# Kedvenc Matematikai Kísérleteim

**Járai Antal**

# Bevezetés

*A Természet nagy könyve mindig nyitva áll szemünk előtt, és igaz bölcselet van megírva benne ... De nem olvashatjuk azt másképp, csak ha elébb megtanuljuk a nyelvet s jeleket, amellyel iratott ... Matematikai nyelven van írva az, ...*

*Galileo Galilei*

## Matematikai kísérletek?

A cím bizonyára sok szakmabelit is megdöbbent, hiszen a matematika közismerten nem kísérleti tudomány. Ma azonban, a számítógépek korában, érdemes az elmélet elsajátítását géppel végzett számításokkal kísérni. Ezek általában nem egyszerű számolások, hanem szimbólumokkal végzett számítások. Ilyen számítások céljára a komputeralgebra rendszerek alkalmasak. Természetesen olyat kellett választanom, amely szabadon hozzáférhető. A Maxima rendszer és a hozzá tartozó wxMaxima grafikus felület mellett döntöttem és igyektem a könyv minden pontját minél több példával kiegészíteni. Javaslom az Olvasónak hogy töltse le számítógépére ezt a rendszer és bátran kísérletezzen a könyv mellett található példafájlokból kiindulva, amelyek letölthetők a `http://compalg.inf.elte.hu/~ajarai/kk/` címről, nevük kmk*.wxmx, ahol a * helyén a <fejezet_alfejezet> számok állnak. Érdemes a maxima hivatalos dokumentációját és esetleg más wxmaxima leírásokat is megnézni, főleg, ha magunk is akarunk programokat írni. A wxMaxima rendszer elég bonyolult. Maga a wxMaxima csak a grafikus felület, használja gnuplot és a Maxima programokat. Az utóbbi használja a Lisp interpretert. Nincs garancia, hogy minden működni fog. Ha valami nem jó, keressünk segítséget az interneten.

Ez a könyv elsősorban a tizenéves korosztálynak szól, de egyáltalán nem csak azoknak, akik matematikusok szeretnének lenni. Sok könyv van, amelyik valamilyen egyszerű témakörön keresztül próbálja a matematika szépségét bemutatni. Ezek arra emlékeztetnek engem, mintha egy gyönyörű város bemutatásánál mindjárt a városkapunál betérnénk egy homokozóba, és az egész idő alatt ott játszanánk. Így is kapunk valami képet arról, milyen is építkezni, de ha nem építészek akarunk lenni, akkor ebből vajmi kevés hasznunk lesz. Inkább arra törekedtem, hogy akik később természettudománnyal, műszaki vagy más tudományágakkal kívánnak foglalkozni — és persze azok is, akik matematikusok lesznek —, valami képet kapjanak a matematikáról és alkalmazásairól, elsősorban a differenciál- és integrálszámításról. Ne felejtsük el, hogy ez a témakör 100 évvel ezelőtt még középiskolai tananyag volt, és ismerete bizonyára sokat segített abban, hogy magyar matematikusok, fizikusok, vegyészek és más természettudósok világhírűvé váltak. Egyáltalán nem lehetetlen tehát megérteni, és még az az előnyünk is megvan, hogy a számolási módszereket nem kell begyakorolnunk, ebben és a szemléltetésben is segít a számítógép. Természetesen ez nem könnyű anyag, megértése az Olvasótól kitartást és szorgalmat kíván. Senki ne keseredjen el, ha valahol elakad. Magam is sok könyvvel, sokszor jártam így. Ilyenkor félretéve a könyvet, majd később, több ismerettel és érettséggel elővéve, vagy a példák áttanulmányozásával sikerülhet megérteni a kérdéses részt. Más könyveket is érdemes megnézni, például speciális tagozatok tankönyveit. Soha nem lehet tudni, pontosan mitől is ért meg valaki valamit. Ajánlom a műszaki egyetemi tankönyvnek készült, de magyarázatokkal, ábrákkal bőségesen ellátott Thomas-féle kalkulust [55]. Ez három kötetben, jóval több mint 1000 nagyalakú oldalon alig több anyagot tárgyal, mint itt az első hat fejezet anyaga.

Az első fejezet a középiskolai matematika összefoglalása: lényegében az ókori és középkori matematika és alkalmazása. Ezzel kipróbálhatja magát az olvasó: ha (a csillaggal jelölt részek és a feladatok nélkül) boldogul, akkor érdemes tovább olvasni. Egyébként Péter Rózsa [41] kitűnő könyvét és az általános iskolásoknak készült [33] könyvsorozatot ajánlom az ismeretek bővítésére. Persze, ezeket akkor is érdemes elolvasni, ha nincs gondunk az első fejezettel.

A következő öt fejezet az első féléves–éves egyetemi anyag, a XVII. században kidolgozott klasszikus differenciál- és integrálszámítás számos alkalmazással. Aki az első hat fejezet anyagát megértette, büszke lehet magára, a legalapvetőbb dolgokkal már tisztában van. A kitűzött cél azonban jóval több: eljutni addig, hogy rendelkezésünkre álljon minden matematikai eszköz a kvantummechanika alapjainak és ezen keresztül az anyag szerkezetének, a kémiai kötés természetének megértéséhez.

A további fejezetek egy-egy féléves egyetemi tárgynak felelnek meg. Egyáltalán ne csodálkozzunk hát, ha lassan haladunk.

A hetedik fejezetben a titokzatosnak hitt többdimenziós térről és mátrixokról rántjuk le a leplet. Kiderül, hogy titok ugyan nincs, de hasznos eszközökhöz jutunk. Közvetlen alkalmazásként a közgazdaságtanban fontos szerepet játszó lineáris programozást tárgyaljuk.

Ezekkel az ismeretekkel felfegyverkezve nekiláthatunk a többváltozós függvények differenciál- és integrálszámításának, erről szól a nyolcadik fejezet. Komoly számolási módszerekhez is jutunk.

Mindeddig nagyon egyszerű integrálfogalmat használva jutunk el. Néhány további esetben — főleg a bizonyítások megértéséhez — ez már nem lenne elegendő, ezért egy rövid mértékelméleti fejezetet iktattam be. Ez lehetővé teszi a felületi integrálok, a valószínűségszámítás és a mérési eredmények kiértékelését szolgáló statisztika rövid tárgyalását.

A tizedik fejezet a mérnökök jelvizsgálatra használt eszközeit tárgyalja, de mint majd kiderül, az eredményekre a kvantummechanikában is szükség van.

Ehhez a fejezethez szorosan kapcsolódik a komplex változós függvények finomabb tulajdonságainak vizsgálata. Ezt is használják fizikusok és villamosmérnökök.

A fizikusok (vegyészek, mérnökök, stb.) egyenleteiben nagyon sokszor az ismeretlen egy függvény, az egyenlet pedig a függvény és deriváltjai között teremt kapcsolatot. A „közönséges” differenciálegyenleteknél az ismeretlen függvénynek egy változója van, legtöbbször az idő. Megtudjuk azt is, hogy a fizikusok hogy kapják elegánsan egyenleteiket egy „variációszámításnak” nevezett módszer segítségével. Ezeknek az egyenleteknek az elmélete, megoldási módszerei alkotják a tizenkettedik fejezet anyagát.

A következő fejezet végtelen dimenziós terek operátorait tárgyalja. Így jutunk el a kvantummechanikához, mert éppen ezek az eszközök kellenek hozzá.

Bonyolultabb esetekben az ismeretlen függvény több változótól is függ, ilyen például a kvantummechanika Schrödinger-egyenlete. Az utolsó fejezet ilyen egyenletekkel foglalkozik.

Az első olvasáskor kihagyható részeket *-gal jelöltem meg, a még nehezebbeket **-gal.

Budapest, 2024. február 25. *Járai Antal*

# 1

# Alapok

Ebben a fejezetben a számokról, egyenletekről, geometriáról és a szögfüggvényekről tanulunk. Lényegében ez az általános- és középiskolai anyag.

## 1.1 Számolás

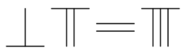
**1.1.1. Természetes számok.** A *természetes szám*ok, 0, 1, 2, ... felfedezése az őstörténet ködébe vész. Ide számítjuk a nullát is, mivel a természetes számokat mint halmazok elemszámait érdemes felfogni. Igaz, hogy a nulla számjegyet nem használták, de az „egy kecske”, „két kecske”, ... mellett azt is tudták, hogy mi az hogy „nincs kecske”. Ugyancsak ismerték már az ókorban is az összeadást, a kivonást, a szorzást és az osztást is, és megfigyelték, hogy az összeadásnál és a szorzásnál az eredményt nem befolyásolja sem a sorrend (*kommutativitás*), sem a — ma zárójelekkel kifejezett — csoportosítás (*asszociativitás*). Azt is észrevették, hogy ha egy összeget szorzunk, akkor a szorzás tagonként is elvégezhető: szétosztható, idegen szóval *disztributív*.

A természetes számok leírására felhasználták a *csoportosítás*t. A megszámlálandó dolgokat ötössével, de leggyakrabban tizessével csoportosították, majd a csoportokat is csoportosították, stb. Például a római számoknál a csoportok jele I, V, X, L, C, D és M, jelentésük rendre 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Más népek is hasonló jelöléseket alkottak, az egyiptomiaknak például még az 1 000 000-ra is volt jelük már az óbirodalomban is, több mint 4000 évvel ezelőtt. Az ilyen típusú jelölésekkel a számolás nagyon nehézkes (próbáljunk meg római számokat szorozni, pláne osztani).

**1.1.2. Törtek.** Az egység osztásával keletkező *tört*eket az egyiptomiak is használtak: a szám fölé egy speciális jelet írtak, és akkor annyiadrészt jelentett. Olyasmi ez, mint ha 1/3 helyett azt írnánk, hogy $\overline{3}$. Az ilyen törteket (ahol tehát a számláló egy) ma *egységtört*eknek vagy *természetes tört*eknek nevezzük. Mindent egységtörtekkel fejeztek ki, ami elég nehézkes. Néhány speciális egységtört, például az 1/3 kétszeresére, amit mi 2/3-nak nevezünk, volt speciális jelük. Az ókori görögök viszont már majdnem az általunk használt jelölést alkalmazták, de a nevezőt felülre írták, és nem írtak törtvonalat. Gyakori volt az „indiai jelölés” is, ahol a számlálót írták felülre.

**1.1.1 ábra:** sumér számírás.

**1.1.3. A hatvanas számrendszer.** Igen fejlett számrendszert hoztak létre az ókorban a sumérok Mezopotámiában több, mint 4000 évvel ezelőtt. Ez a hatvanas számrendszeren alapult. Legnagyobb újításuk, hogy az 1 jelét használták a 60-ra, a 3600-ra, ..., sőt, az



**1.1.2 ábra:** kínai számírás.

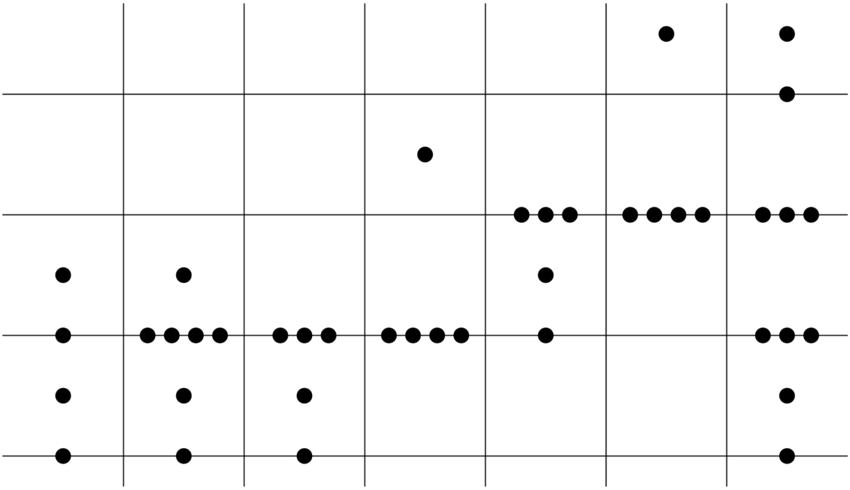
1/60-ra, 1/3600-ra, … is. Csak két jelet használtak, a tizes és egyes jelét. A tizes jele egy sarokvasszerű ékjel volt, az egyesé pedig egy lefelé forduló hegyű háromszög. Például az 1.1.1 ábra bal oldalán lévő szám $2 \cdot 60^2 + 3 \cdot 60 + 11 = 7391$. Két probléma merül fel: nem tudjuk, hogy ez a szám nem 123 11/60-e? Ez a gyakorlatban nem okoz gondot, mert a nagyságrend általában ismert. Mi is tudjuk egy árra ránézve, hogy euró-e vagy cent? A másik a nulla jel hiánya. Később bevezettek rá egy jelölést: két egymás fölé írt „sarokvas” jelentette a nullát. Az 1.1.1 ábra jobb oldalán lévő szám $23 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 51 = 82851$. Mint látjuk, két „sarokvasat” egyébként egymás mellé írtak. A csillagászatban nagyon sokáig, nagyjából a középkor végéig ezt a számrendszert használták. Ptolemaiosz a nulla jelölésére az *o* betűt vezette be, és ezt a szám végén is kiírta. A hatvanas alapszám nagy előnye, hogy a 60-nak sok osztója van, így sok tört — pontosabban minden olyan tört, amelynek a nevezője a 2, 3 és 5 számok szorzataként írható — hatvanas számrendszerben pontosan felírható.

Első pillantásra ebben a számrendszerben nagyon nehéznek tűnik szorozni, de csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 „számjegyek” szorzatát kell megtanulni. A sumérok szorzótáblát (és négyzettáblát is) használtak. Osztásra reciprok-táblázatot használtak; 7 oldalas ilyen tábla is marad ránk, amely hat számjegyre adja meg a reciprokot, és ha nincs pontos érték — mint például 1/7 esetén — a közelítést.

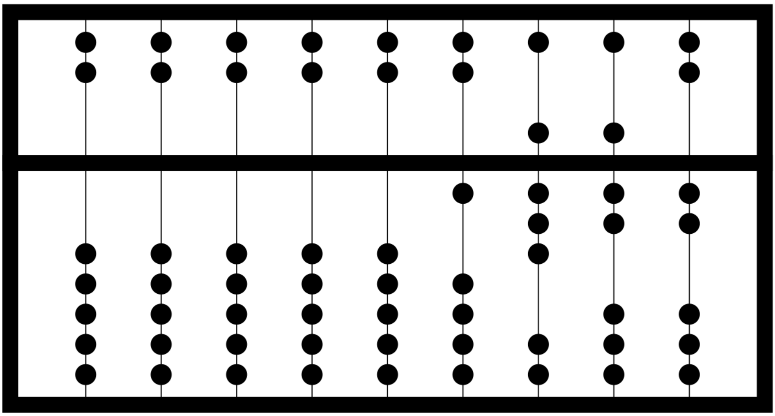
**1.1.4. A tizes számrendszer.** A helyiértékes tizes számrendszert használtak már az ókorban is Kínában és Indiában. Nem jöttek zavarba a nagyon nagy számoktól, sem Kínában, sem Indiában. Kínában az időszámításunk kezdete körül egy könyvben az egyik példában 13 jegyű szám szerepel, és ezt még szorozni kell valamivel. Indiában egy legenda szerint Buddhát megkérdezték, hogy ismer-e a milliárdnál nagyobb számot? 22 további szám megnevezésével válaszolt, amelyek mindegyike az előzőnek százszorosa volt, és megjegyezte, hogy még nyolc ilyen számsor van. Kínában az egyesek, százasok, stb., helyén függőleges pálcikák egységet, a vízszintes pálcika öt egységet jelentett, míg a tizesek, ezresek, stb. helyén a vízszintes pálcikák jelentették az egységet, a függőleges pálcika pedig az öt egységet. Például az 1.1.2 ábrán látható szám 6728. A pálcikák rakosgatásával számoltak, de az összeadást és kivonást balról jobbra végezték. Próbáljuk ki ezt a módszert!

A pálcikák rakosgatása elvében megegyezik a számolótáblán, görög eredetű szóval *abakusz*on való számolással. Ilyen elvű számolószközt egészen a múlt század 90-es éveiig használtak, csak az elektronikus zsebszámológépek szorították ki. A legegyszerűbb számolótáblán vízszintes vonalak vannak, és a tábla függőleges vonalakkal részekre van osztva. Az 1.1.3 ábrán a $66 \cdot 96$ szorzás elvégzése látható. A vonalra tett zsetonok (kavicsok, csontocskák, stb.) egy egységet jelentenek, a vonal fölött lévő ötöt. Bal oldalon látható a szorzandó és a szorzó, majd a részletszorzatok, végül jobb oldalon az összeg. Ha római számokat „beírunk” ebbe az eszközbe, akkor tulajdonképpen átírjuk helyiértékes rendszerbe. A kavicsok latin *calculi* nevéből ered a *calculus* (‘számolás’) szó.

A kínai abakusz, a *szuan-pan* már az i.e. XIV. században ismert volt. Vázlatosan az 1.1.4 ábrán látható. A külső keret és az elválasztó fából készült, a „golyók” át vannak fúrva, és drótón, esetleg madzagon csúsznak. A felső golyók ötöt, az alsók egyet „érnek”.



**1.1.3 ábra:** számolás abakuszon.



**1.1.4 ábra:** szuan-pan.

A válaszfalhoz húzott golyók adják az értéket, az ábrán a beírt szám 1972. Használták $5+1$ golyós változatban is. A japán változat, a *szorubán* $4+1$ golyós, Kínából került Japánba. Az orosz *szcsoti*nál tíz golyó van, mongol közvetítéssel Kínából ered. Volt olyan abakusz változat is, ahol vájatokban gördítettek agyaggolyókat. A sumérok már két és fél évezreddel i.e. is használtak a hatvanas számrendszernek megfelelő abakuszt. Az azték kultúrkörben zsinórra fűzött kukoricaszemeket tologattak. Ez egy $4+3$ szemmel (a húszas számrendszernek megfelelően) és 13 zsinórral rendelkező abakusz volt. A zsinórok számát az magyarázza, hogy a $13 \cdot 7 = 91$ szent szám volt az aztékoknál: 91 nap egy negyedév, kétszer ennyi a kukorica érésideje, háromszor ennyi a terhesség időtartama.

Hibás lenne azt hinni, hogy az abakusszal lassabb számolni, mint papíron ceruzával. Feynman Nobel-díjas fizikus egy szorubánt használó számolóval versenyezve összeadásban sokkal lassabb, szorzásban némileg lassabb, osztásban gyorsabb volt. Középiskolás koromban én is kaptam tréfából egy iskolai golyós számológépet. Ezt használtam logaritmusok összeadására és kivonására.

**1.1.5. Tizedes törtek.** Az ókori kínai matematikáról legtöbb információnk a *Matematika kilenc könyvben* című műből származik. Ez összegezte az i.e. I. évezredben élt matematikusok munkáját. (Egyébként már ebben az évezredben számolást tanítottak 6–8 éves kortól kezdve gyerekeknek.) A mű lényegében „mérnöki kézikönyv”, röviden leírja a szabályokat, majd példákon mutatja be az alkalmazást. Tanulmányozásához nyilván szükség volt tanári segítségre. Első változata az i.e. II. évszázadban íródott. Körülbelül száz évvel később átírták. A ránk maradt változat i.sz. 263-ból származik, Liu Huj adta ki. Ebből tudjuk, hogy a *tizedes tört*eket is Kínában vezették be először. Ehhez nyilván hozzájárult a szuan-pan és a kínai mértékrendszer: a hosszmértékek közötti váltószám tíz volt, nyolc különböző hosszmértékkel. A hosszmértékek neveit átvitték a tizedestörtek jegyeire is. A III. században kialakult a decimális térfogat- és súlyegységrendszer is. Később már 16 jegynek volt neve, ennyi mértékegység nyilván felesleges, de tizedesjegy lehet ennyi. A VII. században még kiírták a tizedesjegyek nevét, de nem sokkal később már elhagyták, és pontot használtak a tizedesjegyek kezdetének jelzésére, mint ma is az angolszász országokban. (Mi, sok más európai országhoz hasonlóan, vesszőt használunk.)

**1.1.6. Negatív számok.** A fent említett könyvből tudjuk, hogyan jutottak a kínaiak a *negatív szám*okhoz: akárhány ismeretlenes elsőfokú egyenletekből álló egyenletrendszerre volt egy módszerük, ami pontosan megfelel a ma Gauss-eliminációnak nevezett módszernek (lásd később). Ehhez az összes ismeretlen tartalmazó tagot az egyik oldalra kellett vinni, a számot pedig a másik oldalra. Ez csak negatív számok használatával oldható meg. Ismerték az összeadás és kivonás szabályát arra az esetre, amikor negatív szám vagy számok fordulnak elő. A negatív számokat többféleképpen, például az utolsó számjegy ferde vonallal való áthúzásával jelölték, és funak hívták, aminek jelentése adósság, hiány, valamint hamis. A szorzás szabályát csak később, az indiaiak fedezték fel. Európában csak a középkor vége felé terjedt el a negatív számok használata. A mi jelölésünk rövidülés, például $-3$ a $0-3$ helyett áll.

Miért is hasznosak a negatív számok? Pontosan azért, amiért a kínaiak bevezették őket. Gondoljunk például az $x^2+px+q=0$ másodfokú egyenletre. Számunkra $p$ is, $q$ is lehet pozitív, negatív és nulla is. Amikor még csak pozitív számokat (és geometriai gondolkodást) használtak, például $x^2+px=q$ illetve $x^2=px+q$ teljesen különböző egyenletet jelentett. Így kilenc különböző esettel kellett foglalkozni egy helyett! Magasabb fokú egyenleteknél és egyenlet rendszereknél a helyzet nyilván sokkal rosszabb.

**1.1.7. Számjegyek.** Az általunk „arab számok”-ként emlegetett számjegyek használata Indiából ered, valószínűleg a bráhmi számjegyekből. Ezeknek több változata is volt, de az egyik változatban a 6 és a 7 teljesen úgy néztek ki, mint ma. A nyolcast S jelölte, ebből lett a 8. A négyet néha egy kereszttel jelölték, ebből alakul ki a 4 számjegy. Az egy, kettő és három jele egy, két, illetve három vízszintes vonás volt egymás fölött. A 3 számjegyben rá lehet ismerni a három vízsszintes vonásra, a 2-ben a két vonásra, az 1 pedig egy vonás. A többi számjegy sokat változott. A számjegyeket előbb a görögök, majd az iszlám országok vették át, onnan kerültek Európába, ahol a könyvnyomtatás bevezetése óta nem változtak. A nulla használata valószínűleg a görögöktől került vissza Indiába és Kínába. A tizes számrendszer az indiai számjegyekkel lassan kiszorította a római számokat, mert sokkal könnyebb volt vele számolni. A számolás sokáig nem papíron történt, ami drága volt, hanem porral behintett táblán.

A szorzásnál és osztásnál használt módszer az iszlám országokból ered, ahol sok tudós nem arab volt, hanem a meghódított országok tudósa. Mohammed al-Hvárizmi (≈780–≈850) munkái nyomán terjedt el. Először felírták a szorzandót és a szorzót úgy, hogy a szorzandó utolsó jegye a szorzó első jegye alá essen. Majd a szorzandó első jegyét felülírva, az első részletszorzatot írták a szorzandó maradék jegyei elé. Ezután eggyel jobbra tolták a szorzót. Kiszámolták a következő jeggyel való részletszorzatot, és mindjárt hozzáadták a már kiszámolt részhez, törölve a szorzandó egy újabb jegyét. Ezt folytatták, amíg a szorzandó el nem fogyott. Itt egy példa, 2326 szorozva 214-gyel:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2326 | 428326 | 428326 | 492226 | 492226 | 496486 | 496486 | 497764 |
| 214 | 214 | 214 | 214 | 214 | 214 | 214 | 214 |

Az osztás hasonló volt, a hányadost az osztandó fölé írták, a maradék az osztandó helyére került. Egy példa, 46868 osztva 324-gyel:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | 14 | 14 | 14 | 143 | 143 |
| 46868 | 46868 | 14068 | 14068 | 14068 | 1108 | 1108 | 1108 | 136 |
| 324 | 324 | 324 | 324 | 324 | 324 | 324 | 324 | 324 |

Mint látjuk, mindkét eljárás lényegében megegyezik a maival, de helytakarékosabb volt: a porral behintett táblán nem sok számjegynek volt hely, de lehetett törölni.

Ez a módszer Európában Leonardo Pisano (1170–1250), ismertebb „becenevén" Fibonacci (Bonaccio fia) 1202-ben írt nagy műve, a „Liber abaci" („Az abakusz könyve") nyomán vált ismertté és terjedt el. A könyv első nyomtatott kiadása vagy 250 évvel később 459 oldal volt! Az abakuszt a címben tulajdonképpen számolásnak kell érteni. A könyv összefoglalja és továbbfejleszti az antik matematikát. Fibonacci a szorzás és osztás eljárását al-Hvárizmi nevének latinos Algorismus alakjával kapcsolja össze. Innen ered az *algoritmus* ('eljárás') szavunk, amelyen kezdetben csak az aritmetikai ('számtani') eljárásokat értették. Egyébként egy másik, az *algebra* szavunk al-Hvárizmi egyik könyvének címében szereplő *al-dzsebr* kifejezésből származik. Fibonacci volt az első, aki a nullát teljes jogú számnak, nem csak helypótlónak tekintette: nála szerepel egy feladat, aminek a megoldása nulla.

A $+$ és $-$ jelölés az összeadásra illetve a kivonásra a túl sok, illetve túl kevés árut tartalmazó ládák megjelöléséből ered, és európai „találmány", miként a gyökjel, az $=$ és a zárójelek is.

**1.1.8. A kettes számrendszer.** A legegyszerűbb számrendszer a kettes. Csak két számjegy van, a 0 és az 1. Mindkettővel igen egyszerű szorozni bármilyen számot, így csak összeadni kell tudni. Az osztás is nagyon egyszerű: csak összehasonlítani és kivonni kell tudni. Ezért a számítógépek kettes számrendszert használnak. Ember számára azonban a kettes számrendszer kényelmetlen, mert több, mint háromszor hosszabbak a számok, mint tizes számrendszerben. Ha mindenképpen „gépközeli" számrendszert akarunk használni, akkor 16-os alapú — hexadecimális — számrendszert használunk. Ebben a 9 utáni számjegyek jele rendre A, B, C, D, E, F vagy a, b, c, d, e, f.

**1.1.9. Valós számok.** A *valós szám*okat egy olyan egyenes pontjainak feleltethetjük meg, amelyen ki van jelölve két különböző pont, a 0 és az 1. A 0 pontból kiinduló, az 1-et tartalmazó félegyenes pontjai felelnek meg a *pozitív valós szám*oknak, a másik félegyenes pontjai pedig a *negatív valós szám*oknak. Egy $x$ valós szám $|x|$ *abszolút érték*e a 0 ponttól vett távolsága, ahol az egység a 0 és az 1 távolsága. Két valós szám összeadása úgy történik, hogy az első valós számnak megfelelő pontból indulva, a második valós szám abszolút értékének megfelelő távolságot teszünk meg abba az irányba, amelyikben a második valós szám fekszik a nullától indulva. Egy $x$ valós szám *ellentettje* az a $-x$ valós szám, amellyel összeadva nullát kapunk: $x+(-x)=(-x)+x=0$. Nyilván $-x$ ellentettje $x$. A *kivonás* az ellentett hozzáadása: $x-y:=x+(-y)$. (A $:=$ jel azt jelenti, hogy a bal oldalán álló kifejezést a jobb oldalán álló kifejezéssel definiáljuk.) A valós számok körében tehát bármely két valós számnak van különbsége. Ha $x-y$ pozitív, akkor azt írjuk, hogy $x>y$, ha negatív, akkor pedig, hogy $x<y$; természetesen ha a különbség nulla, akkor $x=y$. Ha $x>0$, akkor $|x|=x$, ha pedig $x<0$, akkor $|x|=-x$, és $|0|=0$.

Hogyan kellene a negatív valós számokat a nemnegatív valós számokkal, illetve egymással szorozni? Szeretnénk a disztributivitást megőrizni. Ha igaz marad, akkor $x,y\geq 0$ esetén

$$xy+x(-y)=x(y-y)=x0=0,$$

$x(-y)$ az $xy$ ellentettje, azaz $-(xy)$. Hasonlóan adódik, hogy $(-x)y$ is az $xy$ ellentettje. Végül $(-x)(-y)=-(x(-y))=-(-(xy))=xy$. Ezek az *előjel szabályok*. Ha ezek felhasználásával definiáljuk a szorzást, akkor kommutatív és asszociatív marad és fennáll a disztributivitás is tetszőleges valós számokra, továbbá minden nem nulla $y$ valós számhoz van olyan $1/y$ valós szám, a *reciprok*a, amelyre $y(1/y)=1$. Az *osztás*t $x/y:=x(1/y)$ definiálja.

**1.1.10. Maradékos osztás valós számokra.** A természetes számokat és ellentettjeiket együtt *egész szám*oknak nevezzük. Egy $x$ valós számra legyen $\lfloor x\rfloor$, az $x$ *alsó egész rész*e az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb, mint $x$, és legyen $\lceil x\rceil$, az $x$ *felső egész rész*e az a legkisebb egész szám, amely nem kisebb, mint $x$. Az $x$ valós szám $y$ valós számmal való osztásánál fellépő *maradék* legyen $y=0$ esetén $x \bmod 0=x$, egyébként pedig legyen $x \bmod y=x-\lfloor x/y\rfloor y$. Nyilván, ha $y>0$, akkor $0\leq x \bmod y<y$, ha pedig $y<0$, akkor $y<x \bmod y\leq 0$. Az $x \bmod 1=x-\lfloor x\rfloor$ értéket $x$ *törtrész*ének nevezzük.

**1.1.11. Oszthatóság a természetes számok körében.** Az $m$ természetes számot az $n$ természetes szám *osztó*jának, az $n$-et pedig az $m$ *többszörös*ének nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy $n$ *osztható* $m$-mel, ha van olyan $k$ természetes szám, hogy $n=mk$; jelölése $m|n$.

Az oszthatóság néhány egyszerű tulajdonsága azonnal következik a definícióból, például $n|n$ bármely $n$ természetes számra. A nulla elég furcsán viselkedik az oszthatóság szempontjából: nem osztója csak saját magának, viszont neki minden osztója. Az egy éppen fordítva: mindennek osztója, viszont neki csak saját maga osztója.

**1.1.12. Törzsszámok és prímszámok.** Egy nem nulla természetes szám osztói nem lehetnek nagyobbak, mint maga a szám. Ha egy $n>1$ természetes szám csak 1-gyel és saját magával osztható, akkor *törzsszám*nak nevezzük, egyébként *összetett szám*nak. Például $2,3,5,7,11,13,17,19,23$ törzsszámok. A $p>1$ természetes számot *prímszám*nak nevezzük, ha $p|mn$ esetén $p|m$ vagy $p|n$. Például $6|2\cdot 3$, de $6\nmid 2$ és $6\nmid 3$, így 6 nem prímszám. Minden prímszám törzsszám, mert ha $p=mn$, akkor $p|m$ esetén $m=pk=(mn)k=m(nk)$ miatt $nk=1$, ahonnan $n=1$ és $k=1$, azaz $m=p$, és hasonlóan $p|n$ esetén $n=p$. Meg fogjuk mutatni, hogy fordítva, ha egy természetes szám törzsszám, akkor prímszám is, továbbá minden egynél nagyobb természetes szám sorrendtől eltekintve egyértelműen írható fel prímszámok szorzataként.

**1.1.13. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, relatív prímek.** Törtekkel való számoláskor gyakran szükségünk van két vagy több pozitív természetes szám *legnagyobb közös osztó*jának (lnko) illetve *legkisebb közös többszörös*ének (lkkt) kiszámítására. Az alábbi eljárást — mint a neve is mutatja — már az ókori görögök is ismerték. Egyébként ha a számok legnagyobb közös osztója 1, akkor *relatív prím*eknek nevezzük őket.

**1.1.14. Bővített euklideszi algoritmus.** *A következő eljárás meghatározza az $a$, $b$ pozitív természetes számok $d$ legnagyobb közös osztóját, valamint $x$, $y$ egész számokat úgy, hogy $d = ax + by$ teljesüljön. (Az eljárás során végig $ax_n + by_n = r_n$, $n = 0, 1, \ldots$.)*

(1) *[Inicializálás.] Legyen $x_0 := 1$, $y_0 := 0$, $r_0 := a$, $x_1 := 0$, $y_1 := 1$, $r_1 := b$, $n = 0$.*

(2) *[Vége?] Ha $r_{n+1} = 0$, akkor $x := x_n$, $y := y_n$, $d := r_n$, és az eljárás véget ért.*

(3) *[Ciklus.] Legyen*

$$q_{n+1} := \lfloor r_n / r_{n+1} \rfloor, \quad r_{n+2} := r_n \bmod r_{n+1} = r_n - r_{n+1} q_{n+1},$$

$$x_{n+2} := x_n - x_{n+1} q_{n+1}, \quad y_{n+2} := y_n - y_{n+1} q_{n+1},$$

*növeljük meg $n$-et eggyel és menjünk (2)-re.*

**Bizonyítás.** Az $r_1, r_2, \ldots$ természetes számok — mivel $r_{n+2}$ az $r_{n+1}$-gyel való osztás maradéka — mindegyike kisebb az előzőnél, így az eljárás véges sok lépésben véget ér, mert egyébként természetes számok egy olyan részhalmazát kapnánk, amiben nincs legkisebb elem. Indukcióval, ha $ax_n + by_n = r_n$ és $ax_{n+1} + by_{n+1} = r_{n+1}$, akkor a második összefüggést szorozva $q_{n+1}$-gyel és kivonva az elsőből, $ax_{n+2} + by_{n+2} = r_{n+2}$, így végül $d = ax + by$. Innen $a$ és $b$ közös osztói mind osztói $d$-nek. Kilépéskor $r_{n+1} = 0$ $(n > 0)$, és $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ mind többszörösei $r_n = d$-nek, mert $r_{n-1} = q_n r_n$, $r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n$, és így tovább, speciálisan $a = r_0$ és $b = r_1$ is többszörösei $d$-nek. Így $d$ is közös osztó, a legnagyobb. $\square$

**1.1.15. Megjegyzés.** Elég a mindenkori $r_n$, $x_n$, $y_n$, $r_{n+1}$, $x_{n+1}$ és $y_{n+1}$ értékét tárolni. Ha az $x, y$ számokra nincs szükségünk, az $x_n, y_n$ számok kiszámítását teljesen elhagyhatjuk, és az *euklideszi algoritmus*t kapjuk. Ha csak $x$-re, illetve csak $y$-ra van szükség, akkor az $y_n$-ek, illetve az $x_n$-ek számítását hagyjuk el. Vegyük észre egyébként, hogy $y$, illetve $x$ még ekkor is kiszámítható $a$, $b$, $d$ és $x$, illetve $a$, $b$, $d$ és $y$ felhasználásával.

**1.1.16. Példa: bővített euklideszi algoritmus.** Számítsuk ki $\text{lnko}(172, 62)$ értékét.

| $n$ | $q_{n+1}$ | $r_{n+2}$ | $x_{n+2}$ | $y_{n+2}$ | $r_{n+2} = ax_{n+2} + by_{n+2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | | 172 | 1 | 0 | 172=172·1+62·0 |
| -1 | | 62 | 0 | 1 | 62=172·0+62·1 |
| 0 | 2=⌊172/62⌋ | 48=172 mod 62 | 1 | -2 | 48=172·1+62·(-2) |
| 1 | 1=⌊62/48⌋ | 14=62 mod 48 | -1 | 3 | 14=172·(-1)+62·3 |
| 2 | 3=⌊48/14⌋ | 6=48 mod 14 | 4 | -11 | 6=172·4+62·(-11) |
| 3 | 2=⌊14/6⌋ | 2=14 mod 6 | -9 | 25 | 2=172·(-9)+62·25 |
| 4 | 3=⌊6/2⌋ | 0=6 mod 2 | 31 | -86 | 0=172·31+62·(-86) |

Tehát az eredmény $2 = 172 \cdot (-9) + 62 \cdot 25$.

⋆ **1.1.17. Megjegyzés.** A görögöknek az euklidészi algoritmus azért volt fontos, mert szakaszok összemérésénél ezzel keresték meg azt a szakaszt, amelynek mindkét szakasz természetes számú többszöröse. (Osztás helyett ismételt kivonást használtak, ami lényegtelen különbség.) Amikor felfedezték, hogy egy négyzet oldala összemérhetetlen az átlójával — ma úgy mondanánk, hogy az arányuk irracionális — az általuk törtek helyett használt arányok elméletét ki kellett terjeszteni irracionális arányokra is. Ezt először Theatiosz (az euklidészi algoritmusra alapozva), majd Eudoxosz (egyenlőtlenségekre alapozva) tette meg. Eudoxosz definíciója az volt, hogy két-két egynemű mennyiség (például két hossz, két terület, két szög, stb.) $a\colon b$ aránya nagyobb mint a $c\colon d$ arány, ha vannak olyan $m, n$ természetes számok, hogy $ma > nb$, de $mc < nd$. Hasonló a definíció kisebbre, de fordított egyenlőtlenségekkel. Az újdonság az volt, hogy eddig csak arányok egyenlőségét definiálták úgy, hogy $a\colon b = c\colon d$, ha vannak olyan $m, n$ természetes számok, hogy $ma = nb$ és $mc = nd$. Ez csak racionális arányokra működik. Az új definícióra alapozva, az úgynevezett „kimerítés módszerével” be tudták bizonyítani, hogy például kétszer akkora átmérőjű kör területe négyszer akkora, ami a régi definícióval nem ment. Ezzel lényegében eljutottak a valós számok, mint tetszőleges arányok, definíciójához. Ma szabadon használjuk a tizedes törtekkel való közelítéseket, vagy ami ugyanaz a *végtelen tizedes tört*eket, és minden további nélkül hozzáadunk egy számot két szám szorzatához. A görögök ezt nem tették, mert ha a számok hosszak, akkor a szorzatuk terület, amihez nem lehet egy hosszat hozzáadni. A görögök pontosságának ideiglenes feladásán keresztül vezetett az út a matematika továbbfejlődéséhez. A Kínából származó tizedes törtek is az iszlám országok közvetítésével jutottak el Európába a XVI. században. A XVII. században Napier már tizedes törteket használt. A valós számok fogalmának tisztázása csak a XIX. században történt meg. Az egyik lehetséges megalapozás (lásd [20]) a *Dedekind-szelet*eket használja, amelyek szoros kapcsolatban állnak Eudoxosz arányelméletével.

**1.1.18. Tétel.** *Egy természetes szám pontosan akkor prímszám, ha törzsszám.*

**Bizonyítás.** Azt már beláttuk, hogy prímszám törzsszám is. Tegyük fel, hogy $p$ törzsszám, és legyen $p|mn$. Tegyük fel, hogy $p \nmid m$. Ekkor $p$ és $m$ relatív prímek. A bővített euklidészi algoritmussal kaphatunk olyan $x, y$ egészeket, hogy $px + my = 1$. Innen $pnx + mny = n$. Mivel $p$ osztója $mn$-nek, $mn = pk$ valamely $k$ természetes számra. Így $p(nx + ky) = n$. A zárójelben álló egész szám pozitív kell legyen, így $p|n$. □

**1.1.19. Megjegyzés.** Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, kapjuk, hogy ha $a$ és $b$ relatív prímek és $a|bc$, akkor $a|c$.

**1.1.20. A számelmélet alaptétele.** *Minden egynél nagyobb természetes szám a sorrendtől eltekintve egyértelműen felírható prímszámok szorzataként.*

**Bizonyítás.** prímszámHa $n$ nem törzsszám, akkor felírható két, nála kisebb, de 1-nél nagyobb szám szorzataként. Indukcióval folytatjuk ezt az eljárást: ha a kapott szorzatnak van nem törzsszám tényezője, akkor a legnagyobb ilyen tényező minden előfordulását helyettesítsük két nála kisebb, de 1-nél nagyobb természetes szám szorzatával. Az eljárás véges sok lépésben csupa törzsszám tényezőből álló felbontáshoz vezet, mivel egyébként természetes számok olyan halmazát kapnánk, amelyben nincs legkisebb elem.

A felbontás egyértelműségének bizonyításához tegyük fel indirekt, hogy van olyan természetes szám, amely két lényegesen különböző módon bontható fel, és legyen $n$ a legkisebb ilyen:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_j = q_1 q_2 \cdots q_k.$$

Mivel $p_1|n$, azaz $p_1|q_1 q_2 \cdots q_k$, a $p_1$ prímtulajdonsága miatt van olyan $i$, hogy $p_1|q_i$. Ekkor viszont $p_1 = q_i$, mert $q_i$ törzsszám. Egyszerűsítve a kapott közös tényezővel egy kisebb $n'$ számot kapunk, amelynek felbontása nem egyértelmű. Ez ellentmondás. □

**1.1.21. Hatványozás.** Egy egynél nagyobb természetes szám prímtényezős felbontásában ugyanaz a prímszám többször is előfordulhat. Ilyen esetekben érdemes egy rövidebb jelölést használni. Például az $5^2$ azt fogja jelenteni, hogy $5 \cdot 5$, az $5^3$ azt fogja jelenteni, hogy $5 \cdot 5 \cdot 5$, stb. A $2^{10}$ például azt jelenti, hogy 10 darab 2-est kell összeszoroznunk, ez 1024. Általában $a^n$ azt jelenti, hogy $n$ darab $a$-t kell összeszoroznunk, $n$ pozitív természetes szám, $a$ tetszőleges valós szám. Az ilyen kifejezéseket *hatvány*nak nevezzük, $a$ az *alap*, $n$ pedig a *kitevő*. A rövidség mellett további előnye a hatvány jelölésnek, hogy egyforma alapú hatványokat könnyű összeszorozni illetve elosztani egymással. Például $10^6 \cdot 10^3 = 10^9$, mert mindkét oldal azt jelenti, hogy összesen 9 darab 10-est kell összeszorozni. Tehát egyforma alapú hatványok összeszorzásakor a kitevők összeadódnak. Másrészt $10^6/10^4 = 10^2$, mert ha 6 darab 10-es szorzatát osztjuk 4 darab 10-es szorzatával, akkor 4 darab 10-essel lehet egyszerűsíteni, így végül 2 darab 10-es szorzata marad. Tehát egyforma alapú hatványok osztásakor a kitevők kivonódnak. Így például $10^3/10^2 = 10 = 10^1$, azaz $10^1$ úgy értendő, hogy 10. Ha következetesek akarunk maradni, akkor például $10^3/10^3 = 10^0$, másrészt viszont a hányados nyilván 1, így $10^0 = 1$. Mi lesz $10^{-2}$? Megint, ha következetesek akarunk maradni, akkor például egyrészt $10^3/10^5 = 10^{-2}$, másrészt a hányados egyszerűsítés után $1/100 = 1/10^2$, azaz a $-2$ kitevős hatvány 1 osztva a 2 kitevős hatvánnyal, azaz a 2 kitevős hatvány *reciproka*. Ha így értjük a nulla, illetve negatív kitevős hatványokat, akkor ezekre is érvényben marad az a szabály, hogy egyforma alapú hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak, osztásakor pedig kivonódnak. Még egy hasznos szabály, hogy ha egy hatványt hatványozunk, akkor a kitevők összeszorzódnak, például $(3{,}14^3)^4 = 3{,}14^{12}$, hiszen $(3{,}14^3)^4$ egy olyan szorzat, amelynek mind a 4 tényezője 3 darab 3,14 szorzata, azaz összesen $3 \cdot 4 = 12$ darab egyforma tényezőt kell összeszorozni.

Összefoglalva, akármilyen nem nulla $a$ alapra $a^0 = 1$ és $a^1 = a$, valamint ha $n$, $m$ tetszőleges egész számok, akkor $a^{-m} = 1/a^m$, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ és $(a^m)^n = a^{mn}$. A nulla alap pozitív kitevős hatványai nullák, negatív kitevős hatványai nincsenek értelmezve, és úgy fogjuk érteni, hogy $0^0 = 1$. (Bár erre az esetre okoskodásunk nem működik, érdemes általában úgy értenünk, hogy ha semmit nem szorzunk össze, a szorzat 1.)

A tíz hatványainak neve van, $10^1$ tíz, $10^2$ száz, $10^3$ ezer, $10^6$ millió, $10^9$ milliárd, $10^{12}$ billió, $10^{15}$ billiárd, $10^{18}$ trillió, $10^{21}$ trilliárd, $10^{24}$ quadrillió, stb. Más országokban a nagy számok nevei másként használatosak. Sok zsebszámológép tud hatványozni, és használja a 10 hatványaira a hatvány jelölést.

**1.1.22. Kanonikus alak.** A számelmélet alaptételében szereplő prímtényezős felbontást gyakran

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

összevont alakban írjuk, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_k$ különböző prímek, a kitevők pedig pozitív természetes számok. Ezt nevezzük a szám *kanonikus alak*jának. A kanonikus alak a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. (Például 9180 kanonikus alakja $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$.)

A kanonikus alakból leolvashatók $n$ pozitív osztói, ezek a

$$d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$$

alakú számok, ahol $\beta_j$ természetes szám, $\beta_j \leq \alpha_j$, ha $j = 1, 2, \ldots, k$, hiszen ha $n = cd$, akkor $c$ és $d$ prímtényezős felbontásának szorzata $n$ prímtényezős felbontása kell hogy legyen. Ha több számunk van, és mindnek adott a prímtényezős felbontása, akkor ezekből közös osztóik, valamint hasonlóan közös többszöröseik is leolvashatók. Ez azonban nem hatékony eljárás a legnagyobb közös osztó, illetve a legkisebb közös többszörös meghatározására, mert a prímtényezős felbontás meghatározása nagy számoknál általában időigényes.

**1.1.23. Következmény.** *Ha $a, b, c$ pozitív természetes számok és $a$ is, $b$ is relatív prím $c$-hez, akkor $ab$ is.* □

**1.1.24. Következmény.** *Tetszőleges $a, b$ pozitív természetes számokra* $\mathrm{lnko}(a, b) \cdot \mathrm{lkkt}(a, b) = ab$.

