkalmasak, hogy a klasszikus analízis határértékkel és folytonossággal, illetve Cauchy-sorozatokkal és egyenletes folytonossággal kapcsolatos fogalmait és tételeit kellően általánosítva széles körben alkalmazhatóvá tegyék, a normált terek elmélete a klasszikus analízis lineáris algebrával is kapcsolatos módszereinek, a végtelen sorok, függvénysorok és sorozatok, valamint a differenciálszámítás eszközeinek széles körű alkalmazását teszi lehetővé az analízisben. Az alábbiakban csak néhány alapfogalmat érintünk. Mivel a komplex és valós esetet egyszerre szeretnénk tárgyalni, célszerű bevezetni a következő jelölést: $\mathbb{K}$ jelenti $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t.

11.3.1. Definíció. A lineáris tér fogalmát a szokásos értelemben használjuk. Mindig $\mathbb{K}$ feletti lineáris terekkel dolgozunk, ahol $\mathbb{K}$ az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ testek közül az egyiket jelenti. A felhasznált lineáris algebrai fogalmak és tételek megtalálhatók Halmos [14] könyvében. Általában nem tesszük fel, hogy a tér véges dimenziós. Ennek megfelelően *lineáris operátor*on egy olyan A leképezést értünk, amely egy $\mathbb{K}$ feletti X lineáris teret egy ugyancsak $\mathbb{K}$ feletti Y lineáris térbe képez le, és amelyre teljesül, hogy $A(\alpha x+\beta y) = \alpha A(x)+\beta A(y)$ minden $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$-ra. Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor *lineáris funkcionál*ról beszélünk.

11.3.2. Definíció. Legyen X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését X-nek $[0, \infty]$-be *félnormá*nak nevezzük, ha

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ minden $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$-ra (*abszolút érték homogén*, itt $0 \cdot \infty = 0$);

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$-re (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha még az is teljesül, hogy

(3) $0 < \|x\| < \infty$, ha $0 \neq x \in X$,

akkor a leképezést *normá*nak, az $(X, \|\ \|)$ párt pedig *normált tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Megjegyezzük, hogy $\|\ \|$ helyett az $|\ |$ jelölés is szokásos. Egy félnormált térben $\{x : x \in X, \|x\| < \infty\}$ lineáris altér, és ezen az altéren a félnorma véges. Ha a félnorma véges, akkor a tér mindig normált térré tehető, ha azokat az elemeket, amelyek különbségének félnormája nulla, egy osztályba sorolva azonosítjuk. Félnormált téren $d(x, y) = \|x - y\|$ eltérés. Az így definiált eltérésre $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$) és $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, ha $x, y, z \in X$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, azaz az eltérés *abszolút érték homogén* és *eltolásinvariáns*. Ha normából indulunk ki, akkor metrikát kapunk. Így normált térben használni fogunk minden olyan fogalmat, amelyet metrikus térben vagy topologikus térben definiáltunk. Ilyenkor mindig a normából származó metrikára és az ebből a metrikából származó topológiára gondolunk.

11.3.3. Definíció. Egy normált teret *Banach-tér*nek nevezünk, ha teljes. A legegyszerűbb példák Banach-térre $\mathbb{R}$ felett $\mathbb{R}^n$, illetve $\mathbb{C}$ felett $\mathbb{C}^n$ az $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}$ normával.

11.3.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\mathbb{K}$ feletti X normált tér *normált algebra* $\mathbb{K}$ felett, ha X elemei között értelmezve van egy szorzás, X ezzel a szorzással, az összeadással és a skalárszorzással algebra $\mathbb{K}$ felett, továbbá $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ minden $x, y \in X$-re. Ha X még teljes is, akkor *Banach-algebrá*ról beszélünk.

Fontos példák normált terekre a függvényterek. Tekinthetünk valós és komplex értékű függvényeket is: az első esetben valós, a másodikban komplex normált tereket kapunk. Az $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ indexszel jelöljük, hogy melyik esetre gondolunk. Ha a szövegösszefüggésből világos, hogy melyik esetről van szó, akkor nem tesszük ki az indexet.

11.3.5. Definíció. Legyen X egy halmaz. Legyen az $f : X \to \mathbb{K}$ függvényre $\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Az összes olyan $f : X \to \mathbb{K}$ függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_u < \infty$, jelölje $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ (*korlátos függvények tere*).

11.3.6. Tétel. *Bármely X halmazra $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra a függvények pontonkénti összeadásával, szorzásával és skalárral való szorzásával, valamint a $\| \ \|_u$ normával.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

11.3.7. Definíció. Legyen X topologikus tér, és jelölje $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ a $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$-beli folytonos függvények halmazát (*korlátos folytonos függvények tere*).