**Bizonyítás.** Vagy mindkét oldal egy, vagy mindkét oldal kanonikus alakjában ugyanazok a prímtényezők szerepelnek ugyanazon a hatványon. □

**1.1.25. Következmény.** *Ha $a, b, c$ pozitív természetes számok, akkor*

$$\mathrm{lkkt}(ac, bc) = c \cdot \mathrm{lkkt}(a, b).$$

**Bizonyítás.** Vagy mindkét oldal egy, vagy mindkét oldal kanonikus alakjában ugyanazok a prímtényezők szerepelnek ugyanazon a hatványon. □

**1.1.26. Állítás.** *Bármely $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív természetes számok legnagyobb közös osztójának kiszámítása visszavezethető két szám legnagyobb közös osztójának kiszámítására:*

$$\mathrm{lnko}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{lnko}(\mathrm{lnko}(a_1, a_2), a_3, a_4, \ldots, a_n).$$

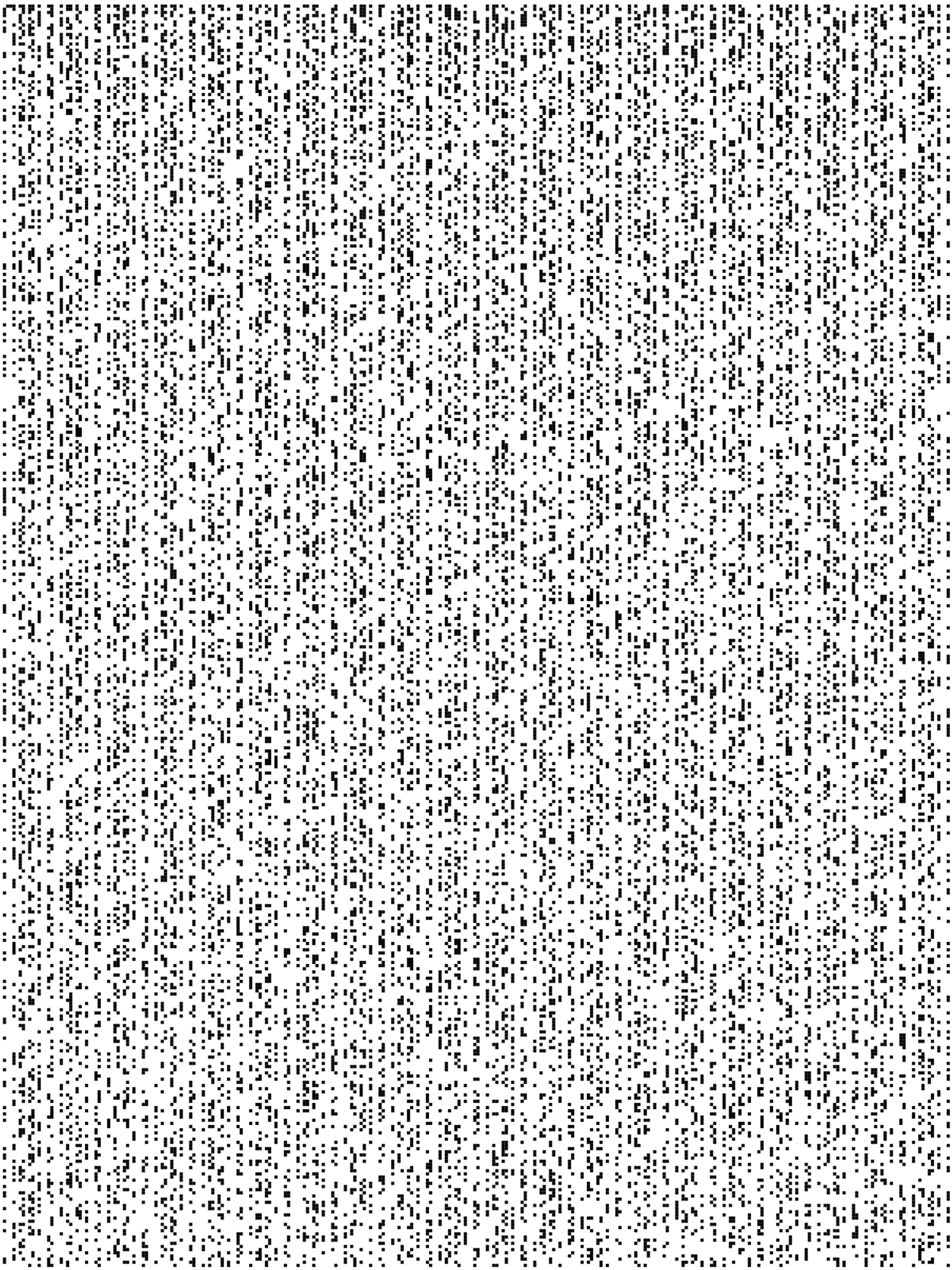
**Bizonyítás.** Legyen $d_{1,2}$ az $a_1, a_2$ számok legnagyobb közös osztója. Az $a_1, a_2$ közös osztói pontosan $d_{1,2}$ osztói. Így $a_1, a_2, \ldots, a_n$ közös osztói $d_{1,2}, a_3, a_4, \ldots, a_n$ közös osztói. □

**1.1.27. Állítás.** *Bármely $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív természetes számok legkisebb közös többszörösének kiszámítása visszavezethető két szám legkisebb közös többszörösének kiszámítására:*

$$\mathrm{lkkt}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{lkkt}(\mathrm{lkkt}(a_1, a_2), a_3, a_4, \ldots, a_n). \square$$

**1.1.28. Eratosztenész szitája.** Ha egy adott $n$ határig az összes prímet meg akarjuk határozni, *Eratosztenész szitája* a leggyorsabb: Felírjuk a számokat 1-től $n$-ig. Az 1-et kihúzzuk, mert nem prím. Az első megmaradó $p$ szám prím. Ennek a többszöröseit (elég $p^2$-től, mert a többi már ki van húzva) kihúzzuk, mert nem prímek. Így készült az 1.1.5 tábla, de a páros számokat kihagytuk, mert a 2 kivételével nem prímek. □

**1.1.29. Eukleidész tétele.** *Végtelen sok prímszám van.*



**1.1.5 ábra:** a 240 000-nél kisebb páratlan prímek, sorfolytonosan, 400 sor.

**Bizonyítás.** Tegyük fel indirekt, hogy csak véges sok prímszám van, $p_1, p_2, \ldots, p_k$, és legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$. Ekkor $n + 1$ minden $p_j$-vel osztva 1-et ad maradékként, tehát nem osztható egyetlen $p_j$-vel sem. Így prímtényezős felbontásában kell hogy legyen a

$p_j$-ktől különböző prímszám, ami ellentmondás. □

**1.1.30. Megjegyzés.** Ha, hasonlóan mint az előző bizonyításban, $n$ az összes, a $p_k$ prímnél nem nagyobb prímek szorzata, akkor $n+2, n+3, n+4, \ldots, n+p_k$ mind összetettek, azaz a természetes számok sorozatában találtunk $p_k - 1$ darab egymás utáni összetett számot. Mivel tetszőlegesen nagy prímszám létezik, van akármilyen hosszú csupa összetett számot tartalmazó intervallum.

**1.1.31. Megjegyzés.** Mivel a prímszámokat is vizsgáló számelmélet legfontosabb alkalmazásai az informatikában vannak, tovább az informatikai kötetben foglalkozunk számelmélettel.

**1.1.32. Gyökvonás.** Egy szám második hatványát a szám *négyzet*ének is szoktuk nevezni. Vajon melyik az a valós szám, amelynek a négyzete 2? Ez a kérdés a négyzetreemelés megfordítását kéri, ezért *négyzetgyök*vonásnak nevezzük. A 2 négyzetgyökére próbálgatással adhatunk tetszőleges pontossságú közelítés. Az 1 nyilván kevés, mert a négyzete 1, a 2 viszont túl sok, mert a négyzete 4. Próbálkozzunk 1,5-del! Ennek a négyzete 2,25, túl sok. Az 1,3 négyzete 1,69, túl kevés. Az 1,4 négyzete 1,96, kicsit kevés. Próbálkozzunk 1,42-vel! Ennek a négyzete 2,0164, sok, az 1,41 négyzete viszont 1,9881, kicsit kevés, de ez a jobb közelítés. A négyzetgyök jele $\sqrt{\ }$, tehát két tizedesjegy pontossággal $\sqrt{2} \approx 1{,}41$. Mivel négyzetreemelésnél a hibák megkétszereződnek, négyzetgyökvonásnál megfeleződnek, így a hiba $\approx 3\,‰$. Ne feledkezzünk meg róla, hogy ha az $x$ pozitív szám négyzete $a$, akkor $-x$ négyzete is $a$. Az egyértelműség kedvéért az a szokás alakult ki, hogy $\sqrt{a}$ a nemnegatív négyzetgyököt jelöli. Ha $a$ negatív, akkor viszont egyáltalán nincs olyan $x$ valós szám, amelynek négyzete $a$ lenne.

Egy szám harmadik hatványát a szám *köb*ének is szoktuk nevezni. Vajon melyik az a valós szám, amelynek a köbe 2? A kért eljárást *köbgyök*vonásnak nevezzük. Itt is próbálgatással adhatunk tetszőleges pontossságú közelítést. Az 1 nyilván kevés, mert a köbe 1, az 1,3 viszont túl sok, mert köbe 2,197. Az 1,2 köbe 1,728. Próbálkozzunk 1,25-tel! Ennek köbe 1,953125, de 1,26 köbe 2,000376. Az $n$-edik gyök jele $\sqrt[n]{\ }$, tehát két tizedesjegy pontossággal $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. Mivel köbre emelésnél a hibák megháromszorozódnak, köbgyökvonásnál harmadolódnak, így a hiba kisebb, mint $0{,}2\,‰$. Köbgyököt negatív számból is lehet vonni, és egy valós $a$ számhoz csak egy olyan $x$ valós szám van, amelynek a köbe $a$. Hasonló a helyzet az ötödök gyök vonásánál és minden $n$-edik gyök vonásánál, ha $n$ páratlan. Ha viszont $n$ páros, akkor $n$-edik gyök vonásánál olyan a helyzet, mint a négyzetgyökvonásnál: negatív $a$ számhoz nincs olyan $x$ valós szám, amelynek $n$-edik hatványa $a$, nemnegatívhoz viszont $\sqrt[n]{a}$ és az ellentettje is ilyen.

Négyzetgyök, köbgyök, sőt, akárhanyadik gyök vonására is van a próbálgatásnál hatékonyabb, az osztáshoz hasonló, de kicsit bonyolultabb eljárás. Ezt azonban a számítógépek korában nemigen lenne érdemes használni. Érdekességként azonban a következő két pontban megismerkedhetünk egy példán keresztül az ókori Kínában használt módszerrel a „Matematika kilenc könyvben” című mű nyomán.

⋆ **1.1.33. Horner-elrendezés.** A kínaiak módszere a ma Horner-elrendezésnek nevezett szabályon alapult, amit sok mindenre használtak. Mai jelölésekkel ismertetjük módszerüket. Tekintsünk egy $ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomot! A polinom értékét egy adott $x$ helyen célszerű az

$$((ax + b)x + c)x + d$$

„elrendezéssel” kiszámítani, ez a *Horner-elrendezés*. Nyilván akárhanyad fokú polinomra is felírható hasonló elrendezés. A kínaiak ezt arra is felhasználták, hogy az $x = y + p$ helyettesítéssel adódó polinom együtthatóit megkapják, ahol $p$ egy tetszőleges paraméter. (Ezek kiszámolhatóak lennének a binomiális tétel alapján is, de a kínaiak módszere jobb.) Írjuk be a helyettesítést a Horner-elrendezésbe:

$$\Big((a(y+p)+b)(y+p)+c\Big)(y+p)+d.$$

A zárójelek felbontásával adódnak az együtthatók. A kínaiak szabálya az alábbi elrendezésnek felel meg:

$$\begin{array}{lllll} a & b & c & d \\ a & b+ap & c+bp+ap^2 & d+cp+bp^2+ap^3 \\ a & b+2ap & c+2bp+3ap^2 & \\ a & b+3ap & & \\ a & & & \end{array}$$

A táblázat elemei fokozatosan kiszámolhatók: mindegyik úgy adódik, hogy a tőle jobbra állót szorozzuk $p$-vel, és hozzáadjuk a felette állót. Csak szorozni és összeadni kell. A kínaiak természetesen nem algebrai kifejezésekkel, hanem konkrét számokkal számoltak. A kiszámolt, ferdén felfelé menő sorok megfelelnek a zárójelek fokozatos felbontásával kapott együtthatóknak, a legmagasabb fokú tag együtthatójával kezdve. Csak az utolsó ilyen ferde sorra van szükségünk. Nyilván a másodfokú és a harmadfokúnál magasabb fokú polinomokra is alkalmazható a módszer. Az első oszlopot rendszerint ki sem írták.

Ennek a módszernek az alapján a kínai matematikusok számegyütthatós algebrai egyenletek gyökeinek meghatározására alkalmas módszert fejlesztettek ki.

⋆ **1.1.34. Kínai gyökvonás.** Az egyszerűség kedvéért mai jelöléseket fogunk használni. Legyen a feladat köbgyökvonás 1860867-ből, azaz megoldandó az $x^3 = 1860867$ egyenlet. Mivel kétjegyű szám köbe legfeljebb hatjegyű, a köbgyök háromjegyű. Feltesszük, hogy $x = 100x_1$, így

$$1000000x_1^3 = 1860867. \tag{1}$$

Próbálgatással $x_1 = 1 + y$, ahol $0 < y < 1$. A $p$ paramétert 1-nek választva, az előző pont módszerével a

$$1000000y^3 + 3000000y^2 + 3000000y = 860867$$

egyenletre jutunk; a különbség mindössze annyi, hogy most a konstans tag a másik oldalon van, így az utolsó oszlop kiszámításakor nem összeadni, hanem kivonni kell.

Most legyen $10y = y_1$, ekkor

$$1000y_1^3 + 30000y_1^2 + 300000y_1 = 860867. \tag{2}$$

Az $y_1$ egész részét közelítően a magasabb fokú tagokat elhagyva és osztva kapjuk, de ki kell próbálni. Azt kapjuk, hogy $y_1 = 2 + z$. A $p$ paramétert 2-nek választva, (2)-ből kapjuk az $z$-re vonatkozó

$$1000z^3 + 36000z^2 + 432000z = 132867$$

egyenletet, a $10z = z_1$ helyettesítéssel pedig a

$$(3) \qquad z_2^3 + 360z_1^2 + 43200z_1 = 132\,867$$

egyenletet. Elhagyva a magasabb fokú tagokat és osztva $z_1$ együtthatójával — most már nagyon nagy eséllyel — megkapjuk a gyök egész részét, ami ebben az esetben megoldás is. Tehát $x = 123$.

A négyzetgyökvonás hasonló, de egyszerűbb. Az útmutatás azzal zárul, hogy ha a művelet nem ér véget, „folytatható tovább, mint korábban". Nincs kizárva, hogy itt a tört tizedes jegyeinek kiszámítására gondoltak, bár példa nincs.

Nem négyzetszám nevezőjü törtekből történő négyzetgyökvonásra a

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

szabályt ajánlják. A megfelelő szabály köbgyökre

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

**1.1.35. Hatványtáblák.** A középkorban gondot okozott a szorzás, az osztás, pláne a hatványozás, amire pedig a kamatos kamat számításánál szükség volt. A csillagászati számítások különösen nagy pontosságot igényeltek. Csábító volt az a gondolat, hogy a hatványokat könnyű összeszorozni, mert csak a kitevőket kell összeadni, sőt, hatványozni is, mert csak a kitevőt kell szorozni. Célszerű 1-hez közeli alapot választani, hogy a táblázat „jó sűrű" legyen. Az első, ezen az elven működő „számolótáblát" Napier tette közzé. Alapszámnak a 0,999 999 9-et választotta, ezt hatványozta. Talán azért választott 1-nél kisebb alapot, mert elsősorban a szinuszokkal való számolást akarta megkönnyíteni. Egy ilyen táblázat birtokában két 0,1 és 1 közé eső szám szorzásához visszakeressük a megfelelő kitevőket a táblázatból, összeadjuk őket, majd a kapott kitevőhöz tartozó értéket kiolvassuk. A többi szorzás ilyen szorzásra könnyen visszavezethető a tizedesvessző (amit Európában szintén Napier vezetett be) eltolásával. Briggs javasolta a tizes alap használatát, ami sokkal jobban illeszkedik számrendszerünkhöz. De a 10 túl nagy, ezért kicsi kitevőkkel kell kezdenünk. De mit jelent $10^{0{,}00001}$ vagy pláne $10^{\sqrt{2}}$?

**1.1.36. Törtkitevős hatványok.** Abban kellene megállapodnunk, hogy például mit is jelent az, hogy $10^{0{,}5}$ vagyis $10^{1/2}$? Ha érvényben akarjuk tartani jól bevált szabályunkat, hogy hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak, osztásakor pedig kivonódnak, akkor $10^{1/2} \cdot 10^{1/2} = 10^1 = 10$, tehát $10^{1/2}$ az egyetlen olyan pozitív szám, amit saját magával szorozva 10-et kapunk. Ezt a 10 négyzetgyöke. A négyzetgyökvonáshoz teljesen hasonlóan, próbálgatással számolhatjuk ki akármilyen $b$ pozitív szám $n$-edik gyökét, ahol $n$ akármilyen pozitív természetes szám: ez az egyetlen olyan $x$ pozitív szám, amelyre $x^n = b$. Ezt a számot $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$-vel jelöljük. Ennek hatványozásával akármilyen $b^{m/n}$ számot megkaphatunk, ahol $n$ tetszőleges pozitív egész szám, $m$ pedig tetszőleges egész szám. Szerencsére nem számít, hogy a kitevőt hogyan írjuk fel törtként, mindig ugyanazt kapjuk, például $10^{1/2} = \sqrt{10}$ ugyanaz, mint $10^{2/4} = (\sqrt[4]{10})^2$, és az sem számít, hogy előbb gyököt vonunk és aztán hatványozunk vagy fordítva, például $(\sqrt[4]{10})^2 = \sqrt[4]{10^2}$. Negatív alapoknál azonban nem ez a helyzet! Például $\sqrt[3]{-8}=-2$, de $\sqrt[6]{(-8)^2}=2$ és $\left(\sqrt[6]{-8}\right)^2$ (a valós számok körében) nincs értelmezve. Ezért a törtkitevős hatványokat negatív alapokra nem értelmezzük! Végül, ha $b^c$-re van szükségünk, ahol $c$ tetszőleges szám, akkor $c$-t törttel közelítve kaphatunk közelítést. A törtkitevős hatványokat — pozitív kitevőkre — Nicole D'Oresme (≈1323–1382) francia tudós vezette be.

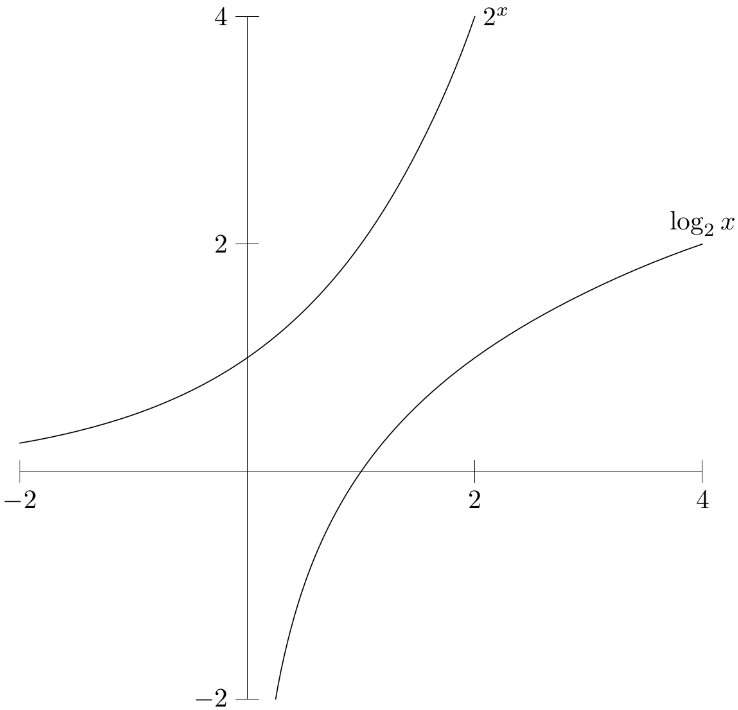
**1.1.37. Logaritmus.** Bár a legtöbb zsebszámológép akármilyen $b$ pozitív alap akármilyen $c$ kitevős hatványát képes kiszámítani, sőt a fordított feladatot is megoldja, akármilyen $b \neq 1$ pozitív alaphoz és akármilyen $c$ pozitív számhoz képes meghatározni azt az $x$ kitevőt, amelyre $b^x = c$ (ezt az $x$-et a $c$ szám $b$ alapú *logaritmus*ának nevezzük és $\log_b c$-vel jelöljük), érdemes megismerkedni azzal, hogyan is állította össze Briggs az első tizes alapú logaritmustáblát. A tizes alapú logaritmust lg-vel szokás jelölni, mi is ezt tesszük. Először is négyzetgyököt vonunk 10-ből. Így megkajuk azt a számot aminek logaritmusa 0,5, azaz $10^{0,5} \approx 3{,}16227766\ldots$-ot. Most a kapott számból újra négyzetgyököt vonva, megkapjuk azt a számot, aminek logaritmusa 0,25, azaz $10^{0,25} \approx 1,77827941\ldots$-ot. Játszunk egy kicsit zsebszámológépünkkel, újra meg újra megismételve a gyökvonást : $10^{0,125} \approx 1{,}333521432\ldots$, $10^{0,0625} \approx 1{,}154781985\ldots$, $10^{0,03125} \approx 1{,}074607828\ldots$, $10^{0,015625} \approx 1{,}036632928\ldots$, $10^{0,0078125} \approx 1{,}018151722\ldots$, $10^{0,00390625} \approx 1{,}009035045\ldots, \ldots$. Azt vesszük észre, hogy amennyivel az eredmény több 1-nél, az egyre pontosabban feleződik. Mivel minden lépésben a kitevő is feleződik, azt kapjuk, hogy ha $x$ kicsi, akkor $10^{cx} \approx 1+x$ valamilyen $c$ konstansra. Hogy ezt a konstanst nagy pontossággal megkapja, Briggs 54 négyzetgyökvonás végzett el egymás után 32 tizedesjegy pontossággal. Azt kapta, hogy $c \approx 0{,}43429448\ldots$. A négyzetgyököket is feljegyezte. Nézzük, hogy kaphatjuk meg például $\lg 2$ értékét. Az első gyökkel, ami kisebb, mint 2, eloszjuk 2-t: $2/10^{0,25} \approx 1{,}12468265$. Ezt a számot megint oszjuk az első gyökkel, ami kisebb nála: $2/10^{0,25+0,03125} \approx 1{,}046598229$. Tovább folytatva az eljárást $2/10^{0,25+0,03125+0,0150625} \approx 1,009613143\ldots$ és $2/10^{0,25+0,03125+0,015625+0,00390625} \approx$ 1,000572922. Ha most, kissé hamar, elveszítjük türelmünket, akkor az

$$1{,}000572922 \approx 10^{0,000572922\cdot 0,43429448} \approx 10^{0,000248817}$$

közelítéssel azt kapjuk, hogy $2 \approx 10^{0,301030067}$, azaz $\lg 2 \approx 0{,}301030067$. Valójában a hét tizedesjegyre helyesen kerekített érték 0,3010300.

Tegyük fel, hogy valamilyen $a$ alapra rendelkezésünkre áll az $a$ hatványainak egy részletes táblázata, de mi egy másik, $b$ alapra akarjuk $b^x$ értékét meghatározni. Először határozzuk meg $\log_a b$ értékét. Ez az a kitevő, amire hatványozva $a$-t $b$-t kapunk, tehát az $a$ hatványainak táblázatából meg kell keresnünk azt a kitevőt, amire $a$ hatványa éppen $b$ lesz, ez az $\log_a b$. Képletben $a^{\log_a b} = b$, így mindkét oldalt $x$-edikre hatványozva $b^x = a^{x\cdot\log_a b}$. Az $a = 10$, $b = 2$ esetben $\lg 2 \approx 0{,}3010300$.

**1.1.38. Számolás logaritmusokkal.** Mint láttuk, ha valamilyen (pozitív, de 1-től különböző) $a$ alapra van egy, az $a$ hatványait tartalmazó táblázatunk, akkor abból az $a$ alapú logaritmusokat is kiolvashatjuk, ha „visszafele használjuk”. Hasonlóan, ha van egy $a$ alapú logaritmustáblánk, akkor abból az $a$ alapú hatványokat is kiolvashatjuk, ha „visszafele használjuk”; a hatványozás és a logaritmus képzése egymás fordítottja, idegen szóval *inverze*. A 1.1.6 ábra az $y = 2^x$ és az $y = \log_2 x$ függvények egy darabját ábrázolja, bármelyik képe a másik képéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel adódik.




**1.1.6 ábra:** hatvány és logaritmus.

Hogyan számolhatunk logaritmusokkal? A logaritmus definíciója szerint ha $b$ és $c$ pozitív számok, akkor $a^{\log_a b} = b$ és $a^{\log_a c} = c$. Ezeket az összefüggéseket összeszorozva és újra felhasználva a logaritmus definícióját

$$a^{\log_a b + \log_a c} = b \cdot c = a^{\log_a b \cdot c}.$$

De az $a$ alap két hatványa csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők egyenlőek, így $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, azaz a szorzat logaritmusa a logaritmusok összege. Hasonlóan

$$a^{c \cdot \log_a b} = b^c = a^{\log_a b^c},$$

így $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, azaz a hatvány logaritmusa a kitevőször az alap logaritmusa.

A hatványozásnál kiderült, hogy egyetlen $a$ alap hatványainak táblázata elegendő arra, hogy bármilyen alap bármilyen hatványát kiszámoljuk. Ugyanezt igaz a logaritmusnál is. Valóban, ha $b$ nem 1, akkor a $b^{\log_b c} = c$ összefüggés $a$ alapú logaritmusát véve $\log_a c = (\log_b c) \cdot (\log_a b)$, ahonnan

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

**1.1.39. Számolóművészek.** Néhányan különleges mutatványokat képesek bemutatni. Például ha kiszámoljuk türelmes munkával a 13-nak a 31-edik hatványát, a kapott 35 jegyű számot felírva, és kérve a 31-edik gyökét, a számolóművész csak rápillant, és már mondja is, hogy 13. Hogy csinálja? Titka egyszerű: megtanulta a számok logaritmusát két tizedesjegyre mondjuk 20-ig. Ez nem is nehéz: mi is tudjuk, hogy a 2 logaritmusa 0,30, így a 4-é 0,60, a 8-é 0,90, a 16-é 1,20, az 5-é 0,70, a 20-é pedig 1,30. A 9 logaritmusa 0,95, a háromé ennek a fele, és így megvan a 6 logaritmusa is. A 7 logaritmusa 0,85. A többi számét az alábbi kis táblázat tartalmazza:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 1,04 | 1,08 | 1,11 | 1,15 | 1,18 | 1,20 | 1,23 | 1,26 | 1,28 |

A bűvészmutatványhoz csak az kell, hogy a hatvány 35 jegyű, így a logaritmusa 34 és 35 közé esik, tehát a keresett szám logaritmusa 34/31-ed és 35/31-ed közé. Ilyen egész szám csak egy van, a 13. A keresett szám logaritmusára pontosabb becslést is kaphatunk, ha felhasználjuk a hatvány első jegyének logaritmusát.

Bűvészetünket kiterjeszthetjük 40-ig, ha a kapott logaritmusból levonunk 0,30-at, a kettő logaritmusát. Persze így az eredmény félegész is lehet, és szorozni kell 2-vel. Ez a trükk többször is használható, ha három jegyű logaritmusokat tanulunk meg.

**1.1.40. $p$-adikus számok.** Az előző mutatványnál segíthet, ha az utolsó számjegyet megfigyeljük. Páratlan szám bármelyik hatványának az utolsó jegye páratlan, párosé pedig páros. Az 1-re végződő számok hatványai 1-re végződnek, de nem csak ezek: a 9-re végződő számok hatványai felváltva 9-re és 1-re végződnek. A 3-ra végződők hatványai 3-ra, 9-re, 7-re, 1-re, 3-ra, stb., a 7-re végződők hatványai pedig 7-re, 9-re, 3-ra, 1-re, 7-re, stb. Ebből már következik, hogy csak az 5-re végződő számok hatványai végződhetnek 5-re, és ezek mindig 5-re is végződnek. A 2-re végződő számok hatványai 2-re, 4-re, 8-ra, 6-ra, 2-re, stb., végződnek. A 8-ra végződő számok hatványai 8-ra, 4-re, 2-re, 6-ra, 8-ra, stb., végződnek. A 4-re végződő számok hatványai váltakozva 4-re és 6-ra végződnek, míg a 6-ra végződő számok minden hatványa 6-ra végződik. Végül látjuk, hogy csak a 0-ra végződő számok hatványai végződhetnek nullára, és ezek mind nullára is végződnek.

Látjuk, hogy a 0 és az 1 végződés mellett az 5 és a 6 végződés is megmarad. Van-e olyan kétjegyű végződés, amely szintén megmarad? A 6-ra végződő számok között némi keresgéléssel ráakadhatunk a 76-ra (csak ez van). És három jegyű csoport? Itt is ráakadhatunk a 376-ra. Meddig lehet ezt folytatni? Meglepő módon akármeddig! Így a végtelen …7109376 „számhoz” jutunk. Az 5 végződéssel is van ilyen „szám”, a …2890625, több viszont nincs. Meglepő módon ezek a „számok” a 0 és az 1 mellett az $x^2 = x$ egyenlet megoldásai. Más, mondjuk $p$ alapú számrendszerben is számolhatunk végtelen számokkal, és körükben is kereshetjük egyenletek megoldásait. Ezek a „végtelen számok” a $p$-adikus számok. Az egész csak játéknak tűnik, de komoly alkalmazásai vannak. Ez jellemző a matematikára: sokszor váratlan összefüggések bukkannak fel. □

**1.1.41. Számtani és mértani közép.** Ha többen megmérnek valamilyen ismeretlen $x$ mennyiséget, sőt, ha magunk mérjük meg többször, akkor különböző $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékeket kapunk. Hogyan közelíthetjük a mérési eredmények birtokában az ismeretlen mennyiséget? Általában legjobb a mérési eredmények *átlag*át, más szóval *számtani közep*ét venni:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Más típusú méréseknél ez nem jó gondolat. Ha például két számítógépet hasonlítunk össze több, mondjuk öt különböző programon, és az első négy esetben ötször gyorsabb, egy esetben viszont ötször lassúbb, akkor az első gépet érezzük gyorsabbnak, pedig a számtani közép $(4 \cdot 1/5 + 5)/5$ ezt adja lassabbnak. Ilyen esetekben jobb a szorzatok gyökét tekinteni, ez a *mértani közép*:

$$\overline{x} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

**1.1.42. Feladat [6].** Irjuk be a kipontozott helyre a „szükséges, de nem elegendő”, „elegendő, de nem szükséges”, „szükséges és elegendő” kifejezéseket úgy, hogy igaz kijelentést kapjuk:

(1) Ahhoz, hogy öt pozitív szám összege 100-nál kisebb legyen, ..., hogy legalább az egyik szám 20-nál kisebb legyen;

(2) Ahhoz, hogy egy háromszög területe 50 $\mathrm{cm}^2$ legyen, ..., hogy az egyik oldala 20 cm, a hozzá tartozó magasság 5 cm legyen;

(3) Hogy egy négyszög paralelogramma legyen, ..., hogy legyen szimmetriaközéppontja.

(4) Hogy egy szám osztható legyen 12-vel, ..., hogy osztható legyen 3-mal.

(5) Hogy az $x^2 + px + q = 0$ egyenletnek két, megegyező előjelű gyöke legyen, ..., hogy $q$ negatív legyen;

(6) Hogy egy négyszög paralelogramma legyen, ..., hogy minden oldala egyenlő legyen;

(7) Hogy két egész szám összege pozitív legyen, ..., hogy mindkét szám pozitív legyen;

(8) Hogy egy szám osztható legyen 4-gyel, ..., hogy páros legyen;

(9) Hogy egy szám osztható legyen 6-tal, ..., hogy osztható legyen 2-vel és 3-mal.

**1.1.43. Feladat [8].** Tegyük fel, hogy meg van adva egész számoknak egy halmaza. Válasszuk ki az egyiket az alábbi állítások közül, és tegyük fel, hogy igaz. Melyekről tudjuk eldönteni a többi állítás közül, hogy igaz vagy hamis?

(1) Az összes adott szám többszöröse 15-nek.

(2) 5-nek egyetlen többszöröse sincs az adott számok között.

(3) Mindegyik adott szám többszöröse 3-nak és 5-nek.

(4) Nem mindegyik adott szám többszöröse 15-nek.

(5) Egyetlen adott szám sem többszöröse 15-nek.

(6) Van az adott számok között többszöröse 15-nek.

**1.1.44. Feladat [9].** Tegyük fel, hogy meg van adva természetes számoknak egy halmaza, amely az 1-et nem tartalmazza. Válasszunk ki az alábbi állítások közül egyet, tegyük fel, hogy hamis. Melyek lesznek igazak a többi állítás közül?

(1) Mindegyik szám összetett.

(2) Az adott számok között van prím.

(3) Az adott számok között egyetlen összetett szám sincs.

(4) Minden adott szám prím.

(5) Az adott számok között van összetett szám.

(6) Az adott számok közül nem mindegyik prím.

(7) Mindegyik adott szám nem prím.

**1.1.45. Feladat [5].** Igazak-e az alábbi állítások a természetes számok körében?

(1) Bármely $a$-hoz van olyan $b$, hogy $b > a$ és $a$ osztója $b - a$-nak.

(2) Bármely $a$-hoz van olyan $b$, hogy $b > a$ és $a^2$ osztója $b - a$-nak.

(3) Bármely $a$-hoz van olyan $b$, hogy minden $a$-nál kisebb $c$ osztója $b$-nek.

(4) Van olyan $a$ szám, hogy minden nála kisebb pozitív szám osztója.

(5) Bármely természetes számhoz van nála kisebb prímszám.

**1.1.46. Feladat [5].** Igazak-e a valós számok körében az alábbi kijelentések?

(1) Bármely $x$-hez van olyan $y$, hogy ha $z > y$, akkor $z/5 > x$.

(2) Bármely $x$-hez van olyan pozitív $y$, hogy ha $z > y$, akkor $z/(x + 1) > 5$.

**1.1.47. Feladat [7].** Tagadjuk az előző két feladatban szereplő állításokat. Igazak-e az így kapott állítások?

**1.1.48. Feladat [5].** Számoljuk át 21/22-et és 1/7-et tizedestörtbe legalább hét tizedesjegyre! Mit veszünk észre? Mi a magyarázat? Az ismétlődő szakasz elejét és végét a számjegy fölé tett ponttal szoktuk jelölni. A két pont lehet egy számjegy felett is, ha a szakasz egy hosszú, például $1/3=0{,}\ddot{3}$.

**1.1.49. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy szakaszos tizedestört mindig racionális, azaz kifejezhető egészek hányadosaként. Mennyi $0{,}1\ddot{9}$?

**1.1.50. Feladat [7].** Számoljunk át néhány 10 és 1000 közötti egész számot kettes számrendszerbe! Hogyan használhatunk ehhez csak a négy alapműveletet ismerő zsebszámológépet? Végezzünk a kettes számrendszerbeli alakkal alapműveleteteket!

**1.1.51. Feladat [8].** Számoljuk vissza az előző feladatban kiszámolt kettes számrendszerbeli alakokat tizes számrendszerbe! Hogyan használhatunk ehhez csak a négy alapműveletet ismerő zsebszámológépet? A kettes számrendszerbeli alak melyik végén érdemes kezdeni a számolást?

**1.1.52. Feladat [5].** Számoljuk át a kettes számrendszerbeli alakokat 4-es, 8-as és 16-os számrendszerbe! Miért könnyű ez?

**1.1.53. Feladat [10].** Számoljunk át néhány 100 és 10000 közötti számot 60-as, 64-es és 85-ös számrendszerbe! Az átszámolt alakot írjuk sumér mintára úgy, hogy a számjegyeket kétjegyű decimális számként írjuk, a csoportokat ponttal elválasztva! (A számjegyeket egyetlen jellel is leírhatjuk, ha az úgynevezett ASCII kódtábla szerinti sorrendben használjuk a jeleket, a nulla jelének a felkiáltójelet választva; ekkor nem kellenek a pontok.) Hány jegyű lesz $2^{32} - 1$ a 64-es, illetve a 85-ös számrendszerben? Számoljuk vissza a számokat tizes számrendszerbe! Melyik végén érdemes kezdeni a visszaszámolást a számnak? Hogyan használhatunk csak a négy alapműveletet ismerő számológépet?

**1.1.54. Feladat [8].** Csak a négy alapműveletet ismerő számológéppel számoljunk oda és vissza 0 és 1 közötti tizedestörteket 2-es, 16-os, 60-as, 64-es és 85-ös számrendszerbe! (A tört kezdete itt is 0, lesz.)

**1.1.55. Feladat [10].** Csak a négy alapműveletet ismerő zsebszámológéppel számoljunk át oda és vissza pozitív tizedestörteket 2-es, 16-os, 60-as, 64-es és 85-ös számrendszerbe! Az eredményben az egész részt a tört résztől vessző válassza el, a számjegyeket pedig ha kell, pont! Hogyan vezethetjük vissza az átszámolást egészek, illetve 0 és 1 közötti törtek átszámolására? Melyik a kényelmesebb?

**1.1.56. Feladat [10].** Briggs logaritmus táblája elkészítéséhez ismételten vont négyzetgyököt 10-ből sok jegyre. Hogyan lehet kézzel négyzetgyököt vonni egy pozitív tizedestörtből? A módszer tulajdonképpen az indiaiaktól származik, de ők porral behintett táblára alkalmas változatban, törlést is alkalmazva használták. Hasonló az osztáshoz, de most a szám jegyeit a tizedesvesszőtől kezdve balra és jobbra kettes csoportokra osztjuk. Minden lépésben egy olyan $a$ számot keresünk, aminek négyzete a lehető legjobban közelíti a balról vett néhány csoport által megadott számot alulról, és meghatározzuk a maradékot is, amivel az eddig figyelembe vett csoportok által adott szám nagyobb, mint $a^2$. Az első csoportra ez nagyon könnyű, mert a szorzótáblát jól ismerjük, és egy kivonás megadja a maradékot is, ami most legfeljebb 18. Ha $a$ az eddig talált szám és a maradék $r$, akkor először is a maradékhoz hozzáírjuk a következő, mondjuk $c$ jegyet, így az $10r + c$ lesz. Ezt osztjuk $2a$-val maradékosan. Legyen a hányados $q$, ez a négyzetgyök következő számjegye, vagy legalábbis annak felső korlátja. A maradékhoz hozzáírunk még egy, mondjuk $d$ számjegyet. A $100r + 10c + d$ számból kivonjuk a $(20a + q) \times q$ szorzatot. Ha a különbséq negatív lenne, $q$-t eggyel csökkenteni kell (ez egyre ritkábban fordul elő, ahogy haladunk előre), egyébként a különbség az új maradék, ezzel folytatjuk. Amikor a tizedesvesszőt átlépjük, a négyzetgyökben is kitesszük a vesszőt. Egy példa:

```
√‾  186624=432
     26:8
     266
     -83x3
      172:86
      1724
      -862x2
         0
```

Gondoljuk át az eljárást: minden a $(10a + q)^2 = 100a^2 + 20aq + q^2$ öszefüggésen múlik. Vonjunk kézzel négyzetgyököt néhány, 100 és 1000000 közöti számból!

**1.1.57. Feladat [6].** Az előző feladat eljárása más számrendszerben is működik. Próbáljuk ki kettes számrendszerben! Elkerülhetjük-e könnyen, hogy a kivonásnál negatív érték adódjék?

**1.1.58. Feladat [5].** Ide kapcsolódik az $A$ alapú számrendszerben a négyzetgyök tört közelítésének kiszámítására szolgáló

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{a \cdot A^{2n}}}{A^n}$$

összefüggés, amit a középkorban használtak. Mi a megfelelő összefüggés köbgyökre?

**1.1.59. Feladat [8].** Liu Huj már a III. században ismert egy közelítő képletet a négyzetgyökre: ha $a > 0$ és $0 < r < 2a + 1$, akkor

$$a + \frac{r}{2a+1} < \sqrt{a^2 + r} < a + \frac{r}{2a}.$$

Bizonyítsuk ezt be! Mi a megfelelő képlet köbgyökre?

**1.1.60. Feladat [11].** A sumérok négyzetgyököt a négyzettáblázatuk segítségével vontak. Ha csak egy $b$ közelítő értékük volt $c$ négyzetgyökére, azt $b$ és $c/b$ számtani közepével helyettesítve javították. Ha kellett, a javítást többször is megismételték. Vizsgáljuk meg módszerüket! Az $a$ szám négyzetgyöke legyen $x$, és dolgozzunk $A$ alapú számrendszerben. Eltolva a vesszőt páros számú hellyel, majd az eredményben fele annyi hellyel visszatolva, feltehetjük, hogy $1/A \leq a \leq A$. Az $x_0 = 1$ (elég rossz) közelítéssel indulva, legyen $x_{n+1} = (x_n + c/x_n)/2$, ha $n \geq 0$. A hiba becsléséhez vizsgáljuk meg a $t_n = x_n/x$ sorozatot! (Ennek a hibája az $x_n$ relatív hibája.) Erre $t_{n+1} = (t_n + 1/t_n)/2$, ha $n \geq 0$. Vegyük észre, hogy $1/\sqrt{A} \leq t_0 \leq \sqrt{A}$ és $t_n \geq 1$, ha $n \geq 1$. Egy másik, $x'$-höz tartozó $t'_n$ sorozatra, ha $t'_1 \leq t_1$, akkor $t'_2 \leq t_2$, $t'_3 \leq t_3$, stb., továbbá

$$t_{n+1} - 1 = \frac{(t_n - 1)^2}{2t_n}, \text{ ha } n \geq 0.$$

Így $A \leq 16$ esetén $t_1 - 1 \leq 9/8$, $t_2 - 1 \leq 1/3$, $t_3 - 1 \leq 1/24$, $t_4 - 1 \leq 1/1200$, és ebből $x_4 - x = x(t_4 - 1) \leq 1/300 < 1/A^2$, és így $x_n - x$ nem negatív és kisebb, mint $1/A^{2^{(n-3)}}$, ha $n \geq 4$, tehát durván szólva $x_4$ vessző utáni két jegye pontos, és a pontos jegyek száma minden lépésben legalább megduplázódik. Vonjunk ennek az eljárásnak az alapján négyzetgyököt számológéppel az alapműveletek segítségével néhány számból!

**1.1.61. Feladat [6].** Az egyiptomiak egyszerű módszert használtak a szorzásra. Írjuk a szorzandót az egyik oszlop tetejére, a szorzót egy másik oszlop tetejére! Minden lépésben a szorzandót duplázzuk (önmagával összeadjuk), a szorzót felezzük. Ha páratlan számot kell feleznünk, akkor levonunk belőle egyet, és a szorzandó aktuális értékét aláhúzzuk. Végül a szorzó 0 lenne. Adjuk össze a szorzandóból kapott, aláhúzott értékeket! Ez adja a szorzatot. Az eljárást egy példán mutatjuk be:

$$\begin{array}{rrr} 27 & 12 & 0 \\ 54 & 6 & 0 \\ \underline{108} & 3 & 1 \\ \underline{216} & 1 & 1 \\ 324 & & \end{array}$$

Az utolsó oszlop felesleges, nem is használták, de mutatja az eljárás lényegét: a szorzót tulajdonképpen átalakítjuk kettes számrendszerbe, és azokat a szorzandószor kettőhatvány értékeket adjuk össze, amelyek egyeseknek felelnek meg. Végezzünk el néhány szorzást ezzel a módszerrel!

**1.1.62. Feladat [8].** Ha a tetszőleges $a$ alapot egy $b$ egész kitevőre kell hatványoznunk, érdemes a kitevőt kettes számrendszerbe átszámolni. Ezután indulhatunk a kitevő bal vagy jobb széléről, és mindig az első néhány jegy által megadott kitevőnek megfelelő hatványt számoljuk ki. Próbáljuk ki mindkét módszert!

**1.1.63. Feladat [9].** Négyzetgyökvonást is ismerő zsebszámológépre az előző feladat módszereit módosítsuk úgy, hogy kettes számrendszerben, helyiértékesen megadott nem egész kitevőre is tudjunk hatványozni!

**1.1.64. Feladat [9].** Csak a négy alapművelettel is ki tudjuk $b$ logaritmusát számolni tetszőleges $a$ alapra. Az egész részt úgy kapjuk, hogy ismételten szorzunk vagy osztunk

$a$-val; minden ilyen lépés a logaritmust eggyel növeli illetve csökkenti. Ha már $b$ az 1 és $a$ között van, akkor négyzetreemeléseket végzünk, és ha a négyzet eléri vagy átlépi $a$-t, akkor osztunk $a$-val. Minden lépésben a vessző után egy egyest vagy egy nullát írunk, attól függően, hogy kellett-e osztani $a$-val vagy nem. A logaritmus tört részét kettes számrendszerben kapjuk. Számoljuk ki 2, 3, 5 és 7 tizes alapú logaritmusát négy tizedesjegyre!

**1.1.65. Feladat [9].** Az ókori kínai „Matematika kilenc könyvben” című műben törtek egyszerűsítésére az alábbi tömör utasítás szerepel: „Azt ami felezni tudsz, felezd. Ha nem lehetséges a kettéosztás, akkor állapítsd meg a számláló és a nevező nagyságát, és a nagyobbikból vond ki a kisebbet. Mindaddig folytasd a kölcsönös csökkentést, amíg egyenlőket nem kapsz; ezzel a számmal egyszerűsíts.” A szöveget én így értem: „A legnagyobb közöst osztó felírható egy kettőhatvány és egy páratlan szám szorzataként. Amíg a számláló és a nevező is páros, mindkettőt felezd! Ezzel az lnko kettőhatvány tényezőjével egyszerűsítettél. Most számítsd ki az lnko páratlan tényezőjét! Amíg valamelyik szám páros, felezd! Ha mindkettő páratlan, a nagyobbikból vond ki a kisebbet! Ismételd ezeket a lépéseket, amíg lehet! Ha egyenlőek, ez az lnko páratlan tényezője. Ezzel még lehet egyszerűsíteni.” Mutassuk meg, hogy ez a módszer, a *bináris lnko* algoritmus működik! Persze, nem világos, hogy így kell-e érteni a szöveget.

**1.1.66. Feladat [7].** Egy egynél nagyobb természetes szám prímfelbontását meghatározhatjuk *próbaosztás*sal. Ez abban áll, hogy tekintjük sorban a prímszámokat és mindegyikkel megpróbáljuk elosztani a számot. Ha osztható, akkor a szám helyére a hányados lép, és ugyanazzal a prímmel folytatjuk, ha nem osztható, akkor az adott számmal és a következő prímmel folytatjuk. Az osztást akkor hagyhatjuk abba, amikor az osztandó kisebb, mint az osztó négyzete; az utolsó osztandó is prím. Az osztók (növekvő) sorozata nem fontos, hogy csak a prímszámokat tartalmazza, de azokat tartalmaznia kell. Például használhatjuk azt a sorozatot, amelyet úgy kapunk, hogy 2, 3 és 5 után az osztóhoz váltakozva 2-t és 4-et adunk hozzá. Végezzük el néhány 3-4 jegyű szám faktorizálását!

$\star$ **1.1.67. Feladat [9].** A középkortól általánosan ismert volt a *kilences próba* a számítások ellenőrzésére. Ez azon alapul, hogy ha két egész szám kilenccel vett osztási maradékát összeszorozzuk és osztjuk kilenccel, a szorzat maradéka kilenccel való osztáskor ugyan az, mint az eredeti számok szorzatának maradéka kilenccel való osztáskor. Összeadásra hasonló a helyzet. Egyébként kilenc helyett minden pozitív természetes számra ez a helyzet. Bizonyítsuk ezt be! Tizes számrendszererben a kilenc különösen alkalmas, mert minden természetes szám ugyanazt a maradékot adja kilenccel való osztáskor, mint a számjegyeinek összege. Ezt is bizonyítsuk be! Használjuk a próbát néhány szorzásra, összeadásra, kivonásra és maradékos osztásra!

$\star$ **1.1.68. Feladat [5].** Hatvanas számrendszerben az 59-es próbát használták. Miért?

$\star$ **1.1.69. Feladat [8].** Tizes számrendszerben a tizenegyes próbát is lehet használni. Hogy kaphatjuk meg könnyen egy természetes szám maradékát 11-el osztva?

## 1.2 Egyenletek

**1.2.1. Algebrai jelölések.** Az ókorban ismert vagy ismeretlen mennyiségeket nem jelöltek betűkkel, mindent szövegesen leírtak, csak „szöveges feladatok" voltak. Ez majdnem végig fennmaradt a középkorban is, csak a középkor vége felé terjedtek el előbb a rövidítések, majd a betűkkel való jelölés. Elsőnek Fibonacci-nál találkozunk vele, bár ő még a betűket két pont közé tette. Végül is az a szokás alakult ki, hogy egy-egy (kis vagy nagy) betűt használunk egy-egy szám (vagy más dolog) jelölésére, de nyomtatásban más betűtípust használunk, mint a szövegben. Az ismeretlenek jelölésére az ABC végéről szoktunk betűket választani, például $x$, $y$, $z$, $u$, $v$, $w$, az ismertek jelölésére pedig az elejéről, például $a$, $b$, $c$, $d$, .... Egész számok jelölésére az $n$, $m$, $k$, ... betűket, prímszámok jelölésére a $p$, $q$, $r$, ... betűket, függvények jelölésére az $f$, $g$, $h$, ... betűket szoktuk használni. Persze, semmi sem kötelez bennünket arra, hogy így tegyünk, de mivel mindenki így tesz, így „ismerősebbek lesznek a képletek". Az, hogy egyetlen betűt használunk, azért előnyös, mert egyrészt rövidebbek lesznek a képletek, másrészt két betű egymás mellé írását (vagy betűnek szám mögé írását) a szorzatuk jelölésére használhatjuk.

Nézzünk néhány példát! A $6x = 24$ kifejezés azt a kérdést akarja jelenteni, hogy melyik az a szám, amelyiket 6-tal szorozva 24-et kapunk. Ha ez az összefüggés teljesül, akkor a két oldal egyenlő, és egyenlő marad akkor is, ha egyformán változtatjuk. Osszuk el mindkettőt 6-tal! Azt kapjuk, hogy $x = 4$, megoldottuk az egyenletet. Általánosabban, nem adva meg az ismertnek feltételezett számokat, azt is írhatjuk, hogy $ax = b$. Ez azt a kérdést akarja jelenteni, hogy általában, ismert $a$ és $b$ esetén melyik az a szám, amelyiket $a$-val szorozva $b$-et kapunk? Ugyanúgy, mint az előbb, $x = b/a$. Rendben van ez így? Igen, ha $a \neq 0$. Ha azonban $a = 0$, akkor a $b \neq 0$ esetben nincs megoldás, a $b = 0$ esetben viszont minden valós szám megoldás. Persze, azt is tudnunk kell, milyen mennyiségeket jelölnek a betűk. Ha egész számokra vonatkozik a kérdés, akkor más a válasz (például ha $a \neq 0$, de $b/a$ nem egész, akkor nincs megoldás). Itt a jelölés nem ezt sugallja. A betűkkel való számolásnál természetesen mindig az a mérvadó, hogy mit jelentenek a betűk. Ha valós számokat, akkor a valós számokkal való számolás szabályai a mérvadóak, ha viszont mondjuk térbeli forgatásokat, akkor az azokkal való számolás szabályai!

**1.2.2. Indexek.** Mit tegyünk, ha elfogynak a betűk? Nem kell áttérnünk a kínai ABC-re. Egyrész tehetünk a betűkhöz megkülönböztető jeleket, például $a$, $a'$, $a''$, $\tilde{a}$, stb. Másrész írhatunk a lábukhoz indexeket. Például az

$$ax + by = c, \quad dx + ey = f$$

egyenletrendszerben, amely két egyenletből áll, két ismeretlen van, $x$ és $y$, és hat ismert mennyiség. Kicsit zavaró a sok különböző betű, meg az is, hogy $f$-et például inkább függvény jelölésére szoktuk használni. Felírhatjuk az egyenletrendszert három betűvel is:

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1, \quad a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = b_2.$$

Itt a hasonló szerepű mennyiségeket ugyanazzal a betűvel jelöltük, közöttük indexeléssel téve különbséget.

Egyébként több ismeretlen tartalmazó egyenletrendszereknél a megoldás kulcsa általában az, hogy valamelyik ismeretlent kifejezzük valamelyik egyenletből, és a kapott kifejezést beírjuk az összes többi egyenletbe. Eggyel kevesebb ismeretlen lesz és eggyel kevesebb egyenlet.

**1.2.3. Azonosságok.** Például kézikönyvekben ilyen egyenlőségekkel találkozhatunk:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Mi akar ez lenni? Nincs ismeretlen! Arra akarják felhívni a figyelmünket, hogy ez (számokra) mindig igaz, *azonosság*. Valóban,

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= (a+b)(a+(-b)) = (a+b)a + (a+b)(-b) = aa + ba + a(-b) + b(-b)\\ &= aa + ab - ab - bb = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Csak a valós számokkal való számolás szabályait (disztributivitás, kommutativitás, előjelszabály) használtuk, tehát az összefüggés bármely $a$, $b$ valós számra teljesül. Ezt az azonosságot gyakran használjuk mindkét irányban. Számolásnál is jól használható. Például $80 \cdot 70 = (75+5)(75-5) = 75^2 - 5^2$, azaz $75^2 = 80 \cdot 70 + 25 = 5625$. Más ötre végződő számok négyzetre emelésénél is, elhagyva az ötöst, a kapott számot szorozva az eggyel nagyobbal, és az eredmény után írva 25-öt, kapjuk a négyzetet. Ugyanez félegészekre (egész számok felére) is használható: $7{,}5^2 = 7 \cdot 8 + 0{,}25 = 56{,}25$. Hasonló eljárás alkalmazható más „közel kerek” számok négyzetre emelésére is, például

$$27^2 = (27+3) \cdot (27-3) + 3^2 = 30 \cdot 24 + 9 = 729,$$

vagy akár

$$988^2 = (988+12) \cdot (988-12) + 12^2 = 1000 \cdot 976 + 144 = 976144.$$

Más azonosságokat is gyakran használunk. Például ilyen az

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ és } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A második tulajdonképpen ugyanaz, mint az első, de $b$ helyére $-b$-t írtunk. Ugyanúgy kiszámolhatjuk, hogy fennállnak, mint a fentebbi azonosságra tettük. Ezek is használhatók gyors számolásra, ha egy „kerek” (vagy ismert négyzetű) számnál kicsit nagyobb vagy kicsit kisebb szám négyzetét kell kiszámolnunk. Így például a $\sqrt{2}$ próbálgatással való keresésénél a számításokat akár fejben is elvégezhetjük. Másik példa két olyan szám szorzása, amelyekből az egyik „közel kerek”, például $997 \cdot 986 = 1000 \cdot (986-3) + 3 \cdot 14 = 983042$, mert $(1000-3) \cdot (1000-14) = 1000 \cdot 1000 - 1000 \cdot 14 - 1000 \cdot 3 + 3 \cdot 14$. További példa két olyan szám szorzása, amelyeknek utolsó jegyei 10-re egészítik ki egymást: $783 \cdot 787 = 780 \cdot 790 + 3 \cdot 7 = 616221$. Egyébként a két azonosságból

$$\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = ab$$

azaz a szorzást négyzetreemelésre vezethetjük vissza. A logaritmus feltalálása előtt négyzettáblázatokat használtak, hogy a szorzást elkerüljék, és csak az összeadást és a kivonást kelljen ismerni.

Köbre emelésre is vannak azonosságok:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ és } (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

ezekkel $\sqrt[3]{2}$ próbálgatással való keresésénél a számításokat fejben is elvégezhetjük.

Két négyzet különbségét szorzattá tudjuk alakítani. Mi a helyzet két magasabb hatvány különbségével? Teljesül, hogy

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

ha $n$ tetszőleges pozitív természetes szám, azaz $a-b$ kiemelhető. És mi van $a+b$-vel? Ha $n$ páratlan pozitív természetes szám, akkor

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

ha viszont $n$ páros pozitív természetes szám, akkor

$$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}).$$

**1.2.4. Magasabb fokú egyismeretlenes egyenletek megoldása.** Kissé pontatlanul, egy egyismeretlenes egyenletet *magasabb fokú*nak nevezünk, ha benne az ismeretlen elsőnél magasabb hatványon szerepel. A pontatlanság abban áll, hogy hallgatólagosan feltesszük, hogy az ismeretlennek csak pozitív egész kitevős hatványai szerepelnek. A legmagasabb fokú tag együtthatójával, a *főegyüttható*val végigosztva feltehetjük, hogy az 1. Ha az egyenlet $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$, akkor az $y = x + a_1/n$ (megfordítható) helyettesítéssel az egyenlet $y^n + b_2y^{n-2} + b_3y^{n-3} + \cdots + b_n = 0$ alakú lesz, így elég azt az esetet vizsgálni, amikor a második legmagasabb fokú tag nulla. A másodfokú esetben a helyettesítés után a megoldás nyilvánvaló. Nézzük meg ezt egy kicsit részletesebben.

**1.2.5. A másodfokú egyenlet megoldóképlete.** Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenletet végigosztva $a \neq 0$-val, azt kapjuk, hogy

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Az $y = x + b/(2a)$ helyettesítéssel, mivel $x = y - b/(2a)$, azt kapjuk, hogy

$$\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = 0,$$

azaz

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

ahonnan

$$y_\pm = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{tehát} \quad x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Az egyenlet $(x - x_+)(x - x_-) = x^2 - (x_+ + x_-)x + x_+x_- = 0$ alakban is felírható (azaz $x_+ + x_- = -b/a$, $x_+x_- = c/a$), ez a *gyöktényezős alak*.

⋆ **1.2.6. Cardano-képlet.** A harmadfokú esetben az $y^3 + py + q = 0$ egyenlet megoldásait keressük $y = u + v$ alakban! Mivel $y^3 = (u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$, azaz $y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0$, ha sikerül $u$-t és $v$-t úgy választani, hogy $uv = -p/3$ és $u^3 + v^3 = -q$ teljesüljön, akkor készen vagyunk. Az első egyenletből $u^3v^3 = -p^3/27$, így $u^3$ és $v^3$ a $z^2 + qz - p^3/27$ másodfokú egyenlet, az úgynevezett *karakterisztikus egyenlet* gyökei, például

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Így végül is a megoldásokat a

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

*Cardano-képlet* adja.

Látszólag készen vagyunk. Próbáljuk meg a képletet alkalmazni az

$$(y-1)(y-2)(y+3) = y^3 - 7y + 6 = 0$$

egyenletre, amelynek a gyökei nyilván 1, 2 és $-3$. (Az egyenlet a bal oldalon úgynevezett *gyöktényezős alak*ban van, elsőfokú tényezők szorzataként írva, amiből a gyökök azonnal leolvashatók, hiszen egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.) A képlet szerint a megoldások

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}}.$$

Negatív számból kellene négyzetgyököt vonni! Elszámoltuk? Nem, a képlet jó, ha csak egy valós gyök van, például az $(x^2+4)(x-3) = 0$ egyenletnél azt meg is adja. Ez a képlet kényszerítette ki a *komplex szám*ok bevezetését, azok segítségével negatív számból is tudunk négyzetgyököt vonni, és a kapott megoldások — mint egyszerű számolás mutatja — valóban megadják $y^3 + py + q$ gyöktényezős felbontását. A (komplexben) kilenc lehetséges köbgyök párból azt a hármat kell választani, amelyeknek a szorzata $-p/3$.

⋆ **1.2.7. A negyedfokú egyenlet.** A bal oldalt az $\alpha$ (általában komplex) paraméter bevezetésével átalakítva az egyenletet

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left(2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right) = 0$$

alakra hozhatjuk. Ha sikerül az $\alpha$ paramétert úgy választani, hogy a nagy zárójelben álló polinomja $y$-nak teljes négyzet legyen, akkor az egyenlet két másodfokú egyenletre esik szét, így megoldható. Ehhez az kell, hogy ezen polinomnak egyetlen gyöke legyen, azaz fenn kell állnia a

$$q^2 - 8\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

összefüggésnek. Ezt a harmadfokú egyenletet megoldva három alkalmas $\alpha$ értéket is kapunk.

**1.2.8. Magasabb fokú egyenletek.** Magasabb fokú egyenletre nem adható hasonló gyökképlet. Ha a fokszám $n \geq 5$, akkor még olyan egész együtthatós $n$-ed fokú egyenlet is létezik, amelynek gyökei nem írhatók fel racionális számok, a négy alapművelet és gyökvonások segítségével, azaz még „*saját gyökképlete*” sincs, ilyen például $x^5-4x+2=0$. Az első ilyen jellegű eredmény Abeltől származik, aki ezzel a problémával kapcsolatban kezdte el vizsgálni csoportok kommutativitását. Hogy egy magasabb fokú egyenletnek mikor van „megoldóképlete”, azt Galois tisztázta teljesen. Speciális esetekben tehát sikerülhet meghatározni a gyököket, például sokszor segít egy új változó bevezetése $y = h(x)$ alakban, ahol $h$ polinom; ez a *Tschirnhaus-transzformáció*. Például az $x^4 + ax^2 + b = 0$ egyenletből $y = x^2$ helyettesítéssel másodfokú egyenlet lesz. A Tschirnhaus-transzformációt használtuk a második legmagasabb fokú tag „eltüntetésére” is. Más, ügyesen választott helyettesítésekkel az ismeretlent gyökjel alatt, kitevőben, ... tartalmazó egyenleteket is sikerülhet megoldani, de legegyszerűbb, ha egy komputeralgebrai rendszert használunk.

**1.2.9. Sorok összege.** Az $a_1, a_2, \dots a_n$ sorozatot *számtani sorozat*nak nevezzük, ha a $d = a_{k+1} - a_k$ *különbség*, idegen szóval *differencia* ugyan az minden $k$-ra. A sorozatot *mértani sorozat*nak nevezzük, ha a $q = a_{k+1}/a_k$ szám, a sorozat *hányados*a, idegen szóval *kvóciens*e ugyan az minden $k$-ra. Sok sorozatra vagy más néven *sor*ra a sor $\sum_{k=1}^{n} a_k$ *összeg*ére tudtak képletet már az ókorban is; a $\sum$ jel a görög $\Sigma$ betűből ered, ami a szumma (‘összeg’) szó kezdőbetűje. A $\sum$ jel alá írjuk, hogy mettől kell összegezni, fölé, hogy meddig.

**1.2.10. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $d$ a differencia, akkor az $a_1, a_2, \dots a_n$ számtani sorra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\frac{a_1 + a_n}{2} = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}.$$

**1.2.11. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha $q \neq 1$ a kvóciens, akkor az $a_1, a_2, \dots a_n$ mértani sorra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

**1.2.12. Feladat [6].** A számtani sor összegképletéből

$$1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A jobb oldalon álló számokat *háromszög szám*oknak is szokás nevezni, mert ha ennyi kis kockát úgy rakunk le, hogy az alsó sorba $n$, fölé $n-1$, stb., kocka kerüljön, akkor a kockák egy háromszöget formáznak. Mutassuk meg a háromszög-számok összegére, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Az összegként kapott számok a *gúla számok*. Nevüket onnan kapták, hogy ha az alsó rétegbe a legnagyobb háromszög számnak megfelelő számú kockát rakunk le egy háromszögként, arra a második legnagyobb háromszög számnak megfelelő számú kockát, stb., akkor a kockák egy háromszög alapú gúlát formáznak.

**1.2.13. Feladat [5].** Vezessük le az előző feladat eredményéből, hogy a négyzetszámok összege

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**1.2.14. Feladat [6].** A páratlan számok összegének zárójelezésével

$$1+3+5+7+9+11+\cdots = 1+(3+5)+(7+9+11)+\cdots = 1^3+2^3+3^3+\cdots.$$

Vezessük le ebből, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**1.2.15. Feladat [6].** Vezessük le a gúla számok összegére, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}.$$

**1.2.16. Feladat [6].** Vezessük le az előző feladat eredményéből a köbszámok összegére kapott formulát!

**1.2.17. Feladat [8].** Általánosítsuk a gúla számok összegére kapott formulát az ott kapott összegek összegzésére és így tovább! Figyeljük meg, hogy az eredmény milyen könnyen megjegyezhető!

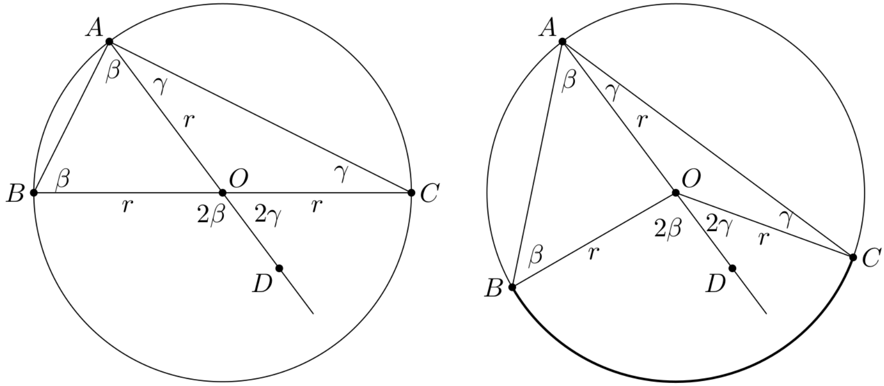
**1.2.18. Feladat [6].** Hogyan kaphatunk az előző feladat eredményéből formulát a negyedik hatványok összegére? Mi a helyzet az ötödik hatványok összegével?

## 1.3 Geometria

Geometriából elég sok mindent ismertek az egyiptomiak, valamint a sumérok és más, Mezopotámiában élő népek. Például az egyiptomiak tudtak derékszöget rajzolni, területet számolni, sőt bizonyos csonkagúlák térfogatát is ki tudták számolni. Az írásos emlékekben azonban csak az eljárások leírásai maradtak ránk, és tudtunkkal ezeket soha nem indokolták. Az első *bizonyítás*ok a görögöktől maradtak ránk. Nézzünk egy példát. Valószínűleg ez az első tétel, amit valaha is valaki bebizonyított, Thalész, a hét görög bölcs egyike. Az időszámításunk előtti VI. század elején élt. Sok minden más mellett arról is nevezetes volt, hogy megjósolta az i.e. 585. évi napfogyatkozást. A bizonyítás után részletesen elmagyarázzuk a tételt és a bizonyítást is.

**1.3.1. Thalész tétele.** *Ha egy kör egy átmérőjének végpontjait egyenesekkel összekötjük a kör egy tőlük különböző pontjával, a két egyenes merőleges egymásra. (Lásd az 1.3.1 ábra bal oldalát.)*

**Bizonyítás.** Jelöljük a pontot $A$-val, a kör középpontját $O$-val, sugarát $r$-rel, az átmérő végpontjait $B$-vel és $C$-vel. Rajzoljunk az $A$ pontból félegyenest az $O$ ponton keresztül, ennek egy, az $AO$ szakaszon kívüli pontja legyen $D$. Az $AOC$ háromszög két oldalának hossza $r$, így ez egyenlő szárú háromszög, ezért az alapon lévő két szöge egyenlő, $\gamma$. Ebből következik, hogy a $DOC$ külső szög $2\gamma$. Hasonlóan adódik, hogy a $BOD$ szög $2\beta$. Mivel összegük egyenesszög, a $BAC$ szög derékszög. □




**1.3.1 ábra:** Thalesz tétele.

**1.3.2. Magyarázat.** Ha ezt elmondjuk valakinek, aki még nem tanult geometriát, valószínűleg valami ilyesmi párbeszéd fog lejátszódni:

– Hát ebből semmit sem értettem. Először is, mi az a macskakaparás, hogy $\beta$ meg $\gamma$?

– Ezek a görög ABC betűi. A második és harmadik betű. Itt a görög ABC egy kis táblázatban.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| alfa | $A$ | $\alpha$ | éta | $E$ | $\eta$ | nű | $N$ | $\nu$ | tau | $T$ | $\tau$ |
| béta | $B$ | $\beta$ | théta | $\Theta$ | $\theta$ | kszí | $\Xi$ | $\xi$ | üpszilon | $\Upsilon$ | $\upsilon$ |
| gamma | $\Gamma$ | $\gamma$ | ióta | $I$ | $\iota$ | omikron | $O$ | $o$ | fí | $\Phi$ | $\phi, \varphi$ |
| delta | $\Delta$ | $\delta$ | kappa | $K$ | $\kappa, \varkappa$ | pí | $\Pi$ | $\pi, \varpi$ | khí | $X$ | $\chi$ |
| epszilon | $E$ | $\epsilon, \varepsilon$ | lambda | $\Lambda$ | $\lambda$ | ró | $P$ | $\rho, \varrho$ | pszí | $\Psi$ | $\psi$ |
| zéta | $Z$ | $\zeta$ | mű | $M$ | $\mu$ | szigma | $\Sigma$ | $\sigma, \varsigma$ | omega | $\Omega$ | $\omega$ |

A *görög ábécé*

– Most akkor görögül fogunk beszélni?

– Nem, de egyes görög szavakat egész jól ki tudsz olvasni, ha összeolvasod az előző táblázatból a görög betűk nevének első betűit. Például a nulla jele kezdetben a semmit jelentő görög $o\acute{\upsilon}\delta\acute{\epsilon}\nu$ szó kezdőbetűje, az $o$ volt.

– És minek kell neked görög betűket használni? Nem elég jók a latin betűk?

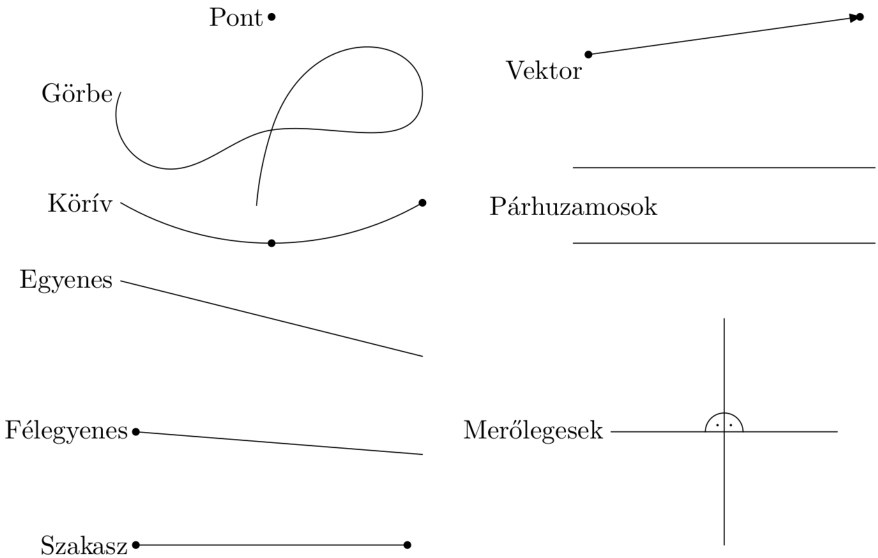
– De, de ez a szokás.

– Na jó, ezt a pár macskakaparást még kibírom. De nem értem, hogy mi az a kör?

– Az $O$ *középpont* körüli $r$ *sugar*ú kör azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek az $O$ ponttól adott pozitív $r$ távolságra vannak. Egyébként a valamilyen tulajdonsággal megadott ponthalmazokat *mértani hely*nek is hívjuk.

– És mi az a pont? Meg mi az a távolság?

– Látom ugratsz engem. A *pont*ot alapfogalomnak tekintjük, nem tudjuk egyszerűbb fogalmakkal definiálni, azaz megfogalmazni, hogy mi az. A *távolság* is alapfogalom. Bármely két pontnak van távolsága, egy nemnegatív valós szám. Az 1.3.2 ábra szemléltet néhány dolgot: pont, görbe, körív, egyenes, félegyenes, szakasz, vektor, párhuzamos egyenesek, merőleges egyenesek. A végpontokat csak azért vastagítottam meg, hogy jobban látszódjanak.




**1.3.2 ábra:** alapfogalmak.

– Ezek mind alapfogalmak, amelyekről nem mondod meg, hogy mik? Így nehezen fogunk szót érteni!

– Nem, csak az *egyenes*. Annyit azért mondhatok, hogy pontok halmaza.

– Na jó, ezt még kibírom. Aha, látom, a *félegyenes* egy pont által kettéosztott egyenes egyik fele. A *szakasz* nyilván egy egyenes két pont közötti része. A *vektor* is valami ilyesmi, csak meg van mondva, hogy melyik a *kezdőpont*ja és melyik a *végpont*ja. A *körív*et is értem: egy kör két pontja közötti rész. De azt, hogy mi a párhuzamos, meg kéne mondanod.

– Igen, két egyenes *párhuzamos*, ha vagy egybeesnek, vagy nincs közös pontjuk. Egyébként *metszik egymást*, egy közös pontjuk van.

– A síkban.

– Most csak síkgeometriáról beszélünk.

– Jó, egyelőre ez is sok. És mi az, hogy merőleges?

– Két egyenes *merőleges*, ha metszik egymást, és derékszöget zárnak be.

– Te viccelsz velem. Derékszögről még egyáltalán nem volt szó. Egyáltalán, mi az a *szög*?

– Két, egy pontból kiinduló félegyenes, a *szögszár*ak által közbezárt rész. Várj, az 1.3.3 ábra segít. Belülről kifelé a körívek hegyesszöget, derékszöget, tompaszöget, *egyenesszöget*, domborúszöget és *teljesszöget* mutatnak.

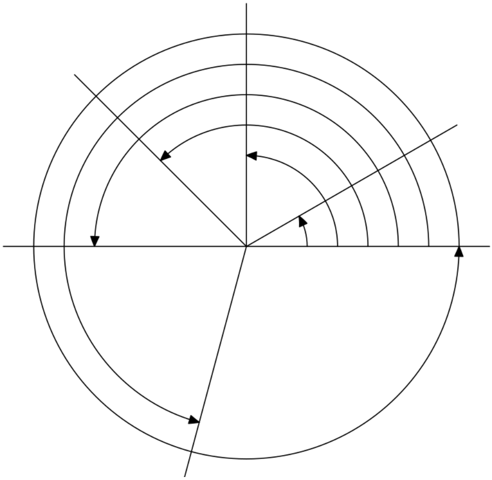
– Jó, ezek az elnevezések elég logikusak. De még mindig nem mondtad meg, mi az a *derékszög*.

– Az egyenesszög fele.

– És mi a merőlegeseknél az a kis körív, benne egy ponttal?

– A derékszöget így szoktuk jelölni.

– Aha, szóval két derékszög együtt egy egyenesszög. A *hegyesszög* nyilván a derék-



**1.3.3 ábra:** szögek.

szögnél kisebb szög, a *tompaszög* a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb, a *domborúszög* pedig az egyenesszögnél nagyobb, de a teljes szögnél kisebb szög. Most, hogy végre tudom, mi az, hogy merőleges, végre értem a tételt. Az *átmérő*t magam is kitalálom: egyenes rajzolunk a kör középpontján keresztül, két pontban metszi a kört, az ezek közötti szakasz az átmérő. A tétel tulajdonképpen azt állítja, hogy a $CAB$ szög derékszög.

– Hm, nem egészen. A $BAC$ szög.

– Mi a különbség?

– A három betűből a középsőnél van a szög *csúcs*a. A szögbe beleértjük azokat a pontokat, amiket a csúcspontból az első betűvel jelölt pont felé menő félegyenes, a szög egyik szára súrol, miközben az óramutató járásával ellentétes irányba forgatjuk, amíg átmegy a harmadik betűvel jelölt pont felé induló félegyenesbe, a szög másik szárába. Most tehát az $AB$ félegyenesből az $AC$ félegyenesbe. Ez a *pozitív forgatási irány.* A $CAB$ szög három derékszög.

– De miért ez a pozitív forgatási irány? Miért nem volt jó nektek, matematikusoknak, az óramutató járásával megegyező irány?

– Ne feledd, hogy geometria sokkal előbb volt, mint óra.

– Mi az a bizonyítás? És minek kell?

– A bizonyításban már ismert dolgok segítségével megindokoljuk, hogy miért igaz, amit állítunk.

– Hát ezek nekem egyáltalán nem ismert dolgok.

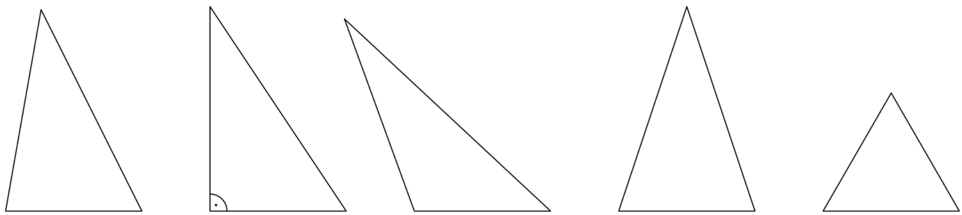
– Még nem. Mit nem értessz?

– Az első két mondatot még értem. Azt, hogy $AOC$ háromszög, is ki tudom találni: az $AO$ szakasz, az $OC$ szakasz meg a $CA$ szakasz adják a háromszöget. De mi az, hogy egyenlő szárú? Eddig csak szögeknek volt szára. És mi az, hogy alap?

– Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszú, akkor egyenlő szárú háromszögnek nevezzük, és a két egyenlő hosszú oldal a *szár*, a harmadik oldal az *alap*.

– Még sok ilyen elnevezésetek van?

– Nem. Szoktunk beszélni a háromszög *oldal*airól. Attól függően, hogy milyen a háromszög legnagyobb szöge, beszélünk *hegyesszögű háromszög*ről, *derékszögű háromszög*ről és *tompaszögű háromszög*ről. A derékszögű háromszögben a derékszög melletti oldalak a *befogó*k, a vele szemben lévő oldal az *átfogó*. Ha egy háromszög minden oldala egyforma, akkor *egyenlő oldalú* háromszögnek nevezzük. Az 1.3.4 ábrán hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű, egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszöget láthatsz.



**1.3.4 ábra:** háromszögek.

– És ez neked nem sok? Majd megpróbálom megjegyezni. Szóval az $ABC$ háromszögben az $AB$ és az $AC$ oldalak a befogók, a $BC$ oldal pedig az átfogó?

– Igen.

– Na jó, mondjuk, hogy az elnevezéseket már értem. Térjünk vissza az $AOC$ háromszögre. A két szár mind a kettő a kör sugara, $r$. De mért jelölted a háromszög két szögét is ugyanazzal a betűvel, $\gamma$-val?

– Hát igen, ez nem valami szép. Azért mert ugyanakkorák, ezt akartam kifejezni.

– De miért ugyanakkorák?

– Ez egy tétel. Egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlőek. Úgy lehetne bebizonyítani, hogy az alap felezőpontját összekötnénk a szemben lévő csúccsal, és erre az egyenesre tükröznénk a háromszöget. A *tükrözés* úgynevezett *egybevágóság*, olyan leképezés, amely megtartja a távolságokat. Az egybevágóságok megtartják a szögeket is.

– Ugye nem azt akarod mondani, hogy most bebizonyítottad, hogy a $\gamma$-val jelölt szögek egyenlőek?

– Nem, inkább csak beszéltem egy kicsit arról, hogyan lehetne bebizonyítani

– Szóval ez egy tétel, amit állítólag be tudsz bizonyítani. Na jó, inkább elhiszem, végül is elég szemléletes, valamit értettem is abból, amit a tükrözéssel mondani akarsz. De a következő mondatot megint nem értem. Mi az, hogy külső szög?

– Ha egy háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk az egyik csúcson túl, keletkezik egy szög, amit a meghosszabbítás meg a csúcsnál lévő másik oldal zár be. Ez egy *külső szög*.

– És miért lesz $2\gamma$?

– Van egy tétel, amely szerint a háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével.

– És ezt is be tudod bizonyítani?

– Igen. Húzzunk a külső szög csúcsán át párhuzamost a háromszög szemben lévő oldalával. Ez a külső szöget két részre osztja, amelyekből az egyik a háromszög egyik, a másik a háromszög másik belső szögével egyenlő.

– Szóval a belső szögek összege egyenesszög. Mond, nincs nektek a szögekre valami rendes mértékegységetek? Majd ilyeneket fogsz mondani, hogy a derékszög 17-ed része. Biztos a hosszúságot is valami különös mértékegységben méritek.

– Nem, a hosszúságot közönséges méterben mérjük. És a szögekre is van mértékegységünk. Az egyenlő oldalú háromszög egy szögének a hatvanad része a *fok*, jele $^\circ$.

– Aha, az egyenlő oldalú háromszög kétszeresen, sőt, háromszorosan is egyenlő szárú. Akkor minden szöge egyforma, az egyenes szög harmadrésze. És hatvan részre osztottátok? Csak nem Mezopotámiából ered ez is?

– De igen. A fok hatvanad része a *perc*, jele $'$, annak a hatvanad része a *másodperc*, jele $''$.

– Szóval ti, matematikusok még mindig hatvanas számrendszerben számoltok. Van harmadperc is?

– Hát, a perc és másodperc szavunk a sorszámnevek latin neveinek tövéből, a prim és secund szavakból ered. Ezeket lehet tovább folytatni: terti, quart, quint, sext, septim, octãv, nõn, decim, ....

– Ezeket tényleg használják?

– Használták, de ma már nem, hanem például 23,5$''$-et írunk. Egyébként te is hatvanas számrendszerben számolsz, mikor az órádra nézel.

– Még szerencse, hogy nem használják, az idegen szavak nagyon idegesítenek.

– Hát a tudomány sok idegen szót használ, legtöbbször görög vagy latin eredetűt. Annyit ígérhetek, hogy igyekszem magyar szavakat használni, ha az idegen szó nem nagyon elterjedt, és az első előforduláskor megadom a magyar fordítást is. Így könnyebb megérteni és megjegyezni. Egyébként te is használsz idegen szavakat, még olyan szörnyszülötteket is, mint a televízió: fele görög, fele latin.

– Hát igen, de ez már elterjedt. Egyébként van a foknál nagyobb egység is?

– Nincs. Az egyenesszög 180°, a teljes szög 360°, a derékszög 90°.

– No jó. Ott tartottunk, hogy párhuzamost húztunk a külső szög csúcsán át a háromszög szemben lévő oldalával. Ez a külső szöget két részre osztja, amelyekből az egyik a háromszög egyik, a másik a háromszög másik belső szögével egyenlő. Egyébként ha ezt elhiszem, akkor értem is a bizonyítást. Mivel $2\beta+2\gamma = 180^\circ$, azt kapjuk, hogy $\beta+\gamma = 90^\circ$. De mi az a $\square$?

– Az a bizonyítás végét jelzi.

– Elég feleslegesen. Aki odafigyel, észreveszi, hol van vége a bizonyításnak.

– Ez igaz, de esetleg nem akarja valaki elolvasni a bizonyítást. Ekkor segít a $\square$.

– Jó sok betű volt itt. Van valami szabály, hogy milyen betűket kell használni a jelölésekre?

– Szabály nincs, de szokás, ami megkönnyíti az életünket, az van. A pontok jelölésére latin nagybetűket szoktunk használni. Egy háromszögben egy adott betűvel jelölt csúcsnál lévő szögre a görög ABC megfelelő kis betűjét szoktuk használni, tehát az $A$ csúcsnál $\alpha$ szög, a $B$ csúcsnál $\beta$ szög, a $C$ csúcsnál $\gamma$ szög. A háromszög oldalait a szemben lévő csúcsnak megfelelő latin kisbetűvel szoktuk jelölni, tehát az $A$ csúccsal szemben $a$ oldal, a $B$ csúccsal szemben $b$ oldal, a $C$ csúccsal szemben $c$ oldal.

– Egyébként te becsaptál egy kicsit. Azt írtad, hogy hasonlóan adódik, hogy a $BOD$ szög $2\beta$. Ezt miért nem csináltad meg? Lusta voltál? Csináljam meg én?

– Mindkettőre igen. Amit eddig csináltunk, ugyanazt kell csinálni az $AD$ egyenes másik oldalán.

– Hát tényleg úgy néz ki. Egyébként észrevettem valamit. Ha az $A$ ponttal közeledünk a $B$ ponthoz, akkor az $AB$ szakasz végig merőleges az $AC$ szakaszra. Mikor végtelen kicsi lesz, akkor az $AC$ éppen átmegy az átmérőbe.

– Nagyon jó észrevétel! Az $A$ és $B$ pontokon átmenő egyenes a kör egy *szelő*je, olyan egyenes, aminek két közös pontja van a körrel. Egyébként ennek a metszéspontok közötti részét a kör egy *húr*jának nevezzük. Ha $A$ közeledik $B$-hez, akkor a szelő átmegy egy olyan egyenesbe, aminek csak egy közös pontja van a körrel, az *érintési pont*. Egy ilyen egyenest *érintő*nek nevezünk. A tétel, amit találtál, hogy az érintő merőleges az érintési ponton átmenő átmérőre.

– És be is bizonyítottam.

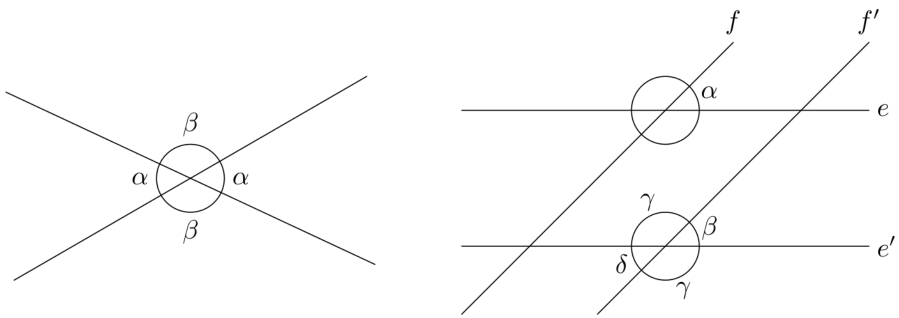
– Hát, a görögök nem fogadnák el a „bizonyításodat". De a tétel igaz.

– Miért nem fogadnák el a bizonyításomat? És hogy találhattam rossz bizonyítással igaz tételt?

– Akármilyen szemléletes okoskodással szabad tételeket találni. Viszont csak már bizonyított tételeket szabad felhasználni a bizonyításban. A geometriában nincsenek végtelen kicsinyek. De azért a mai matematikával meg lehetne menteni a bizonyításodat.

– Te sem bizonyítottad még be, hogy ha párhuzamost húzunk a külső szög csúcsán át a háromszög szemben lévő oldalával, akkor az a külső szöget két részre osztja, amelyekből az egyik a háromszög egyik, a másik a háromszög másik belső szögével egyenlő. Gondolom, ez meg újabb tételekből következik.

– Igen. Várj, az 1.3.5 ábra sokat segít. A bal oldalon bármelyik $\alpha$ szög bármelyik $\beta$ szöggel úgynevezett *mellékszög*: egyik száruk egybeesik, a másik pedig egy egyenesre esik, de ellenkező irányú. Ezek összege egyenesszög. Egyébként ha két szög összege egyenesszög, akkor *kiegészítő szög*eknek nevezzük őket.




**1.3.5 ábra:** szögek.

– Gondolom, a bal oldalon a szemben lévő szögeket azért jelölted egyforma betűkkel, mert egyenlőek. De miért egyenlőek? És ezeknek is van valami nevük?

– Igen, ezek *csúcsszög*ek. Egyébként azért egyenlőek, mert akármelyik $\alpha$-hoz hozzáadva az egyik $\beta$-t egyenessszöget kapunk. Így a két $\alpha$ egyenlő. Hasonlóan jön ki, hogy a két $\beta$ is egyenlő.

– És mit akar jelenteni a jobb oldali ábra? Azon kívül, hogy két $\gamma$ van, amiknek az egyenlőségét már a bal oldali ábra is megmutatta, írhattál volna $\delta$ helyett is $\beta$-t.

– Ha feltesszük, hogy az $e$ és $e'$ egyenesek is, az $f$ és $f'$ egyenesek is párhuzamosak, akkor az $\alpha$ és $\beta$ szögek *egyállású szög*ek, száraik párhuzamosak és egyező irányításúak.

Ekkor ezek a szögek egyenlőek, azaz $\alpha = \beta$. Természetesen ekkor $\alpha = \delta$, ezeknek a szögeknek a szárai párhuzamosak és ellenkező irányúak, *váltószög*eknek hívjuk őket. Az $\alpha$ és $\gamma$ szögek szárai is párhazamosak, de az egyik pár egyező irányú, a másik ellentétes, ezek *társszög*ek. A társszögek összege egyenes szög, azaz mellékszögek.

– Sok ilyen elnevezés van még? Kezdek beleőrülni.

– Ha két szög összege derékszög, akkor *pótszög*eknek nevezzük őket. Egyébként nem kell mindent egyből megjegyezni. Amikor használsz valamit, visszalapozol vagy megkeresed a könyv mutatójában, hogy hol van. Ha egyszer használsz valamit, az többet ér, mintha tízszer elolvasod anélkül hogy használnád.

– Lehet. Talán ezeknek a párhuzamos szárú szögeknek a segítségével be is tudnám bizonyítani a háromszög külső szögére vonatkozó tételt. De az egyállású szögekre vonatkozó állítást be kellene bizonyítanod, a többit már magam is meg tudom csinálni.

– Toljuk el párhuzamosan a $\beta$ szöget úgy, hogy csúcsa átmenjen az $\alpha$ szög csúcsába. ...

– Jaj, újabb fogalmak. Inkább elhiszem. Azt hiszem, becsapsz. Mindig újabb fogalmak meg tételek kerülnek elő. Végül majd valamikor Thalész tételére fogsz hivatkozni, és akkor aztán ördögi körforgásba estünk.

– Nem csinálok ilyet.

– Mondod te, de honnan tudjam, hogy igaz. Vagy azt csinálod hogy mindig újabb fogalmakkal és tételekkel jössz elő, és ennek soha nem lesz vége. Mit ér akkor az egész bizonyítás?

– Talán te is érzed azért, hogy Thalész tételét egyszerűbb tételekre vezettük vissza. Abban igazad van, hogy nem eshetünk körforgásba, és nem húzhatunk elő újabb meg újabb tételeket. Bizonyos alapfogalmakban és elfogadott alaptételekben — ezeket *axiómák*nak nevezzük — meg kell állapodnunk. Az iskolai síkgeometriában három alapfogalom van, a pont, az egyenes és a távolság, és 12 axióma, ezekből kiindulva mindent be tudunk bizonyítani.

– Biztos jó bonyolultak az axiómák.

– Egyáltalán nem. Az első három axióma például: 1. Az egyenes pontok halmaza. 2. Bármely két ponthoz létezik egy és csak egy azokat tartalmazó egyenes. 3. Létezik legalább egy egyenes. Minden egyeneshez legalább egy pont tartozik.

– Hát ezek egyáltalán nem bonyolultak, ezeket el tudom fogadni. És mi az utolsó axióma?

– A párhuzamossági axióma: bármely ponton legfeljebb egy egyenes halad át, amely egy adott egyenessel párhuzamos. Egyébként mindet megtalálod a [23] könyvben.

– És honnan tudjuk, amikor lefelé bányászunk a fogalmak és tételek között, hogy alapfogalomhoz illetve axiómához érkeztünk? Hogy jutottak ezekhez?

– Sehonnan nem tudjuk. Ha valaki egy axiómarendszer állít össze, igyekszik minél kevesebb és egyszerűbb alapfogalmat és axiómát felhasználni. Nyilván olyan fogalmat, amit a többivel definiálni tud, nem fog bevenni az alapfogalmak közé, és olyan tételt, amit a többiből be tud bizonyítani, nem fog bevenni az axiómák közé. Viszont annyi alapfogalmat és axiómát fel kell használnia, hogy minden tételt, amit abban a témakörben — jelen esetben a síkgeometriában — igaznak fogadnak el, be tudjon bizonyítani. A síkgeometriára is többféle axiómarendszer létezik, az elsőt még Eukleidész írta le „Elemek” című könyvében [5] időszámításunk előtt 300 körül. Könyve 2000 évig volt tankönyv!

– Miért tartották ezt a módszer ilyen fontosnak? Hiszen elég fárasztó lehet nagyon egyszerű axiómákból mindent bebizonyítani!

– Ez igaz, de minden tudomány arra törekszik, hogy minél kevesebb alapelvben foglalja össze alapjait, és ezekből magyarázzon mindent. Azonkívül a természettudományok és alkalmazásaik mind használják a matematikát. Ha az egész matematikát le tudjuk vezetni néhány axiómából, akkor az legalább rendben van, ha az axiómák rendben vannak. Hozzávesszük a fizika alapelveit, a fizikára alapozzuk a mérnöki tudományokat és a kémiát, a kémiára a kémiai technológiát és a biokémiát, és így tovább. Legalábbis ez a terv. Tehát azt is mondhatjuk, hogy a görögök fedezték fel a tudományt.