11.3.8. Tétel. *Bármely X topologikus térre $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra a függvények pontonkénti szorzásával, összeadásával és skalárral való szorzásával, valamint a $\| \ \|_u$ normával.*

Bizonyítás. Egyszerű számolás.

Valahányszor a $\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(X)$, illetve $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ terekről beszélünk, ezekre a műveletekre és erre a normára gondolunk, hacsak kifejezetten mást nem mondunk. Az ebből a normából származó konvergencia a függvények egyenletes (uniform) konvergenciája, ezért ezt a normát *uniform normá*nak szokás nevezni.

A következő néhány tételben $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű részhalmazaival foglalkozunk abban a speciális esetben, amikor X kompakt Hausdorff-tér.

* **11.3.9. Definíció.** Legyenek X és Y halmazok és $\mathcal{H}$ az X-et Y-ba képező függvények egy rendszere. Azt mondjuk, hogy *$\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait*, ha bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén van olyan $h \in \mathcal{H}$ függvény, amelyre $h(x) \neq h(y)$.

* **11.3.10. Stone tétele.** *Legyen X kompakt Hausdorff-tér és $\mathcal{H}$ olyan lineáris altere $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-nek, amelyre*

(1) *a konstans függvények $\mathcal{H}$-ban vannak;*

(2) *ha $u \in \mathcal{H}$, akkor $|u| \in \mathcal{H}$;*

(3) *$\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait.*

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-ben.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy $\mathcal{H}$ zárt a maximum és minimum képzésére. Valóban, $\max(u, v) = \big(u + v + |u - v|\big)/2$ és $\min(u, v) = \big(u + v - |u - v|\big)/2$. Másrészt, bármilyen $x, y \in X$, $x \neq y$-hoz és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-hez létezik olyan $u \in \mathcal{H}$ függvény, hogy $u(x) = \alpha$ és $u(y) = \beta$. Valóban, (3) szerint létezik olyan $h \in \mathcal{H}$ függvény, amelyre $h(x) \neq h(y)$. Legyen

$$u(z) = \alpha + (\beta - \alpha)\frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)}, \quad \text{ha} \quad z \in X.$$

Most legyen $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ és $\varepsilon > 0$. Minden $x, y \in X$ párhoz válasszunk egy olyan $u_{x,y} \in \mathcal{H}$ függvényt, amelyre $\left|f(x) - u_{x,y}(x)\right| < \varepsilon$ és $\left|f(y) - u_{x,y}(y)\right| < \varepsilon$. Bármely rögzített $y \in X$-re az

$$U_{x,y} = \left\{z : u_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\right\}, \quad x \in X$$

nyílt halmazok lefedik X-et, így léteznek $x_1, \ldots, x_n$ pontok, amelyekre $\cup_{i=1}^n U_{x_i,y} = X$. Legyen

$$v_y = \min(u_{x_1,y}, \ldots, u_{x_n,y}) \in \mathcal{H}.$$

Ekkor $v_y(z) < f(z) + \varepsilon$ minden $z \in X$-re és $v_y(y) > f(y) - \varepsilon$. Most a

$$V_y = \left\{z : v_y(z) > f(z) - \varepsilon\right\}, \quad y \in X$$

nyílt halmazok lefedik X-et, így léteznek $y_1, \ldots, y_m$, hogy $\cup_{j=1}^m V_{y_j} = X$. Legyen $g = \max(v_{y_1}, \ldots, v_{y_m}) \in \mathcal{H}$. Ekkor $f(z) - \varepsilon < g(z) < f(z) + \varepsilon$, és ezt kellett bizonyítani.

* **11.3.11. Lemma.** *Minden $\varepsilon > 0$-hoz és $c > 0$-hoz van olyan valós együtthatós p polinom, amelyre $\left|p(t) - |t|\right| \leq \varepsilon$, ha $t \in [-c, c]$.*

Bizonyítás. Mivel t helyébe ct-t írhatunk, elég a $c = 1$ esetre szorítkozni. Mivel $|t| = \sqrt{t^2}$, elég megmutatni, hogy $\sqrt{t}$ a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen approximálható polinomokkal.

Legyen $p_0(t) \equiv 0$ és indukcióval legyen

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - p_n^2(t)\big), \tag{1}$$

ha $n \geq 0$. Megmutatjuk, hogy

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}, \quad \text{ha} \quad t \in [0, 1], \tag{2}$$

amiből következik, hogy

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad t \in [0, 1].$$

Ha $n = 0$, akkor (2) triviális. Tegyük fel, hogy n-re teljesül (2), akkor

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t},$$

amiből $0 \le p_n(t) \le \sqrt{t}$. Az (1) képlet szerint innen

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + p_n(t)\right)\right),$$

ahonnan $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \ge 0$ és (2) szerint

$$\begin{aligned}\sqrt{t} - p_{n+1}(t) &\le \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2}\right)\\ &\le \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}}\left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}}{2+(n+1)\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

* **11.3.12. Weierstrass–Stone-tétel.** *Legyen X kompakt Hausdorff-tér, és $\mathcal{H}$ egy részalgebrája $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-nek, amely*

(1) *tartalmazza az azonosan 1 függvényt;*

(2) *szétválasztja X pontjait.*

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-ben.

Bizonyítás. Tekintsük $\mathcal{H}$ lezártját. Ha megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{\mathcal{H}}$-ra $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$, akkor Stone tétele szerint készen vagyunk. Bármely $\varepsilon > 0$-ra és $c = \|f\|_u$-ra az előző lemma szerint választható olyan p polinom, amelyre $\big|p(t) - |t|\big| \le \varepsilon$, ha $t \in [-c, c]$. De ekkor $\big\|p \circ f - |f|\big\|_u \le \varepsilon$ és mivel $\overline{\mathcal{H}}$ maga is algebra, $p \circ f \in \overline{\mathcal{H}}$, azaz $|f| \in \overline{\mathcal{H}}$.

A fenti tételből úgy kaphatjuk meg Weierstrass klasszikus, a folytonos függvényeknek polinomokkal való egyenletes approximálhatóságát kimondó tételét, hogy X-et $\mathbb{R}$ egy kompakt intervallumának, $\mathcal{H}$-t pedig a polinomok algebrájának választjuk.

* **11.3.13. A Weierstrass–Stone-tétel komplex változata.** *Legyen X kompakt Hausdorff-tér, és $\mathcal{H}$ a $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$ egy komplex részalgebrája. Tegyük fel, hogy*

(1) *$\mathcal{H}$ tartalmazza az azonosan 1 függvényt;*

(2) *$\mathcal{H}$ szétválasztja X pontjait;*

(3) *ha $f \in \mathcal{H}$, akkor $\overline{f} \in \mathcal{H}$.*

Ekkor $\mathcal{H}$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$-ben.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Mivel $\Re f = (f + \overline{f})/2$ és $\Im f = (f - \overline{f})/2$, kapjuk, hogy $\mathcal{H}_0$ eleget tesz az előző tétel feltételeinek. Ebből $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + i\mathcal{H}_0$ sűrű $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X)$-ben.

A folytonos függvények egyenletes konvergenciáját felhasználjuk egy fontos topológiai tétel bizonyítására.

* **11.3.14. Tietze tétele.** *Legyen F az X normális topologikus tér nem üres zárt részhalmaza, és $f : X \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $g : X \to \mathbb{R}$ folytonos kiterjesztése f-nek, amelyre*

(1) $\inf\{f(x) : x \in F\} = \inf\{g(x) : x \in X\}$
és
(2) $\sup\{f(x) : x \in F\} = \sup\{g(x) : x \in X\}$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\operatorname{rng} f \subset [-1, 1]$. Legyen

$$A_1 = f^{-1}[-1, -1/3] \quad \text{és} \quad B_1 = f^{-1}[1/3, 1].$$

Az A_1 és B_1 halmazok zárt részhalmazai X-nek, így az Uriszon-lemma szerint van olyan $h_1 : X \to [-1/3, 1/3]$ folytonos függvény, amelyre $h_1(A_1) = -1/3$ és $h_1(B_1) = 1/3$. Legyen $g_1 = h_1$. Ekkor $|f(x) - g_1(x)| \leq 2/3$, ha $x \in F$ és $\operatorname{dmn} g_1 \subset [-1/3, 1/3]$. Teljes indukcióval tegyük fel, hogy $h_1, \dots, h_n$ és $g_1, \dots, g_n$ folytonos függvényeket már megkonstruáltuk úgy, hogy

(3) $h_i : X \to [-2^{i-1}/3^i, 2^{i-1}/3^i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(4) $g_{i+1} = g_i + h_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$;

(5) $g_i : X \to \left[-1 + (2/3)^i, 1 - (2/3)^i\right]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$;

(6) $|f(x) - g_i(x)| \leq (2/3)^i$, ha $x \in F$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Tekintsük az $u_{n+1}(x) = f(x) - g_n(x)$, ha $x \in F$ függvényt, és legyen

$$A_{n+1} = u_{n+1}^{-1}\left[-\frac{2^n}{3^n}, -\frac{2^n}{3^{n+1}}\right], \qquad B_{n+1} = u_{n+1}^{-1}\left[\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^n}\right].$$

Választva az Uriszon-lemma szerint egy $h_{n+1} : X \to [-2^n/3^{n+1}, 2^n/3^{n+1}]$ folytonos függvényt, amelyre

$$h_{n+1}(A_{n+1}) = -\frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad h_{n+1}(B_{n+1}) = \frac{2^n}{3^{n+1}},$$

kapjuk az indukciós feltevést $n+1$-re. Mivel (3) és (4) szerint a g_n, $n = 1, 2, \dots$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$-ben, g_n egyenletesen konvergál egy $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ függvényhez. (5) miatt $\operatorname{rng} g \subset [-1, 1]$, és (6) szerint g kiterjesztése f-nek.