– Szép terv, de nekem úgy tűnik, már a matematikánál megbukik. Mindig csak síkgeometriáról beszéltél. Biztos a térgeometriához már újabb alapfogalmak és újabb axiómák kellenek. Ahogy fejlődik a matematika, úgy kellenek újabb meg újabb alapfogalmak és axiómák.

– Szerencsére nem ilyen rossz a helyzet. A XX. század elején sikerült az egész matematikát egy elég egyszerű részre, a halmazelméletre felépíteni. Még a természetes, egész, racionális és valós számokat is definiálni tudjuk, így csak egy axiómarendszerre van szükségünk. A geometriát is be tudjuk építeni, a vektorok segítségével.

– Akkor miért tanulunk most geometriát?

– Egyrészt gyakorolnunk kell a bizonyításokat. Másrészt a matematika néhány alkalmazása, például a csillagászat, elég sok elemi geometriát használ. Harmadrészt, mindig fokozatosan érdemes valamit megtanulni. Ha egyből a legnehezebb részekkel kezdjük, valószínűleg hamar kudarc lesz a vége. A gondolkodásunknak fejlődnie kell, hogy megértsük a nehezebb részeket.

– Miért kell gyakorolnunk a bizonyításokat?

– Tulajdonképpen a logikus gondolkodást gyakoroljuk. Annak is vannak szabályai, a *logika axiómá*i.

– Akkor mond el nekem a logika axiómáit és kész.

– Sajnos, ez nem ilyen egyszerű. A logikus gondolkodást példákon keresztül értjük meg, mint ahogy a kisgyerek a nyelvet tanulja. A logika axiómáinak megértéséhez már elég sok ismeret és matematika kell. A logikus gondolkodás elsajátítása a legtöbb embernek nem okoz gondot.

– És mi van azzal, akinek mégis?

– Az nem fogja érteni a matematikát. Sajnos, én sem tudok megtanulni énekelni.

– Más haszna tehát nincs is a bizonyításoknak?

– De van. Elsősorban arra szolgálnak, hogy tökéletesen világossá váljék, mi igaz és mi nem. A tétel megértésében is segítenek, a fogalmakat pedig gyakoroljuk a bizonyításokkal.

– Már látom, nem úszom meg a bizonyításokat.

– Teljesen nem. Eukleidész azt válaszolta a királynak, mikor az valami könnyű utat kért a geometriához, hogy a geometriához nem vezet királyi út. Azért a nehezebb bizonyításokat kihagyom, és magad is átugorhatsz bizonyításokat, de minél többet hagysz ki, annál nehezebb érteni a matematikát.

– Remélem azért nem akarsz mindent az axiómákból felépíteni.

– Nem. Például a valós számokat ismertnek teszem fel. Az axiómákból való felépítés elsősorban a matematikusoknak szól, hiszen nekik ez a szakmájuk. A matematikatanároknak sem árt ismerni, nem azért, hogy ezt tanítsák, hanem csak azért, hogy tudják, mi van a mögött, amit tanítanak. Kellhet még olyan infomatikusoknak, akik logikai programozással foglalkoznak.

– Na, így talán jó lesz.

– A következő tétel a Thalész-tétel egy általánosítása lesz.

– Mi az az általánosítás?

– Egy olyan tétel, amiben „benne van” a másik tétel, egyszerűen kiadódik belőle.

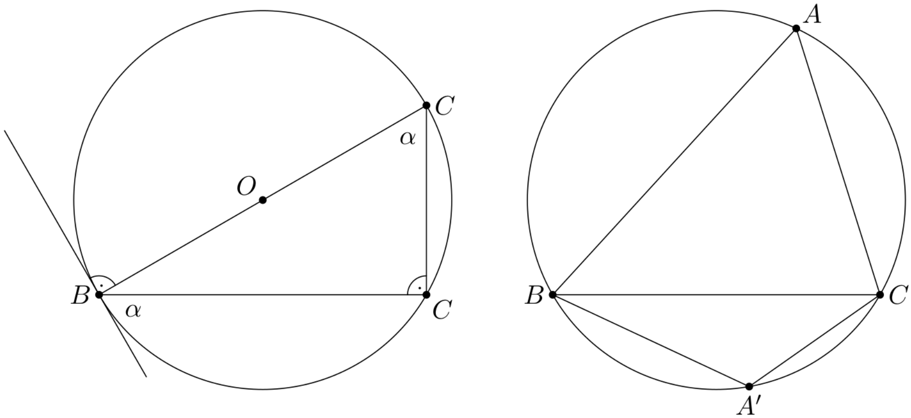
– No jó, de előtte tarsunk szünetet. Nem is bírom ezt a rengeteg újdonságot mind megjegyezni.

– Nem csodálom. Az ember egyszerre hét körüli számú „eszmét” bír megjegyezni, ez pedig sokkal több volt. Szerencsére bármikor újra elő tudod venni a leírtakat és átolvasni. A továbbiakban a matematikában szokásos módon haladunk: definíció, tétel, bizonyítás, és nem foglak egyszerre ennyi mindennel nyakonönteni. De talán arra jó volt ez, hogy lásd, mi mindent kellett Thalésznek kitalálni, míg a világon az első bizonyítást megcsinálta.

**1.3.3. Középponti és kerületi szög.** Egy körben egy $BC$ körívhez tartozó *középponti szög* csúcsa a kör középpontja, szárai pedig a körívet fogják közre. A körívhez tartozó *kerületi szög*ek csúcsa a kör egy, a köríven kívül fekvő pontja, szárai pedig a körívet fogják közre.

**1.3.4. Kerületi szögek tétele.** *Egy körben egy $BC$ körívhez tartozó kerületi szögek mindegyike a a középponti szög fele, így mind egyenlőek.*

**Bizonyítás.** Tulajdonképpen ugyanaz, mint Thalész tételének bizonyítása: lásd az 1.3.1 ábra jobb oldalát. Ha a kör középpontja a $BAC$ szög szárain kívül fekszik, akkor ez a szög a $\beta$ és $\gamma$ szögek különbségeként adódik. □




**1.3.6 ábra:** húrnégyszög.

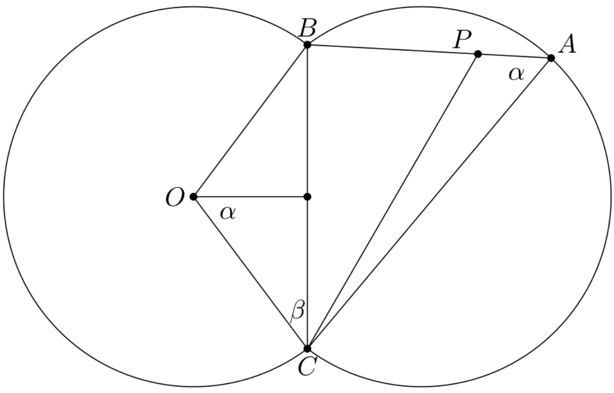
Szoktunk beszélni egy kör egy $BC$ húrjához tartozó kerületi szögekről is. Ezzel azonban kicsit vigyázni kell. A 1.3.6 ábra jobb oldalán az $A$ pontnál lévő szög és az $A'$ pontnál lévő szög kiegészítő szögek: valóban, az egyik a $BC$ ívhez tartozó kerületi szög, a másik pedig a $CB$ ívhez tartozó kerületi szög. Mivel a megfelelő középponti szögek összege 360°, a kerületi szögek összege 180°.

**1.3.5. Érintő a húr végpontjában.** *Egy kör $BC$ húrjának végpontjához húzott érintőnek a húrral bezárt szögei a húrhoz tartozó kerületi szögek.*

**Bizonyítás.** Először tekintsük azt a speciális esetet, amikor a húr éppen átmérő. Az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó átmérőre: ha valamelyik oldalon a bezárt szög kisebb lenne 90°-nál, akkor abba az irányba mozogva, közelednénk a kör középpontjához, így a kör belsejébe kerülnénk. Ez ellenmond annak, hogy az érintőn mozgunk. Az általános esethez tekintsük az 1.3.6 ábra bal oldalát. Thalész tétele szerint a $BCA$ háromszög derékszögű, és már beláttuk, hogy az érintő merőleges a $BA$ átmérőre. Ebből következik az állítás, mert a $BAC$ szög egy, a húrhoz tartozó látószög. □

**1.3.6. Húrnégyszögek.** Ha egy négyszöghöz van olyan kör, amelynek a négyszög oldalai mind húrjai, akkor a négyszöget *húrnégyszög*nek nevezzük. Például az 1.3.6 ábra jobb oldalán az $ABA'C$ négyszög húrnégyszög, és azt is beláttuk, hogy szemben lévő szögei kiegészítő szögek. Megfordítva, az is igaz, hogy ha egy négyszög szemben lévő szögei kiegészítő szögek, akkor a négyszög húrnégyszög. Ennek bizonyítására legjobb lenne egy olyan eljárás, amellyel megrajzolhatjuk a megfelelő kör. Sokszor a görögök tétel helyett egy eljárást adtak arra, hogy egy adott alakzat — itt a négyszög a körrel — bizonyos adataiból — itt a négyszögből — hogyan rajzolható le körzővel és vonalzóval. Ezt az eljárást *szerkesztés*nek nevezzük. Például Thalész tétele úgy is felfogható, mint egy eljárás leírása, aminek a segítségével derékszöget szerkeszthetünk. Egy szerkesztés nyilván — bizonyítással együtt — még többet jelent, mint annak bizonyítása, hogy az adott adatok (esetleg csak egybevágóság erejéig) meghatározzák az alakzatot.

Először vizsgáljuk meg azon pontok mértani helyét, amelyekből egy adott szakasz adott szög alatt látszik. Tekintsük az 1.3.7 ábrát.



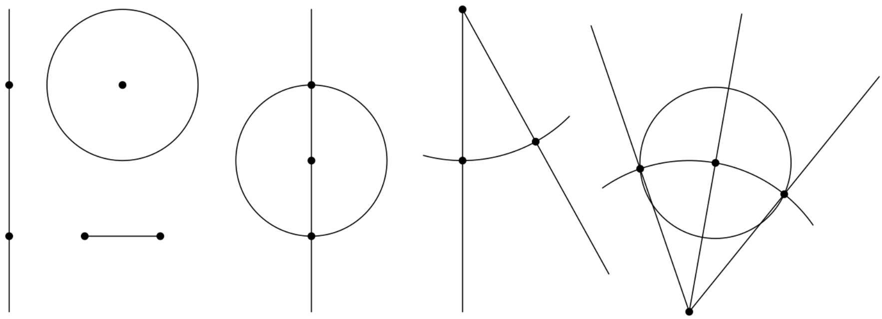

**1.3.7 ábra:** látókörök.

**1.3.7. Látókörök.** *A $BC$ szakasz pontosan a két körívből álló nyolcasszerű alakzat pontjaiból látszik adott $\alpha$ szög alatt. A $B$ és $C$ pontok nem tartoznak az alakzathoz. A körívek olyan körök részei, aminek $BC$ egy húrja, és a hozzá tartozó kerületi szög $\alpha$.*

**Bizonyítás.** Az világos, hogy az alakzat pontjaiból a szakasz $\alpha$ szög alatt látszik. Ha a $P$ pont a belsejében van az alakzatnak, akkor a $BP$ félegyenes egy $A$ pontban metszi az alakzatot. Mivel a $BAC$ szög $\alpha$, a $PCA$ szög pedig nem nulla, a $BPC$ szög nagyobb, mint

$\alpha$. Hasonlóan kapjuk, hogy ha $P$ az alakzaton kívül, de nem a $BC$ egyenesen van, akkor onnan a $BC$ szakasz $\alpha$-nál kisebb szög alatt látszik. Végül a látószög a $BC$ egyenesnek a szakaszon kívüli pontjaiból 0°, a szakasz belső pontjaiból 180°, a végpontjaiból pedig határozatlan. □

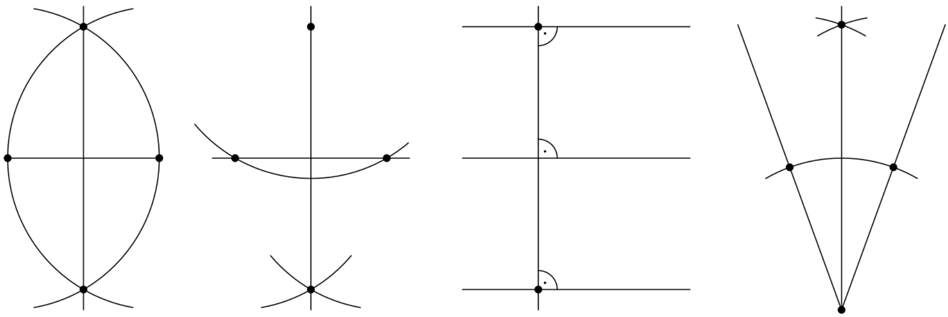
**1.3.8. Szerkesztések.** A látókörök szerkesztéséhez a középpontjukat kell megszerkeszteni. Az $O$ pont szerkesztéséhez az $\alpha$ szög $\beta$ pótszögét kell megszerkeszteni, majd ha ez megvan, akkor a $BCO$ háromszöget a $BC$ oldalból és az azon fekvő $\beta$ szögekből. Hasonlóan szerkeszthetjük meg a húrnégyszög köré írt kör középpontját. Ezek mind egyszerű szerkesztések.



**1.3.8 ábra:** szerkesztések I.

Nézzünk néhány példát, és mindjárt világosabb lesz a dolog. Tekintsük az 1.3.8 ábrát. Két adott ponton átmenő egyenest nyilván vonalzóval rajzolhatunk. Kezdjük egy kör szerkesztésével adott középponttal és sugárral. Szúrjuk le a körzőnket a sugarat megadó szakasz egyik végpontjába, majd nyissuk ki annyira, hogy a hegye a szakasz másik végpontjában legyen. Ezt úgy mondjuk, hogy „körzőnyílásba vesszük az adott hosszt". Most szúrjuk le a körzőt az adott pontba, és megrajzolhatjuk a kör. Hasonlóan szerkeszthetünk adott hosszúságú szakaszt adott egyenes adott pontjába: körzőnyílásba vesszük az adott hosszt, leszúrjuk a körzőt az egyenes adott pontjába és kört rajzolunk, amely két pontba metszi az egyenest, két adott hosszúságú szakaszt is kapunk. Tetszőleges szöget is lemásolhatunk úgy, hogy a „másolat" egyik szára egy adott félegyenes: tetszőleges körzőnyílás veszünk fel, leszúrjuk a körzőnket a szög csúcsába, és kört rajzolunk. Ugyanilyen körzőnyílással kört rajzolunk az adott félegyenes végpontja körül is. Az első kör elmetszi a szög mindkét szárát. A két metszéspont távolságát körzőnyílásba vesszük, és az adott félegyenes és az első kör metszéspontja körül kört rajzolunk. Ez (általában) két pontban metszi az első kört, a szög két „másolatát" kaptuk. Szögmásolással összeadhatunk és kivonhatunk szögeket.

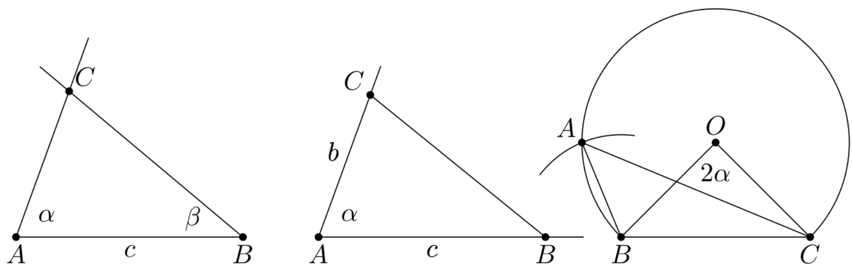
Az 1.3.9 ábrán néhány további szerkesztés látható. Az első a szakaszfelező merőleges szerkesztése. A szakasz egyik végpontjába leszúrjuk körzőnket, körzőnyílásba vesszük a szakasz hosszát, kört rajzolunk, a másik végpontból is kört rajzolunk. A metszéspontokat összekötve a szakasz végpontjaival két egyenlő oldalú háromszöget kapunk, a metszéspontokat egymással összekötve pedig a szakaszfelező merőlegest. Ha egy adott hosszúságot veszünk körzőnyílásba, akkor két egyenlő szárú háromszöget kapunk, de ekkor is megkapjuk a szakaszfelező merőlegest. A szakaszfelező merőleges azoknak a pontoknak a mértani



**1.3.9 ábra:** szerkesztések II.

helye (pontosan azok a pontok vannak rajta), amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak. Adott egyenesre merőleges adott ponton átmenő egyenes úgy rajzolhatunk, hogy az adott pont köré rajzolt elég nagy sugarú körrel elmetszük az egyenes, majd a szakaszra, amelynek a két pont a végpontja, felező merőlegest állítunk. Ha most a merőlegesre az adott ponton átmenő merőlegest állítunk, akkor az adott ponton átmenő, az eredeti egyenessel párhuzamos egyenest kapunk. Végül egy szöget úgy tudunk megfelezni, hogy tetszőleges körzőnyílással a csúcsból elmetsszük a szög szárait, majd (ugyanezzel vagy más körzőnyílással) a metszéspontokba egyenlő sugarú köröket rajzolva, azok metszéspontját összekötjük a szög csúcsával. Egyébként a szögfelező azon pontok mértani helye, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak. Természetesen mindezeket a dolgokat be kellene bizonyítani.

Néhány további szerkesztés külön ismertetünk.




**1.3.10 ábra:** szerkesztések III.

### 1.3.9. Háromszög szerkesztése egy oldalból és a rajta fekvő két szögből.

**Eljárás.** Lásd az 1.3.10 ábra bal oldalán. Mérjük fel egy egyenesre az adott oldalt, majd a szakasz egyik végére másoljuk át az egyik, a másik végpontjába a másik szöget az egyenes ugyanazon oldalára. A két félegyenes metszéspontja megadja a háromszög harmadik csúcsát. Tulajdonképpen négy háromszög keletkezhet, de kettő-kettő az egyenesre való tükrözéssel, másik kettő-kettő pedig a szakasz középpontja körüli forgatással átvihető egymásba, tehát egybevágóak.

### 1.3.10. Háromszög szerkesztése két oldal hosszából és a közbezárt szögből.

**Eljárás.** Lásd az 1.3.10 ábra közepén. Másoljuk le a közbezárt szöget, majd a száraira mérjük fel az adott oldalakat. □

### 1.3.11. Háromszög szerkesztése három oldal hosszából.

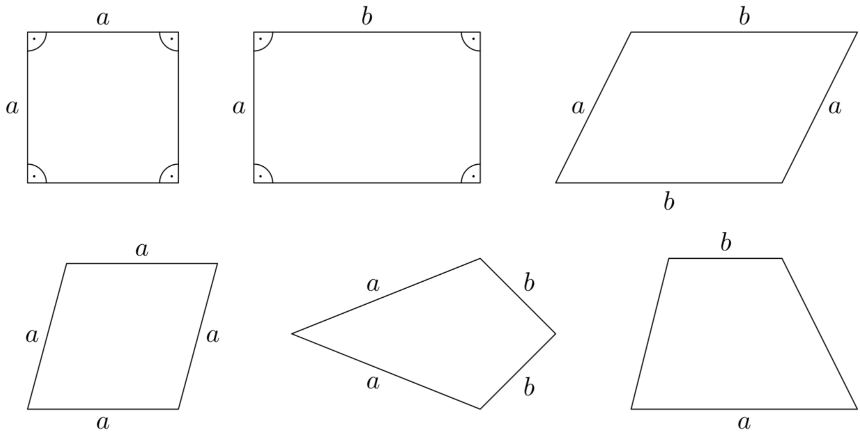
**Eljárás.** Mérjük fel egy egyenesre az egyik oldalt, majd a szakasz két végpontjába rajzoljunk kört a másik két hosszal mint sugárral. Négy háromszög keletkezhet, de kettő-kettő az egyenesre való tükrözéssel, másik kettő-kettő pedig a szakasz középpontja körüli forgatással átvihető egymásba, tehát egybevágóak. □

### 1.3.12. Háromszög szerkesztése két oldal hosszából és a hosszabbikkal szemközti szögből.

**Eljárás.** Lásd az 1.3.10 ábra jobb oldalán. A hosszabbik oldal fölé szerkesszünk látókört az adott szöggel, majd a rövidebbik oldal hosszát körzőnyílásba véve metszük ezt el a rövidebbik oldal hosszával. □

### 1.3.13. Háromszög szerkesztése egy oldal hosszából, a rajta fekvő egyik szögből és az oldallal szemközti szögből.

**Eljárás.** Megszerkesztjük a harmadik szöget. □

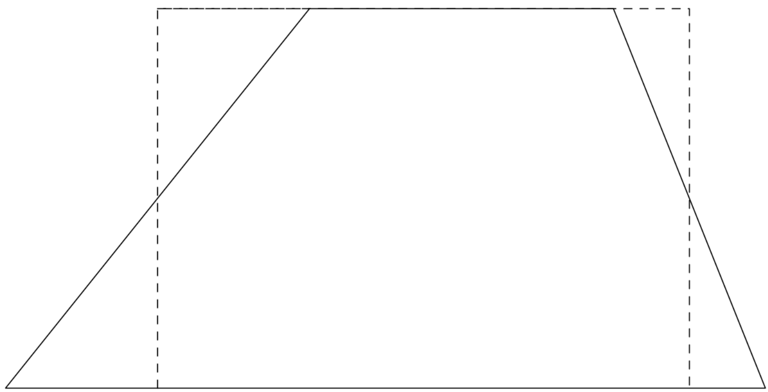



**1.3.11 ábra:** négyszögek.

**1.3.14. Négyszögek és szabályos sokszögek.** A *négyzet* minden szöge derékszög és minden oldala egyenlő. A *téglalap*nak is minden szöge derékszög (így a szemben lévő oldalai párhuzamosak), de csak a szemben lévő oldalai egyenlőek páronként. A *paralelogramma* szemben lévő oldalai párhuzamosak és egyenlőek. A *rombusz* olyan paralelogramma, amelynek oldalai egyenlőek. A *deltoid* két-két egymás melletti oldala egyenlő. A *trapéz*nak van két párhuzamos oldala. (Lásd az 1.3.11 ábrát.) Ha figyelmesen megnézzük a tanult szerkesztéseket, segítségükkel ezek a négyszögek könnyen szerkeszthetők. Ha egy sokszög minden oldala és minden szöge egyenlő, akkor *szabályos sokszög*nek nevezzük. Szögfelezéssel nyilván minden olyan szabályos sokszög megszerkeszthető, amelynek az oldalszáma a háromszög vagy a négyzet oldalszámából néhányszori duplázással adódik, és adott az oldalhossza vagy az átmérője. A szabályos sokszögek szerkesztésére még visszatérünk.

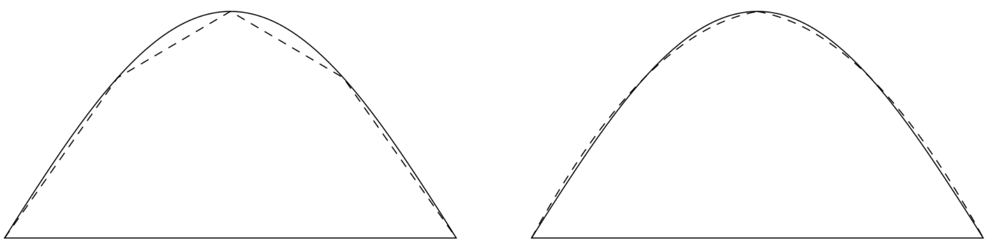
**1.3.15. Terület.** A terület mérésénél az egységet a hosszúságegységből kapjuk, az egységnyi terület egy 1 m-szer 1 m-es négyzet területe, a négyzetméter, jelben $m^2$. Egy téglalap területét úgy kapjuk, hogy a szélességét és a hosszúságát összeszorozzuk. Kisebb területegységek a négyzetdeciméter, $dm^2$, a négyzetcentiméter, $cm^2$, stb. Vigyázzunk, a $dm^2$ nem deci-négyzetméter, azaz a négyzetméter tizede, hanem négyzet-deciméter, azaz a deciméter négyzete (második hatványa), így 1 $dm^2$=0,1 m·0,1 m=0,01 $m^2$, azaz a négyzetméter százada! Hasonlóan a $cm^2$ a négyzetméter tízezrede, stb. Nagyobb egységek a négyzetdekaméter, amit *ár*nak is neveznek (ma már nemigen használják), a négyzethektométer, amit *hektár*nak is neveznek (hekto-ár), és a négyzetkilométer. Az ár rövidítése a, a hektáré ha. Így

$$1\ \mathrm{km}^2=100\ \mathrm{ha}=10\,000\ \mathrm{a}=1\,000\,000\ \mathrm{m}^2.$$



**1.3.12 ábra:** átdarabolás.

Egy trapézt, mint az 1.3.12 ábra mutatja, könnyen átdarabolhatunk téglalappá, aminek szélessége a párhuzamos oldalak távolsága, a trapéz úgynevezett *magasság*a, hosszúsága pedig a párhuzamos oldalak hosszának átlaga, azaz a hosszaik összegének a fele lesz. A trapéz területét tehát a magasságából és a párhuzamos oldalak hosszából könnyen kiszámíthatjuk. A háromszög egy speciális trapéz, amelynek az egyik „párhuzamos” oldala nulla hosszú, így a területét úgy kapjuk, hogy valamelyik oldal (az „alap”) hosszának a felét szorozzuk az arra az oldalra, azaz az alapra merőleges *magasság*gal (a szemben lévő csúcsból az alapra bocsátott merőleges hosszával). Sokszögek területét háromszögekre bontás segítségével számíthatjuk ki.



**1.3.13 ábra:** terület közelítése.

Néha előfordul, hogy valamilyen bonyolultabb alakzat, például egy görbe alatti rész *terület*ét kell kiszámítanunk. Ezt közelítőleg megtehetjük úgy, hogy trapézokkal közelítjük: lásd az 1.3.13 ábra bal oldalán. Sokkal pontosabb közelítést kapunk, ha az alapot ugyancsak kis részekre osztjuk, de minden kis részen a területet úgy közelítjük, hogy a bal oldali magasságnak, a jobb oldali magasságnak és a középső magasság négyszeresének összegét osztjuk hattal, és ezt szorozzuk az alap megfelelő részének hosszával. Ez a *Simpson-formula*. A magyarázatot az integrálszámítás alkalmazásainál megtaláljuk, itt elégedjünk meg annyival, hogy ez a görbe parabolákkal való közelítésének felel meg. Az 1.3.13 ábra bal illetve jobb oldalán berajzoltuk a trapézokat illetve parabolákat.

**1.3.16. Közelítések.** Tegyük fel, hogy egy trapéz alakú telek területét kell megmérni. A telek hosszát (a trapéz magasságát) megmérve, azt 290 m-nek találtuk, de hibáztunk, 3 m-rel nagyobbnak mértük, mint amekkora valójában. A hiba $\approx$ 1 százalék (századrész), azaz 1 %. A párhuzamos oldalakat megmérve, azokat 90 m-nek és 110 m-nek találtuk, 1 m-rel illetve 2 m-rel nagyobbnak, mint amekkora valójában. A párhuzamos oldalak hosszának átlaga mérésünk szerint 100 m, másfél százalékkal, azaz 1,5 %-kal nagyobb, mint amekkora valóban. A kiszámolt terület 29000 m$^2$, ami $1{,}015 \cdot 1{,}01 = 1{,}02515$-ször, azaz nagyjából 2,5 %-kal nagyobb, mint a valódi, így a valódi $1/1{,}02515 \approx 0{,}975$-ször, azaz nagyjából 2,5 %-kal kisebb, mint a kiszámolt. Másik példaként tegyük fel, hogy a trapéz magasságát 1 %-kal kisebbnek mértük, mint a valódi, a másik hiba ugyanakkora, mint az előbb. A kiszámolt terület most $1{,}015 \cdot 0{,}99 = 1{,}00485$-ször, azaz nagyjából 0,5 %-kal nagyobb, mint a valódi, így a valódi $1/1{,}005 \approx 0{,}995$-ször, azaz nagyjából 0,5 %-kal kisebb, mint a kiszámolt. Az látjuk tehát, hogy szorzáskor a kis hibák nagyjából (előjelesen) összeadódnak, osztáskor pedig kivonódnak. Ezt gyors fejszámolásra is felhasználhatjuk: ha szorzásnál vagy osztásnál valamelyik számhoz közel van egy másik, kerek szám, akkor azzal számolunk, majd az eredményt helyesbítjük annyi százalékkal, amennyi az eltérés volt.

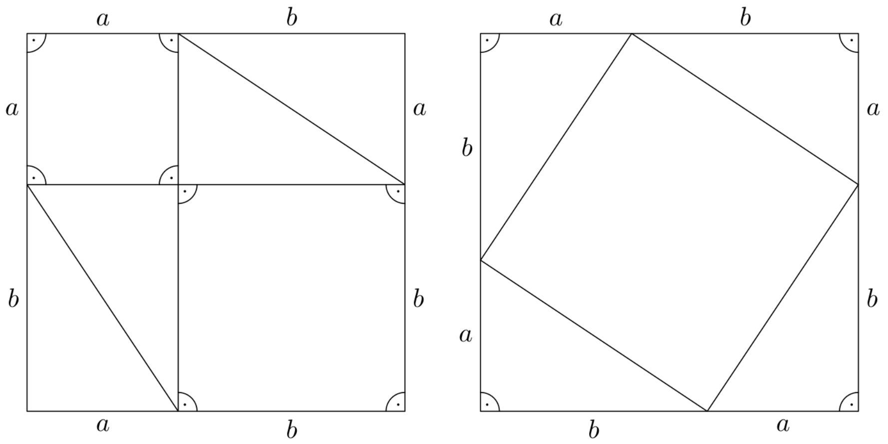
Tegyük fel, hogy egy egyenes útszakasz területét szeretnénk kiszámolni. Az út szélességét megmértük, és a mérésünk hibája 1 %. Területszámoláshoz hiába tudjuk a kb. 2000 m-es hosszúságát akár egy tízezredrész hibával, azaz egy század százalék (%%) hibával megmérni, nem nagyon érdemes, mert a terület hibája úgyis 1 % körül lesz. Elég lesz a hosszúságot 1 ‰ (egy ezrelék, azaz egy ezredrész) hibával mérni, mert ez a hiba már nem befolyásolja lényegesen az eredmény hibáját, az 0,9 % és 1,1 % között lesz. Általában, a legpontatlanabb adat hibája határozza meg az eredmény hibáját, a többi adat hibáját nem nagyon érdemes ennek a tizedénél tovább csökkenteni.

**1.3.17. Pythagorasz tétele.** Bármely derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területének összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével.

**Bizonyítás.** Az 1.3.14 ábra magáért beszél: négy, az eredetivel egybevágó háromszög a két kisebb négyzetet ugyanakkora négyzetté egészíti ki, mint a nagyobb négyzetet. □

**1.3.18. Következmény: Pythagorasz tételének megfordítása.** Ha egy háromszög egyik oldala hosszának a négyzete egyenlő a másik két oldala hosszának a négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

**Bizonyítás.** Ha $a^2 + b^2 = c^2$, akkor szerkesszünk egy derékszögű háromszöget $a$ és $b$ hosszúságú befogókkal. Mivel Pythagorasz tétele szerint a kapott háromszög harmadik




**1.3.14 ábra:** Pythagorasz tétele.

oldala ugyanolyan hosszú, mint az eredeti háromszögé, azzal egybevágó. □

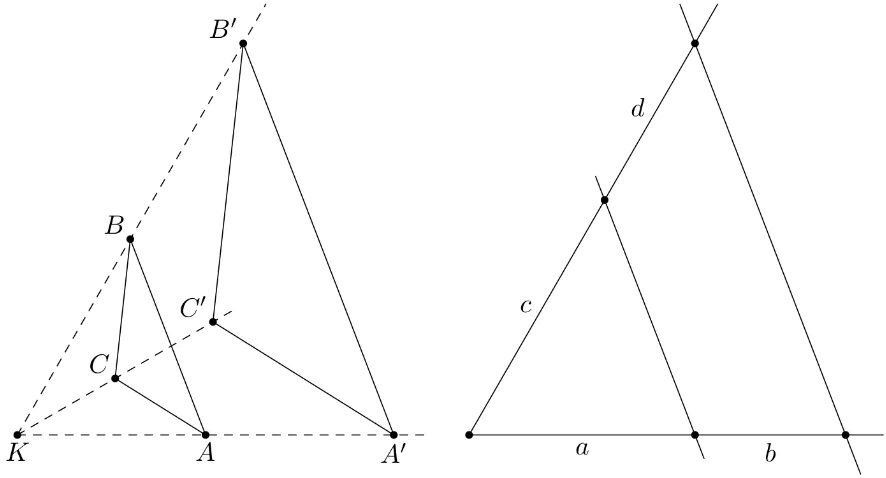
**1.3.19. Megjegyzés.** Pythagorasz inkább vallásalapító, és egy kicsit matematikus, filozófus, próféta, szent és szélhámos volt. Imádói a legfőbb isteni bölcsesség emberi megtestesülésének tartották, Hérakleitosz viszont „értelem nélküli tudálékosság”-ról beszél vele kapcsolatban. Nagyon könnyen lehetséges, hogy a tételt Babilonban ismerte meg, de talán ő bizonyította be.

**1.3.20. Megjegyzés.** Vannak-e vajon olyan $a$, $b$, $c$ pozitív természetes számok, hogy $a^2 + b^2 = c^2$? Ma az ilyen számhármasokat *pythagoraszi számhármasok*nak hívjuk. Már az egyiptomiak ismertek ilyeneket, például a 3, 4, 5 számhármast. A matematikus számára természetes kérdés, hogy megkérdezze, van-e végtelen sok ilyen számhármas? Igen, mert ha mindegyik számot megszorozzuk egy pozitív természetes számmal, akkor újra pythagoraszi számhármast kapunk. Na jó, de ezek nem „lényegesen különbözőek”. Van-e végtelen sok „alapmegoldás”, olyan pythagoraszi számhármas, amelynek tagjai relatív prímek? Ha $k$ és $\ell$ pozitív természetes számok és $k > \ell$, akkor

$$2k\ell, \quad k^2 - \ell^2, \quad k^2 + \ell^2$$

pythagoraszi számhármas, mert $4k^2\ell^2 + (k^2 - \ell^2)^2 = (k^2 + \ell^2)^2$. Megmutatható, hogy ezek pontosan akkor adnak alapmegoldást, ha $k$ és $\ell$ relatív prímek és az egyikük páros. Az is megmutatható (lényegesen nehezebben) hogy így minden alapmegoldást megkapunk.

Fermat 1637-ben azt kérdezte, hogy egy $n > 2$ természetes szám esetén vannak-e vajon olyan $a$, $b$, $c$ pozitív természetes számok, hogy $a^n + b^n = c^n$? Azt sejtette, hogy nincsenek, de ezt csak 1994-ben sikerült Andrew Wiles-nak bebizonyítania. Az ilyen típusú kérdésfeltevések gyakoriak a matematikában, hozzátartoznak a matematika fejlődéséhez. Nagy részük nem hoz lényeges új módszert, így nem vezet lényeges fejlődéshez, bár megválaszolásukkal „tisztul a kép”. Némelyik azonban, mint a Fermat-sejtés is, olyan nagy erőfeszítésekre sarkalja a matematikusokat, hogy lényeges új módszereket fejlesztenek ki. Az alkalmazásokból — elsősorban a fizikából — eredő kérdésfeltevések, sokszor ötletek sokkal gyakrabban vezetnek lényeges új eredményekre.




**1.3.15 ábra:** hasonlóság.

**1.3.21. Középpontos hasonlóság, hasonlóság.** Lásd az 1.3.15 ábra bal oldalát. Két alakzatról azt mondjuk, hogy *középpontosan hasonló*ak, ha van olyan $K$ pont, a *hasonlóság középpontja*, hogy az egyik alakzat bármely $P$ pontjának megfeleltethető a másik alakzat egy $P'$ pontja és viszont, hogy a $P$ és $P'$ ugyanazon a $K$-ból kiinduló félegyenesen vannak, és egy adott $k$ pozitív számra, a *középpontos hasonlóság arányá*ra a $KP'$ szakasz hossza megegyezik $k$-szor a $KP$ szakasz hosszával minden $P$-re.

Ha két alakzat mindegyike egybevágó egy-egy alakzattal, amelyek középpontosan hasonlóak, akkor azt mondjuk, hogy *hasonló*ak, a *hasonlóság arányszáma* a középpontos hasonlóság $k$ arányszáma. Ha $k > 1$, akkor *nagyítás*ról, ha $k < 1$, akkor *kicsinyítés*ről beszélünk. Hasonlóság esetén minden távolság és a görbék hossza is a $k$ arányszámmal szorzódik. Például bármely két kör hasonló, és a kerületük és átmérőjük aránya mindig ugyanaz a szám, amit $\pi$-vel szokás jelölni; $\pi \approx 3{,}14\ldots$, pontosabban $\pi \approx 3{,}14159265\ldots$. Később látni fogjuk, hogyan kaphatunk tetszőleges pontosságú közelítést.

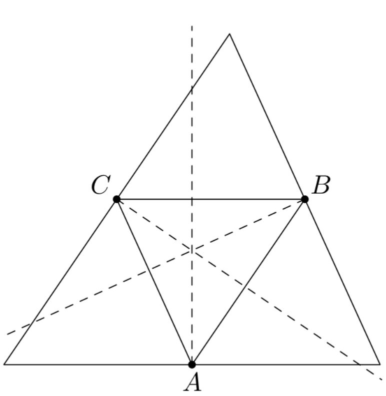
Ha adott az az $a$, $b$ és $a+b$ szakaszhosszak közül bármely kettő és a $c$ vagy a $c+d$ szakaszhossz, akkor az 1.3.15 ábra jobb oldala mutatja, hogy párhuzamos szerkesztésével hogyan szerkeszthető meg a $d$ hossz úgy, hogy $(a+b)\colon a = (c+d)\colon c$, és így $b\colon a = d\colon c$. (Ha $d$ adott, akkor cseréljük meg $a$ és $b$, illetve $c$ és $d$ szerepét.) Például ha $b = 1$, akkor $d = ac$, ha $d = 1$, akkor $c = a/b$.

Nem nehéz megmutatni, hogy két háromszög hasonló az alábbi négy esetben: két szögük (és így a harmadik is) megegyezik; egy szögük és az azt közrezáró oldalak aránya megegyezik; a megfelelő oldalak aránya megegyezik; két-két oldal aránya és a hosszabbikkal szemben fekvő szög megegyezik.

A középpontos hasonlóság és a hasonlóság ugyanígy definálható térben is.

**1.3.22. Négy nevezetes pont.** Egy $ABC$ háromszögben az *oldalfelező merőleges*ek egy pontban metszik egymást, ez a *körülírt kör középpontja*; valóban az $a$ oldal felező merőlegesének pontjai egyenlő távolságra vannak a $B$ és $C$ pontoktól, míg a $b$ oldal felező merőlegesének pontjai egyenlő távolságra vannak az $A$ és $C$ pontoktól, így metszéspontjuk egyenlő távolságra van az $A$ és $B$ pontoktól, tehát rajta van a $c$ oldal felező merőlegesén. Mivel ez a pont mindhárom csúcstól egyenlő távolságra van, az ilyen középpontú, megfelelő sugarú kör átmegy a csúcspontokon.

Hasonlóan adódik, hogy a szögfelezők egy pontban metszik egymást, és ez a *beírt kör középpontja*; az $\alpha$ szög felezőjének pontjai egyenlő távolságra vannak a $b$ és $c$ oldalaktól, a $\beta$ szög felezőjének pontjai egyenlő távolságra vannak az $a$ és $c$ oldalaktól, így metszéspontjuk egyenlő távolságra van az $a$ és $b$ oldalaktól, tehát rajta van a $\gamma$ szög szögfelezőjén. Mivel ez a pont mindhárom oldaltól egyenlő távolságra van, az ilyen középpontú, megfelelő sugarú kör érinti az oldalakat.



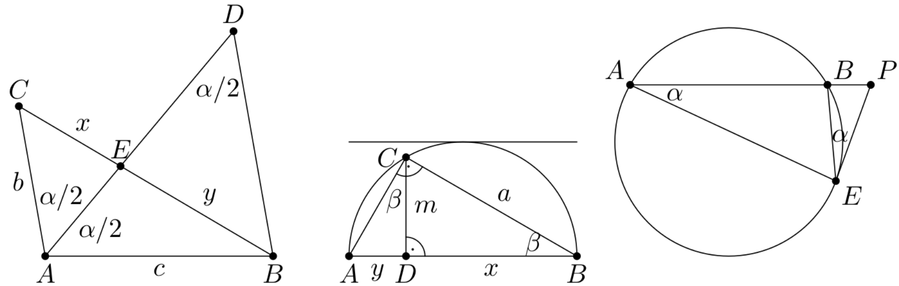

**1.3.16 ábra:** négy nevezetes pont.

A három oldalhoz tartozó magasságvonalak is egy pontban metszik egymást, ez a *magasságpont*. Ennek belátásához fektessünk minden csúcson keresztül párhuzamost a szemben fekvő oldallal. (Lásd az 1.3.16 ábra bal oldalát.) Az eredeti háromszög magasságvonalai a nagy háromszög oldalfelező merőlegesei, így egy pontban metszik egymást.

Egy háromszögben egy csúcspontot a szemben lévő oldal felezőpontjával összekötő szakaszt *súlyvonal*nak nevezzük. Bármely háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást, ez a *súlypont*. A súlypont 2: 1 arányban osztja a súlyvonalakat, a hosszabb rész a csúcs felöl van. Ennek belátásához tekintsük az 1.3.16 ábra jobb oldalát. Az $A$-ból illetve $B$-ből kiinduló súlyvonalak $E$ és $D$ talppontjait kössük össze. A $DEC$ háromszög és az eredeti háromszög hasonlóak, a hasonlóság aránya $1/2$. A két súlyvonal metszéspontja legyen $S$. Az $ABS$ és a $DES$ háromszögek is hasonlóak, a hasonlóság aránya itt is $1/2$. Így az $S$ pont 2: 1 arányban osztja a két súlyvonalat. Mivel ez bármely két súlyvonalra igaz, egy pontban metszik egymást.

**1.3.23. Szögfelező tétel.** *Egy háromszög egyik szögének a felezője olyan arányban osztja a szemközti oldalt, mint a mellette fekvő oldalak aránya.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az 1.3.17 ábra bal oldali részét. Az $A$ csúcsnál lévő $\alpha$ szöget a szögfelező két egyenlő szögre osztja, míg a szemközti oldallal vett $E$ metszéspontja a szemközti oldalt az $x$ és $y$ hosszúságú részekre. Húzzunk párhuzamost a $B$ csúcson át az $AC$ oldallal, és legyen ennek a szögfelezővel vett metszéspontja $D$. Mivel a $CAE$ szög és a $EDB$ szög váltószögek, az $ABD$ háromszög egyenlőszárú. Innen $BD$ hossza is $c$. Az $E$




**1.3.17 ábra:** tételek.

csúcsnál lévő csúcsszögek is egyenlőek, így az $AEC$ és a $DEB$ háromszögek hasonlóak. Innen $b\colon x = c\colon y$. □

**1.3.24. Átfogótétel és befogótétel.** *Egy derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság hosszának a négyzete az átfogó két szelete hosszának a szorzata, a befogó vetületének és az átfogó hosszának a szorzata pedig a befogó hosszának a négyzete.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az 1.3.17 ábra középső részét. Mivel a $DBC$ és a $DCA$ háromszögek hasonlóak, $m\colon x = y\colon m$. Mivel a $DBC$ háromszög az eredeti $CAB$ háromszöghöz is hasonló, $c = x + y$-ra $x\colon a = a\colon c$. □

**1.3.25. Következmény: számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.** *Két nemnegatív szám mértani közepe kisebb vagy egyenlő, mint a számtani közepük, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, amikor a két szám egyenlő.*

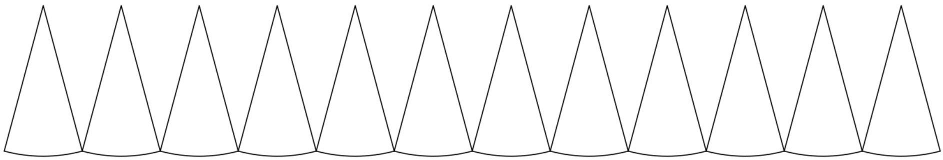
**Bizonyítás.** Az átfogótételből $\sqrt{xy} = m$ nem nagyobb, mint a kör sugara, ami $(x+y)/2$, vagyis a számtani közép. Egyenlőség pontosan akkor van, ha a magasság a kör sugara, de ekkor $x = y$. Az az eset, amikor valamelyik szám nulla, nyilvánvaló. □

**1.3.26. Szelőszakaszok mértani közepe az érintő.** *Egy külső pontból egy körhöz húzott érintő hosszának a négyzete megegyezik a külső pontból húzott szelő két metszéspontjáig terjedő távolságok szorzatával.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az 1.3.17 ábra jobb oldali részét. Az $EPB$ és az $EPA$ háromszög hasonlóak: egyik szögük ugyanaz, egy másik pedig az $EB$ ívhez tartozó látószög, így szintén megegyezik. Innen $e$-vel jelölve az érintőszakasz, $a$-val illetve $b$-vel pedig az $AP$ illetve $BP$ szakasz hosszát, $b\colon e = e\colon a$. □

**1.3.27. Megjegyzés.** Ha a $P$ pontból egy másik szelőt húzunk, akkor annak szakaszai $a'$, $b'$ hosszára $ab = a'b'$, mert mindkét oldal $e^2$. Nem nehéz belátni, hogy ez az összefüggés akkor is igaz marad, ha a $P$ pont a kör belsejében van.

**1.3.28. A kör területe.** Foglalkozzunk most a kör területének kiszámításával. Nem árt észrevenni, hogy ha bármilyen síkidomot $k$ arányban nagyítunk, akkor a területe $k^2$ arányban nő. (Ha azonban csak egy irányban nyújtjuk $k$-szorosára, akkor a terület is csak $k$-szorosra nő.) A körterület kiszámításának ötletét az 1.3.18 ábrán láthatjuk: szétvagdosva a kört sok kis háromszögszerű darabot kapunk, amelyek mindegyikének a magassága a kör sugara. A háromszögszerű darabok alapjainak összes hossza a kör



**1.3.18 ábra:** a kör átdarabolása.

kerülete, tehát $\pi$-szer az átmérő. A kör területe tehát megegyezik egy olyan háromszög területével, amelynek alapja a kör kerületével egyenlő hosszú, magassága pedig a kör sugara, azaz $\pi$-szer a sugár négyzete. Az ábra csak szemléltetés, ezt pontosan először Arkhimédész (i.e. 287–i.e. 212), az ókor talán legnagyobb tudósa bizonyította be. Becslést adott $\pi$ értékére is: $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$. A felső és az alsó korlát különbsége 1/497.