Vegyük észre, hogy, mivel $[-1, 1]$ homeomorf $\overline{\mathbb{R}}$-sal, az előző lépés alkalmazható az általános esetben is, de a kapott g függvény bővített valós értékű lesz, és nem tesz eleget az (1) és (2) feltételeknek. Az utóbbin könnyen segíthetünk, ha $a = \inf\{f(x) : x \in F\} > -\infty$ esetén g helyett $\max(g, a)$-t, $b = \sup\{f(x) : x \in F\} < \infty$ esetén pedig g helyett $\min(b, g)$-t vesszük. Ha g nem valós értékeket is felvesz, akkor a következőt tehetjük: Legyen $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, ha $x \in F$. Az f^+ függvényre alkalmazva az eddigieket, egy $g_1^+ : X \to [0, \infty]$ folytonos kiterjesztését kapjuk f^+-nak. Legyen $E^+ = (g_1^+)^{-1}(\infty)$. Alkalmazva az eddig bizonyítottakat arra a folytonos függvényre, amely F-en f^+-szal, E^+-on pedig 0-val egyezik meg, annak egy X-re való $[0, \infty]$-beli értékű folytonos g_2^+ kiterjesztését kapjuk. A $g^+ = \min(g_1^+, g_2^+)$ függvény így olyan folytonos kiterjesztése f^+-nak, amely már $[0, \infty)$-beli értékű. Hasonlóan eljárva kapjuk az $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, ha $x \in F$ függvény egy $[0, \infty)$-beli értékű g^- folytonos kiterjesztését. Most legyen $g = g^+ - g^-$.

* **11.3.15. Következmény.** *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, K kompakt, nem üres részhalmaza X-nek, és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $g : X \to \mathbb{R}$ kiterjesztése f-nek, amely kompakt tartójú folytonos függvény, és*

$$\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \sup\{|g(x)| : x \in X\}.$$

Bizonyítás. Válasszunk egy olyan V kompakt lezártú nyílt halmazt, amely tartalmazza K-t. Azt a függvényt, amely K-n f-fel, ∂V-n 0-val egyezik meg, terjesszük ki folytonosan a $\overline{V}$ normális térre, majd $\overline{V}$-on kívül definiáljuk nullának.

11.3.16. Definíció. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Azt mondjuk, hogy egy $f : X \to \mathbb{K}$ függvény *eltűnik a végtelenben*, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan K kompakt részhalmaza X-nek, hogy $\bigl|f(x)\bigr| \le \varepsilon$, ha $x \in X \setminus K$. Az összes, X-et $\mathbb{K}$-ba képező, folytonos, végtelenben eltűnő függvények halmazát jelölje $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$. Az összes, X-et $\mathbb{K}$-ba képező folytonos, kompakt tartójú függvények halmazát jelölje $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$.

11.3.17. Tétel. *Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér. Ekkor $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ Banach-algebra, $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ pedig sűrű normált részalgebrája $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$-nek $\mathbb{K}$ felett a függvények pontonkénti összeadásával, szorzásával és skalárszorzásával, valamint a $\| \ \|_u$ normával.*

Bizonyítás. $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ teljességét úgy mutathatjuk meg, hogy belátjuk, zárt altere $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$-nek. Az, hogy $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ sűrű, a 11.2.14. tétel segítségével bizonyítható. Minden szükséges lépés könnyen kitalálható, ezért nem részletezzük a bizonyítást.

Mindig, hacsak kifejezetten mást nem mondunk, a fenti tételben szereplő műveletekkel és normával ellátva használjuk a $\mathcal{C}_{0,\mathbb{K}}(X)$ és $\mathcal{K}_{\mathbb{K}}(X)$ tereket.

11.3.18. Definíció. A korlátos, a folytonos, a végtelenben eltűnő és a kompakt tartójú függvények terét egy Y normált térbeli értékű függvényekre is értelmezhetjük. A megfelelő jelölések: $\mathcal{B}_Y(X)$, $\mathcal{C}_Y(X)$, $\mathcal{C}_{0,Y}(X)$ és $\mathcal{K}_Y(X)$ vagy röviden $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ és $\mathcal{K}$. Ha Y teljes, akkor a $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ és $\mathcal{C}_0$ terek Banach-terek. Mivel a szorzás nincs értelmezve, nem kapunk algebrát.

11.3.19. Tétel. *Legyenek X és Y normált terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $A : X \to Y$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha az alábbi érték véges:*

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : x \in X, \|x\| \le 1\}. \tag{1}$$

Bizonyítás. Ha A folytonos a 0-ban, akkor egy adott $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $\|x\| \le \delta$ esetén $\bigl\|A(x)\bigr\| \le \varepsilon$. Ha most $\|x\| \le 1$, akkor $\|\delta x\| \le \delta$, így $\bigl\|A(\delta x)\bigr\| \le \varepsilon$, azaz $\bigl\|A(x)\bigr\| \le \varepsilon/\delta$.

Megfordítva, ha A korlátos X egységgömbjén, azaz $\|x\| \le 1$ esetén $\bigl\|A(x)\bigr\| < K$, akkor $\varepsilon > 0$-ra $\|x - y\| \le \varepsilon/K$ esetén

$$\bigl\|A(x) - A(y)\bigr\| = \bigl\|A(x - y)\bigr\| = \left\|\frac{\varepsilon}{K} A\left(\frac{K(x-y)}{\varepsilon}\right)\right\| \le \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

Megjegyezzük, hogy ha X véges dimenziós, akkor minden lineáris operátor folytonos.

11.3.20. Definíció. Legyenek X és Y normált terek $\mathbb{K}$ felett. Ha egy $A : X \to Y$ lineáris leképezés folytonos, akkor *folytonos lineáris operátor*ról vagy *korlátos lineáris operátor*ról beszélünk. Ha $Y = \mathbb{K}$, akkor *folytonos lineáris funkcionál*t vagy *korlátos lineáris funkcionál*t mondunk. Az összes, X-et Y-ba képező folytonos lineáris operátorok halmazát $\mathcal{BL}(X, Y)$-nal jelöljük, de $\mathcal{BL}(X, X)$ helyett csak $\mathcal{BL}(X)$-et, $\mathcal{BL}(X, \mathbb{K})$ helyett pedig X^*-ot írunk; X^*-ot az X *konjugált tér*ének vagy *duális tér*ének nevezzük.

11.3.21. Tétel. *Legyenek X és Y normált terek $\mathbb{K}$ felett. A $\mathcal{BL}(X, Y)$ tér a függvények pontonkénti összeadásával és skalárszorzásával, valamint a 11.3.19.(1)-ben szereplő függvénnyel mint normával, normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ha Y Banach-tér, akkor $\mathcal{BL}(X, Y)$ is Banach-tér, így X^* Banach-tér, $\mathcal{BL}(X)$ pedig a függvények egymás utáni végrehajtásával mint szorzással, normált algebra, és ha X Banach-tér, akkor Banach-algebra.*

Bizonyítás. Egyetlen lépés sem kíván különösebb ötletet, így a bizonyítást az olvasóra bízzuk.

A fenti tételben szereplő tereket, hacsak kifejezetten mást nem mondunk, mindig a fenti tételben szereplő műveletekkel és normával ellátva használjuk.

11.3.22. Definíció. Legyen H lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, és legyen adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezése $H \times H$-nak $\mathbb{K}$-ba úgy, hogy minden $x, y, z \in H$-ra és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(5) ha $\langle x, x\rangle = 0$, akkor $x = 0$.

Ekkor H-t *belső szorzat tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Az x és y elemek $\langle x, y\rangle$ *belső szorzatá*nak jelölésére az (x, y), $x \bullet y$, $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$ jelek is használatosak. (1), (2) és (3)-ból a belső szorzás additív a második változóban is, és onnan a skalár konjugáltja emelhető ki.

11.3.23. Tétel. *Ha H belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ jelöléssel*

(1) $\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\|$ *minden $x, y \in H$-ra*

(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség) és a $\| \ \|$ függvénnyel H normált tér $\mathbb{K}$ felett.

Bizonyítás.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

amiből ha $\|x\| = 0$ és $\|y\| = 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle$ helyettesítéssel $\langle x, y\rangle = 0$. Ha ez nem áll fenn, mondjuk $\|y\| \neq 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle/\|y\|^2$ helyettesítéssel

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\big|\langle x, y\rangle\big|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség. Minden más triviális.

11.3.24. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző tétel állításainak bizonyításakor csak annak igazolásához kellett kihasználnunk a definíció (5) feltételét, hogy $\|x\| = 0$ esetén $x = 0$. Ebből következik, hogy ha az $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ leképezés (5)-nek nem tesz eleget, akkor $x \mapsto \|x\|$ nem norma, de véges félnorma. Így $\|x-y\| = 0$ esetén az x és y elemeket ekvivalensnek tekintve, az ekvivalenciaosztályok tere lesz belső szorzat tér.

11.3.25. Definíció. A H belső szorzat teret *Hilbert-tér*nek nevezzük, ha (mint normált tér) teljes. A legegyszerűbb példák Hilbert-terekre az $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}$ belső szorzattal $\mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}$ felett és $\mathbb{C}^n$ a $\mathbb{C}$ felett.