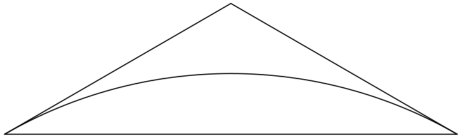
Például egy üveg nyakának belső átmérője 16,75 mm. Mennyi a keresztmetszet területe? Zsebszámológéppel számolva $\pi \cdot (16{,}75/2)^2\ \mathrm{mm}^2 = 220{,}3532722\ \mathrm{mm}^2$. Félrevezető azonban ezt írni, mert azt sugallja, hogy az eredmény nagyon-nagyon pontos. Jobb, ha azt írjuk, hogy 220,4 $\mathrm{mm}^2$, mert a kiindulási adat, az átmérő hibája $3\,‰$ körül van, így a sugár hibája is ennyi, a sugár négyzetének hibája pedig már $6\,‰$, így a végeredményé is. A zsebszámológép beépített $\pi$ billentyűjével számoltam, de elég lett volna a 3,14 közelítés is, hiszen ennek a hibája $0{,}5\,‰$ körül van. A 220,4 $\mathrm{mm}^2$ azt sugallja, hogy az utolsó jegy pontatlan, az utolsó előtti pedig valószínűleg pontos. Ha azt kérdezzük, hogy 1 $\mathrm{cm}^3$ víz mennyivel emeli meg a vízszintet, a válasz 1 $\mathrm{cm}^3$/220,4 $\mathrm{mm}^2$=1000 $\mathrm{mm}^3$/220,4 $\mathrm{mm}^2 \approx 4{,}54$ mm. Az utolsó jegy bizonytalan.

Elég gyakran előfordul a fordított probléma is: ismerjük a területet, és keresssük az átmérőt vagy a sugarat. Például 1 $\mathrm{mm}^2$ keresztmetszetű drótnak mennyi az átmérője? Mivel a kör területe $\pi \cdot r^2$, azt kapjuk, hogy $r^2 \approx 0{,}3183\ \mathrm{mm}^2$, de nekünk $r$ kellene. Próbálgatással célt érhetünk: $0{,}5^2 = 0{,}25$, kevés, $0{,}6^2 = 0{,}36$, sok, $0{,}55^2 = 0{,}3025$, kevés, $0{,}57^2 = 0{,}3249$, sok, $0{,}56^2 = 0{,}3136$, kevés, $0{,}565^2 = 0{,}3192$, sok, stb. Az utolsó közelítés elég jó, akár meg is állhatunk: 0,3183 és 0,3192 között az eltérés csak $\approx 3\,‰$, és mivel négyzetreemeléskor a hiba nagyjából megduplázódik, most nagyjából megfeleződik. Így kevesebb, mint $2\,‰$ hibával az átmérő $\approx 1{,}13$ mm.

Egy körcikk területét is kiszámolhatjuk ezen az elven: annyiad része a teljes kör területének, ahanyad része a hozzá tartozó középponti szög a teljes szögnek. A képlet különösen egyszerű lesz, ha az $\alpha$ középponti szöget azzal mérjük, hogy a hozzá tartozó körív hányszorosa a sugárnak. Ezt az egységet *radián*nak nevezzük. (A sugár latinul rádiusz, ezt használjuk egységnek, innen a radián neve). Ebben mérve a szöget a terület $\alpha r^2/2$. Nagyon egyszerű képletet kaptunk. A hatványsoroknál a képletek sokkal egyszerűbbek lesznek, ha radiánban mérünk, ezért a matematikusok mindig radiánt használnak. Mi is így teszünk a továbbiakban: ha nem írjuk ki, hogy fokról van szó, akkor radián értendő. Az átszámítás alapja, hogy a teljes szög $360^\circ = 2\pi$ radián.

Megjegyezzük, hogy az *egyenes körkúp palást*ja kiterítve egy körcikk, így a felszínét ki tudjuk számolni. Egy körből egy húr által levágott *körszelet* területe is számolható, mert egy háromszögterülettel kisebb egy körcikk területénél.

$\star$ **1.3.29. A $\pi$ értéke.** A Biblia $\pi$-re a 3 közelítő értéket adja. Az egyiptomiak a $(16/9)^2 = 3{,}16\ldots$ közelítő értéket használták. Érdekességként nézzük meg, hogyan kapta

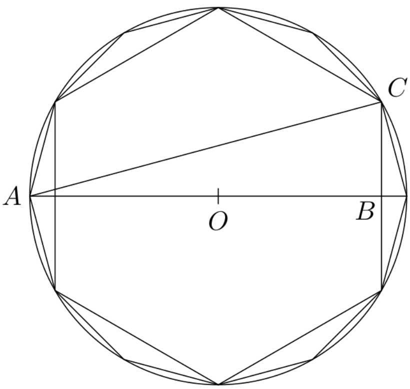


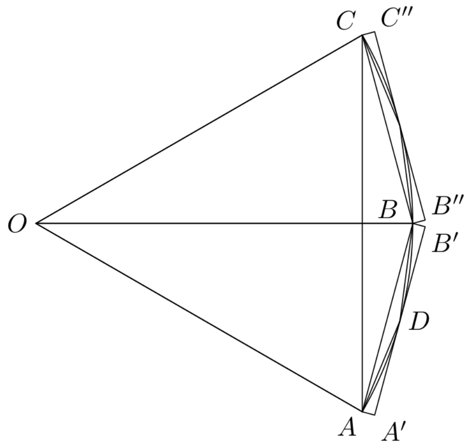
**1.3.19 ábra:** Archimédesz axiómái.

Arkhimédész a

$$3\ \frac{10}{71} < \pi < 3\ \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

becslést? Szüksége volt egy axiómára, amelyet az 1.3.19 ábra szemléltet: ha két „domború" (ma úgy neveznénk, konvex; lásd később) görbének ugyanazok a végpontjai és az egyik görbe meg a végpontokat összekötő szakasz által határolt terület tartalmazza a másikhoz tartozó területet, akkor a tartalmazott görbe hossza legfeljebb annyi, mint a tartalmazó görbéé, és legalább annyi mint a szakaszé. (Hasonló axiómákat fogalmazott meg Arkhimédész területekre, felszínekre és térfogatokra is.) Az axiómából azonnal következik, hogy a kör kerülete legalább annyi, mint akármely beleírt sokszögé és legfeljebb annyi, mint egy köré írt sokszögé. A számolást mai jelölésekkel írjuk le, ő természetesen arányokat használt. Tekintsünk egy egységnyi sugarú körbe írt szabályos $k$-szöget és köré írt szabályos $k$-szöget. Legyen az oldalhosszuk $\ell_k$ illetve $L_k$. Az 1.3.20 ábra bal oldalán az $OA = 1$ sugarú körben az $ABC$ háromszög területe egyrészt $\ell_{2k}\sqrt{4-\ell_{2k}^2}$, másrészt $2 \cdot \ell_k/2$. Innen $\ell_{2k} = \sqrt{2-\sqrt{4-\ell_k^2}}$. A hatszög oldalából kiindulva, ami 1, alulról becsülte az $\ell_{12}$, $\ell_{24}$, $\ell_{48}$ és $\ell_{96}$ számokat, így jutott alsó becsléséhez. A felső becslés a köré írt sokszög kerületéből adódik és nehezebb, lásd [62], 334. o.




**1.3.20 ábra:** Archimédesz módszere.

A kínai Liu Huj a III. században a beírt szabályos sokszögek területének segítségével becsülte $\pi$-t. Az $n$ oldalú szabályos sokszög kerületét nem a háromszögek magasságával szorozta, hanem a sugárral. Mint az 1.3.20 ábra jobb oldalán lévő rajzból világos, ez a $T_n$ szorzat, az $n$-nel szorzott $OABC$ deltoid területe nem más, mint a $2n$ oldalú beírt szabályos sokszög területe. Felső becslést a $T_n+2(T_{2n}-T_n)$ szám ad: ez úgy kapjuk, hogy a deltoid területét kiegészítjük az $AA'B'B$ és $BB''C''C$ téglalapok területével; mindkettő területe az $ADB$ háromszög területének kétszerese. Persze $T_{2n}$ még jobb alsó becslés. Liu Huj 3072 szögig számolva a $\pi \approx 3{,}14159$ közelítést kapta.

A kínai Cu Csung Ce az V. században $\pi$-re a

$$3,1415926 < \pi < 3,1415927$$

becslést, és a hat tizedesjegyre pontos $\pi \approx 355/113$ közelítést adta. Az utóbbit igen könnyű megjegyezni: az 113355 számsort középen kettévágjuk.

A $\pi$-re al-Hvárizmi három közelítő értéket ad meg: $22/7$, $\sqrt{10}$ és $62832/20000$. Sokkal pontosabb értéket határozott meg al-Kási 1424-ben. A beírt sokszögek kerületével közelítette a kerületet 60 egység sugarú körben, de előre meghatározta, hogy a kívánt pontossághoz $3 \cdot 2^{28}$ oldalú sokszöget kell vennie. A keresett oldalhossz Arkhimédész szerint, mai jelöléseinkkel,

$$60\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}},$$

28 gyökjel van. A számolást hatvanas számrendszerben végezte, és gondosan megbecsülte a hibákat, hogy az eredmény kilenc darab hatvanas törtjegyre pontos legyen. Tizes számrendszerre azt felhasználva számolta át az eredményt, hogy $60^9$ közel van $10^{16}$-hoz, így

$$\frac{1}{10^{16}} - \frac{1}{60^9} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60^{10}}.$$

Azt kapta, hogy $2\pi = 6{,}283\,185\,307\,179\,5865$.

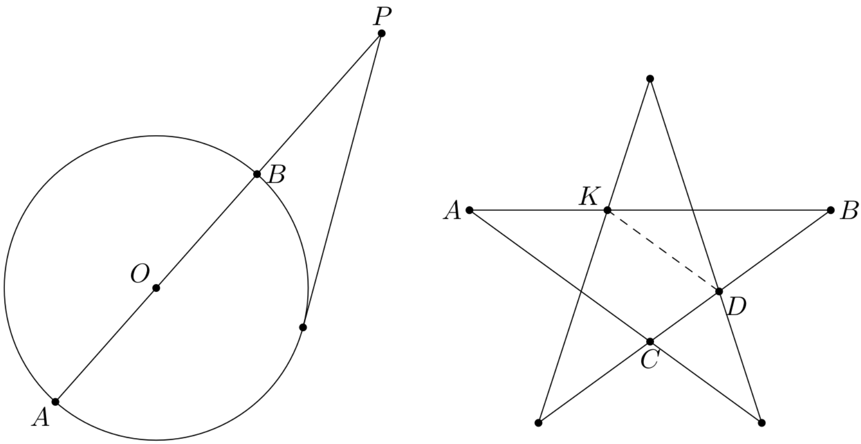
Az utolsó, aki Arkhimédész módszerével számolta ki a $\pi$-t 35 jegyre, Ludolph van Ceulen volt, csaknem az egész életét ezzel töltötte. Az indiaiak a XV. században találtak egy jobb módszert, amely végtelen sorokon alapul. Ma is ilyen módszert használunk, lásd később.

**1.3.30. Aranymetszés.** Ha az $a$ hosszúságú szakaszt sikerül olyan $x$ és $a-x$ hosszúságú részekre felosztani, hogy $a-x\colon x = x\colon a$, azaz a kisebbik rész úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez, akkor *aranymetszés*ről beszélünk. Ez az arány kellemes a szemnek, így fontos szerepet játszik a képzőművészetben. A másodfokú egyenletet megoldva

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Ilyen arány szerkesztését mutatja az 1.3.21 ábra bal oldala: a kör egy pontjához az átmérővel egyező hosszúságú érintőszakaszt szerkesztünk. A $P$ végpontból az $O$ középponton átmenő szelő $A$ pontjáig terjedő $a$ szakaszt a $B$ pont $x\colon a-x$ arányban osztja.

**1.3.31. Szabályos ötszög és „boszorkányláb" szerkesztése.** Az aranymetszés arányának felhasználásával meg tudjuk szerkeszteni az 1.3.21 ábra jobb oldalán álló „boszorkányláb"-at. Csak azt kell észrevennünk, hogy a $K$ pont aranymetszés szerint osztja az $AB$ szakaszt. Hogy ez így van, az azonnal kitűnik az $ACB$ és $KDB$ háromszögek hasonlóságából. A csillagötszöget már régebbi babilóniai rajzokon is megtalálhatjuk, de a pythagoreusok, Pythagorasz követői meg is tudták szerkeszteni.




**1.3.21 ábra:** aranymetszés.

**1.3.32. Szerkesztési problémák.** Mint láttuk, a szabályos háromszög, négyszög, ötszög, hatszög és nyolcszög szerkeszthető, de vajon lehet-e szabályos hétszöget és kilencszöget szerkeszteni? Például a szabályos kilencszög szerkesztéséhez 20°-os szöget kellene szerkeszteni, ami egy 60°-os szög harmadolásával megoldható lenne, de lehet-e tetszőleges szöget harmadolni? További szerkesztési probléma, hogy adott kockához megszerkeszthető-e a pontosan kétszer akkora térfogatú kocka élhossza (kockakettőzés)? A probléma természetesen vetődött fel, mert négyzethez könnyen szerkeszthető kétszer akkora területű négyzet élhossza: az érédet négyzet átlója ilyen. Adott körhöz szerkeszthető-e vele egyenlő területű négyzet (a kör négyszögesítése)? Mindezekről a problémákról csak a XIX. században sikerült bebizonyítani, hogy körzővel és vonalzóval megoldhatatlanok. (Laczkovich [29] ragyogó könyvét ajánlom az érdeklődőknek.) Más segédeszközök, például speciális alakú vonalzók használatával azonban a görögök közülük többet megoldottak.

**1.3.33. Oldalaival adott háromszög területe: Héron-képlet.** *Ha az oldalhosszak $a$, $b$ és $c$, és összegük fele $s$, akkor a terület*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A képletet valójában Arkhimédész fedezte fel.

**Bizonyítás.** Legyen $a$ a háromszög leghosszabb oldala, $m$ a hozzá tartozó magasság, és $x$ az $B$ csúcs és a magasság talppontjának távolsága. Ekkor $x^2+m^2=c^2$ és $(a-x)^2+m^2=b^2$. Az első egyenletből kivonva az másodikat,

$$2ax = a^2-b^2+c^2, \quad x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$$

Ennek felhasználásával kifejezhetjük $m^2$-et és így a terület négyzetét:

$$\begin{aligned}\frac{a^2m^2}{4} &= \frac{a^2(c^2-x^2)}{4} = \frac{a^2}{4}\Big(c+\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\Big)\Big(c-\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\Big)\\ &= \frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{4}\cdot\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{4} = \frac{(a+c)^2-b^2}{4}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{4}\\ &= \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{b+a-c}{2} = s(s-b)(s-a)(s-c).\square\end{aligned}$$

⋆ **1.3.34. A szamoszi alagút.** Szamosz szigetén a görögök i. e. 530 körül 1 km hosszú alagutat fúrtak egy hegyen át, hogy egy forrás vizét a városba vezessék. Mindkét oldalról fúrtak. Módszerük a következő lehetett: Kijelöltek egy alapvonalat nagyjából az alagút irányába, és az egyik nyílástól ebben az irányban távolodtak. Ezután erre merőlegesen haladtak, majd az alapvonal irányába, aztán újra merőlegesen, stb, amíg át nem értek a hegy másik oldalára. Ott az alapvonalra merőlegesen haladva kerestek egy olyan pontot, ahonnan a másik tervezett nyílás az alapvonal irányába látszik. Lemérve a szakaszok hosszát, kiszámolták annak a derékszögű háromszögnek a két befogóját, amelynek az átfogója a tervezett alagút. Persze, mivel a terep nem vízsszintes, tulajdonképpen a szakaszok vízszintes vetületei voltak merőlegesek, ezek hosszát kellett mérni, és gondosan meg kellett mérni a szintkülönbségeket is. Most az alagút mindkét végénél kimérhető egy-egy középpontosan hasonló háromszög, ezek megadják az irányt, amelyben ásni kell. Mindössze 10 méteres hibával vízszintes, és 3 méteressel függőleges irányban találkoztak az alagútak!

**1.3.35. Térfogat.** A térfogat egységét is a hosszúságegységből kapjuk, az egységnyi térfogat egy 1 m-szer 1 m-szer 1 m-es kocka térfogata, a köbméter, jelben $\mathrm{m}^3$. Egy téglatest térfogatát úgy kapjuk, hogy a szélességét, a hosszúságát és a magasságát összeszorozzuk. Kisebb térfogategység a köbdeciméter, $\mathrm{dm}^3$, a köbcentiméter, $\mathrm{cm}^3$, stb. Vigyázzunk, itt is a $\mathrm{dm}^3$ nem deci-köbméter, azaz a köbméter tizede, hanem köb-deciméter, azaz a deciméter köbe (harmadik hatványa), így 1 $\mathrm{dm}^3$=0,1 m·0,1 m·0,1 m=0,001 $\mathrm{m}^3$, azaz a köbméter ezrede! Hasonlóan a $\mathrm{cm}^3$ a köbméter milliomod része, stb. A mindennapi életben elterjedtebb a liter. Jelölése l, és megegyezik a $\mathrm{dm}^3$-rel. Tízszerese a dekaliter (dal), százszorosa a hektoliter (hl), tizede a deciliter (dl), százada a centiliter (cl), ezrede a milliliter (ml), stb.

A *térfogatszámítás*nál a legfontosabb eszme *Cavalieri elv*e. Könnyen szemléltethetjük egy csomag kártyával: ha a kártyákat elforgatjuk, eltoljuk, a kártyacsomag térfogata nem változik. Sőt, akkor sem változna, ha az egyes kártyák alakját megváltoztatnánk, feltéve, hogy a területük (és persze a vastagságuk sem) változik. Ez akkor is igaz marad, ha a kártyák nem egyformák. A térfogat tehát csak egy adott síkkal párhuzamos területektől függ: ha ezek ugyanazok, ugyanaz a térfogat is. Így mindjárt megkapjuk olyan testek térfogatát, amelyeknek a teljes magasságában mindenütt ugyanaz a keresztmetszet területe: alapterület szorozva magassággal. A térfogatra az érvényes, hogy ha a testet $k$-szorosra nagyítjuk, akkor a térfogat $k^3$-szörösre nő. Itt is érvényes, hogy ha a testet csak egy irányba nyújtjuk $k$-szorosra, de arra merőlegesen nem változtatjuk, akkor a térfogata $k$-szorosra nő.

Démokritosz fedezte fel, hogy a gúla és a kúp térfogata az alapterület és a magasság szorzatának a harmada. Valóban, ha egy kockát kettévágunk az egyik lapjára merőleges, annak átlóján átmenő síkkal, egy háromszög alapú hasáb keletkezik. Ha most a fél kockát újra kettévágjuk az egyik derékszögű háromszög átfogóján és a másik derékszögű háromszög átfogójával szemközti csúcson átmenő síkkal, végül a maradék nagyobb darabot a téglalap alapú lapjának átlóján és a vele szembeni csúcson átmenő síkkal, akkor három olyan gúlát kapunk, amelyek mindegyikének alapja egy fél kockalap, magassága pedig a kocka élhossza. (Csináljuk meg egy darab krumplival.)

Egy egyenes körhenger magassága legyen a kör átmérője. Hogyan aránylik a bele írható gömb térfogata a henger térfogatához? Arkhimédész, az ókor valószínűleg legnagyobb tudósa fedezte fel, hogy ez az arány $2:3$, síremlékére is ezt vésték. Ehhez lényegében az integrálszámítást kellett felfedeznie! Görbe vonalak által határolt síkidomok területét és más görbült felületekkel határolt testek térfogatát is meghatározta.

Változó keresztmetszetű testek térfogatának közelítő meghatározására alkalmazhatjuk *Kepler hordó formulá*ját (ami tulajdonképpen a Simpson-formula): az alaplap területének, a fedőlap területének és a középlap (a fél magasságban vett keresztmetszet) négyszeres területének összegét osztjuk hattal és szorozzuk a magassággal. Ez a képlet nem csak „hengerszerű”, hanem „kúpsszerű” és „csonkakúpszerű” testek, sőt meglepő módon gömb és gömbszelet, és bizonyos hordószerű alakzatok esetén is pontos eredményt ad! (Ezt integrálszámítással majd könnyen bebizonyíthatjuk.) Itt „kúpszerű” testen olyan testet értünk, amely úgy keletkezik, hogy egy akármilyen síkbeli alaplap minden pontját összekötjük egy adott térbeli ponttal. Ha ezt elvágjuk egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, kapjuk a „csonkakúpszerű” testet. Ha nagyon vadul változik a keresztmetszet, még mindig felszeletelhetjük a testet, és ezekre a szeletekre alkalmazzuk Kepler hordó formuláját.

⋆ **1.3.36. A kimerítés eljárása.** Érdekességként nézzük meg, hogyan határozta meg Arkhimédész a gömb térfogatát a *kimerítés* eljárásával. Elég az egységsugarú felső félgömböt tekinteni. Vágjuk fel az alaplappal párhuzamos síkokkal $n$ részre, mindegyik legyen $1/n$ vastag. A legalsóba bele foglalható egy $1/n$ magasságú henger, amelynek sugara $\sqrt{1-1/n^2}$, így térfogata $\pi(1-1/n^2)/n$ és belefoglalható egy 1 sugarú és $1/n$ magasságú hengerbe. A következőbe belefoglalható egy $1/n$ magasságú henger, amelynek sugara $\sqrt{1-2^2/n^2}$, így térfogata $\pi(1-2^2/n^2)/n$ és belefoglalható egy $\sqrt{1-1/n^2}$ sugarú, $1/n$ magasságú hengerbe. Összeadva a bennfoglalt hengerek térfogatát, az

$$\sum_{k=1}^{n} \pi \frac{1-k^2/n^2}{n} = \pi\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\right) = \pi\left(1-\frac{n(n+1)(n+1/2)}{3n^3}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi/2}{n} - \frac{\pi}{6n^2}.$$

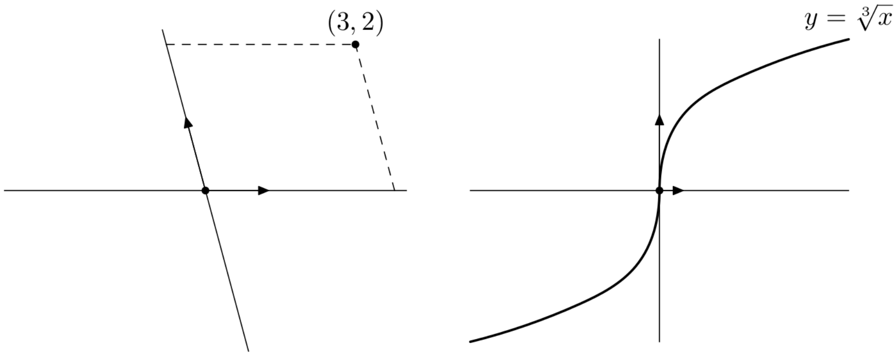
Ez az egész félgömböt befoglaló henger $\pi$ térfogatának kétharmadánál legfeljebb csak $(2\pi/3)/n$-nel kisebb. Arkhimédész egy axiómája szerint bármely $\alpha, \beta > 0$ valós számokhoz van olyan $n$ természetes szám, hogy $n\alpha > \beta$, így a félgömb térfogata nem lehet kisebb, mint a befoglaló henger térfogatának $2/3$-a. Teljesen hasonlóan kapjuk a befoglaló hengereket térfogatát vizsgálva, hogy nagyobb sem lehet.

Maga Arkhimédész módszerével számos görbe vonallal határolt síkidom területét és görbült felülettel határolt test térfogatát határozta meg. Látjuk, hogy lényegében a határozott integrált fedezte fel. Módszerét később az iszlám országokban is használták.

**1.3.37. Hátrametszés és GPS.** Nézzünk gyakorlati alkalmazásokat. Hogyan határozhatjuk meg helyzetünket a térképen? Megmérjük egy jól látható, és a térképen is szereplő tereptárgy látóirányának az északi iránnyal bezárt szögét. A térképen a tereptárgyon át ilyen irányú egyenest rajzolunk: ezen vagyunk valahol. Másik tereptárggyal is megismételjük ezt. A két egyenes metszéspontja megadja a helyzetünket. Ez az eljárás a *hátrametszés*. Egy másik változata akkor is alkalmazható, ha nincs iránytűnk. Megmérjük két jól látható, és a térképen is szereplő tereptárgy látóiránya által bezárt szöge. A térképen látókört szerkesztünk: ezen vagyunk valahol. Másik két tereptárggyal is megismételjük ezt (az egyik lehet valamelyik előző). A két látókör metszéspontja megadja a helyzetünket.

Persze, ma már nem nagyon használjuk ezt, van GPS. De hogyan működik? A felettünk keringő műholdak nagyon pontos órákat tartalmaznak, és jól meghatározott időpontokban rádiójelet bocsátanak ki, amelyek kódolva tartalmazzák a műhold pontos helyzetét is. Ha a GPS vevőben is lenne nagyon pontos óra, akkor meghatározva a jel beérkezésének idejét, és ismerve a fénysebességet, amivel a rádióhullámok terjednek, megkapnánk a műhold távolságát. Ez megad egy gömböt, aminek a középpontja a műhold; ezen vagyunk valahol. Három műhold jele három gömböt ad meg, ezek metszéspontjában vagyunk. (Több metszéspont is lehet, de rendszerint csak az egyik van a Föld közelében.) A GPS vevőben azonban nincsen nagyon pontos óra, csak olyan, amivel kis időközöket tudunk pontosan mérni. Így két műhold jele beérkezésének időkülönbsége egy bonyolultabb felületet ad meg, amely pontjainak műholdaktól vett távolságainak különbsége állandó. Négy műholddal három ilyen felületet kapunk, metszéspontjuk megadja a helyzetünket.

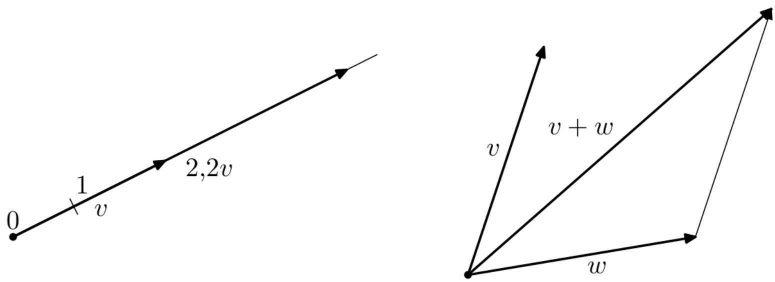
Nem valószínű, hogy a GPS vevőben lévő számítógép tud (térben) szerkeszteni. Akkor mégis mit csinál? Egyenletrendszert old meg: koordinátákkal a geometriai problémát algebraira vezetjük vissza.




**1.3.22 ábra:** koordináták.

**1.3.38. Koordinátarendszerek.** Síkbeli pontokat számpárokkal, térbeli pontokat számhármasokkal adhatunk meg. Ez nagyon sokféleképpen megtehető. Leggyakrabban a következőképpen járunk el a síkban (lásd az 1.3.22 ábra bal oldalát): Felveszünk két, egy pontból, az *origó*ból kiinduló vektort, amelyek nem fekszenek egy egyenesen. Ezek a *bázisvektor*ok, sorrendjük lényeges. Az első által meghatározott egyenes az *abszcisszatengely*, a második által meghatározott az *ordinátatengely*. Egy pont *koordinátái*nak meghatározásához párhuzamost fektetünk a ponton át az ordinátatengellyel. Ez metszi valahol a másik tengelyt. Ez a metszéspont tulajdonképpen a pont vetülete a másik tengellyel *párhuzamos vetítés*kor az abszcisszatengelyre. Meghatározzuk, hogy az origóból a metszéspontba mutató vektor hányszorosa az első bázisvektornak (ez lehet negatív szám is); ez a pont *abszcisszája*. A tengelyek szerepét megcserélve adódik a pont *ordinátája*. Ha a bázisvektorokat úgy vesszük fel, hogy az elsőtől a másodikig mért szög derékszög legyen, akkor *derékszögű koordinátarendszer*ről beszélünk, ha pedig még a bázisvektorok egyforma hosszúak is, akkor *Descartes-féle koordinátarendszer*ről. Térben hasonlóan járunk el. Itt a bázisvektorok nem lehetnek egy síkban. Gyakran úgy vesszük fel őket, hogy az adott sorrendben úgy helyezkedjenek el, mint a jobb kezünk kifeszített hüvelyk, mutató és középső ujja; ekkor *jobbsodrású koordinátarendszer*ről beszélünk.

Gyakran használunk derékszögű koordinátarendszert függvényábrázolásra: lásd az 1.3.22 ábra jobb oldalát. Az első, aki erre gondolt, Oresme volt, mint azt 1371-ben írt munkájából tudjuk. Bármilyen változó mennyiséget úgy ábrázolt, hogy egy szakasz pontjaiba a mennyiség pillanatnyi értékével arányos hosszúságot mért fel arra merőlegesen. Elsősorban a változó sebesség ábrázolását tartotta nagyon fontosnak, mert ez nagyon szemléletessé válik, és a megtett út görbe alatti területnek tekinthető. Az egyenletesen változó mozgásnál például egy trapéz területe. Gondolt a síkbeli és a térbeli pontoktól függő — ma úgy mondanánk, kétváltozós és háromváltozós — függvényekre is. A koordinátarendszerek fő haszna azonban az, hogy az egyenleteknek görbék, felületek, stb. felelnek meg és fordítva, így összekapcsolja az algebrát a geometriával. Arkhimédész rendszeresen használt koordinátákat, de már előtte is ismerték a módszert. A görögök számára ez azért volt fontos, mert fejlett geometriájukat használhatták lényegében algebrai problémák kezelésére. Általában Descartes (1596–1650) nevéhez kapcsoljuk a koordinátarendszerek bevezetését, aki az addigra már fejlettebb algebrát használta geometriai problémák kezelésére. A matematikának ezzel kapcsolatos ága az *algebrai geometria*.




**1.3.23 ábra:** vektorok összege.

**1.3.39. Vektor szorzása számmal és vektorok összeadása.** Egy vektort adott valós számmal úgy szorzunk, hogy egy számegyenest fektetünk a vektorra, úgy hogy a nulla a vektor kezdőpontjába essen, leolvassuk a vektornak megfelelő valós számot, szorozzuk az adott számmal: az eredmény megadja a számegyenesnek egy pontját, ez lesz az eredményvektor végpontja. (Lásd az 1.3.23 ábra bal oldalát.) Két, egy pontból kiinduló vektort úgy adunk össze, hogy a második vektort eltoljuk úgy, hogy kezdőpontja az első vektor végpontja legyen. A közös kezdőpontból az eltolt vektor végpontjába mutató vektor a két vektor összege. (Lásd az 1.3.23 ábra jobb oldalát.)

Az előző pontban tárgyalt koordinátarendszerben origóból kiinduló vektorokra számmal való szorzásnál a végpont koordinátái szorzódnak a számmal, összeadásnál pedig a végpontok koordinátái összeadódnak.

**1.3.40. Feladat [9].** Szerkesszünk háromszöget, ha adott a három magasságvonal hossza!

**1.3.41. Feladat [5].** Egy síkbeli egyenes egyenletét Descartes-féle koordinátarendszerben megadhatjuk, ha ismerjük egy $(x_0, y_0)$ pontját és az egyenes $m$ „meredekségét”, azaz azt, hogy egy egységnyi jobbra haladásra mennyit emelkedik: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Lássuk be ezt! Minden egyenest megkapunk-e így?

**1.3.42. Feladat [5].** Adjuk meg egy egyenes meredekségét, ha ismerjük két pontját!

**1.3.43. Feladat [5].** Lássuk be, hogy minden egyenes egyenlete felírható $ax + by = c$ alakban, ahol $a^2 + b^2 \neq 0$.

**1.3.44. Feladat [5].** Lássuk be, hogy az $(x_0, y_0)$ és $(x_1, y_1)$ pontok távolsága $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

**1.3.45. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az $(x_0, y_0)$ középpontú, $r$ sugarú r egyenlete $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

**1.3.46. Feladat [6].** A kör egyenlete

$$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1$$

alakban is írható. Általánosabb görbét, *ellipszis*t ad az

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

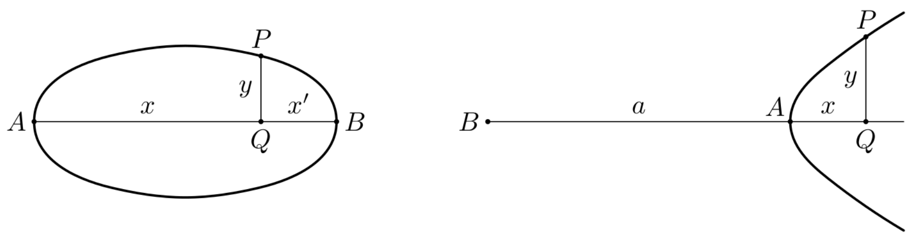
egyenlet. Itt $a$ és $b$ a szimmetriatengelyek görbébe eső részének fele. Vázoljuk az ellipszist, ha $a = 2$, $b = 1$, $x_0 = y_0 = 0$.

**1.3.47. Feladat [6].** Az

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

egyenletű görbét *hiperbolá*nak nevezzük. Vázoljuk a hiperbolát, ha $a = 2$, $b = 1$, $x_0 = y_0 = 0$.

**1.3.48. Feladat [9].** Tekintsük az $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ egyenletű görbét! Mutassuk meg, hogy ha $A \neq 0$ és $B \neq 0$, akkor hiperbola vagy ellipszis egyenlete, ha a konstans tag megfelelő. A maradék esetekben a görbe általában parabola. Rajzoljunk fel néhány parabolát! Vizsgáljunk meg minden esetet!



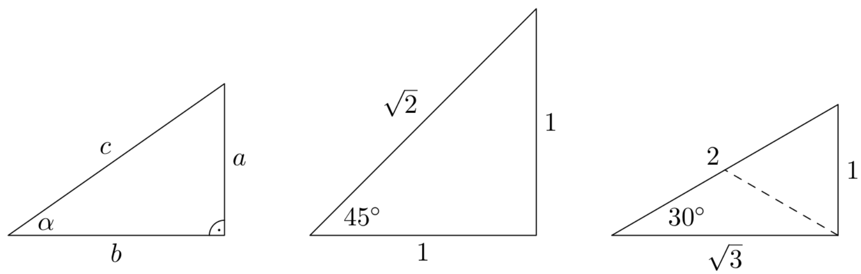

**1.3.24 ábra:** ellipszis és hiperbola.

**1.3.49. Feladat [9].** Az ellipszis, hiperbola és parabola közös neve *kúpszelet.* A név onnan ered, hogy ha egy egyenes körül megforgatunk egy azt metsző egyenest, az egy kettős kúpot ír le; ha most ezt elmetszük egy síkkal, akkor ellipszist, parabolát vagy hiperbola párt kapunk attól függően, hogy a sík hajlászöge a tengelyhez nagyobb, egyenlő, vagy kisebb, mint a forgatott egyenesé. Apolló niosz i.e. 210 körül olyan alapossággal vizsgálta meg a kúpszeleteket, hogy ahhoz Descartes-ig semmit sem sikerült hozzátenni, de már Arkhimédész is igen sokat tudott róluk. Ő is, mint előtte mások is, a *szümptómá*jukkal, ma úgy mondanánk, egyenletükkel adta meg a kúpszeleteket. Az egyenlet az úgynevezett *csúcsponti egyenlet*, alakja az $y^2 = \alpha x x'$ „kétabszcisszás alak” ahol $\alpha > 0$ konstans. Lásd az 1.3.24 ábrát: a bal odalon az ellipszis a $P$ pont $y$ ordinátájával és a $Q$ pont $x$, $x'$ abszcisszáival, a jobb oldalon pedig a hiperbola a $P$ pont $y$ ordinátájával és a $Q$ pont az $x$ mint $AQ$ hossza és $x'$ mint $BQ$ hossza abszcisszákkal. Ha $a$ az $AB$ tengely hossza, akkor az ellipszisnél $x' = a - x$, a hiperbolánál $x' = a + x$, a parabolánál pedig $x'$ állandó. A nevek a ‘hiány’, ‘többlet’ és ‘illesztés’ görög szavakból erednek. Mutassuk meg, hogy a kapott görbék a mi definíciónk szerint is ellipszis, hiperbola, illetve parabola!

**1.3.50. Feladat [5].** Hogyan határozhatjuk meg egyenesek és kúpszeletek metszéspontjainak koordinátáit?

## 1.4 Trigonometria

**1.4.1. Szögfüggvények.** Ha két derékszögű háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a megfelelő szögek megegyeznek, így a két háromszög hasonló. Innen az oldalak aránya (hosszaik hányadosa) mindkettőben ugyanannyi, és csak a szögtől függ, a szögnek a függvénye, *szögfüggvény*. A 1.4.1 ábrán bal oldalon az $\alpha$ szöggel szemközti befogót szokás szerint $a$-val, a mellette lévő befogót $b$-vel, az átfogót pedig $c$-vel jelölve, az $a/c$ arányt $\sin\alpha$-val (szinusz alfával), a $b/c$ arányt $\cos\alpha$-val (koszinusz alfával), az $a/b$ arányt $\operatorname{tg}\alpha$-val (tangens alfával), a $b/a$ arányt pedig $\operatorname{ctg}\alpha$-val (kotangens alfával) jelöljük. Nyilván a két utóbbi egymás reciproka. Még két arány képezhető: a $c/a$ arányt $\operatorname{cosec}\alpha$ (koszekáns alfával), a $c/b$ arányt pedig $\sec\alpha$-val (szekáns alfával) jelöljük; e két utóbbi ritkán használatos, mivel a sin illetve a cos reciprokai. Egyébként a tg is kifejezhető a sin és cos segítségével: $\operatorname{tg}\alpha = a/b = (a/c)/(b/c) = \sin\alpha/\cos\alpha$.




**1.4.1 ábra:** szögfüggvények.

**1.4.2. Példa.** Határozzuk meg 45°, 30° és 60° szögfüggvényeit. Az ábrán középen lévő háromszög befogóit egységnyinek választva, az átfogó $\sqrt{2}$. Innen $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\cos 45^\circ =$

$1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{ctg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$, $\sec 45^\circ = \sqrt{2}$. Az ábrán jobbra található háromszög 30°-os szögével szemközti befogót válasszuk egységnyinek, és szerkesszünk fölé egyenlő oldalú háromszöget. Ennek oldalai is egységnyiek. Mivel a megmaradó háromszög két szöge 30°, az meg egyenlő szárú, így az átfogó 2 egységnyi, a másik befogó pedig $\sqrt{3}$. Innen $\sin 30^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} 30^\circ = 2$, $\sec 30^\circ = 2/\sqrt{3}$, valamint $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 60^\circ = 1/2$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 60^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} 60^\circ = 2/\sqrt{3}$, $\sec 60^\circ = 2$. Jó, ha ezt a két háromszöget megjegyezzük, gyakran lesz rájuk szükség. Nem véletlen, hogy az iskolai vonalzók is ilyen alakúak. Egyébként észrevehetjük, hogy nem csak a 30° és a 60° szögfüggvényei között van összefüggés, hanem általában egy $\alpha$ szög kiegészítő szögének a szinusza az $\alpha$ koszinusza, a kiegészítő szög koszinusza az $\alpha$ szinusza, a kiegészítő szög tangense az $\alpha$ kotangense, a kiegészítő szög kotangense az $\alpha$ tangense, a kiegészítő szög koszekánsa az $\alpha$ szekánsa és a kiegészítő szög szekánsa az $\alpha$ koszekánsa.

Az 1.4.2 részletesebb függvénytáblázat, bár ilyeneket ma már ritkán használunk, mert a legtöbb zsebszámológép ki tudja számolni a szögfüggvények értékét.

**1.4.3. Az ókori csillagászat.** A szögfüggvényeket már az ókorban is ismerték, és csillagászati méréseknél használták. Az ókori görögök legegyszerűbb „csillagászati műszere" a gnómón volt. Ez egyszerűen egy vízszintes, sima talajon a földbe szúrt, pontosan függőleges pálca. Amikor az árnyéka a legrövidebb, akkor van dél. Napóraként is használható. Az árnyék hosszának a mérésével meghatározható bármilyen függőlegesen álló tárgy magassága, ha megmérjük az árnyékának a hosszát, hiszen hasonló derékszögű háromszögek keletkeznek. Valahogy így határozhatta meg Thalész egy piramis magasságát.

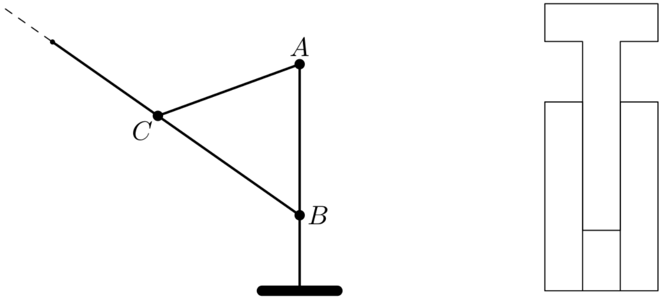
Az ókori görögök tudták, hogy a Föld gömbölyű. Erre abból következtettek, hogy holdfogyatkozáskor a Földnek a Holdra vetett árnyéka mindig kör alakú. A kürénéi Eratoszthenész meg is határozta a Föld kerületét. Észrevette ugyanis, hogy amikor a gnómón Szüénében nem vet árnyékot, akkor Alexandriában a napsugarak iránya a teljes szög 1/50-ed részével tér el a függőlegestől. Szüéné csaknem pontosan délre fekszik Alexandriától, a távolságot pedig 5000 sztadionnak vette. Innen a Föld kerülete 250 000 sztadion. Mivel többféle sztadion nevű mértékegység is volt, és nem tudjuk pontosan, melyiket használta, ma már csak annyit mondhatunk, hogy mérésének hibája 10–20% lehetett.