11.3.26. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, és C zárt, konvex részhalmaza H-nak. Ekkor minden $a \in H$-hoz létezik pontosan egy olyan $c \in C$, amelyre $\|a-c\| = \operatorname{dist}(a,C)$.*

Bizonyítás. Legyen $d = \operatorname{dist}(a,C)$ és legyen x_n, $n = 1,2,\dots$ egy olyan C-beli sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty}\|a-x_n\| = d$. Legyen $\varepsilon \ge 0$, $y,z \in C$ és tegyük fel, hogy $\|a-y\|^2 \le d^2+\varepsilon^2$, $\|a-z\|^2 \le d^2+\varepsilon^2$. Ekkor $(y+z)/2 \in C$ és

$$d^2+\varepsilon^2 \ge \frac{\|y-a\|^2+\|z-a\|^2}{2} = \frac{\|y+z-2a\|^2+\|y-z\|^2}{4} \ge d^2 + \frac{\|y-z\|^2}{4},$$

amiből $\|y-z\| \le 2\varepsilon$. Ebből az egyenlőtlenségből kapjuk, hogy x_n Cauchy-sorozat. Most legyen $c = \lim_{n\to\infty} x_n$. Az egyértelműség ugyancsak a fenti egyenlőtlenségből következik.

11.3.27. Definíció. Legyen H belső szorzat tér. Ha $x,y \in H$ és $\langle x,y\rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *ortogonális*ak. Jelölése: $x \perp y$. Az $M,N \subset H$ halmazokat *ortogonális*aknak nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M$, $y \in N$-re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset H$ halmaz *ortogonális komplementer*én a H összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: $M^\perp$.

11.3.28. Ortogonális felbontási tétel. *Legyen H egy Hilbert-tér és M egy zárt lineáris altere H-nak. Ekkor minden $x \in H$ egyértelműen felírható $x = y+z$ alakban, ahol $y \in M$ és $z \in M^\perp$.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint létezik x-et legjobban approximáló $y \in M$. Legyen $d = \|x-y\|$. Megmutatjuk, hogy $x = y+(x-y)$ a keresett felbontás, azaz $z = x-y$ ortogonális M-re. Legyen $u \ne 0$ az M tetszőleges eleme, akkor

$$\begin{aligned}d^2 &= \|x-y\|^2 \le \|x-y+\alpha u\|^2 = \|z+\alpha u\|^2 \\ &= \langle z+\alpha u, z+\alpha u\rangle = d^2 + \alpha\langle u,z\rangle + \overline{\alpha}\big(\langle z,u\rangle + \alpha\|u\|^2\big).\end{aligned}$$

Válasszuk α-t úgy, hogy a zárójelben lévő kifejezés eltűnjön, azaz legyen

$$\alpha = -\frac{\langle z, u\rangle}{\|u\|^2}.$$

Ekkor $d^2 \le d^2 - \big|\langle z, u\rangle\big|^2/\|u\|^2$ adódik, ami csak $\langle z, u\rangle = 0$ esetén lehetséges.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x = y + z = y' + z'$, $(y, y' \in M,\ z, z' \in M^\perp)$, akkor $M \ni y - y' = z' - z \in M^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle y - y', z' - z\rangle = \langle y - y', y - y'\rangle = \|y - y'\|^2,$$

amiből $y = y'$, $z = z'$.

11.3.29. Riesz reprezentációs tétele. *Legyen H Hilbert-tér és f egy folytonos lineáris funkcionál H-n. Ekkor létezik pontosan egy $v \in H$, amelyre $f(x) = \langle x, v\rangle$ bármely $x \in H$-ra.*

Bizonyítás. Legyen N az f nulltere, azaz $N = \big\{x : x \in H, f(x) = 0\big\}$. Az N zárt lineáris altere H-nak. Ha $N = H$, akkor $v = 0$ választható. Ha $N \neq H$, akkor $N^\perp \neq \{0\}$. Legyen u egy nem nulla eleme $N^\perp$-nek. Ekkor bármely $x \in H$ esetén $f(x)u - f(u)x \in N$, mert

$$f\big(f(x)u - f(u)x\big) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0.$$

Így

$$0 = \big\langle f(x)u - f(u)x, u\big\rangle = f(x)\|u\|^2 - f(u)\langle x, u\rangle,$$

ahonnan $f(x)$-et kifejezve, $v = \overline{f(u)}u/\|u\|^2$ jelöléssel kapjuk az állítást.

Az egyértelműséghez, ha $f(x) = \langle x, v\rangle = \langle x, v'\rangle$, akkor $\langle x, v - v'\rangle = 0$ mindenütt, amiből $x = v - v'$ helyettesítéssel $v = v'$.