Tudomásunk szerint szögfüggvény értékét kis szögre először az „ókor Kopernikusza", a szamoszi Arisztarkhosz határozta meg. Azt tartotta, hogy a Föld is, a többi bolygóval együtt, a Nap körül kering, a Hold a Föld körül, az állócsillagok pedig nagyon messze vannak. A Nap és a Hold távolságának arányát akarta megmérni. Amikor pontosan félhold van, akkor a Hold–Föld irány pontosan merőleges a Hold–Nap irányra, tehát a három égitest egy derékszögű háromszög csúcsaiban helyezkedik el. Ha megmérjük a Föld–Hold irány és a Föld–Nap irány által bezárt szöget, akkor megkapjuk a Napnál lévő szöget. Arisztarkhosz ezt a szöget 87°-nak mérte, így a Napnál lévő szög 3°. Innen a Hold és a Nap távolságának aránya $\sin 3^\circ$, amire azt kapta, hogy 1/20 és 1/18 között van, így a Nap távolsága a Hold távolságának 18-szorosa és 20-szorosa között van. Valójában a Föld–Hold irány és a Föld–Nap irány által bezárt szög $89^\circ 50'$, és a Nap $\approx 391$-szer van távolabb, mint a Hold. A mérési hiba nem meglepő, mert nagyon nehéz (távcső nélkül!) meghatározni, mikor van pontosan félhold. Annál meglepőbb, hogy bár Arisztarkhosz tudta, hogy a Hold és a Nap nagyjából egyforma szög alatt látszik, ezt a szöget 2°-nak találta, pedig könnyű megmérni, hogy $\approx 1/2^\circ$. Ennek a segítségével, hasonló módszerrel, meghatározta a Hold és a Nap sugarának és távolságának arányát is. Végül abból a holdfogyatkozáskor

| ° | sin | cos | tg | ctg | cosec | sec | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,017452406 | 0,999847695 | 0,017455064 | 57,28996163 | 57,29866885 | 1,000152328 | 89 |
| 2 | 0,034899496 | 0,999390827 | 0,034920769 | 28,63625328 | 28,65370835 | 1,000609544 | 88 |
| 3 | 0,052335956 | 0,998629534 | 0,052407779 | 19,08113669 | 19,10732261 | 1,001372346 | 87 |
| 4 | 0,069756473 | 0,997564050 | 0,069926811 | 14,30066626 | 14,33558703 | 1,002441898 | 86 |
| 5 | 0,087155742 | 0,996194698 | 0,087488663 | 11,43005230 | 11,47371325 | 1,003819838 | 85 |
| 6 | 0,104528463 | 0,994521895 | 0,105104235 | 9,514364454 | 9,566772233 | 1,005508280 | 84 |
| 7 | 0,121869343 | 0,992546151 | 0,122784560 | 8,144346428 | 8,205509048 | 1,007509825 | 83 |
| 8 | 0,139173101 | 0,990268068 | 0,140540834 | 7,115369722 | 7,185296534 | 1,009827573 | 82 |
| 9 | 0,156434465 | 0,987688340 | 0,158384440 | 6,313751515 | 6,392453222 | 1,012465126 | 81 |
| 10 | 0,173648177 | 0,984807753 | 0,176326980 | 5,671281820 | 5,758770483 | 1,015426612 | 80 |
| 11 | 0,190808995 | 0,981627183 | 0,194380309 | 5,144554016 | 5,240843064 | 1,018716695 | 79 |
| 12 | 0,20791169 | 0,978147600 | 0,212556561 | 4,704630109 | 4,809734345 | 1,022340595 | 78 |
| 13 | 0,224951054 | 0,974370064 | 0,230868191 | 4,331475874 | 4,445411483 | 1,026304108 | 77 |
| 14 | 0,241921895 | 0,970295726 | 0,249328002 | 4,010780934 | 4,133565494 | 1,030613629 | 76 |
| 15 | 0,258819045 | 0,965925826 | 0,267949192 | 3,732050808 | 3,863703305 | 1,033527618 | 75 |
| 16 | 0,275637355 | 0,961261695 | 0,286745385 | 3,487414444 | 3,627955279 | 1,040299436 | 74 |
| 17 | 0,292371704 | 0,956304756 | 0,305730681 | 3,270852618 | 3,420303620 | 1,045691756 | 73 |
| 18 | 0,309016994 | 0,951056516 | 0,324919696 | 3,077683537 | 3,236067978 | 1,051462224 | 72 |
| 19 | 0,325568154 | 0,945518575 | 0,344327613 | 2,904210878 | 3,071553487 | 1,057620681 | 71 |
| 20 | 0,342020143 | 0,939692620 | 0,363970234 | 2,747477419 | 2,923804400 | 1,064177772 | 70 |
| 21 | 0,358367949 | 0,933580426 | 0,383864035 | 2,605089065 | 2,790428110 | 1,071144994 | 69 |
| 22 | 0,374606593 | 0,927183854 | 0,404026225 | 2,475086853 | 2,669467163 | 1,078534743 | 68 |
| 23 | 0,390731128 | 0,920504853 | 0,424474816 | 2,355852366 | 2,559304665 | 1,086360377 | 67 |
| 24 | 0,406736643 | 0,913545457 | 0,445228685 | 2,246036774 | 2,458593336 | 1,094636279 | 66 |
| 25 | 0,422618261 | 0,906307787 | 0,466307658 | 2,144506921 | 2,366201583 | 1,103377919 | 65 |
| 26 | 0,438371146 | 0,898794046 | 0,487732588 | 2,050303842 | 2,281172033 | 1,112601940 | 64 |
| 27 | 0,453990499 | 0,891006524 | 0,509525449 | 1,962610506 | 2,202689265 | 1,122326238 | 63 |
| 28 | 0,469471562 | 0,882947592 | 0,531709431 | 1,880726465 | 2,130054468 | 1,132570051 | 62 |
| 29 | 0,484809620 | 0,874619707 | 0,554309051 | 1,804047755 | 2,062665340 | 1,143354068 | 61 |
| 30 | 0,500000000 | 0,866025403 | 0,577350269 | 1,732050808 | 2,000000000 | 1,154700538 | 60 |
| 31 | 0,515038074 | 0,857167300 | 0,600860619 | 1,664279482 | 1,941604026 | 1,166633397 | 59 |
| 32 | 0,529919264 | 0,848048096 | 0,624869351 | 1,600334529 | 1,887079915 | 1,179178403 | 58 |
| 33 | 0,544639035 | 0,838670567 | 0,649407593 | 1,539864964 | 1,836078459 | 1,192363293 | 57 |
| 34 | 0,559192903 | 0,829037572 | 0,674508516 | 1,482560969 | 1,788291650 | 1,206217949 | 56 |
| 35 | 0,573576436 | 0,819152044 | 0,700207538 | 1,428148007 | 1,743446796 | 1,220774589 | 55 |
| 36 | 0,587785252 | 0,809016994 | 0,726542528 | 1,376381920 | 1,701301617 | 1,236067978 | 54 |
| 37 | 0,601815023 | 0,798635510 | 0,753554050 | 1,327044822 | 1,661640141 | 1,252135658 | 53 |
| 38 | 0,615661475 | 0,788010753 | 0,781285626 | 1,279941632 | 1,624269245 | 1,269018215 | 52 |
| 39 | 0,629320391 | 0,777145961 | 0,809784033 | 1,234897157 | 1,589015729 | 1,286759566 | 51 |
| 40 | 0,642787609 | 0,766044443 | 0,839099631 | 1,191753593 | 1,555723827 | 1,305407289 | 50 |
| 41 | 0,656059029 | 0,754709580 | 0,869286737 | 1,150368407 | 1,524253087 | 1,325012993 | 49 |
| 42 | 0,669130606 | 0,743144825 | 0,900404044 | 1,110612515 | 1,494476550 | 1,345632730 | 48 |
| 43 | 0,681998360 | 0,731353701 | 0,932515086 | 1,072368710 | 1,466279186 | 1,367327461 | 47 |
| 44 | 0,694658370 | 0,719339800 | 0,965688774 | 1,035530314 | 1,439556540 | 1,390163591 | 46 |
| 45 | 0,707106781 | 0,707106781 | 1,000000000 | 1,000000000 | 1,414213562 | 1,414213562 | 45 |
| | cos | sin | ctg | tg | sec | cosec | ° |

**1.4.2 táblázat:** szögfüggvények.

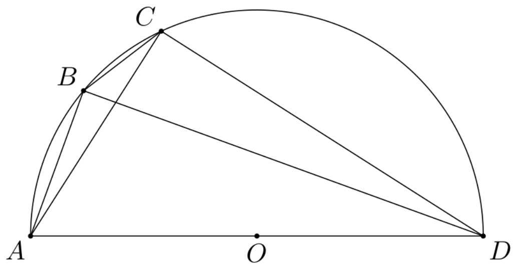
tett megfigyelésből, hogy a Föld árnyékkúpja (az a rész, ahova egyáltalán nem jut fény a Napból) a Hold távolságában kb. kétszer (valójában nagyjából 7/3-szor) nagyobb, mint




**1.4.3 ábra:** mérések.

a Hold, meghatározta a Hold és a Föld sugarának arányát is.

A szinusztáblázatok helyett a görögök inkább húrtáblázatokat használtak. A következő pontban ezzel ismerkedünk meg.




**1.4.4 ábra:** Ptolemaiosz módszere.

**1.4.4. Húrtáblázatok.** Az ókor legnagyobb csillagásza valószínűleg Klaudiosz Ptolemaiosz volt, aki i.sz. 140 körül élt. Arab fordításban Almageszt címmel ránk maradt Mathematiké szüntaxisz című műve, ebből sok mindent tudunk róla. Biztos, hogy sok mindent átvett elődeitől, például Hipparkhosztól, aki három évszázaddal előbb élt, de nem tudjuk, pontosan mit. Csillagászati méréseihez az 1.4.3 ábrán bal oldalon látható műszert használta (ezt használta még Kopernikusz is a XVI. században). Ez egy függőlegesen álló $AB$ rúdhoz az $A$ pontban csuklósan rögzített, ugyanolyan hosszúságú $AC$ rúdból, és a $B$ pontban csuklósan rögzített, kétszer olyan hosszú rúdból áll, amelyen a $C$ pont elcsúszhat. Ezzel a beosztással ellátott rúddal megcélozták az adott csillagot. A $C$ pontnál a beosztást leolvasták, és így megkapták a $A$ középpontú, $AB$ sugarú kör $BC$ húrjának hosszát. A húrtáblázatból kiolvasták az $A$ csúcsnál lévő $\alpha$ szöget. Az $\alpha$ felének a pótszöge a $BC$ félegyenes függőlegessel bezárt szöge, $\alpha$ fele pedig a vízszintessel bezárt szög.

Hogyan készült Ptolemaiosz húrtáblázata? A saját tételét alkalmazta: húrnégyszögben a szemben lévő oldalak hosszainak szorzatát összeadva, az összeg az átlók hosszának szorzata. Ezt az 1.4.4 ábrán lévő $ABCD$ húrnégyszögre alkalmazva, az $AB$ és az $AC$ húrok hosszából az $AD$ átmérő ismeretében a $BD$ és a $CD$ húrok hossza kiszámítható, így a tételt használva kiszámíthatjuk a $BC$ húr hosszát. Ismerve a 60°-os és a 72°-os középponti szögekhez tartozó húr hosszát, kiszámította a 12°-os középponti szöghöz tartozó húr hosszát 60 egység sugarú körben. Hasonló gondolatmenettel egy adott szöghöz tartozó húr hosszát ismerve, ki lehet számítani a fele akkora szöghöz tartozó húr hosszát. Ismételt felezésekkel kiszámolta a 3/2 és 3/4 fokos szögekhez tartozó húr hosszát is. Az $1^\circ$-os szöghöz tartozó húr hosszát felülről és alulról becsülte, de a két becslés a számolás hibahatárán belül megegyezett, így elfogadta pontos értéknek: $1 + 2/60 + 50/3600 = 1{,}0472222222$. Mint látjuk, hatvanas számrendszerben számolt. Táblázata $1/2^\circ$ beosztású volt.

Később az indiai csillagászok, akik tizes számrendszerben számoltak, teljesen áttértek a szinusztáblázatokra. A húr és a hozzá tartozó kerületi szög szinusza közötti összefüggés az 1.4.4 ábrából nyilvánvaló: a $h$ hosszúságú $AB$ húrhoz tartozó, $D$-nél lévő $\delta$ kerületi szögre $h = d\sin\delta$, ahol $d$ az átmérő. Az indiaiak a szinusztáblázatokat versbe szedték (egy-egy számjegynek számos szótagot feleltetve meg) és megtanulták! Ptolemaiosz hibája elég kicsi, a helyes érték $120\sin 1/2^\circ = 1{,}0471842\ldots$. Számolása lényegében ekvivalens a szögek összegének és különbségének szinuszára vonatkozó összefüggéssel.

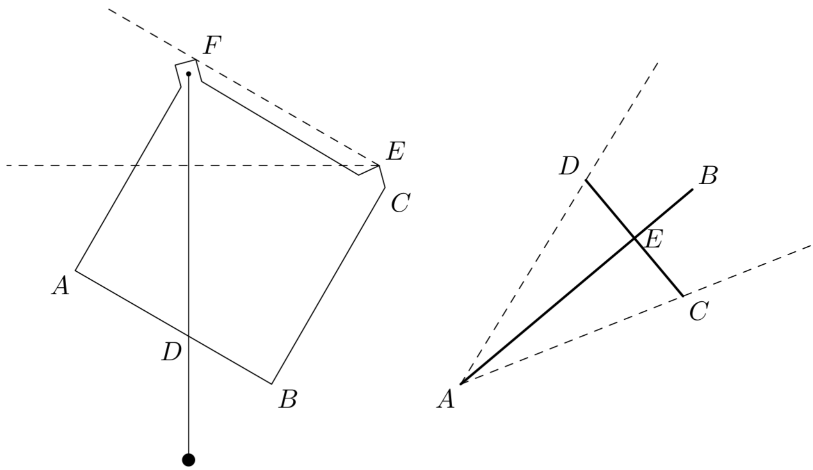
Még egy megjegyzés Ptolemaiosz mérőeszközéhez: ha az $\alpha$ szög igen nagy, közel van $180^\circ$-hoz, akkor célszerűbb és pontosabb az $A$ pont és a $BC$ egyenes távolságát mérni, így $\alpha/2$ koszinuszát, azaz a $B$-nél lévő $\beta$ szög szinuszát kapjuk.

A többi szögfüggvény bevezetésére csak később került sor. A koszinuszt mint a pótszög (a szöget $90^\circ$-ra kiegészítő szög) szinuszát vezették be az indiaiak: $\cos\alpha := \sin(90^\circ - \alpha)$. Az iszlám országokban, a IX. században jelenik meg a kotangens, mint a gnómón árnyékának $t$ hossza és a rúd $h$ magasságának hányadosa a Nap $\alpha$ magassági szöge függvényeként: $t = h\operatorname{ctg}\alpha$. Reciprokát, a tangenst a vízszintes rúdú napóráknál használták. A szekánst és a koszekánst — mint ma is — csak ritkán használták, hogy a koszinusszal illetve a szinusszal való osztást szorzással helyettesíthessék. Fokozatosan megismerték a szögfüggvényekre vonatkozó összefüggéseket is.

**1.4.5. Szinusztáblázat.** Ptolemaiosz húrtáblázatánál jóval pontosabb, öt hatvanados törtjegy pontosságú szinusz és tangens táblázatot készítettek Szamarkandban, 1440-ben jelent meg. A táblázat $1'$ beosztású és al-Kási $\sin 1^\circ$ kiszámítására alkalmas módszerén alapul. Mai jelölésekkel, mivel $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ és $\sin 3^\circ$ ismert, az $x = (q + x^3)/p$ harmadfokú egyenletre jutunk. Az $x_1 \approx q/p$ kezdőértékből kiindulva, azt beírva az egyenlet jobb oldalába, kapjuk a következő közelítést. Nem kell nagy pontosságot alkalmazni, mert az iteráció ('ismétlés') „öngyógyító”: ha hibás is valamelyik közelítő érték, az iteráció során a hiba mindig csökken. Ezért al-Kási mindig csak egy új hatvanados tört jegyet számolt ki. Az eljárás nagyon gyorsan célhoz vezet. Adott szög szinuszát ismerve, az ötödrész szinuszát is számolhatjuk hasonlóan. Hasonló iterációt a $\Theta = a + b\sin\Theta$ egyenlet megoldásának közelítésére is használtak már al-Hvárizmi kortársai is, de Európában csak Kepler-nél bukkan fel.

**1.4.6. A távolságmérő.** Az 1.4.3 ábrán jobb oldalt látható egyszerű eszköz egy *távolságmérő*. Kartonpapírból, műanyagból, fából akár el is készíthetjük (a `T` alakú rész csúsztatható), de egy átlátszó műanyag vonalzó is megteszi helyette. Azt mérjük meg, hogy egy ismert magasságú tárgy a kinyújtott kezünkben tartott távolságmérőn vagy vonalzón (fél szemmel) hány mm hosszú résszel látszik egyforma nagynak. A távolságmérőn az álló rész és a mozgatható `T` rész vízszintes része közé „fogjuk be” a tárgyat. Ha a „tárgy” például egy ember (az átlagmagasság 1700 mm) és 5 mm nagynak látszik, akkor 340-szer messzebb van, mint a szemünk és a kinyújtott kezünk végének távolsága, ami általában 0,65 m, de jobb, ha megmérjük és megjegyezzük. Így a keresett távolság $\approx 220$ m. Visszafele számolva a távolságmérőre több ismert magasságú tárgyra (villanypózna, ház, stb.) külön-külön skálát is készíthetünk, akkor nem kell számolgatni. Lényegében így működik a földmérők távolságmérője is, de egy pontos beosztású bot (amit valaki függőlegesen tart) képét hasonlítják össze egy pontos beosztás képével, távcsövön keresztül.

A távolságmérőnkkel természetesen szöget is mérhetünk, hiszen lényegében az mérjük, hogy a kezünk hosszával megegyező sugarú kör milyen hosszú húrjához tartozik a két irány szöge. Könnyen megmérhetjük például a Hold vagy a Nap szögátmérőjét, de közvetlenül ne nézzünk a Napba, csak ha már majdnem lement, vagy felhőn át csak halványan látszik. Hasonlóan, ha egy kinyújtott kezünkben lévő ceruza hegyét egyik, majd másik szemünkkel nézzük, mivel a két szem átlagos távolsága 65 mm, a két irány közötti szög $\approx 5°36'$. Persze pontosabban is megmérhetjük.

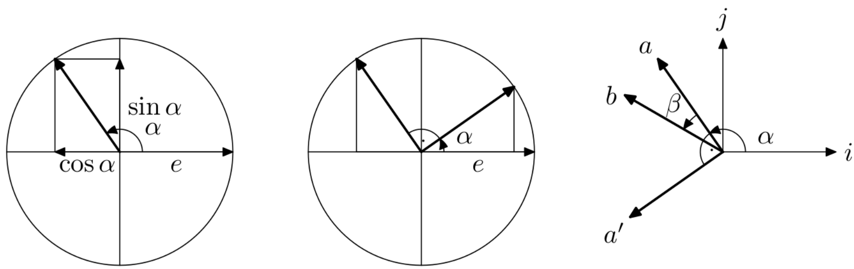



**1.4.5 ábra:** magasságmérő és Jákob botja.

**1.4.7. A magasságmérő.** De hogyan mérhetjük meg például egy villanypózna magasságát? Felmászni dőreség lenne a halálos áramütés veszélye miatt, de az 1.4.5 ábrán bal oldalon látható egyszerű eszközzel könnyen megmérhetjük. Ez lényegében egy kartonpapírból, műanyag lapból, fából készült pontos négyzet, aminek $AB$ és $BC$ oldalán beosztás van, és pontosan az egyik sarkánál (ahol egy kicsit nagyobbra hagytuk) át van fúrva. Itt cérnaszálon kis súly, például egy csavaranya lóg. A mellette lévő saroknál két csúcs van úgy, hogy az $D$ pont pontosan annyira van a négyzet oldalától, mint a $E$ pont. Az $DE$ szakasszal, mint valami puska irányzékkal megcélozzuk a pózna tetejét. Ha a cérnaszál már nem leng, leolvassuk $D$-nél a beosztást. Ahányszor kisebb az $AD$ szakasz a négyzet oldalánál, annyiszor kisebb a pózna magassága (persze a szemünk magassága nélkül) a távolságánál. Ha lemérjük a pózna távolságát, akkor kiszámíthatjuk a magasságát. Persze mindez akkor igaz, ha a talaj vízszintes, a pózna függőleges. A távolságot mérőszalaggal, lépésben (egy átlagos lépés 0,75 m), vagy a cipőnk hosszával, „tyúklépésben” mérhetjük meg. A szemünk magasságát, cipőnk hosszát, lépésünk hosszát mérjük meg és jegyezzük meg!

Szöget is mérhetünk ezzel az eszközzel. Az $AB$ irány vízszintessel bezárt szögének tangense a $CD$ szakasz hosszának és a négyzet oldalának hányadosa, ha pedig a $C$ pont a négyzet másik beosztásos oldalára esik, akkor a $CE$ szakasz hosszának és a négyzet oldalának hányadosa a szög kotangense.

**1.4.8. Jákob botja.** Az 1.4.5 ábrán jobb oldalon látható egyszerű, könnyen elkészíthető eszköz volt a hajósok fő szögmérő műszere egészen a XVIII. századig. Az $AB$ rúdon beosztás van. A rá merőleges $CD$ keresztpálcát addig toljuk el, amíg az $A$-nál lévő szemünkkel az egyik mérendő égitestet $C$, a másikat $D$ irányában látjuk. Az $E$-nél leolvasva a beosztást, az $AE$ hossz és a $CD$ hossz felének (mert a $CE$ és $ED$ hosszak egyenlőek) hányadosa a $CAD$ szög felének kotangense. Természetesen mindjárt fokbeosztást is készíthetünk a rúdra.




**1.4.6 ábra:** szögfüggvények, általános eset.

**1.4.9. Szögfüggvények tetszőleges szögekre.** Hogyan értelmezhetjük a szögfüggvényeket tetszőleges szögekre? Vegyük észre, hogy ha egy Descartes-féle koordinátarendszerben az abszcisszatengely $e$ egységvektorát $0 < \alpha < 90°$-kal elforgatjuk, akkor a kapott egységvektor abszcisszája (első koordinátája) $\cos\alpha$, ordinátája (második koordinátája) pedig $\sin\alpha$. Ez adja az ötletet, hogy tetszőleges $\alpha$ szöggel való elforgatáskor is a kapott egységvektor első koordinátája legyen $\cos\alpha$, második koordinátája pedig $\sin\alpha$; lásd az 1.4.6 ábra bal oldalát. A többi szögfüggvényre legyen egyszerűen $\operatorname{tg} = \sin/\cos$, $\operatorname{ctg} = \cos/\sin$, $\sec = 1/\cos$, $\operatorname{cosec} = 1/\sin$.

Úgy tűnik, ki kell bővítenünk szögfüggvény-táblázatunkat, de nem. Először is vegyük észre, hogy $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ és $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Másik észrevétel, hogy ha az egységvektort 360°-kal tovább forgatjuk, vagy visszaforgatjuk, akár többször is, akkor ugyanazt a vektort kapjuk, így bármilyen $n$ egész számra $\cos(n \cdot 360° + \alpha) = \cos\alpha$ és $\sin(n \cdot 360° + \alpha) = \sin\alpha$. Ha az egységvektort 180°-kal tovább forgatjuk, vagy visszaforgatjuk, akkor az ellentettjébe megy át, így $\cos(\pm 180° + \alpha) = -\cos\alpha$ és $\sin(\pm 180° + \alpha) = -\sin\alpha$. Végül, ha az $\alpha$ szöggel elforgatott egységvektort $\pm 90°$-kal forgatjuk el, akkor koordinátái szerepet cserélnek, és az egyik még előjelet is vált: $\cos(\pm 90° + \alpha) = \mp\sin\alpha$ és $\sin(\pm 90° + \alpha) = \pm\cos\alpha$. Az egyik esetet, amikor $0 < \alpha < 90°$, az 1.4.6 ábra közepén láthatjuk, de az $\alpha = 90°$, $\alpha = 0$ és $0 > \alpha > -90°$ esetet végigvizsgálva és felhasználva az előző összefüggést, meggyőződhetünk róla, hogy mindig igaz. Végeredmény, hogy ezeket az összefüggéseket használva végül is mindig csak egy $0 \le \alpha \le 90°$ szög szögfüggvényeit kell meghatároznunk. Képleteink, ha radiánban mérjük a szöget, $\cos(2n\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(2n\pi+\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pm\pi+\alpha) = -\cos\alpha$ $\sin(\pm\pi+\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pm\pi/2+\alpha) = \mp\sin\alpha$ és $\sin(\pm\pi/2+\alpha) = \cos\alpha$. Én mindig elfelejtem őket, de az ábráról leolvashatók. Egyébként az alábbi képletek ezeket is magukba foglalják.

**1.4.10. Addíciós képletek.** *Bármilyen $\alpha, \beta$ szögekre*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \text{ és } \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

**Bizonyítás.** Lásd az 1.4.6 ábra jobb oldalát. Az $i$, $j$ bázisvektorok $\alpha$ szöggel való elforgatásánál az $a$, $a'$ vektorokat kapjuk. A $b$ vektor az $a$ vektor $\beta$ szöggel való továbbforgatásánál keletkezik, így koordinátái $\cos(\alpha+\beta)$ és $\sin(\alpha+\beta)$, azaz

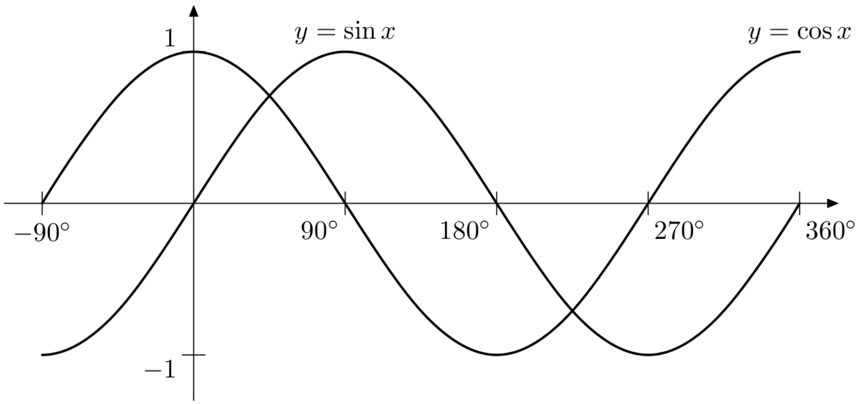
$$b = \cos(\alpha+\beta)i + \sin(\alpha+\beta)j.$$

Másrészt az $a$ koordinátái $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$, az $a'$ koordinátái pedig $\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$ és $\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$. Az elforgatott koordinátarendszerben, aminek bázisa $a$ és $a'$, a $b$ koordinátái $\cos\beta$ és $\sin\beta$, így

$$\begin{aligned} b &= \cos\beta \cdot a + \sin\beta \cdot a' \\ &= \cos\beta(\cos\alpha \cdot i + \sin\alpha \cdot j) + \sin\beta(-\sin\alpha \cdot i + +\cos\alpha \cdot j) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)i + (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)j. \end{aligned}$$

Összehasonlítva a két kifejezést, kapjuk az állítást.

**1.4.11. Szögfüggvények ábrázolása.** Ábrázolva az $y = \sin x$ és $y = \cos x$ függvényeket, az 1.4.7 ábrát kapjuk.

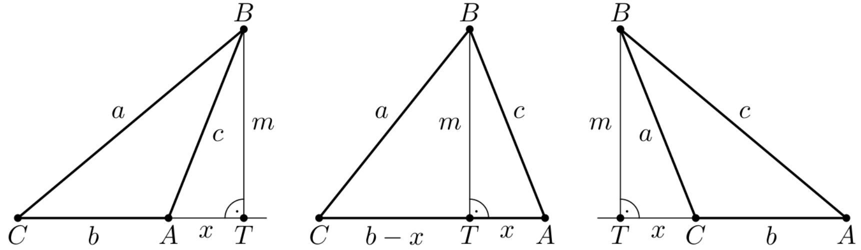



**1.4.7 ábra:** szinusz és koszinusz.

**1.4.12. Szinusztétel.** *Ha egy tetszőleges háromszögben két szög $\alpha$ és $\beta$, a velük szemben lévő oldalak hossza $a$ és $b$, akkor $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.*

**Bizonyítás.** Legyen a harmadik, a $c$ oldalhoz tartozó magasság $m$. Ekkor $a\sin\beta = m = b\sin\alpha$. □

**1.4.13. Elérhetetlen pont távolságának meghatározása.** A szinusztétel alkalmazásával megmérhetünk egy elérhetetlen pont távolságát, például egy folyó túlsó partján lévő hegy $C$ csúcsának a távolságát egy, az innenső parton lévő $A$ ponttól. Az innenső parton választunk egy $B$ pontot, amire az $AB$ szakasz $c$ hosszát könnyen meg tudjuk




**1.4.8 ábra:** koszinusztétel.

mérni, és amelyből $C$ is, $A$ is jól látható. Megmérjük az $A$-nál lévő $\alpha = CAB$ és a $B$-nél lévő $\beta = ABC$ szögeket, így megkapjuk a $C$-nél lévő $\gamma = BCA$ szöget. Az ismeretlen $b$ távolságra $b\colon c = \sin\beta\colon\sin\gamma$.

**1.4.14. Koszinusztétel.** *Az $ABC$ háromszögre a szokásos jelölésekkel $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.*

**Bizonyítás.** Tekintsük az 1.4.8 ábrát, legyen a $B$ csúcshoz tartozó magasság talppontja $T$. A középen látható esetben $b - x = a\cos\gamma$, $m = a\sin\gamma$, így $x = b - a\cos\gamma$. Mivel

$$c^2 = x^2 + m^2 = (b - a\cos\gamma)^2 + (a\sin\gamma)^2 = b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma),$$

ahonnan $\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$ miatt adódik a bizonyítandó állítás. A másik két esetben a számolás hasonló. □

⋆ **1.4.15. Gömbháromszögek.** A trigonometria szó jelentése „a háromszög mérése”. Ide szoktuk sorolni a gömbháromszögtant is. Mi is ez? A hajózásban alapvető kérdés, hogy két, hosszúsági és szélességi fokokkal megadott pontnak a Föld felszínén mennyi a távolsága? Tekintsük a Földet gömbnek. A két ponton és a gömb középpontján átmenő síkkal elmetszve a gömb felszínét, egy kört, úgynevezett *főkör*t kapunk, amelynek sugara a gömb sugara. A feladat a két pont által ebből kimetszett körív hosszának meghatározása. Ha megmérjük, hogy egy szélességi fokhoz mekkora távolság tartozik ($\approx$ 111,1 km, már az ókorban megmérték, ha nem is ilyen pontosan), akkor elég a gömb középpontjából a két ponthoz húzott sugarak szögét ismerni. Egy *gömbháromszög* a gömb felszínén lévő $A$, $B$, $C$ pontok által meghatározott három főkör ív által közbeszárt terület, szögei a főkör ívek által bezárt, rendre az $A$, $B$ $C$ csúcsoknál lévő $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ szögek. Az oldalak hossza helyett érdemesebb a hozzájuk és a gömb középpontjához tartozó középponti szögeket jelölni $a$, $b$, $c$-vel. Még nyilvánvalóbb ez, ha a csillagászatban az égen irányok által bezárt szögekkel akarunk számolni: itt nincs is értelme a távolságoknak, csak a szögtávolságoknak. A kérdésünk megfelelője most az, hogy az égi koordinátákkal megadott pontok szögtávolsága mennyi? A kérdés az, hogy ha ismert egy gömbháromszög két oldala (az északi vagy a déli pólustól vett szögtávolság) és a közbezárt szög (a hosszúsági fokok különbsége), akkor mennyi a harmadik oldal?

Egy gömbháromszög „megoldásán” olyan tételeket értünk, amelyek összefüggéseket adnak meg az oldalak (szögtávolságok) és a szögek között, hogy bármely három adatból az összes többit meghatározhassuk. Ezek a tételek a síkháromszögre vonatkozó szinusztétel megfelelője, a gömbháromszögek szinusztétele:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin a}{\sin b},$$

az első koszinusz tétel:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma,$$

valamint a második koszinusz tétel:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

A bizonyítások megtalálhatók a [14] könyvben, a használt eszközökkel később ismerkedünk meg.

A gömbháromszögek vizsgálata az iszlám országokban kezdődött, de teljességében csak Johannes Müller, latinos nevén Müller üller Regiomontanus, Johannes Müller (1436–1476)Regiomontanus (1436–1476) fejtette ki, aki Mátyás király udvarában is dolgozott.

**1.4.16. Feladat: interpoláció.** [8]. Hogyan kereshetünk ki egy függvénytáblázatból olyan értéket, ami nincs is meg benne? A trükk az, hogy feltesszük, egy kis közön egyenletesen (lineárisan) változik a függvényérték. *Elsőfokú közelítés*t, idegen szóval *lineáris interpolációt* alkalmazunk. Ha például találunk egy olyan táblázatot, amiben a víz sűrűsége hat értékes jegyre van megadva, de csak 10 C°-onként, és nekünk 18 C°-on kellene, akkor ezt a módszert alkalmazhatjuk. A módszert a szögfüggvényeken fogjuk bemutatni. Ezeket ugyan zsebszámológépünk akárhol kiszámítja, de legalább ellenőrizni tudjuk közelítésünket.

Közelítsük tehát például $1°37'$ szinuszát a megadott tablázat segítségével! Mivel $x_1 = 1°$-nál a szinusz $y_1 = 0{,}017452406$, $x_2 = 2°$-nál pedig $y_2 = 0{,}034899496$, kiszámoljuk az $y_{1;2} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ (elsőrendű) *különbségi hányados*t vagy idegen szóval *osztott differenciát*. Most ez 0,017447090. Mivel $x = 1°37'$ szinuszát keressük, az $x - x_1 = 37/60$ különbséget szorozzuk az osztott differenciával. Ez most (kerekítve) 0,010759038. Ezzel javítjuk $y_1$ értékét, azaz ezt hozzáadjuk. Képletben

$$y \approx y_1 + (x - x_1)y_{1;2}.$$

Azt kapjuk, hogy $y \approx 0{,}028211444$. Honnan tudjuk hogy ez elég pontos? A szinusz $x_3 = 3°$-nál $y_3 = 0{,}052335956$. Számoljuk ki az $y_{2,3} = (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)$ osztott differenciát is! Ez most 0,017436460. Az ezzel számolt érték (kerekítve) 0,028215519. (Ez most tulajdonképpen extrapoláció: a hely, ahol keressük a függvényértéket, nem az $x_2$ és $x_3$ pontok között fekszik. A szavak eredete inter: 'belső', extra: 'külső'.) Az eltérés elfogadható, nagyjából egységnyi az ötödik tizedes jegyben. Az első értéket fogadjuk el, mert az interpoláció ott közelebbi pontokból történt. Számoljuk ki így néhány szög szinuszát és tangensét! Mivel most nem mért adatokkal dolgozunk, zsebszámológépünkkel kaphatunk pontosabb értéket: 0,028212412.

Próbáljuk meg $1°37'$ koszinuszát így meghatározni! Az osztott differencia $y_{1;2} = -0{,}000456868$, az eredmény $0{,}999565959$. Az $x_2$ és $x_3$ „alappontokra” „támaszkodva” az osztott differencia $y_{2,3} = -0,000761293$, az eredmény 0,999682656. Az eltérés nagyobb, mint a szinusznál, már a negyedik tizedesjegy eltér. (A zsebszámológép által adott pontosabb érték 0,999601950.) Mi a nagyobb eltérés oka? A szinusznál az osztott differenciák alig változnak, a koszinusznál erősebben. Ha az osztott differenciák erősen változnak, akkor a javítást is javítjuk. Számoljuk ki az $y_{1;2;3} = (y_{2;3} - y_{1;2})/(x_3 - x_1)$ (másodrendű) osztott differenciát. Javítsuk meg az $y_{1;2}$ osztott differenciát, hozzáadva $x - x_2$-ször a másodrendű osztott differenciát. Ezzel a javított differenciával fogunk számolni. Képletben

$$y \approx y_1 + (x - x_1)(y_{1;2} + (x - x_2)y_{1;2;3}).$$

Ez a *négyzetes közelítés* vagy *kvadratikus interpoláció.* Most $y_{1;2;3} = -0,000152213$, így $y_{1;2}$ javítása 0,000058348, javított értéke −0,000398520. Innen $y_1$ javítása (kerekítve) −0,000281688, tehát $y \approx 0{,}999601941$, sokkal jobb. Ha mért adatokból dolgozunk, akkor másik három pontra támaszkodó interpolációval ellenőrizhetjük a számolást, vagy megvizsgálhatjuk, hogy az eggyel magasabb rendű osztott differenciák elég kicsik-e. Például a víz sűrűsége az olvadáspont közelében nem egyenletesen változik, ezért itt feltétlenül kvadratikus interpolációval kell számolnunk.

Számoljuk ki néhány kis szög koszinuszát és szekánsát kvadratikus interpolációval! A koszekánst és a kotangenst nem lehet a nulla közelében interpolálni, mert túl gyorsan változnak.

Az eljárást tovább is lehet folytatni: ha $y_{1;2;3;4} = (y_{2;3;4} - y_{1;2;3})/(x_4 - x_1)$, akkor

$$y \approx y_1 + (x - x_1)\Big(y_{1;2} + (x - x_2)(y_{1;2;3} + (x - x_3)y_{1;2;3;4})\Big)$$

a *köbös közelítés.* Az interpolációt már a középkorban is ismerték a kínaiak. 600 körül kvadratikus, a XIII. században már köbös interpolációt, vagy inkább extrapolációt használtak: ezzel számolták ki a bolygók helyzetét a kalendáriumok számára.

**1.4.17. Feladat [3].** Fejezzük ki a szinuszt a pótszög koszinuszával!

**1.4.18. Feladat [6].** Vezessük le a szinusz addíciós képletéből a koszinuszét és fordítva!

**1.4.19. Feladat [7].** Vezessük le a tangens addíciós képletét, a

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

összefüggést a szinusz és a koszinusz addíciós képletéből!

**1.4.20. Feladat [7].** Vezessük le a

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

és

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggéseket a sin addíciós képletéből!

**1.4.21. Feladat [7].** Vezessük le a

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

és

$$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

összefüggéseket a cos addíciós képletéből!

**1.4.22. Feladat [5].** A húr és a szinusz közötti összefüggést felhasználva bizonyítsuk be a *tangenstétel*t: A szokásos jelölésekkel egy háromszögben

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

**1.4.23. Feladat [12].** Határozzuk meg az öt szabályos test (tetraéder, kocka vagy hexaéder, oktaéder, dodekaéder és ikozaéder) felszínét, térfogatát, a bele és a köré írt gömb sugarát ha adott az élhossz; a tetraédert négy, az oktaédert nyolc, az ikozaédert húsz egybevágó szabályos háromszög határolja, a dodekaédert pedig tizenkét szabályos ötszög, azaz pentagon.

# 2

# Halmazok és függvények

Eddig is használtuk már a halmaz fogalmát, a függvényeket, és bizonyos relációkat is (kisebb, nagyobb, egybevágó, hasonló, stb.) Ebben a fejezetben részletesen tárgyaljuk ezeket a fogalmakat, amelyek lépten-nyomon előfordulnak a matematikában és annak minden alkalmazásában is. Fontos, hogy megértsük, az egész matematikát fel lehet építeni a halmazelméletre. Ezt itt nem tesszük meg teljes részletességgel, de például a [19] könyvben elég részletesen szerepel ez a felépítés.

A matematikában gyakran előfordul a „minden” és a „van olyan” kifejezés. Ezek rövidítésére a a $\forall$ és a $\exists$ jeleket használjuk, ezek a *kvantorok*. A német „All” illetve „Ezistenz” szó kezdőbetűjének megfordításai.

## 2.1 Halmazelméleti alapfogalmak

Eddig csak szemléletesen használtuk a halmaz fogalmát, most egy kicsit részletesebben megismerkedünk a halmazokkal.

**2.1.1. Halmazelmélet.** A halmazokról szemléletes elképzelésünk, hogy a halmaz, vagy rendszer, osztály, összesség (vannak akik a család, sokaság, gyűjtemény szavakat is használják) elemeinek gondolati burka (egy elgondolt „zsák”, amiben a halmaz elemei vannak). A halmazelméletben (az egyenlőségen kívül) a „halmaznak lenni” (ennek nincs jele) és az „eleme” alapfogalom szerepel. Az $x \in A$ (vagy $A \ni x$) jelentése, hogy az $x$ (elem, dolog) eleme az $A$ halmaznak, vagy másként $x$ hozzátartozik $A$-hoz. Ennek tagadását $x \notin A$ jelöli. Hasonlóan más esetekben is áthúzással jelöljük a tagadást, például $A \neq B$ jelentése, hogy $A$ nem egyenlő $B$-vel. Egy halmaz elemei között lehetnek halmazok is. A jelölések tetszőlegesek, de általában a „bonyolultabb dolog, bonyolultabb betű” elvet követjük.

**2.1.2. Meghatározottság.** Két halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha az elemeik ugyanazok. Egy halmazt tehát elemei határoznak meg. Nincs olyasmi, hogy valami „többször eleme” egy halmaznak. A meghatározottság az „$\in$” egy lényeges tulajdonságát fejezi ki, például a „gyermeke” kapcsolat az emberek között nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal: két embernek, például egy házaspárnak, lehetnek ugyanazok a gyerekeik.

**2.1.3. Részhalmazok.** Azt mondjuk, hogy az $A$ halmaz *részhalmaza* a $B$ halmaznak, vagy hogy $B$ *bővebb* az $A$-nál, ha $A$ minden eleme a $B$ halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$ vagy $B \supset A$. Ha $A$ részhalmaza $B$-nek, de nem egyenlő vele, akkor azt mondjuk, hogy $A$ *valódi részhalmaza* $B$-nek. Jele: $A \subsetneq B$ vagy $B \supsetneq A$. (Más, logikusabb, de kevésbé elterjedt jelölések: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ a részhalmazra és $A \subset B$ vagy $B \supset A$ a valódi részhalmazra. Mivel a matematikusok lusta emberek, a gyakrabban előforduló esetre használják az egyszerűbb jelölést.) Minden halmaz részhalmaza saját magának (*reflexiv*itás), és ha $A \subset B$, $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (*tranzitiv*itás). Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor a meghatározottság szerint $A = B$. Erre azt mondjuk, hogy $\subset$ *antiszimmetrikus*. (Az egyenlőségre is teljesül a reflexivitás, a tranzitivitás és nyilván az antiszimmetria is, sőt, még az is teljesül, hogy ha $A = B$, akkor $B = A$ is, az egyenlőség *szimmetrikus*.) A meghatározottság úgy is fogalmazható, hogy az $A$ és $B$ halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha $A \subset B$ és $B \subset A$. Rendszerint ennek alapján bizonyítjuk halmazok egyenlőségét.

Ha $A$ halmaz, akkor $\{x \in A\colon \ldots\}$ vagy $\{x \in A \mid \ldots\}$ jelöli azt a halmazt, amelyhez $A$-nak pontosan azok az $x$ elemei tartoznak, amelyekre a kipontozott részre írt feltétel igaz. Néha, ha világos, hogy milyen $A$ halmaz részhalmazára gondolunk, az „$\in A$” részt a jelölésből elhagyjuk.

Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, *üres halmaz*nak nevezzük, és $\emptyset$ jelöli. (A meghatározottság miatt csak egy üres halmaz van.) Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, és persze minden nem üres halmaznak valódi részhalmaza.

Egy halmazt úgy is megadhatunk, hogy kapcsos zárójelek között felsoroljuk az elemeit, például $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$ stb. (Ennek megfelelően programozási nyelvekben az üres halmazra szokásos a $\{\}$ jelölés is.)

**2.1.4. Unió.** Ha $A$ és $B$ halmazok, akkor azt a halmazt, amelynek pontosan azok az elemei, melyek elemei $A$-nak vagy $B$-nek (vagy mindkettőnek), $A \cup B$-vel jelöljük, és a két halmaz *unió*jának nevezzük. Régebbi könyvek néha $\cup$ helyett $+$-t írnak. (Az unió magyarul egyesítés, de az idegen szó terjedt el.)

Jóval általánosabban, ha $\mathcal{A}$ egy halmaz, melynek elemei mind halmazok, akkor azt a halmazt, amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek $\mathcal{A}$ valamely elemének az elemei, az $\mathcal{A}$ *unió*jának nevezzük. Ennek a jelölése: $\cup\mathcal{A}$ vagy $\cup\{A\colon A \in \mathcal{A}\}$ vagy $\cup_{A\in\mathcal{A}} A$. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer úgy képzelhető el, mint egy nagy zsák, amiben kisebb zsákok vannak; az uniója úgy keletkezik, hogy a kis zsákokat kibontjuk és tartalmukat összeöntjük.

Nyilván $\cup\emptyset = \emptyset$ és ha $A$ egy halmaz, akkor $\cup\{A\} = A$, ha pedig $A$ és $B$ halmazok, akkor $A \cup B = \cup\{A, B\}$.

**2.1.5. Állítás: az unió tulajdonságai.** *Ha $A$, $B$, $C$ halmazok, akkor*

(1) $A \cup \emptyset = A$;

(2) $A \cup B = B \cup A$ *(kommutativitás)*;

(3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(asszociativitás)*;

(4) $A \cup A = A$ *(idempotencia)*;

(5) $A \subset B$ *akkor és csak akkor, ha* $A \cup B = B$.

**Bizonyítás.** Az (1) és (4) egyenlőség mindkét oldalán álló halmaznak pontosan akkor eleme $x$, ha $x \in A$. Hasonlóan, (2) mindkét oldalán álló halmaznak pontosan akkor eleme $x$, ha $x \in A$ vagy $x \in B$. Nem nehezebb (3) bizonyítása sem. Végül, ha $A \subset B$, akkor $A \cup B \subset B$, az ellenkező irányú tartalmazás pedig mindig teljesül; megfordítva, ha $A \cup B \subset B$, akkor $A$ minden eleme eleme $B$-nek is. □

**2.1.6. Metszet.** Ha $A$ és $B$ halmazok, legyen $A \cap B \colon= \{x \in A\colon x \in B\}$. (Emlékezzünk rá, a $:=$ azt jelenti, hogy a bal oldalán szereplő jelölést a jobb oldalán szereplő kifejezéssel definiáljuk.) Régebbi könyvekben néha $\cap$ helyett $\cdot$ áll (vagy semmi sem). Jóval általánosabban, ha $\mathcal{A}$ halmazok egy nem üres rendszere, akkor a halmazrendszer *metszet*ét a

$$\cap\mathcal{A} \colon= \{x\colon x \in A \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}\}$$

összefüggéssel definiáljuk. Más jelölések: $\cap\{A : A \in \mathcal{A}\}$ és $\cap_{A\in\mathcal{A}} A$. Ha teljesen pontosak akarnánk lenni, akkor

$$\cap\mathcal{A} := \{x \in \cup\mathcal{A} : x \in A \text{ minden } A \in \mathcal{A}\text{-ra}\}.$$

Ha $A$ és $B$ halmazok, akkor nyilván $A \cap B = \cap\{A, B\}$.

Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy $A$ és $B$ *diszjunkt*ak (vagy *idegen*ek). Általánosabban, ha egy nem üres $\mathcal{A}$ halmazrendszer metszete az üres halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a halmazrendszer *diszjunkt*. Ha már a halmazrendszer bármely két halmazának a metszete üres, akkor azt mondjuk, hogy elemei *páronként diszjunkt*ak. (Más szóhasználatban a páronként diszjunkt halmazokból álló halmazrendszert nevezik diszjunktnak, de mi nem ezt használjuk.)

**2.1.7. Állítás: a metszet tulajdonságai.** *Ha $A$, $B$, $C$ halmazok, akkor*

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(2) $A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás);*

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás);*

(4) $A \cap A = A$ *(idempotencia);*

(5) $A \subset B$ *akkor és csak akkor, ha* $A \cap B = A$.

**Bizonyítás.** Az állítások bizonyítása hasonló az unióra vonatkozó megfelelő állítások bizonyításához. □

→ **2.1.8. Feladat [0].** Legyen $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\}$. Mi lesz $\cup\mathcal{A}$ és $\cap\mathcal{A}$?

→ **2.1.9. Feladat [1].** Adjunk meg olyan halmazrendszert, amely diszjunkt, de nem páronként diszjunkt. Van-e olyan halmazrendszer, amely páronként diszjunkt, de nem diszjunkt?

→ **2.1.10. Feladat [5].** Határozzuk meg a $\{\{x \in \mathbb{R} : |x| < y\} : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ halmazrendszer unióját és metszetét. Mi a helyzet, ha $y \in \mathbb{N}$, illetve $y \in \mathbb{Z}$?

**2.1.11. Feladat [5].** Határozzuk meg a

$$\{\{x \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} : y, r \in \mathbb{R},\ |y| \le 1,\ 1 < r < 5\}$$

halmazrendszer unióját és metszetét. Mi a helyzet, ha $|y| < 1$?

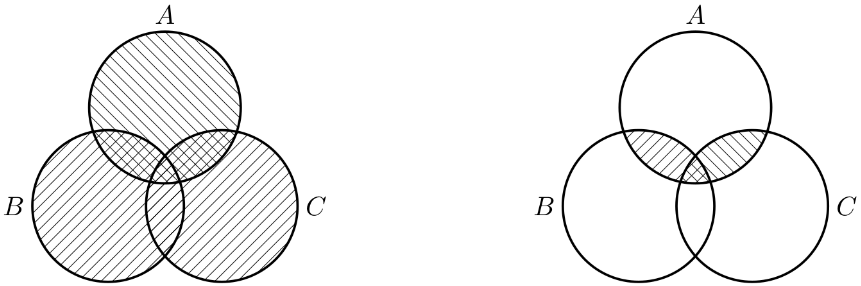
° **2.1.12. Feladat [5].** Határozzuk meg azon nyílt körlapok rendszerének unióját, illetve metszetét, amelyek sugarára $2 < r < 3$, középpontjuk koordinátáira pedig $0 \le x, y \le 1$.

**2.1.13. Állítás: disztributivitási szabályok.** *Ha $A$, $B$, $C$ halmazok, akkor*

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(a metszet* disztributivitás*a az unióra nézve);*

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(az unió* disztributivitás*a a metszetre nézve).*

Az állítások megértésében segít, ha az egyes halmazokat „általános helyzetben” lévő „krumplikat” rajzolva szemléltetjük. Ezek az úgynevezett *Venn-diagram*ok.




**2.1.1 ábra:** $A \cap (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ Venn-diagramja.

**Bizonyítás.** Csak (1)-et bizonyítjuk, (2) bizonyítása hasonló. Az $A \cap (B \cup C)$ halmaznak $x$ pontosan akkor eleme, ha $x \in A$ és $x \in B \cup C$. Ez utóbbi pontosan akkor teljesül, ha $x \in B$ vagy $x \in C$. Így $x$ pontosan akkor eleme az $A \cap (B \cup C)$ halmaznak ha $x \in A$ és $x \in B$ vagy pedig $x \in A$ és $x \in C$. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $\square$

**2.1.14. Különbség és komplementer.** Az $A$ és $B$ halmazok *különbség*ét (vagy *differenciá*ját) az $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$ összefüggéssel definiáljuk. (Az $A - B$ jelölés is használatos.) A két halmaz *szimmetrikus differenciá*ját (vagy *Boole-algebrai összeg*üket) az $A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ összefüggéssel definiáljuk. (Az $A + B$ és $A \circ B$ jelölések is használatosak.) Ha $A \subset X$, akkor az $X \setminus A$ halmazt néha $A'$-vel jelöljük (vannak akik $\overline{A}$-sal), és az $A$ halmaz $X$-re vonatkozó *komplementer*ének nevezzük. Ez természetesen nem csak $A$-tól, hanem az $X$ „alaphalmaztól” is függ, ami az $A'$ jelölésben nem jut kifejezésre. Emiatt, bár az $A'$ jelölés rövidebb, általában mégis inkább kiírjuk helyette, hogy $X \setminus A$. A következő állításban meghagytuk a $'$ jelölést.

**2.1.15. Állítás.** *Ha $A, B \subset X$, akkor az előző definíció jelöléseivel*

(1) $(A')' = A$;

(2) $\emptyset' = X$;

(3) $X' = \emptyset$;

(4) $A \cap A' = \emptyset$;

(5) $A \cup A' = X$;

(6) $A \subset B$ *akkor és csak akkor, ha* $B' \subset A'$;

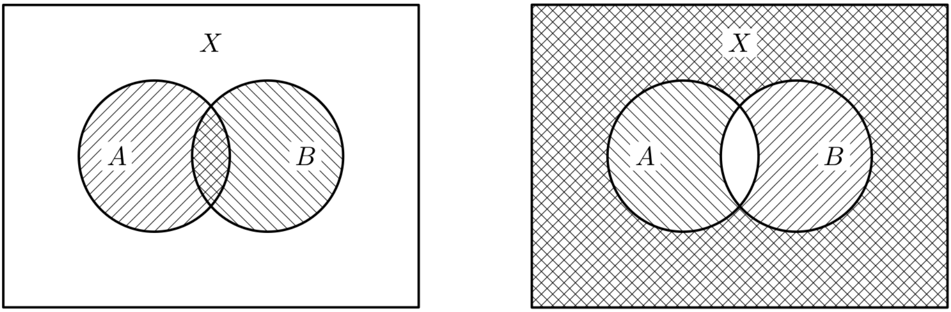
(7) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;

(8) $(A \cap B)' = A' \cup B'$. $\square$

Az utolsó két állítást *De Morgan-szabály*oknak nevezik; általánosabb változatukat később tanuljuk.

$\rightarrow$ **2.1.16. Feladat [5].** Legyenek $x = \{\text{alma}, \text{körte}\}$ és $y = \{\text{kutya}, \text{macska}\}$ halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy $x$ eleme, $x$ részhalmaza, illetve $x$ se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\}, y\}$, $x$, $\emptyset \cap x$, $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$, $\{x\} \cup x$, $\{x\} \cup \{\emptyset\}$?

$\rightarrow$ **2.1.17. Feladat [4].** Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges $A$, $B$, $C$ halmazokra és melyek nem:




**2.1.2 ábra:** $A \cap B$ és $A' \cup B'$ Venn-diagramja.

(1) $(A \cup B) \setminus A = B$;

(2) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

(3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

(4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

→ **2.1.18. Feladat [0].** Bizonyítsuk be, hogy $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$.

→ **2.1.19. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A$, $B$, $C$ halmazokra $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle B = B \triangle A$ (kommutativitás), $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ (assszociativitás), és $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (disztibutivitás).

**2.1.20. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A$, $B$ halmazokra $A = \emptyset$ pontosan akkor, ha $B = A \triangle B$.

**2.1.21. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $A$, $B$, $C$ halmazokra $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, és a tartalmazás lehet valódi.

→ **2.1.22. Feladat [3].** Legyen $A, B, C, D \subset X$, és jelölje $'$ az $X$ alaphalmazra vonatkozó komplementert. Egyszerűsítsük, amennyire lehet:

(1) $\Big(A \cup (B \cap (C \cup D'))\Big)'$;

(2) $((A' \cup B) \cap (A \cup B'))'$;

(3) $$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C') \\ \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C).$$

→ **2.1.23. Feladat [4].** Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges $A$, $B$, $C$ halmazokra és melyek nem:

(1) $(A \cup B) \setminus A = B$;

(2) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

(3) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

(4) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

**2.1.24. Hatványhalmaz.** Egy $A$ halmazhoz azt a halmazrendszert, amelynek elemei pontosan $A$ részhalmazai, az $A$ halmaz *hatványhalmazának* nevezzük. Jele $\wp(A)$, a $\wp$ betű a német „Potenz” (hatvány) szóra utal.

→ **2.1.25. Feladat [3].** Írjuk fel a hatványhalmazt egy-egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazra.

→ **2.1.26. Feladat [5].** Írjuk fel a $\wp\Big(\wp(\wp(\emptyset))\Big)$ halmazt.

**2.1.27. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A$, $B$ halmazokra

(1) ha $A \subset B$, akkor $\wp(A) \subset \wp(B)$;

(2) $A = B$ pontosan akkor, ha $\wp(A) = \wp(B)$, azaz $X \mapsto \wp(X)$ injektív;

(3) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$;

(4) $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$.

Mikor teljesül egyenlőség (4)-ben?

⋆ **2.1.28. Tétel.** *Nincs olyan halmaz, amelynek minden dolog eleme.*

**Bizonyítás.** Legyen $A$ tetszőleges halmaz, és legyen $B = \{x \in A : x \notin x\}$. Megmutatjuk, hogy $B \notin A$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $B \in A$. Tudjuk, hogy $B \in B$ és $B \notin B$ közül pontosan az egyik teljesül. Ha $B \in B$, akkor $B$ definíciója szerint $B \notin B$ is fennáll, ami ellentmondás. Ha $B \notin B$, akkor $B$ definíciója szerint $B \in B$, ugyancsak ellentmondás. □

⋆ **2.1.29. Axiomatikus halmazelmélet.** Ha valaki figyelmesen megnézi, a fenti tárgyalás nem pontos. Néhány dolgot, például hogy két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik, vagy hogy van üres halmaz stb., egyszerűen elfogadtunk, a szemlélet alapján. Pontos tárgyalásnál ezeket axiómaként kellene felsorolni. Pontosabb tárgyalás található a [19] könyvben.

Hogy az axiómatikus tárgyalás fontos, és az axiómákat körültekintően kell megválasztani, azt a következő példa mutatja: ha azt tennénk fel, hogy $\{x : \dots\}$ mindig halmazt, ha a kipontozott részre olyan feltételt írunk, amely minden $x$ dologra vagy igaz, vagy hamis, akkor a részhalmazképzésnél erősebb lehetőséghez jutnánk. Első pillantásra úgy tűnik, ennek az axiómának a használata jelentősen egyszerűsítené a halmazelméletet. Sajnos, túlságosan is: az $U = \{x : x = x\}$ „összes dolgok halmazára” vagy „univerzumra” alkalmazva az előző tételt, ellentmondásra jutnánk (Russell-paradoxon). Durván szólva az axiómák azt biztosítják, hogy ilyen „túl nagy” halmazokat ne tudjunk képezni, és ne jussunk ellentmondásokhoz. Ugyanis ha egy axiómarendszerben van ellentmondás, akkor abban bármit, és bárminek az ellenkezőjét is be lehet bizonyítani. Állítólag Russellhez, ennek a paradoxonnak a felfedezőjéhez odament egy ember, és azt mondta neki:

– Ön azt állítja, hogy egy nem igaz állításból bármit be tud bizonyítani. Kérem, bizonyítsa be egy nem igaz állításból, hogy én vagyok a japán császár.

– Well,

mondta Russell,

– 0 = 1-ből következik, hogy 1 = 2. Ön és a japán császár 2, de 2 = 1, készen vagyunk.

A bizonyítás jó!

## 2.2 Relációk

A relációk a függvényfogalom általánosításai és a függvénykapcsolatnál általánosabb kapcsolatok leírására is alkalmasak. A reláció szó magyarul kapcsolatot jelent, de a matematikában az idegen szó terjedt el.

**2.2.1. Descartes-szorzat és reláció.** Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *rendezett $n$-es* fogalmát alapfogalomnak fogjuk tekinteni. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rendezett $n$-eseket pontosan akkor tekintjük egyenlőnek, ha $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x_i = y_i$. Azt mondjuk, hogy $x_i$ az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rendezett $n$-es *$i$-edik koordinátá*ja. Az $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ *Descartes-szorzat*ot vagy *direkt szorzat*ot mint az összes olyan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rendezett $n$-esek halmazát definiáljuk, amelyeknek az $i$-edik koordinátája $X_i$-ben van, ha $i = 1, 2, \ldots, n$. Ilyen szorzathalmazok részhalmazait *reláció*knak nevezzük. Tetszőleges kapcsolatokat relációkkal írhatunk le, ezért a relációk fontos szerepet játszanak az adatbázis-kezelő rendszerekben. Ha $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, akkor $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ helyett $X^n$-et szokás írni. Ennek a halmaznak a részhalmazait *$X$-beli reláció*knak nevezzük.

⋆ **2.2.2. Megjegyzés.** Az előző definícióban felhasználtuk a természetes számokat. Ha a természetes számokat a halmazok segítségével akarjuk bevezetni, akkor ezt nem tehetjük meg. Nincs szükségünk a természetes számokra, ha először csak a legfontosabb speciális esetet, két halmaz Descartes-szorzatát definiáljuk, majd általánosítjuk a halmazok Descartes-szorzatának fogalmát tetszőleges halmazrendszerekre. Ehhez az kell, hogy sikerüljön az $(x, y)$ *rendezett pár* fogalmát csak halmazok segítségével definiálni úgy, hogy $(x, y) = (u, v)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $x = u$ és $y = v$. (Megtehetnénk, hogy a rendezett párt alapfogalomnak tekintjük, ekkor azonban új axiómákat kellene bevezetnünk, amelyek a rendezett pár fogalmát az eddigi fogalmakhoz kapcsolják.) Az $\{x, y\}$ halmaz nem alkalmas rendezett párnak, mert bár $x = u$ és $y = v$ fennállása esetén $\{x, y\} = \{u, v\}$, de megfordítva nem, mert abból, hogy $\{x, y\} = \{u, v\}$ csak az következik, hogy $x = u$ és $y = v$ (amit várunk) vagy pedig $x = v$ és $y = u$, amit nem szeretnénk. A „probléma” az, hogy $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Bármely $x, y$ esetén legyen $(x, y) := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. Ezzel a definícióval $x = u$ és $y = v$ esetén nyilván $(x, y) = (u, v)$. Másrészt, ha $(x, y) = (u, v)$, akkor $\{x, y\} = \cup(x, y) = \cup(u, v) = \{u, v\}$, és így $x = u$ és $y = v$, amit várunk, vagy pedig $x = v$ és $y = u$. Az utóbbi eset azonban $x \neq y$ esetén lehetetlen, mert ekkor $\big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} \neq \big\{\{y\}, \{y, x\}\big\}$, hiszen a bal oldalon álló halmaznak van olyan eleme, amelynek $x$ az egyetlen eleme, a jobb oldalon állónak pedig nincs.

Most már felépíthetjük a binér relációkat, függvényeket, műveleteket, a természetes számokat, az egész számokat, a racionális számokat és a valós számokat csak a halmazelméletre alapozva. Ezt itt nem tesszük meg, de akit érdekel, megtalálhatja a [19] könyvben.

**2.2.3. Binér relációk.** Ha $n = 2$, akkor a rendezett $n$-eseket *rendezett pár*oknak nevezzük. Egy halmazt *binér relációnak* (vagy *kétváltozós reláció*nak) nevezünk, ha minden eleme rendezett pár. Ha $R$ egy binér reláció, akkor $(x, y) \in R$ helyett gyakran azt írjuk, hogy $xRy$, és azt mondjuk, hogy *$x$ és $y$ között fennáll az $R$ reláció* vagy *$x$ az $R$ relációban van $y$-nal.* (Vannak, akik egy binér reláció *grafikon*járól vagy *gráf*járól beszélnek, amikor párok halmazára gondolnak; vannak, akik a binér relációkat *megfeleltetés*nek nevezik.)

Egyszerű példák binér relációkra a két „szélsőséges eset”: az üres halmaz és két halmaz Descartes-szorzata. Bármely $X$ halmazra az

$$\mathbb{I}_X := \big\{(x, x) \in X \times X : x \in X\big\}$$

halmaz reláció (ez az egyenlőség $X$-en); ezt a relációt $X \times X$ *diagonális*ának is szokás nevezni. Bármely $\mathcal{F}$ halmazrendszerre az

$$\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subset Y\}$$

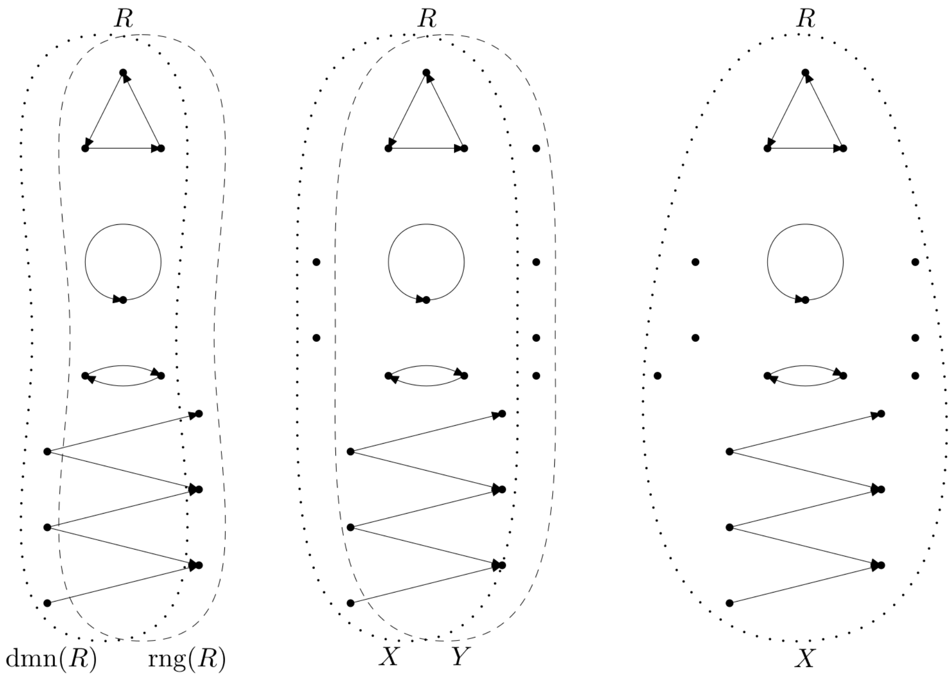
halmaz binér reláció (ez a tartalmazás $\mathcal{F}$ halmazai között). Bármely $\mathcal{F}$ halmazrendszerre az

$$\{(X, Y) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : X \subsetneq Y\}$$

halmaz binér reláció (ez a valódi tartalmazás $\mathcal{F}$ halmazai között).

Ha valamely $X$ és $Y$ halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy $R$ *reláció $X$ és $Y$ között.* [Minden relációhoz léteznek ilyen halmazok, például $X = \mathrm{dmn}(R)$ és $Y = \mathrm{rng}(R)$ választható, lásd később.] Ha $X = Y$, akkor azt mondjuk, hogy $R$ *egy $X$-beli binér reláció*. Nyilván minden $X$ és $Y$ közötti binér reláció tekinthető $X \cup Y$-beli binér relációnak.

**2.2.4. Relációk gráfja.** Gyakran érdemes binér relációkat úgynevezett „nyíldiagrammal” szemléltetni: egy $R \subset X \times Y$ binér reláció szemléltetésére ábrázoljuk pontokkal $X$ és $Y$ elemeit, és vezessen irányított él $x$-ből $y$-ba (azaz rajzoljunk egy $x$-ből $y$-ba vezető nyilat), ha $(x, y) \in R$. Lásd az 2.2.1 ábrát.




**2.2.1 ábra:** dmn és rng, reláció $X$ és $Y$ között, $X$-beli reláció.

° **2.2.5. Feladat [10].** Ábrázoljuk azon $(x, y)$ valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:

(1) $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, -1, -2, -3, -4$;

(2) $y^m = x$, $m = 2, 3, 4, 5$;

(3) $y^2 = x^3$ (*Neile-féle parabola*);

(4) $y^m = x^n$, $(m, n) \in \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)\}$;

(5) $xy = 1 + x^2$ (hiperbola);

(6) $xy = 1 + x^3$ (*Newton-féle háromágú szigony*);

(7) $yx^2 = 1 + x^3$;

(8) $y(1 + x^2) = 1$ (*Agnesi-görbe*);

(9) $y(1 + x^2) = 2x$ (*Newton-féle szerpentin*);

(10) $y(1 - x^2) = 1$;

(11) $y(1 - x^2) = x$;

(12) $y^2 = -x - 2$ (parabola);

(13) $4y^2 + x^2 = 100$ (ellipszis);

(14) $y^2 = x^2 - 1$ (hiperbola);

(15) $y^2(1 + x) = 1 - x$;

(16) $y^2 = x^2(100 - x^2)$;

(17) $y^2(10 - x) = x^3$ (*cisszois*);

(18) $|x|^n + |y|^n = 1$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 1/2, 1/3, 1/4$;

(19) $\max\{|x|, |y|\} = 1$;

(20) $xy = \lfloor x \rfloor$.

$^\circ$ **2.2.6. Feladat [9].** Ábrázoljuk a megadott valós számpárok síkbeli halmazát:

(1) $\{(1 - t, 1 - t^2) \colon t \in \mathbb{R}\}$;

(2) $\{(t + 1/t, t + 1/t^2) \colon t \in \mathbb{R}\}$;

(3) $\{(10 \cos t, \sin t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ (ellipszis);

(4) $\{(5 \cos^2 t, 3 \sin^2 t) \colon t \in \mathbb{R}\}$;

(5) $\Big\{(2(t - \sin t), 2(1 - \cos t)) \colon t \in \mathbb{R}\Big\}$ (*ciklois*);

$^\circ$ **2.2.7. Feladat [8].** Paraméterezést bevezetve, ábrázoljuk azon $(x, y)$ valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:

(1) $x^3 + y^3 = 3xy$ (*Descartes-féle levél*);

(2) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$;

(3) $x^2y^2 = x^3 - y^3$;

(4) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (*astroid*).

$^\circ\star$ **2.2.8. Feladat [11].** Paraméterezést bevezetve, ábrázoljuk azon $(x, y)$ valós számpárok síkbeli halmazát, amelyekre $x^y = y^x$, $x, y > 0$.

**2.2.9. Értelmezési tartomány, értékkészlet.** Az $R$ binér reláció *értelmezési tartományát* a

$$\mathrm{dmn}(R) := \{x\colon \text{van olyan } y, \text{ hogy } (x,y) \in R\},$$

*értékkészletét* pedig az

$$\mathrm{rng}(R) := \{y\colon \text{van olyan } x, \text{ hogy } (x,y) \in R\}$$

összefüggéssel értelmezzük. A jelölések a „domain” illetve „range” szóra utalnak; dom vagy $\mathcal{D}$, illetve ran, $\mathcal{R}$ vagy im (az „image” szóból) is szokásosak, de a mássalhangzók több információt hordoznak.

→ **2.2.10. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy egy $R$ relációra $R = \emptyset$, $\mathrm{dmn}(R) = \emptyset$ és $\mathrm{rng}(R) = \emptyset$ ekvivalensek.

→° **2.2.11. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi relációk értelmezési tartományát és értékkészletét:

(1) $S = \{(x,y)\colon x,y \in \mathbb{R}, |x| = |y|\}$;

(2) $T = \{(x,y)\colon x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2y < 0\}$.

**2.2.12. Kiterjesztés, leszűkítés.** Az $R$ binér relációt az $S$ binér reláció *kiterjesztésének* illetve $S$-et az $R$ *leszűkítésének* (vagy *megszorításának*) nevezzük, ha $S \subset R$. Ha $X$ egy halmaz, az $R$ reláció $X$-re való *leszűkítésén* (vagy *megszorításán*) az

$$R|_X := \{(x,y) \in R\colon x \in X\}$$

relációt értjük. Lásd a 2.2.2 ábrát.

**2.2.13. Inverz.** Egy $R$ binér reláció *inverzén* az

$$R^{-1} := \{(b,a)\colon (a,b) \in R\}$$

binér relációt értjük. Szemléletesen ez úgy keletkezik $R$-ből, hogy megfordítjuk a nyilakat. Nyilván $(R^{-1})^{-1} = R$; ha $R$ reláció $X$ és $Y$ között, akkor $R^{-1}$ reláció $Y$ és $X$ között, és $\mathrm{dmn}(R^{-1}) = \mathrm{rng}(R)$ valamint $\mathrm{rng}(R^{-1}) = \mathrm{dmn}(R)$.

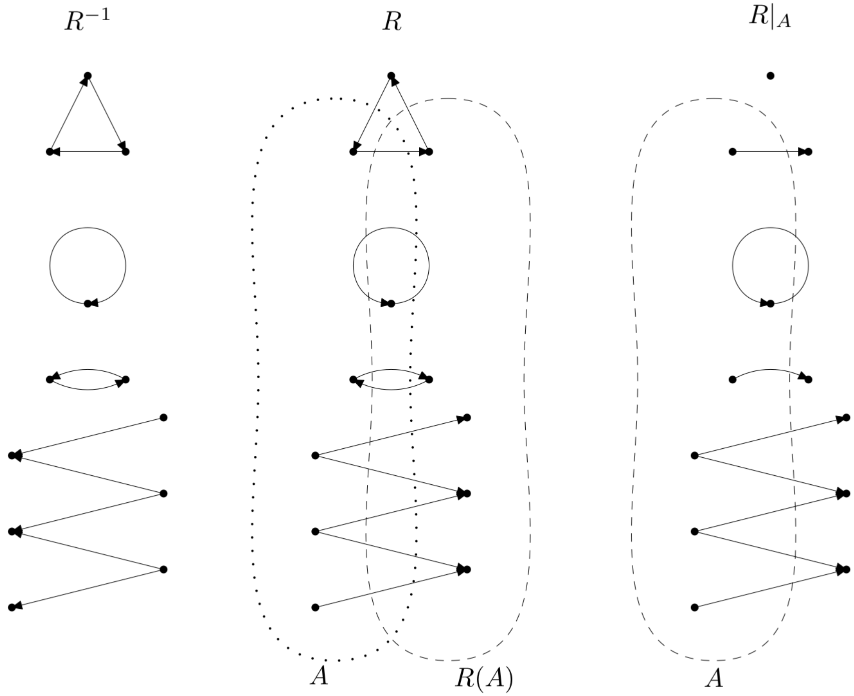
**2.2.14. Halmaz képe és inverz képe.** Legyen $R$ egy binér reláció és $A$ egy halmaz. Az $A$ halmaz *képe* az $R$ relációnál az

$$R(A) := \{y\colon \text{van olyan } x \in A, \text{ hogy } (x,y) \in R\}$$

halmaz. Vegyük észre, hogy $R(A)$ pontosan akkor üres, ha $A$ és $\mathrm{dmn}(R)$ diszjunktak. Az $A$ halmaz *inverz képe* az $R$ relációnál $R^{-1}(A)$. Ha $A = \{a\}$, akkor $R(\{a\})$ helyett $R(a)$-t is írhatunk. Ez kényelmes, de néha félreértésekhez vezethet, ha például $a$ és $\{a\}$ is eleme $\mathrm{dmn}(R)$-nek; ilyen kétes esetekben megmondjuk, hogy hagytunk-e el zárójelet.

→ **2.2.15. Feladat [0].** Ha $R$ binér reláció, mi lesz $R(\emptyset)$, $R^{-1}(\emptyset)$, $R(\mathrm{dmn}(R))$ és $R^{-1}(\mathrm{rng}(R))$?

→° **2.2.16. Feladat [5].** Az $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon y^2 = 2 - x - x^2\}$ relációra határozzuk meg a $\{0\}$ halmaz képét és teljes inverz képét. Mely $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $R(A)$ illetve $R^{-1}(A)$ egyelemű?




**2.2.2 ábra:** Reláció inverze, halmaz képe, reláció megszorítása.

$\rightarrow^\circ$ **2.2.17. Feladat [3].** Írjuk fel intervallumokkal az $x \mapsto |x|$ leképezésnél az alábbi halmazok teljes inverz képét: $[-1, 2]$, $]1, 4[$, $[-1, 2[$.

$\rightarrow$ **2.2.18. Feladat [2].** Mutassuk meg, hogy bármely $R$ relációra és $A$ halmazra $A \subset R^{-1}(R(A))$ pontosan akkor, ha $A \subset \mathrm{dmn}(R)$.

$^\circ$ **2.2.19. Feladat [3].** Határozzuk meg az $R \cap S$ relációt, ha $R$ az $m$ osztója $n$-nek reláció $\mathbb{N}^+$-on, $S$ pedig az $n = m + 6$ reláció $\mathbb{Z}$-n.

**2.2.20. Kompozíció.** Az $R$ és $S$ binér relációk *összetétel*én (*kompozíció*ján, *szorzat*án) az

$$R \circ S := \big\{(x, y) \colon \text{van olyan } z, \text{ hogy } (x, z) \in S \text{ és } (z, y) \in R\big\}$$

relációt értjük. $\big[$Egyesek fordítva $S \circ R$-et írnak; a fenti jelölés előnye, hogy ezzel bármely $A$ halmazra $R\big(S(A)\big) = (R \circ S)(A)\big]$.

Két reláció kompozíciója lehet üres: ez a helyzet, ha $\mathrm{rng}(S)$ és $\mathrm{dmn}(R)$ diszjunktak.

$\rightarrow^\circ$ **2.2.21. Feladat [7].** Határozzuk meg az $S \circ R$ és $R \circ S$ szorzatot, ha

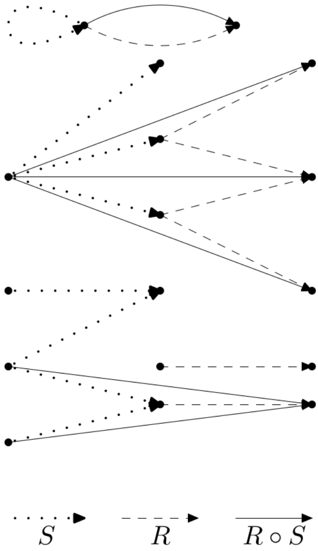
(1) $R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y^2 = x\big\}$ és $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y = 2x\big\}$;

(2) $R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \colon y^3 = x\big\}$ és $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y = \operatorname{tg} x\big\}$;

(3) $R = \big\{(x, y) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \colon y = \sin x\big\}$ és $S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon y + 1/y = x\big\}$;

(4) $R = S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x < y\big\}$;

(5) $R = S = \big\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon x < y\big\}$;




**2.2.3 ábra:** két reláció kompozíciója.

(6) $R = S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ : x$ osztója $y$, de $x \neq y\}$;

(7) $A$ tetszőleges halmaz, $R = \{(x, y) \in \wp(A) \times \wp(A) : x \cap y = \emptyset\}$ és $S = \{(x, y) \in \wp(A) \times \wp(A) : x \subset y\}$;

(8) $K$ és $L$ két körlap a $P$ síkban és $R = \{(x, y) \in P \times P : x = y$ vagy $x, y \in K\}$ és $S = \{(x, y) \in P \times P : x = y$ vagy $x, y \in L\}$.

**2.2.22. Állítás.** *Legyen $R$, $S$ és $T$ binér reláció. Ekkor*

(1) *ha* $\operatorname{rng}(S) \supset \operatorname{dmn}(R)$, *akkor* $\operatorname{rng}(R \circ S) = \operatorname{rng}(R)$;

(2) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ (a kompozíció asszociativitása);

(3) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. $\square$

**2.2.23. Állítás.** *Ha $R$ reláció $X$ és $Y$ között, akkor $\mathbb{I}_Y \circ R = R$ és $R \circ \mathbb{I}_X = R$.* $\square$

**2.2.24. Rendezés.** Egy $X$ halmazbeli *rendezés* (*teljes rendezés*, *lineáris rendezés*) egy $X$-beli $<$ reláció, amelyre

(1) ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$ (a reláció *tranzitív*);

(2) minden $x, y \in X$ esetén $x < y$, $x = y$ és $x > y$ közül pontosan egy teljesül (a reláció *trichotom*).

Vegyük észre, hogy az (1) tulajdonság nem függ $X$-től, csak a relációtól, míg (2) a relációtól és $X$-től is függ, így ez az $(X, <)$ pár tulajdonsága. Egy $X$ *rendezett halmaz* tulajdonképpen az $(X, <)$ pár. Egy $X$ rendezett halmaz minden $Y$ részhalmaza is rendezett, ha a $<$ relációt csak ennek az elemei között tekintjük, azaz a $< \cap (Y \times Y)$ relációval. Gyakran $x < y$ helyett azt írjuk, hogy $y > x$, így a $>$ reláció a $<$ reláció inverze. Az $x \leq y$ (vagy $y \geq x$) jelölés azt jelenti, hogy $x < y$ vagy $x = y$. A $\geq$ reláció a $\leq$ inverze. Ha $x < y$, akkor azt mondjuk, hogy $x$ *kisebb* mint $y$ vagy $y$ *nagyobb* mint $x$, illetve hogy *x megelőzi y*-t vagy *y követi x*-et. A $\leq$ illetve $\geq$ reláció esetén hozzátesszük, hogy „vagy egyenlő”.

° **2.2.25. Példa.** A valós számok halmaza és így a természetes, egész és racionális számok halmaza is rendezett a szokásos rendezéssel. A természetes számok körében az „$n$ valódi osztója $m$-nek” reláció nem rendezés, mert nem trichotom; például 2 és 3 egyik sem osztója a másiknak, de nem is egyenlőek.

→ **2.2.26. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy ha egy rendezett halmazban $x < y$ és $y \leq z$, akkor $x < z$.

→ **2.2.27. Feladat [1].** Lehet-e $\emptyset$ rendezés?

**2.2.28. Intervallumok.** Legyen $X$ rendezett halmaz. Ha $x \leq z$ és $z \leq y$, akkor azt mondjuk, hogy $z$ az $x$ és $y$ *közé esik*, ha pedig $x < z$ és $z < y$, akkor azt mondjuk, hogy *z szigorúan x és y közé esik.* Az összes ilyen elemek halmazát $[x, y]$, illetve $]x, y[$ jelöli. Az utóbbi halmaz jelölésére $(x, y)$ is szokásos; hátránya, hogy megegyezik a rendezett pár jelölésével. A $]x, y]$ és $[x, y[$ halmazok definíciója analóg; itt is használatos a kerek zárójeles változat. Ha $x < y$, de ugyanakkor nem létezik szigorúan $x$ és $y$ közé eső elem, akkor azt mondjuk, hogy *x közvetlenül megelőzi y*-t, vagy *y közvetlenül követi x*-et. Egy $x$ elemhez tartozó *kezdőszelet*nek a $\{y \in X : y < x\}$ részhalmazt nevezzük. A kezdőszelet jelölésére logikus, de nem elterjedt jelölés $]\leftarrow, x[$. Az analóg $]\leftarrow, x]$, $]x, \rightarrow[$, $[x, \rightarrow[$ jelölések analóg módon vannak definiálva.

**2.2.29. Legkisebb és legnagyobb elem.** Az $X$ rendezett halmaz *legkisebb* vagy *első* elemén egy olyan $x \in X$ elemet értünk, amelyre $x \leq y$ minden $y \in X$-re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű. Hasonlóan, *X legnagyobb* vagy *utolsó* elemén egy olyan $x$ elemet értünk, amelyre $y \leq x$ minden $y \in X$-re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű.

Ha $X$-nek létezik legkisebb eleme, akkor azt $\min(X)$-szel jelöljük, ha pedig létezik legnagyobb eleme, akkor azt $\max(X)$-szel jelöljük.

° **2.2.30. Példák.** A pozitív valós számok halmazának nincs legkisebb eleme. A nemnegatív valós számok halmazának van legkisebb eleme, a nulla. A valós számok halmazának se legnagyobb, se legkisebb eleme nincs.

**2.2.31. Korlátok.** Egy $X$ rendezett halmaz egy $x$ elemét az $Y$ részhalmaz *alsó korlát*jának nevezzük, ha minden $y \in Y$-ra $x \leq y$. Ha minden $y \in Y$-ra $y \leq x$, akkor $x$ az *Y felső korlát*ja. Lehet, hogy egy részhalmaznak nincs alsó vagy felső korlátja, de az is lehet, hogy több van. Ha egy $Y$ részhalmaznak van egy vagy több alsó korlátja, akkor is előfordulhat, hogy egyik sem eleme $Y$-nak. Ha mégis van az alsó korlátok között eleme $Y$-nak, akkor csak egy van és ez $Y$ legkisebb eleme; hasonló állítás érvényes természetesen a felső korlátokra. Ha az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor azt *Y legnagyobb alsó korlát*jának vagy *pontos alsó korlát*jának vagy *alsó határ*ának, idegen szóval *infimum*ának nevezzük, és $\inf(Y)$-nal jelöljük. Hasonlóan, ha $Y$ felső korlátjai halmazában van legkisebb elem, akkor azt *Y legkisebb felső korlát*jának vagy *pontos felső korlát*jának vagy *felső határ*ának, idegen szóval *szuprémum*ának nevezzük, és $\sup(Y)$-nal jelöljük. Egy $X$ rendezett halmazt *felső határ tulajdonság*únak nevezünk, ha minden nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik legkisebb felső korlátja, és *alsó határ tulajdonság*únak nevezünk, ha minden nem üres alulról korlátos részhalmazának létezik legnagyobb alsó korlátja.

° **2.2.32. Feladat [5].** Mely $n \in \mathbb{N}^+$ számokra alkotnak az $n$-nek az $\mathbb{N}^+$-beli osztói rendezett halmazt az oszthatóságra nézve?

° **2.2.33. Feladat [1].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Megmutatjuk, hogy 1 a legnagyobb természetes szám. Bármely $n$ természetes számra, amely nem 0 és nem 1, teljesül, hogy $n^2 > n$. Mivel $1 > 0$, az 1 a legnagyobb természetes szám.

→° **2.2.34. Feladat [5].** Legyen $H \subset \mathbb{R}$. A $H$ halmaz milyen tulajdonságát fejezik ki az alábbi formulák? A kvantorok, $x$ és $y$ valamint $\mathbb{R}$ és $H$ cserélgetésével keresünk további formulákat és fejtsük meg jelentésüket.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in H\ (x < y)$;

(2) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in H\ (x < y)$;

(3) $\forall x \in H\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x < y)$;

(4) $\forall x \in H\ \exists y \in H\ (x < y)$.

**2.2.35. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha egy rendezett halmaz minden nem üres és felülről korlátos halmazának van pontos felső korlátja, akkor minden nem üres alulról korlátos részhalmazának van pontos alsó korlátja.

**2.2.36. Jólrendezés.** Egy $X$ rendezett halmazt *jólrendezett*nek, rendezését pedig *jólrendezés*nek nevezzük, ha $X$ bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

**2.2.37. Példa.** A természetes számok halmaza jólrendezett, de az egész, racionális és valós számok halmaza nem jólrendezett a szokásos rendezéssel. A valós számok halmaza felső határ tulajdonságú, míg a racionális számok halmaza nem.

→ **2.2.38. Feladat [1].** Jólrendezett-e $\mathbb{N}$ a szokásos rendezés inverzével?

→ **2.2.39. Feladat [1].** Jólrendezett-e a $\{1 - 1/n \colon n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz a szokásos rendezéssel?

→° **2.2.40. Feladat [1].** Ki lehet-e választani jólrendezett halmazban elemek végtelen, szigorúan csökkenő sorozatát?

→ **2.2.41. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz bármely részhalmaza is jólrendezett.

**2.2.42. Ekvivalenciareláció, osztályozás.** Az $X$ halmazbeli $\sim$ reláció *ekvivalenciareláció*, ha

(1) minden $x \in X$ esetén $x \sim x$ (*reflexív*);

(2) minden $x, y$-ra $x \sim y$ esetén $y \sim x$ (*szimmetrikus*);

(3) minden $x, y, z$-re $x \sim y$ és $y \sim z$ esetén $x \sim z$ (*tranzitív*).

Könnyű látni, hogy az $\tilde{x} = \{y \in X \colon y \sim x\}$, $x \in X$ ekvivalenciaosztályok $X$-nek egy páronként diszjunkt nem üres halmazokra való felosztását, úgynevezett *osztályozás*át adják.

**2.2.43. Példa.** Egyenesek párhuzamossága ekvivalenciareláció, az ekvivalenciaosztályok az *irány* fogalmához vezetnek. Egy irányt az osztály bármely elemével reprezentálhatunk. Egy másik példa egész számok osztályozása a szerint, hogy egy adott egésszel osztva milyen maradékot adnak.

→ **2.2.44. Feladat [1].** Lehet-e $\emptyset$ ekvivalencia reláció?

## 2.3 Függvények

A reláció fogalmára alapozva pontosan és igen általánosan definiálhatjuk a függvény fogalmát.

**2.3.1. Függvény.** Egy *függvény* (*leképezés*, *transzformáció*, *hozzárendelés*, *operáció* vagy *operátor*) egy olyan $f$ binér reláció, amelyre ha $(x, y) \in f$ és $(x, y') \in f$, akkor $y = y'$, más szóval minden $x$-hez legfeljebb egy olyan $y$ létezik, amelyre $(x, y) \in f$. Így tehát minden $x \in \operatorname{dmn}(f)$-re $f(x) = \{y\}$ valamely $y$-ra. Az általános szokás itt is elhagyni a kapcsos zárójelet, azaz $f(x) = y$-t írni. Az $y$ elemet az $f$ függvény $x$ *hely*en (*argumentum*ban) felvett *érték*ének nevezzük és gyakran $f_x$-szel jelöljük. (Vannak, akik a függvény *grafikon*járól beszélnek, amikor párok halmazára gondolnak.) Legegyszerűbb példa függvényre $\mathbb{I}_X$, amelyet $X$ *identikus leképezés*ének nevezünk.

Annak kifejezésére, hogy az $f$ függvénynek az $x$ helyen $y$ az értéke, azt is szokás írni, hogy $f\colon x \mapsto y$. (Régebbi könyvekben $f\colon x \to y$ szerepel.) Ennél a jelölésnél néha nem is jelöljük semmivel a függvényt. Például az $X \times Y$ Descartes-szorzat elemeihez első illetve második koordinátájukat rendelő függvények $(x, y) \mapsto x$ illetve $(x, y) \mapsto y$.

Az összes olyan függvények halmazát, amelyek értelmezési tartománya része az $X$ halmaznak, értékkészlete pedig az $Y$ halmaznak, $X \to Y$ fogja jelölni (a jelölés nem túl elterjedt). Annak kifejezésére, hogy az $f$ függvény értelmezési tartománya az $X$ halmaz, értékkészlete pedig az $Y$ halmaznak részhalmaza, az $f\colon X \to Y$ jelölés szolgál, amit úgy olvasunk ki, hogy $f$ az $X$-et $Y$-ba képező függvény. (Ez nem ugyanaz, mint $f \in X \to Y$, mert ez utóbbi esetben $\operatorname{dmn}(f) \subsetneq X$ is lehetséges. Szokás az $f \in X \to Y$ függvényeket, némileg logikátlanul, az $X$-et $Y$-ba képező *parciális függvény*eknek is nevezni. Inkább az $f \in X \to Y$ jelölést fogjuk használni, vagy azt mondjuk, hogy $f$ az $X$ valamely részhalmazát $Y$-ba képező függvény.) Az összes, $X$-et $Y$-ba képező függvények halmazát $Y^X$ fogja jelölni. Ha azt mondjuk, hogy $f$ az $X$-et $Y$-ra képező függvény, akkor ez alatt azt értjük, hogy $f$ olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya $X$, értékkészlete pedig $Y$.

Az $f$ függvényt *kölcsönösen egyértelmű*nek nevezzük, ha $f(x) = y$ és $f(x') = y$ esetén $x = x'$. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy az $f^{-1}$ reláció függvény. Szokás a kölcsönösen egyértelmű függvényeket *injektív*nek is nevezni. Ha egy $f\colon X \to Y$ függvény $Y$-ra képez, azaz $f(X) = \{f_x\colon x \in X\} = Y$, akkor szokás *szürjektív*nek vagy *szuperjektív*nek is nevezni, ha pedig injektív és szürjektív, akkor *bijektív*nek. Ennek a szóhasználatnak a veszélye, hogy az, hogy egy függvény szürjektív illetve bijektív, nem csak a függvénytől, hanem az $Y$ halmaz választásától is függ, ami a szóhasználatból nem tűnik ki.

$\to^\circ$ **2.3.2. Feladat [5].** Az alábbi relációk közül melyek függvények?

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon a < x < b, x < y < 2x\}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| + |y| \le 1\}$;

(3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 = 1 + y^2, y > 0\}$.

$\to^\circ$ **2.3.3. Feladat [4].** Az alábbi függvények közül melyek kölcsönösen egyértelműek?

(1) $x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$;

(2) $x \mapsto x^4$, $x \in \,]0, 2[$;

(3) $f(x) = x$, ha $x \in \mathbb{Q}$, és $f(x) = 1 - x$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(4) $f(n) = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

$\to$ **2.3.4. Feladat [1].** Milyen $X$ és $Y$ halmazok esetén lesz $X \times Y$ függvény?

$\to$ **2.3.5. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy ha $X$, $Y$ halmazok, $c \in Y$, akkor az $X \times \{c\}$ *konstans leképezés* függvény.

$\to$ **2.3.6. Feladat [0].** Mutassuk meg, hogy $Y^X = \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $Y = \emptyset$ és $X \neq \emptyset$.

$\to$ **2.3.7. Feladat [5].** Határozzuk meg az $X^Y$ összes elemét, ha $X$-nek illetve $Y$-nak nulla, egy, két illetve három eleme van. Melyek lesznek invertálhatóak?

**2.3.8. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $X^Y \cap Y^X \neq \emptyset$, akkor $X = Y$.

$\to^{\circ}$ **2.3.9. Feladat [4].** Adjunk példát olyan függvényre, amely

(1) $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le, de nem injektív;

(2) $\mathbb{N}$-et $\mathbb{N}$ valódi részére képezi le és injektív;

(3) $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le, de nem injektív;

(4) $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{Z}$ valódi részére képezi le és injektív;

(5) $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le;

(6) $\mathbb{R}$-et $\mathbb{N}$-be képezi le, de egyetlen elem képe sem saját maga.

$\to$ **2.3.10. Feladat [3].** Ha $f, g \in X \to Y$ függvények, függvény lesz-e $f \cup g$, $f \cap g$, $f \setminus g$, illetve $f \bigtriangleup g$?

**2.3.11. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $R$ reláció az $X$ és $Y$ halmazok között, akkor az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) $R$ függvény;

(2) bármely $B \subset Y$-ra $R(R^{-1}(B)) \subset B$;

(3) bármely $A, B \subset Y$-ra $R^{-1}(A \cap B) = R^{-1}(A) \cap R^{-1}(B)$;

(4) ha $A, B \subset Y$ diszjunktak, akkor $R^{-1}(A) \cap R^{-1}(B) = \emptyset$.

$\to$ **2.3.12. Feladat [7].** Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Vizsgáljuk meg, hogy tetszőleges $A, B \subset X$ esetén milyen kapcsolat áll fenn az alábbi halmazpárok között (egyenlőség, egyik vagy másik irányú tartalmazás). Ha találtunk összefüggést, bizonyítsuk be, egyébként adjunk ellenpéldát. Mi a helyzet, ha $R \colon X \to Y$ függvény? Mi a helyzet, ha $R$ egy $f \colon Y \to X$ függvény inverze?

(1) $R(A \cup B)$ és $R(A) \cup R(B)$;

(2) $R(A \cap B)$ és $R(A) \cap R(B)$;

(3) $R(\mathrm{dmn}(R) \setminus A)$ és $\mathrm{rng}(R) \setminus R(A)$;

(4) $R(A \setminus B)$ és $R(A) \setminus R(B)$;

(5) $R(A \bigtriangleup B)$ és $R(A) \bigtriangleup R(B)$.

**2.3.13. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $R$ reláció az $X$ és $Y$ halmazok között, $S$ pedig reláció az $Y$ és $X$ halmazok között, továbbá $S \circ R = \mathbb{I}_X$ és $R \circ S = \mathbb{I}_Y$, akkor $R$ és $S$ bijektív leképezések és $S = R^{-1}$.

**2.3.14. Állítás.** *Ha $f$ és $g$ függvény, akkor $g \circ f$ is. Ha $f$ és $g$ kölcsönösen egyértelmű függvény, akkor $g \circ f$ is az. Ha az $f$ függvény $X$-et $Y$-ra, a $g$ függvény pedig $Y$-t $Z$-re képezi le, akkor $g \circ f$ az $X$-et $Z$-re képezi le.* $\square$

$\to^{\circ}$ **2.3.15. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi relációk értelmezési tartományát, értékkészletét, döntsük el, hogy függvény-e, és hogy az inverze függvény-e.

(1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a < x < b, x < y < 2x\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adott számok;

(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y(1-x^2) = x-1\}$;

(3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = (x-1)/(1-x^2)\}$;

(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \le 1\}$;

(5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = 1 + y^2, y > 0\}$;

(6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2y < 0\}$;

(7) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|\}$;

(8) $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y(\lfloor x \rfloor - 2) = 1\Big\}$;

(9) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x - \lfloor x \rfloor\}$;

(10) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \lfloor x \rfloor^2\}$;

(11) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$;

(12) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^4, 0 < x < 2\}$;

(13) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2, \text{ ha } x \in \mathbb{N}\}$;

(14) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x, \text{ ha } x \in \mathbb{Q}, \text{ egyébként } y = 1-x\}$.