11.3.30. Definíció. Legyenek H és K Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $A : H \to K$ folytonos lineáris operátor *adjungált*ján azt az $A^* : K \to H$ leképezést értjük, amelyre

$$\big\langle A(x), y\big\rangle = \big\langle x, A^*(y)\big\rangle \quad \text{minden } x \in H,\ y \in K\text{-ra}.$$

Az előző tétel szerint ez az összefüggés egyértelműen definiálja A^*-ot minden $y \in K$-ra. Ha $H = K$ és $A^* = A$, akkor A-t *önadjungált*nak nevezzük.

Könnyű kiszámolni, hogy A^* folytonos lineáris leképezése K-nak H-ba, $(A^*)^* = A$ és $\|A^*\| = \|A\|$. Ha L egy harmadik Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, és $B : K \to L$ is folytonos lineáris operátor, akkor $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$. Ebből következik, hogy bármely A-ra $A^* \circ A$ és $A \circ A^*$ önadjungált operátorok H-n, illetve K-n.

* **11.3.31. Definíció.** Legyenek H és K Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $A : H \to K$ folytonos lineáris leképezést *ortogonális injekció*nak nevezünk, ha

$$\big\langle A(x), A(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{minden } x, y \in H\text{-ra}.$$

Nem nehéz belátni, hogy A akkor és csakis akkor ortogonális injekció, ha $A^* \circ A$ az identikus leképezése H-nak önmagára.

* **11.3.32. Tétel.** *Legyenek H és K véges dimenziós Hilbert-terek $\mathbb{R}$ felett, és $A : H \to K$ egy lineáris leképezés. Ha $\dim(H) \leq \dim(K)$, akkor létezik egy $B : H \to H$ önadjungált operátor és egy $C : H \to K$ ortogonális injekció úgy, hogy $C \circ B = A$.*

Bizonyítás. Legyen $S(x, y) = \langle A(x), A(y)\rangle$, ha $x, y \in H$ és válasszunk olyan

$$e_1, e_2, \dots , e_m$$

ortonormált bázist H-ban, amelyre az S szimmetrikus bilineáris forma diagonális alakú, azaz $S(e_j, e_i) = 0$, ha $i \neq j$. Legyen $B(e_i) = \big\|A(e_i)\big\|e_i$, ha $1 \leq i \leq m$, és válasszuk úgy C-t, hogy $C(e_i) = A(e_i)/\big\|A(e_i)\big\|$ teljesüljön, ha $A(e_i) \neq 0$, azon H-beli vektorok alterét pedig, amelyeket A a nullába visz át, C izometrikusan képezze le az A képterére ortogonális K-beli vektorok alterébe.

* **11.3.33. Lemma.** *Legyenek H és K véges dimenziós Hilbert-terek $\mathbb{R}$ felett úgy, hogy $\dim(H) \leq \dim(K)$, legyen $A : H \to K$ egy lineáris leképezés, és $C \circ B$ az előző tételben szereplő felbontása A-nak. Ekkor a H tér bármely $e_1, e_2, \dots , e_m$ ortonormált bázisára*

$$0 \leq \big|\det(B)\big|^2 = \det(B^* \circ B) = \det(A^* \circ A) \leq \prod_{i=1}^{m} \big\|A(e_i)\big\|^2,$$

és az első egyenlőtlenségben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha A nem kölcsönösen egyértelmű.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $A^* \circ A = B^* \circ B$, mivel

$$(1) \qquad \big\langle x, A^*\big(A(y)\big)\big\rangle = \big\langle A(x), A(y)\big\rangle = \big\langle B(x), B(y)\big\rangle = \big\langle x, B^*\big(B(y)\big)\big\rangle$$

minden $x, y \in H$-ra. Mivel B önadjungált,

$$\det(A^* \circ A) = \det(B^* \circ B) = \det(B \circ B) = \big|\det(B)\big|^2 \geq 0.$$

Az (1)-beli első egyenlőségből az is következik, hogy $A(y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $A^*\big(A(y)\big) = 0$.

Legyen most $v_i = B(e_i)$, és bontsuk fel v_i-t $v_i = u_i + w_i$ alakban, ahol u_i a $v_1, v_2, \dots , v_{i-1}$ vektorok lineáris kombinációja, w_i pedig ortogonális $v_1, v_2, \dots , v_{i-1}$-re. Ekkor

$$\begin{aligned} \det(v_1, v_2, \dots , v_{i-1}, v_i, w_{i+1}, \dots , w_m) &= \det(v_1, v_2, \dots , v_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots , w_m) \\ &\quad + \det(v_1, v_2, \dots , v_{i-1}, u_i, w_{i+1}, \dots , w_m). \end{aligned}$$

Mivel a jobb oldali összeg második tagja nulla, indukcióval azt kapjuk, hogy

$$\big|\det(B)\big| = \det(v_1, v_2, \dots , v_m) = \det(w_1, w_2, \dots , w_m) = \prod_{i=1}^{m} \|w_i\| \leq \prod_{i=1}^{m} \|v_i\|.$$

* **11.3.34. Feladat [9].** Ha egy X normált térben $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ esetén van olyan $c \geq 0$, hogy $x = cy$ vagy $y = cx$, akkor a normált teret *szigorúan normált*nak nevezzük. Igazoljuk, hogy egy X normált térre az alábbi állítások ekvivalensek:

(1) X szigorúan normált;

(2) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ esetén $\big\|(x+y)/2\big\| < 1$;

(3) $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$ esetén $\big\|\alpha x + (1-\alpha)y\big\| < 1$.

* **11.3.35. Feladat [5].** Legyen X szigorúan normált tér, $K \subset X$ konvex halmaz. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in X$-hez legfeljebb egy olyan $y \in K$ létezik, amelyre $\|x - y\| = d(x, K)$.

IRODALOM

[1] Alexandrov, P. Sz.: *Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[2] Berberian, S. K.: *Measure and integration.* Collien–Macmillan, New York–London, 1965.

[3] Bourbaki, N.: *Általános topológia I–III (oroszul).* Nauka, Moszkva, 1968, 1969, 1975.

[4] Bourbaki, N.: *Integrálás I–III (oroszul).* Nauka, Moszkva, 1967, 1970, 1977.

[5] Daróczy Z.: *Mérték és integrál.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[6] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis I–IX.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971–1987.

[7] Dunford, N. – Schwartz, J. T.: *Linear operators I–III.* Wiley-Interscience, New York–London–Sydney–Toronto, 1958–1971.

[8] Federer, H.: *Geometric measure theory.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

[9] Fried E.: *Általános algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[10] Gelbaum, B. R.: *Problems in analysis.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.

[11] Gelbaum, B. R. – Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis.* Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.

[12] Gihman, J. I. – Szkorohod, A. V.: *Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.

[13] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet.* Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[14] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[15] Halmos P. R.: *Mértékelmélet.* Gondolat, Budapest, 1984.

[16] Hewitt, E. – Ross, K. A.: *Abstract harmonic analysis I–II.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1963, 1970.

[17] Hewitt, E. – Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

[18] Hille, E. – Phillips, R. S.: *Functional analysis on semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, 1957.

[19] Kelley, J. L.: *General topology.* D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1955.

[20] Kingman, J. F. C. – Taylor, S. J.: *Introduction to measure and probability.* University Press, Cambridge, 1966.

[21] Kirillov, A. A.: *Elements of the theory of representations.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[22] Kirillov, A. A. – Gvisiani, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[23] Kluvánek, I. – Knowles, G.: *Vector measures and control systems.* North-Holland Publ. Co., Amsterdam–Oxford, 1975.

[24] Kolmogorov, A. N.: *A valószínűségszámítás alapfogalmai.* Gondolat, Budapest, 1982.

[25] Kolmogorov, A. N. – Fomin, Sz. V.: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[26] Laczkovich M.: *Valós függvénytan.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995.

[27] Losonczi L.: *Funkcionálanalízis I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[28] Magyar Z.: *The Lebesgue integral.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.

[29] Mikolás M.: *Valós függvénytan és ortogonális sorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.

[30] Morgan, F.: *Geometric measure theory. A beginner's guide.* Academic Press, 1988.

[31] Nachbin, L.: *The Haar integral.* D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, 1965.

[32] Natanson, I. P.: *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1954.

[33] Neveu, J.: *Mathematical foundations of the calculus of probability.* Holden-Day Inc., San Francisco, 1965.

[34] Oxtoby, J. C.: *Measure and category.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1971.

[35] Parthasarathy, K. R.: *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, New York–London, 1967.

[36] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[37] Riesz F. – Szőkefalvi-Nagy B.: *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[38] Rogers, C. A.: *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[39] Royden, H. L.: *Real Analysis.* Macmillan Co., New York, 1963.

[40] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[41] Rudin, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[42] Rudin, W.: *Real and complex analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

[43] Saks, S.: *Theory of the integral.* Warszawa, G. E. Stechert Co., New York, 1937.

[44] Sikorski, R.: *Advanced calculus.* PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.

[45] Szőkefalvi-Nagy B.: *Valós függvények és függvénysorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[46] Vlagyimirov, V. Sz.: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[47] Yosida, K.: *Functional analysis.* Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.

[48] Zaanen, A. C.: *Integration.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

[49] Zaanen, A. C.: *Linear analysis.* Groningen, Amsterdam, 1953.

[50] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its applications I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.

MUTATÓ

A legfontosabb hivatkozás (általában a definíció) oldalszáma *dőlt* betűvel van szedve. A külső, azaz más könyvekre történő hivatkozások előtt szögletes zárójelben szerepel az adott könyv sorszáma az irodalomjegyzékben.