**2.3.16. Feladat [5].** Abból, hogy az $f \colon X \to Y$ és $g \colon Y \to Z$ függvényekre $g \circ f$ inverze függvény, következik-e, hogy $f$ és $g$ inverze is függvény?

**2.3.17. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy bármely $f$ függvényre és $B$ halmazra $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{rng}(f)$. Mutassuk meg, hogy az állítás nem marad érvényben, ha $f$ csak reláció.

**2.3.18. Feladat [5].** Legyen $f \colon X \to Y$ függvény. Mutassuk meg, hogy az alábbi feltételek ekvivalensek:

(1) $f$ injektív;

(2) minden $A \subset X$ halmazra $f^{-1}(f(A)) = A$;

(3) bármely $A, B \subset X$ halmazokra $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(4) bármely diszjunkt $A, B \subset X$ halmazokra $f(A) \cap f(B) = \emptyset$;

(5) ha $A \subset B \subset X$, akkor $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

**2.3.19. Monoton függvények.** Legyenek $X$ és $Y$ rendezett halmazok. Az $f \colon X \to Y$ függvény *monoton növekedő*, ha $x, y \in X$, $x \le y$ esetén $f(x) \le f(y)$; *szigorúan monoton növekedő*, ha $x, y \in X$, $x < y$ esetén $f(x) < f(y)$; az $f$ *monoton csökkenő*, ha $x, y \in X$, $x \le y$ esetén $f(x) \ge f(y)$ és *szigorúan monoton csökkenő*, ha $x, y \in X$, $x < y$ esetén $f(x) > f(y)$. Szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván monoton növekedő (illetve csökkenő) is.

Szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű is. Megfordítva egy $f \colon X \to Y$ kölcsönösen egyértelmű monoton növekedő (illetve csökkenő) leképezés szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) is, és az inverze is monoton növekedő (illetve csökkenő) $f(X)$-en. Valóban, ha $x < y$, akkor $f(x) \leq f(y)$, de $f(x) = f(y)$ nem lehetséges, és ha $u, v \in f(X)$, $u \leq v$, $x = f^{-1}(u)$, $y = f^{-1}(v)$, akkor $x > y$ nem lehetséges, mert abból $x \geq y$ és $x \neq y$ miatt $f(x) \geq f(y)$, de $f(x) \neq f(y)$, azaz $u = f(x) > f(y) = v$ következne. A másik eset hasonlóan bizonyítható.

**2.3.20. Indexelt családok.** Mint említettük, egy $x$ függvény $i$ helyen felvett értékét néha $x_i$-vel jelöljük. Ilyenkor gyakran a függvény $I$ értelmezési tartományát *indexhalmaz*nak, elemeit *index*eknek, értékkészletét *indexelt halmaz*nak, az $x$ függvényt magát pedig *indexelt család*nak nevezzük.

Ha az értékkészlet elemei halmazok, akkor *indexelt halmazcsalád*ról beszélünk. Egy $X_i$, $i \in I$ indexelt halmazcsalád *unió*ját a

$$\cup_{i \in I} X_i := \cup\{X_i : i \in I\}$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha nem okozhat félreértést, akkor a rövidebb $\cup_i X_i$ jelölést is használjuk. Ha $I \neq \emptyset$, akkor az indexelt halmazcsalád *metszet*ét is definiáljuk a

$$\cap_{i \in I} X_i := \cap\{X_i : i \in I\}$$

összefüggéssel, és erre is használjuk a rövidebb $\cap_i X_i$ jelölést. Halmazcsaládokra is igaz marad számos halmazelméleti azonosság, például kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás. Csak eggyel foglalkozunk részletesen.

**2.3.21. De Morgan-szabályok.** *Ha $X_i$, $i \in I$ az $X$ halmaz részhalmazainak egy nem üres indexelt családja (azaz $I \neq \emptyset$), akkor az $X$-re vonatkozó komplementert vesszővel jelölve*

(1) $(\cup_{i \in I} X_i)' = \cap_{i \in I} X_i'$;

(2) $(\cap_{i \in I} X_i)' = \cup_{i \in I} X_i'$. $\square$

**2.3.22. Megjegyzés.** A De Morgan-szabályok üres család esetén (azaz ha $I = \emptyset$) is érvényben maradnak, ha az $X$ „alaphalmaz” részhalmazai egy $X_i$, $i \in I$ családjának a metszetét a $\cap_{i \in I} X_i := \{x \in X : \text{minden } i \in I\text{-re } x \in X_i\}$ összefüggéssel értelmezzük, mert a jobb oldal megegyezik a $\{X_i : i \in I\} \cup \{X\}$ nem üres halmazrendszer metszetével, azaz $\cap_{i \in \emptyset} X_i = X$.

Számos olyan összefüggés érvényes, amely egy adott függvény (vagy akár egy adott binér reláció) esetén az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet részhalmazainak indexelt családjai, valamint az indexelt család halmazainak képei, illetve inverz képei között teremt kapcsolatot. Mivel ezek az összefüggések általában könnyen kitalálhatók és bizonyíthatók, csak annyit emelünk ki, hogy ebből a szempontból legjobban egy függvény inverze viselkedik:

**2.3.23. Tétel.** *Legyen $f : X \to Y$ egy függvény, $A \subset X$ és $B, B_i \subset Y$, ha $i \in I \neq \emptyset$. Ekkor*

(1) $f^{-1}(\cup_i B_i) = \cup_i f^{-1}(B_i)$;

(2) $f^{-1}(\cap_i B_i) = \cap_i f^{-1}(B_i)$;

(3) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$;

(4) $f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A)$. $\square$

**2.3.24. Feladat [6].** Legyenek $A_i$, $B_i$, $i \in I$ nem üres indexelt halmazcsaládok. Mutassuk meg, hogy

$$(\cup_{i\in I} A_i) \triangle (\cup_{i\in I} B_i) \subset \cup_{i\in I}(A_i \triangle B_i).$$

Mutassuk meg, hogy a tartalmazás lehet valódi. Mi a helyzet, ha unió helyett metszet van?

$\to^\circ$ **2.3.25. Feladat [5].** Ha $r \in \mathbb{R}$, legyen $K_r = \{x \in \mathbb{R}: |x| < r\}$. Mi lesz $\cup_{i\in I} K_i$ és $\cap_{i\in I} K_i$, ha $I = \mathbb{R}^+$?

$\to$ **2.3.26. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $R$ binér reláció és $A_i$, $i \in I$ nem üres halmazrendszer, akkor

(1) $S(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} S(A_i)$;

(2) $S(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} S(A_i)$.

Igaz-e (1) üres halmazrendszerre is? Lehet-e (2)-ben a tartalmazás valódi?

**2.3.27. Feladat [6].** Legyen $\mathcal{F}$ az $X$ halmazt önmagába leképező függvények osztálya. Legyen $f \sim g$, ha van olyan $X$-et $X$-re leképező kölcsönösen egyértelmű $h$ függvény, hogy $f \circ h = h \circ g$. Bizonyítsuk be, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció $\mathcal{F}$-en!

$^\circ$ **2.3.28. Többváltozós függvények.** Egy $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ Descartes-szorzat valamely részhalmazán értelmezett függvényt szokás *többváltozós függvény*nek is nevezni. Megjegyezzük, hogy egy $f$ többváltozós függvénynek $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-hez rendelt értékét mindenki $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nel jelöli $f\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$ helyett. Többváltozós függvények esetén is előfordul, hogy a változókat alsó indexként írjuk. Például a *Kronecker-féle $\delta$-függvény* a $\delta_{x,y} = 1$, ha $x = y$ és $\delta_{x,y} = 0$, ha $x \neq y$ összefüggésekkel definiáljuk $x, y \in X$ esetén.

**2.3.29. Műveletek.** Legyen $X$ egy halmaz. Egy $X$-beli *binér* (vagy *kétváltozós műveleten*) egy $*: X \times X \to X$ leképezést értünk. Ha $x, y \in X$, akkor $*(x, y)$ a művelet *eredmény*e, $x$ és $y$ pedig az *operandus*ai. Rendszerint a binér művelet jelét az operandusok közé írjuk: $x * y$. Ha $A, B \subset X$, akkor $*(A \times B)$ helyett $A * B$-t, az $A = \{a\}$ illetve $B = \{b\}$ esetben pedig $a * B$-t illetve $A * b$-t is írhatunk. A legszokásosabb műveleti jelek $+$ és $\cdot$, az utóbbit gyakran ki sem írjuk.

Egy $X$-beli *unér művelet* egy $*: X \to X$ leképezés. Mivel $X^\emptyset = \{\emptyset\}$, egy *nullér művelet* egy $*: \{\emptyset\} \to X$ leképezés, ami tulajdonképpen $X$ egy elemének a kijelölését jelenti, operandusa nincs, csak eredménye. (Ternér stb., műveleteket is tekinthetünk, de erre nem nagyon lesz szükségünk.)

Ha műveletek eredményeire újabb műveleteket alkalmazunk, akkor zárójelekkel kell jeleznünk, hogy milyen sorrendben kell elvégeznünk a műveleteket. Szokás megállapodni a műveletek *precedenciá*jában, például a nullér műveletek után az unér műveleteket, majd a binér műveletek közül előbb a „hatványozásszerű”, majd a „szorzásszerű”, végül az „összeadásszerű” műveleteket végezzük el stb. Ilyen megállapodással a zárójelek egy része megtakarítható. Megjegyezzük azonban, hogy a zárójelek teljesen elhagyhatók, ha a műveleti jeleket mindig az operandusok elé írjuk. Ezt a jelölésmódot Jan Lukasiewicz vezette be és *lengyel jelölés*nek szokás nevezni. Az informatikában még elterjedtebb a *fordított lengyel jelölés*, amelynél a műveleti jelek az operandusok után következnek.

Néhány zsebszámológép mellett a FORTH programozási nyelv és a belőle kifejlesztett PostScript® nyomtatóvezérlő nyelv és szinte minden fordítóprogram ezt használja. Precedencia különbség és zárójelezés hiányában a legtöbb programozási nyelvben balról jobbra történik a műveletek végrehajtása.

**2.3.30. Példák.** (1) Ha $X$ egy halmaz, akkor az $\cup$, $\cap$, $\setminus$ és $\triangle$ binér műveletek, a $'$ (komplementerképzés) pedig unér művelet $\wp(X)$-en.

(2) Ha $X$ egy halmaz, a $\circ$ összetétel művelet az $X$-beli binér relációk között.

**2.3.31. Példák: művelet megadása táblázattal.** Egy véges halmazon egy binér műveletet (vagy általánosabban, bármely két véges halmaz Descartes-szorzatán értelmezett függvényt) „szorzótáblával" is megadhatunk: az első oszlopba a bal oldali operandus, az első sorba pedig a jobb oldali operandus kerül. Például az alábbi táblázatok az *igaz* (jele: $\uparrow$) illetve *hamis* (jele: $\downarrow$) a logikai értékek $\{\uparrow, \downarrow\}$ kételemű halmazán az $\wedge$ („*és*", *konjunkció*), $\vee$ (megengedő „*vagy*", idegen szóval *diszjunkció*), $\Rightarrow$ („*ha* … *akkor* …", *implikáció*) és $\iff$ („*akkor és csak akkor*" vagy „*pontosan akkor*", *ekvivalencia*), $\oplus$ (kizáró „*vagy*", gyakrabban „*vagy* … *vagy* …": pontosan az egyik), $|$ („*sem* … *sem* …"), $\|$ (összeférhetetlen „*vagy*", gyakrabban „*vagy* … *vagy* …": legfeljebb az egyik, de lehet, hogy egyik se) *logikai jel*eknek megfelelő binér *logikai művelet*eket definiálják:

| $\wedge$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |

| $\vee$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |

| $\Rightarrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ |

| $\iff$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |

| $\oplus$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |

| $\vert$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |

| $\Vert$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ |

Hasonlóan, egy véges halmazon egy unér műveletet (vagy általánosabban, bármely véges halmazon értelmezett függvényt) is megadhatunk táblázattal. Például az alábbi táblázat a $\neg$ („*nem*", idegen szóval *negáció*) logikai jelnek megfelelő függvényt adja meg:

| | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|
| $\neg$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ |

A logikai jeleket néha rövidítésként használjuk.

Általánosabban, az informatikában néha véges halmazok Descartes-szorzatán értelmezett függvényt egy tömbbel adunk meg.

$\to$ **2.3.32. Feladat [3].** Hány nullér, unér illetve binér művelet definiálható egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazon?

$\to$ **2.3.33. Feladat [7].** Keressük meg az összes binér logikai műveletet (azaz az összes műveletet az $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazon). Fejezzük ki mindet a tanult logikai műveletekkel, minél kevesebbel. Keressünk olyan binér műveletet, amellyel minden más binér logikai művelet kifejezhető.

**2.3.34. Példák.** Egy $n$-bites gépen rendszerint rendelkezésre állnak az előző példában szereplő logikai műveletek és még egyéb logikai műveletek is az $n$-bites szavakon, azaz a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt a $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazba képező függvények halmazán.

**2.3.35. Példák.** Egy $X$ halmazon értelmezett valós értékű függvények összege, szorzata és különbsége mindenütt értelmezve van, hányadosa azonban csak ott, ahol az osztó nem nulla.

**2.3.36. Művelettartó leképezések.** Legyen $*$ binér művelet az $X$ és legyen $*'$ binér művelet az $X'$ halmazon. Egy $\varphi\colon X \to X'$ leképezést *művelettartó*nak nevezünk, ha $\varphi(x * y) = \varphi(x) *' \varphi(y)$ minden $x, y \in X$-re. Hasonlóan értelmezzük a művelettartást unér és nullér műveletre is.

A művelettartás jelentősége, hogy ha $\varphi$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $X$ és $\varphi(X)$ között nem tudunk különbséget tenni a művelet alapján, „algebrailag megkülönböztethetetlenek".

**2.3.37. Példa.** Ha $a > 1$, az $x \mapsto a^x$ leképezés művelettartó és kölcsönösen egyértelmű leképezése az összeadással tekintett valós számoknak a szorzással tekintett pozitív valós számokra. Ez a leképezés művelettartó leképezése az ellentettképzéssel tekintett valós számoknak a reciprokképzéssel tekintett pozitív valós számokra, valamint a 0-t 1-be viszi át, így ezen unér műveletekre is művelettartó.

$\to^\circ$ **2.3.38. Feladat [5].** Mi köze a kilences illetve a tizenegyes próbának a művelettartó leképezésekhez?

# 3

# Számok

Ebben a fejezetben bevezetjük a valós számokat és a komplex számokat. A természetes számokat, az egész számokat és a racionális számokat a valós számok részhalmazainak tekintjük.

## 3.1 Valós számok

A valós számokkal való számolás szabályait kevés alapszabályból, a *testaxiómák*ból lehet levezetni. Ezzel fogunk kezdeni.

**3.1.1. Test.** Egy $K$ halmazt két művelettel, az összeadással és a szorzással $\big[$pontosabban a $(K,+,\cdot)$ hármast$\big]$ testnek nevezünk, ha

(A1) minden $x,y,z \in K$-ra $x+(y+z)=(x+y)+z$ (az összeadás *asszociatív*);

(A2) minden $x,y \in K$-ra $x+y=y+x$ (az összeadás *kommutatív*);

(A3) $K$-nak van *nulleleme* (*semleges elem*nek is szokás nevezni), azaz van olyan $0 \in K$, amelyre $0+x=x=x+0$ minden $x \in K$ esetén;

(A4) minden $x \in K$-ra létezik olyan $y \in K$, amelyre $x+y=0=y+x$ (az összeadásra nézve minden elemnek van *inverze*;

(M1) minden $x,y,z \in K$-ra $x(yz)=(xy)z$ (a szorzás *asszociatív*);

(M2) minden $x,y \in K$-ra $xy=yx$ (a szorzás *kommutatív*);

(M3) $K$-nak van egységeleme, azaz van olyan $0 \neq 1 \in K$, amelyre $1x=x=x1$ minden $x \in K$ esetén;

(M4) minden $0 \neq x \in K$-ra létezik olyan $y \in K$, amelyre $xy=1=yx$ (a szorzásra nézve minden nem nulla elemnek van *inverze*;

(D1) minden $x,y,z \in K$-ra $(x+y)z=xz+yz$ (a szorzás jobbról *disztributív* az összeadásra nézve);

(D2) minden $x,y,z \in K$-ra $z(x+y)=zx+zy$ (a szorzás balról *disztributív* az összeadásra nézve).

Itt (A1)–(A4) az *összeadás axiómái*, (M1)–(M4) a *szorzás axiómái*, (D1)–(D2) pedig az összeadást és a szorzás összekapcsoló *disztributivitás axiómái.*

Az (A3) axiómából következik, hogy egyetlen nullelem van, mert ha $0$ és $0^*$ is nullelem, akkor $0=0+0^*=0^*$. Most (A1) és (A4) felhasználásával kapjuk, hogy minden elemnek csak egy additív inverze van, mert ha $y$ és $z$ az $x$ additív inverzei, akkor $y=y+0=y+(x+z)=(y+x)+z=0+z=z$. Az $x$ additív inverzét $-x$ fogja jelölni. Az additív inverz képzését unér műveletnek is tekinthetjük. Bármely $x,y \in K$ esetén $x+(-y)$-t $x-y$ fogja jelölni. Nyilván $x+y$ additív inverze $-y-x$. Bármely $x \in K$-ra $-(-x)=x$; ez az $y-y=0$ összefüggésben $y$ helyére $-x$-et írva következik. Ha $x+z=y+z$, akkor ebből

$$x=x+0=x+(z-z)=(x+z)-z=(y+z)-z=y+(z-z)=y+0=y;$$

ez az *egyszerűsítési szabály* az összeadásra. Speciálisan, ha $x + z = z$, akkor $x = 0$.

Hasonlóan következik, hogy csak egy egységelem van, és bármely nem nulla $x$ elem multiplikatív inverze egyértelmű; ezt $x^{-1}$ vagy $1/x$ fogja jelölni. Mivel $xy(1/y)(1/x) = 1$, az $xy$ inverze $1/(xy) = (1/y)(1/x)$.

Bármely $x \in K$ esetén $x0 = 0$, mert (D1) szerint $x0+x0 = x(0+0) = x0$; hasonlóan (D2) szerint $0x = 0$. Innen $0 \neq x \in K$ esetén $1/x \neq 0$, mert egyébként $1 = x(1/x) = x0 = 0$ lenne, ami ellentmondás.

Bármely $0 \neq x \in K$-ra $1/(1/x) = x$; ez az $y(1/y) = 1$ összefüggésben $y$ helyére $1/x$-et írva következik. Ha $z \neq 0$ és $xz = yz$, akkor ebből

$$x = x1 = xz(1/z) = (xz)(1/z) = (yz)(1/z) = y(z(1/z)) = y1 = y;$$

ez az *egyszerűsítési szabály* a szorzásra. Speciálisan, ha $xz = z$, akkor $x = 1$. Hasonlóan, ha $z \neq 0$ és $zx = zy$, akkor $x = y$, és speciálisan ha $zx = z$, akkor $x = 1$.

Bármely $0 \neq x \in K$ és $0 \neq y \in K$ esetén $xy \neq 0$, mert egyébként $0 = xy(1/y) = x$, ami ellentmondás.

Teljesül az úgynevezett *előjelszabály*: bármely $xy \in K$ esetén

$$x(-y) = -(xy) = (-x)y \text{ és } (-x)(-y) = xy;$$

valóban (D1) szerint $xy+x(-y) = x(y-y) = x0 = 0$, ahonnan $x(-y) = -(xy)$; hasonlóan adódik, hogy $(-x)y = -(xy)$; végül $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy$.

A figyelmes olvasó észreveheti, hogy eddig (M2)-t, a szorzás kommutativitását nem használtuk fel. Ha ennek kivételével minden más feltétel teljesül, akkor a $(K, +, \cdot)$ hármast *ferdetest*nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy (M2) miatt (D1) és (D2) ekvivalensek, azaz elég az egyiket megkövetelni, a másik már következik. Hasonló apró egyszerűsítések más axiómákban is lehetségesek (A2) illetve (M2) felhasználásával. Testben bármely $x \in K$ és $0 \neq y \in K$ esetén $x(1/y)$-t $x/y$ fogja jelölni. Ha a szorzás nem kommutatív, akkor ezt a jelölést nem célszerű használni, mert $x(1/y)$ és $(1/y)x$ nem feltétlenül egyenlőek.

**3.1.2. Példa.** A legegyszerűbb példa testre a *kételemű test*: $\{0, 1\}$. Ebben (szükségképpen) $1+1 = 0$ (hiszen $1+1 = 1$ lehetetlen mert belőle $1 = 0$ következne), azaz $-1 = 1$. Kételemű test $\{\uparrow, \downarrow\}$ is a $\oplus$ és $\wedge$ műveletekkel.

° **3.1.3. Példák.** További példák testre a racionális, valós, illetve a komplex számok, a modulo $p$ maradékosztályok, ha $p$ prímszám.

**3.1.4. Algebrai struktúrák.** Ha a $(K, +)$ párra teljesül (A1), akkor *félcsoport*nak nevezzük. Ha (A3) is teljesül, azaz van semleges elem, akkor $(K, +)$ *monoid*. Ha még (A4) is teljesül, akkor $(K, +)$ *csoport*. Ha egy félcsoport, monoid, illetve csoport még (A2)-t is teljesíti, akkor azt mondjuk, hogy *kommutatív félcsoport*, *kommutatív monoid*, illetve *kommutatív csoport*. A kommutatív csoportokat *Abel-csoport*nak szokás nevezni, mert Abel norvég matematikus vizsgálta őket először. Nem kommutatív esetben egyébként szokásosabb a műveletet szorzással jelölni; ilyenkor ha van semleges elem, akkor azt 1-gyel jelöljük, egységelemnek nevezzük, és *egységelemes félcsoport*ról beszélünk.

A $(K, +, \cdot)$ hármast *gyűrű*nek nevezünk, ha az összeadással Abel-csoport (a nullelemet 0 fogja jelölni), a szorzással félcsoport, és teljesül mindkét oldali disztributivitás, azaz ha (A1)–(A4), (M1), (D1) és (D2) teljesülnek. Ha a szorzás kommutatív, azaz (M2) is teljesül, akkor a gyűrűt *kommutatív gyűrű*nek nevezzük. Ha a szorzásnak van egységeleme, azaz (M3) is teljesül, akkor a gyűrűt *egységelemes gyűrű*nek nevezzük.

**3.1.5. Példák.** Ha $X = \{\uparrow, \downarrow\}$, akkor $(X, \wedge)$ és $(X, \vee)$ kommutatív egységelemes félcsoportok, $(X, \iff)$ Abel-csoport, míg $(X, \Rightarrow)$-ben nincs egységelem, a művelet nem asszociatív és nem is kommutatív.

$\to$ **3.1.6. Feladat [5].** Hány olyan binér művelet van a $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazon, amellyel semleges elemes félcsoport?

$\to$ **3.1.7. Feladat [6].** Hány olyan binér művelet van a $\{\uparrow, \downarrow\}$ halmazon, amellyel félcsoport? A műveleteket fejezzük ki $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $|$, $\|$, $\Rightarrow$ és $\iff$ segítségével.

$\to$ **3.1.8. Feladat [3].** Hány kommutatív binér művelet definiálható egy 0, 1, 2, illetve 3 elemű halmazon?

$\to$ **3.1.9. Feladat [8].** Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy háromelemű halmazon úgy, hogy azzal egységelemes félcsoport legyen?

$\to$ **3.1.10. Feladat [8].** Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy 0, 1, 2, 3 illetve 4 elemű halmazon úgy, hogy azzal Abel-csoport legyen?

$\to$ **3.1.11. Feladat [9].** Hányféleképpen tudunk műveletet definiálni egy 0, 1, 2, 3 illetve 4 elemű halmazon úgy, hogy azzal csoport legyen?

$^\circ$ **3.1.12. Példa.** Az $(\mathbb{N}, +)$ pár kommutatív félcsoport a 0 nullelemmel (belátható, hogy csak a 0-nak van additív inverze, a 0), és $(\mathbb{N}, \cdot)$ is kommutatív félcsoport az 1 egységelemmel (belátható, hogy csak az 1-nek van multiplikatív inverze, az 1).

$^\circ$ **3.1.13. Példák.** $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ és $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abel-csoportok.

$\star$ **3.1.14. Példák.** (1) Ha $X$ tetszőleges halmaz, akkor $(\wp(X), \cap)$ és $(\wp(X), \cup)$ kommutatív egységelemes félcsoportok, $(\wp(X), \triangle)$ Abel-csoport, míg $(\wp(X), \setminus)$-ben általában nincs egységelem, a művelet nem asszociatív és nem is kommutatív.

(2) Ha $X$ egy halmaz, akkor az $X$-beli binér relációk a $\circ$ összetétellel egységelemes félcsoportot alkotnak, amely általában nem kommutatív és nem is csoport, bár vannak invertálható elemei.

(3) Ha $X$ egy halmaz, akkor az $X$-et önmagába képező függvények a $\circ$ összetétellel egységelemes félcsoportot alkotnak. Ha csak az összes injektív, illetve az összes szürjektív leképezéseket tekintjük, akkor is egységelemes félcsoportot kapunk. Az összes bijektív leképezések (permutációk) csoportot alkotnak. Ha az összes nem injektív leképezéseket, illetve az összes nem szürjektív leképezéseket tekintjük, akkor is félcsoportot kapunk, de ez már nem lesz egységelemes. Ezekben az esetekben a művelet általában nem kommutatív.

$\star$ **3.1.15. Példák.** A legegyszerűbb példa gyűrűre a *nullgyűrű*, amely csak egy elemet tartalmaz, ez nyilván a 0 kell legyen. Másik triviális példa egy (additív) Abel-csoport, amelyben bármely két elem szorzatát nullának értelmezzük; ezeket a gyűrűket *zérógyűrűnek* nevezzük. Mindkét gyűrű kommutatív.

$\star$ **3.1.16. Példák.** Bármely $X \neq \emptyset$ halmazra $\wp(X)$ a $(\triangle, \cap)$ műveletekkel kommutatív egységelemes gyűrű.

°⋆ **3.1.17. Példák.** További példák gyűrűkre az egész számok, a páros egész számok, a racionális együtthatós polinomok, a valós együtthatós polinomok, tetszőleges halmazon értelmezett valós értékű függvények és az $n \times n$-es mátrixok (egész, racionális vagy valós elemekkel). Ezek a gyűrűk mind egységelemesek, és kivéve a mátrixgyűrűket, ha $n > 1$, kommutatívak is. Ferdetestre példa a kvaterniók, mint azt később látni fogjuk.

°⋆ **3.1.18. Feladat [6].** Az előző pontban megadott gyűrűk között keressünk olyat, amelyik egységelemes, amelyik nem egységelemes, amelyik kommutatív és amelyik nem kommutatív.

→ **3.1.19. Feladat [6].** Hányféleképpen értelmezhetünk olyan összeadást és szorzást a $\{0, a, b\}$ halmazon, amelyekkel gyűrű? Minden esetben határozzuk meg az elemek többszöröseit és hatványait.

→ **3.1.20. Feladat [6].** Hányféleképpen értelmezhetünk olyan összeadást és szorzást a $\{0, 1, a, b\}$ halmazon, amelyekkel egységelemes gyűrű? Minden esetben határozzuk meg az elemek többszöröseit és hatványait.

→ **3.1.21. Feladat [6].** Adjunk meg olyan összeadást és szorzást a $\{0, 1, a, b\}$ halmazon, amelyekkel test.

⋆ **3.1.22. Feladat [7].** Ellenőrizzük, hogy a racionális számok halmaza Abel-csoport az $(a, b) \to a + b + 1$ művelettel. Mi lesz a nullelem? Adjunk meg olyan szorzást, amellyel testet kapunk. Igaz-e hasonló állítás minden testre, illetve egységelemes gyűrűre?

⋆ **3.1.23. Feladat [9].** Legyen $K$ a racionális számok egy olyan részhalmaza, amelynek legalább három eleme van és tartalmazza az 1-et. Tegyük fel, hogy ha $a, b \in K$ és $a \neq 0$, akkor $(1/a) - b \in K$. Mutassuk meg, hogy $K$ test.

**3.1.24. Rendezett test.** A $K$-t *rendezett test*nek nevezzük, ha rendezett halmaz, test, és

(1) ha $x, y, z \in K$ és $x < y$, akkor $x + z < y + z$ (az *összeadás monoton*);

(2) ha $x, y \in R$ és $x, y > 0$, akkor $x \cdot y > 0$ (a *szorzás monoton*).

Rendezett testben ha $x > 0$, akkor $x$-et *pozitív*nak, ha $x < 0$, akkor $x$-et *negatív*nak nevezzük. A $K$ rendezett test összes pozitív elemének halmazát $K^+$ fogja jelölni. Legyen $|x| = x$, ha $x \geq 0$ és legyen $|x| = -x$, ha $x < 0$. Legyen $\operatorname{sgn}(x) = 0$, ha $x = 0$ és $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ egyébként; sgn az *előjel függvény*. Legyen $x^+ = x$, ha $x > 0$ és nulla egyébként; legyen $x^- = -x$, ha $x < 0$ és 0 egyébként. Nyilván $|x| = x^+ + x^-$ és $x = x^+ - x^-$.

**3.1.25. Tétel.** *Legyen $K$ rendezett test, $x, y, z \in K$. Ekkor*

(1) *ha $x > 0$, akkor $-x < 0$, és ha $x < 0$, akkor $-x > 0$;*

(2) *ha $x < y$ és $z > 0$, akkor $xz < yz$;*

(3) *ha $x < y$ és $z < 0$, akkor $xz > yz$;*

(4) *ha $x \neq 0$, akkor $x^2 > 0$; speciálisan, $1 > 0$;*

(5) *ha $0 < x < y$, akkor $0 < 1/y < 1/x$.*

**Bizonyítás.** Ha $x > 0$, akkor $0 = -x + x > -x + 0 = -x$, ha pedig $x < 0$, akkor $0 = -x + x < -x + 0 = -x$. Ezzel beláttuk (1)-et. (2) abból következik, hogy $y - x > y - y = 0$, így $(y - x)z > 0$, amiből $yz = (y - x)z + xz > 0 + xz = xz$. (3)-at megkapjuk (1)-ből és (2)-ből, mert $-((y-x)z) = (y-x)(-z) > 0$, így $(y-x)z < 0$, tehát $yz < xz$. Ha $x > 0$, akkor $x^2 > 0$, ha viszont $x < 0$, akkor $-x > 0$, így $x^2 = (-x)^2 > 0$. Speciálisan, $1^2 = 1 > 0$. Végül (5)-höz, ha $y > 0$ és $v \leq 0$, akkor $yv \leq 0$. Azonban $y(1/y) = 1 > 0$. Ezért $1/y > 0$, és hasonlóan $1/x > 0$. Ha az $x < y$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív $(1/x)(1/y)$ mennyiséggel, akkor azt kapjuk, hogy $1/y < 1/x$. □

° **3.1.26. Példák.** A racionális számok, illetve a valós számok rendezett testet alkotnak. A kételemű testen nincs olyan rendezés, amellyel rendezett test, mert rendezett testben $1 > 0$ és $-1 < 0$, de a kételemű testben $-1 = 1$.

⋆ **3.1.27. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy véges test nem tehető rendezett testté.

**3.1.28. Tétel.** *Létezik felső határ tulajdonságú rendezett test. Legyen $\mathbb{R}'$ és $\mathbb{R}''$ két felső határ tulajdonságú rendezett test. Ekkor létezik egy $\varphi$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{R}'$-nek $\mathbb{R}''$-re, amely monoton növekedő, összeadás- és szorzástartó.*

⋆ **Bizonyítás.** A bizonyítás hosszú és bonyolult. Alapgondolata, hogy először a természetes számokat, majd az egész számokat, ezután a racionális számokat definiáljuk, és végül a valós számokat mint a racionális számok bizonyos részhalmazait, úgynevezett *Dedekind-szelet*eit definiáljuk. A teljes bizonyítás megtalálható például a [32] könyvben vagy magyarul a [20] jegyzetben.

**3.1.29. Valós számok.** Egy felső határ tulajdonságú testet a *valós szám*ok testének nevezünk. Az előző tétel szerint létezik ilyen test és lényegében csak egy ilyen van. A valós számok testét $\mathbb{R}$-rel fogjuk jelölni. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{R}$ alsó határ tulajdonságú is: ha $A \subset \mathbb{R}$ nem üres és alulról korlátos, akkor $\inf(A) = -\sup(-A)$.

Történetileg először a természetes számok, majd a nemnegatív racionális számok fogalma alakult ki. Püthagorasz iskolájának matematikusai észrevették, hogy egy egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza nem racionális szám. A görögök fokozatosan kidolgozták az új számokkal való számolás szabályait, racionális számokkal való közelítéseik felhasználásával. Módszerük az volt, hogy egy valós számot az összes nála kisebb racionális számok halmazával azonosítottak. Ezt az alapgondolatot szokás felhasználni a valós számok bevezetésére. A görögök geometriai meggondolásokat használtak. A valós számok tisztán halmazelméleti bevezetése Dedekindtől, illetve Cantortól számazik 1872-ből.

**3.1.30. Karakterisztikus függvények.** Legyen $X$ egy halmaz, és ha $Y \subset X$, legyen $\xi_Y(x) = 1$, ha $x \in Y$ és $\xi_Y(x) = 0$, ha $x \in X \setminus Y$. A $\xi_Y$ függvényt az $Y$ halmaz ($X$-en értelmezett) *karakterisztikus függvény*ének nevezzük. Az $Y \mapsto \xi_Y$ leképezés nyilván kölcsönösen egyértelmű leképezése $\wp(X)$-nek az $X$-en értelmezett karakterisztikus függvények $\{0, 1\}^X$ halmazára. Megjegyezzük, hogy a Kronecker-delta nem más mint $\mathbb{I}_X$ karakterisztikus függvénye.

→° **3.1.31. Feladat [3].** Ha $Y$ és $Z$ az $X$ alaphalmaz részhalmazai, fejezzük ki az $X \setminus Y$, $Y \cap Z$, $Y \cup Z$, $Y \setminus Z$ és $Y \triangle Z$ halmazok karakterisztikus függvényeit $\xi_Y$ és $\xi_Z$ segítségével.

$\to^\circ$ **3.1.32. Feladat [3].** Az informatikában elterjedt az *Iverson-konvenció*: ha

$$Y = \{x \in X \colon \mathcal{F}(x)\}$$

az $X$ részhalmaza, akkor karakterisztikus függvényét $[\mathcal{F}(x)]$jelöli. Adjuk meg másként az $x \mapsto [x \neq 0]/(x + [x = 0])$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt.

## 3.2 Természetes, egész és racionális számok

Mi a valós számok részhalmazaiként definiáljuk a természetes, az egész és a racionális számokat.

**3.2.1. Természetes számok.** Jelölje $\mathbb{N}$ az $\mathbb{R}$ mindazon $N$ részhalmazainak a metszetét, amelyek rendelkeznek az alábbi két tulajdonsággal:

(1) $0 \in N$;

(2) ha $n \in N$, akkor $n + 1 \in N$.

Az egész $\mathbb{R}$ ilyen halmaz, így a metszetnek van értelme. Az $\mathbb{N}$ halmaz elemeit *természetes szám*oknak nevezzük. (Vannak, akik a természetes számokat 1-gyel kezdik.)

Megmutatjuk, hogy $\mathbb{N}$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal, amelyeket történeti okokból *Peano-axiómák*nak nevezünk:

(P1) $0 \in \mathbb{N}$;

(P2) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$;

(P3) ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \neq 0$;

(P4) ha $n, m \in \mathbb{N}$ és $n + 1 = m + 1$, akkor $n = m$;

(P5) ha $S \subset \mathbb{N}$, $0 \in S$ és $n \in S$ esetén $n + 1 \in S$, akkor $S = \mathbb{N}$.

Mivel $\mathbb{N}$ olyan halmazok metszete, amelyek rendelkeznek az (1) és (2) tulajdonságokkal, $\mathbb{N}$ is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, így (P1) és (P2) teljesül. (P5) a *teljes indukció elve*; abból következik, hogy az $S$ halmaz rendelkezik az (1) és (2) tulajdonságokkal, így $\mathbb{N} \subset S$. (P4) következik az egyszerűsítési szabályból. Végül (P3) fennállását (P5) segítségével bizonyítjuk. (Az ilyen bizonyításokat *teljes indukció*val való bizonyításoknak szokás nevezni, és nagyon gyakran szerepelnek természetes számokra vonatkozó állítások bizonyításánál.) Legyen $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n + 1 > 0\}$. Nyilván $0 \in S$, és ha $n \in S$, akkor $(n + 1) + 1 > 0 + 1 > 0$, így $n + 1 \in S$. Innen (P5) miatt $S = \mathbb{N}$, azaz teljesül (P3).

Minden $0 \neq n \in \mathbb{N}$-hez van egy ((P4) szerint egyértelmű) $m \in \mathbb{N}$, amelyre $m+1 = n$. Valóban, az

$$S = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \colon \text{van olyan } m \in \mathbb{N}, \text{ amelyre } m + 1 = n\}$$

halmazra $0 \in S$ és ha $n \in S$, akkor $n + 1 = (m + 1) + 1 \in S$, így (P5) szerint $S = \mathbb{N}$. (Ezt az előző bizonyítással összevetve látjuk, hogy $\mathbb{N}$ minden nem nulla eleme pozitív.)

Azt az apró trükköt, amit az előző bekezdésben használtunk, mindig alkalmazhatjuk, ha a teljes indukciót nem 0-tól akarjuk kezdeni.

Megjegyezzük, hogy ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor ($n$ szerinti teljes indukcióval) $m + n \in \mathbb{N}$. Hasonlóan, mivel $m(n + 1) = mn + m$, az $n$ szerinti teljes indukcióval kapjuk, hogy

$mn \in \mathbb{N}$, ha $m, n \in \mathbb{N}$. Ugyancsak $n$ szerinti teljes indukcióval, ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $n - m \in \mathbb{N}$.

Legyen $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, $5 := 4 + 1$, $6 := 5 + 1$, $7 := 6 + 1$, $8 := 7 + 1$, $9 := 8 + 1$. (Ha további számjegyekre van szükségünk, például hexadecimális (tizenhatos) számrendszerben, akkor így folytatjuk: $A := 9 + 1$, $B := A + 1$ stb.)

Legelőször $\mathbb{N}$-en értelmezett függvények rekurzióval való definíciójának módszerét tárgyaljuk. Ezeket a függvényeket *végtelen sorozat*oknak nevezzük. (Az $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezett függvényeket is szokás végtelen sorozatnak nevezni. Persze kezdődhet a sorozat indexelése 2-től, 3-tól, stb.) Érezzük, hogy egy sorozatot megadhatunk úgy, hogy megadjuk a 0 helyen felvett értékét, és megadunk egy képzési szabályt, amelynek alapján megkapjuk a sorozat $n$ helyen felvett értékéből az $n + 1$ helyen felvett értékét. Erről szól a következő tétel.

**3.2.2. Rekurziótétel.** *Legyen $X$ egy halmaz, $a \in X$, és $f: X \to X$ egy függvény. Ekkor egy és csak egy olyan $\mathbb{N}$-et $X$-be képező $g$ függvény létezik, amelyre $g(0) = a$ és $g(n + 1) = f(g(n))$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.*

$\star$ **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy ha $g$ és $g^*$ is a tétel feltételeit kielégítő függvény, akkor teljes indukcióval adódik, hogy $g = g^*$.

Csak $g$ létezését kell tehát belátnunk. Tekintsük $\mathbb{N} \times X$ mindazon $A$ részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszerét, amelyekre $(0, a) \in A$, és ha $(n, x) \in A$, akkor $(n + 1, f(x)) \in A$. Mivel az egész $\mathbb{N} \times X$ rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, az $\mathcal{A}$ halmazrendszer nem üres. Teljes indukcióval kapjuk, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ reláció értelmezési tartománya $\mathbb{N}$.

Tekintsük az $\mathcal{A}$-beli halmazok metszetét, jelölje ezt $g$. Mivel nyilván $g \in \mathcal{A}$, csak azt kell bizonyítanunk, hogy $g$ függvény. Más szóval, azt kell igazolnunk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re ha $(n, x) \in g$ és $(n, y) \in g$, akkor $x = y$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Legyen $S$ azoknak az $n \in \mathbb{N}$-eknek a halmaza, amelyekre $(n, x) \in g$ és $(n, y) \in g$ esetén $x = y$.

Ha $0 \notin S$, akkor valamilyen $a \neq b \in X$-re $(0, b) \in g$. De ekkor $g \setminus \{(0, b)\}$ még mindig $\mathcal{A}$-beli, mert tartalmazza $(0, a)$-t, és ha tartalmazza $(n, x)$-et, akkor $(n + 1, f(x))$-et is, hiszen $n + 1 \neq 0$. Ez ellentmond annak, hogy $g = \cap\mathcal{A}$.

Most tegyük fel, hogy $n \in S$. Ez azt jelenti, hogy pontosan egy olyan $x \in X$ létezik, hogy $(n, x) \in g$. Mivel $(n, x) \in g$, teljesül, hogy $(n + 1, f(x)) \in g$. Ha $n + 1$ nem tartozik $S$-hez, akkor $(n + 1, y) \in g$ valamely $f(x)$-től különböző $y$-ra. A $g \setminus \{(n + 1, y)\}$ reláció még mindig $\mathcal{A}$-beli, mert nyilván tartalmazza $(0, a)$-t, hiszen $0 \neq n+1$, és ha tartalmazza például $(m, z)$-t, akkor tartalmazza $(m+1, f(z))$-t is; valóban, ha $m = n$, akkor ez fennáll, ha pedig $m \neq n$, akkor $m+1 \neq n+1$. Ez megint ellentmond annak, hogy $g = \cap\mathcal{A}$. Ebből az ellentmondásból következik, hogy $n + 1 \in S$. A teljes indukció elve szerint $S = \mathbb{N}$, és a bizonyítás kész. $\square$

**3.2.3. Tétel.** *A természetes számok halmazában $n + 1$ közvetlenül követi $n$-et. A természetes számok halmaza jólrendezett.*

$\star$ **Bizonyítás.** Ha $n < m$, akkor $m = n + (m - n)$. Mivel $m - n \neq 0$, van olyan $k \in \mathbb{N}$, amelyre $m - n = k + 1$. De ekkor $m = n + k + 1 = (n + 1) + k$, azaz $n \leq m$.

A jólrendezettség bizonyításához legyen $A \subset \mathbb{N}$ nem üres halmaz. Legyen

$$B = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n \text{ minden } n \in A\text{-ra}\}$$

Nyilván $0 \in B$. Ha $n \in A$, akkor $n + 1 \notin B$. Tehát van olyan $m \in B$, amelyre $m + 1 \notin B$, mert egyébként teljes indukcióval azt kapnánk, hogy $B = \mathbb{N}$. Megmutatjuk, hogy $m$ az $A$

legkisebb eleme. Az világos, hogy alsó korlát, csak azt kell belátnunk, hogy $m \in A$. Ha $m \notin A$ teljesülne, akkor minden $n \in A$-ra $m < n$ lenne, amiből $m+1 \leq n$ következne, mert $m+1$ közvetlenül követi $m$-et, ez azonban ellentmondás. □

**3.2.4. Sorozatok.** Mint már említettük, az $\mathbb{N}$-en vagy $\mathbb{N}^+$-on értelmezett függvényeket *végtelen sorozat*nak nevezzük. Az $x$ végtelen sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vagy $x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, illetve $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vagy $x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbb{N}$ vagy az $\mathbb{N}^+$ halmaz $n$-nél nem nagyobb elemein értelmezett függvényeket *véges sorozat*nak nevezzük. Az $x$ véges sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vagy $x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, illetve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vagy $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ha a szövegösszefüggésből kiderül, hogy véges vagy végtelen sorozatról van szó, akkor egyszerűen csak *sorozat*ról beszélünk.

Végtelen halmazsorozat uniójára a

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \text{ vagy } A_0 \cup A_1 \cup \ldots,$$

metszetére pedig a

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \text{ vagy } A_0 \cap A_1 \cap \ldots$$

jelölést használjuk. Véges sorozatok esetén a megfelelő jelölések

$$\bigcup_{i=0}^{n} A_i \text{ vagy } A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n,$$

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i \text{ vagy } A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Persze, mindegyiknél kezdhetünk 1-gyel is.

$\to^\circ$ **3.2.5. Feladat [5].** Indukcióval bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

(1) $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

(2) $$1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(3) $$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

(4) $$\begin{aligned} &1 \cdot 2 \cdots m + 2 \cdot 3 \cdots (m+1) + \cdots \\ &+ n(n+1) \cdots (n+m-1) = \frac{n(n+1) \cdots (n+m)}{m+1}; \end{aligned}$$

(5) $$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

(6) $$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2;$$

(7) $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-1}{n};$$

(8) $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2n-1}{n}, \text{ha } n > 1;$$

(9) $$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1;$$

(10) $$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \text{ha } q \neq 1.$$

→ **3.2.6. Feladat [6].** Indukcióval bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:

(1) $\sqrt{n} \leq 1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} < 2\sqrt{n}$;

(2) $1 + 1/(2\sqrt{2}) + \cdots + 1/(n\sqrt{n}) \leq 3 - 2/\sqrt{n}$.

**3.2.7. Feladat [8].** Bizonyítsuk be Nikomakhosz tételét: $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$ stb. Vezessük le ebből az előző feladat (6) összefüggését.

→° **3.2.8. Feladat [1].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Azt látjuk be, hogy bármely egész szám megegyezik a rákövetkezőjével, azaz $n = n + 1$. Tegyük fel, hogy ez igaz $n$-re. Ekkor $n + 1$-re is, mert $n = n + 1$-ből $n + 1 = (n + 1) + 1$.

→° **3.2.9. Feladat [4].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy a sík rajta van egyetlen egyenesen. Elég megmutatni, hogy akárhogy veszünk véges sok pontot, azok egy egyenesen vannak. Egy és két pontra ez igaz. Tegyük fel, hogy bármely $n$ pont egy egyenesen van. Vegyünk $n + 1$ pontot. Az első $n$ pont egy egyenesen van. Vegyünk el ezek közül egyet, és adjuk hozzá az $n + 1$-edik pontot. Ez az $n$ pont is egy egyenesen van, tehát az $n + 1$ pont egy egyenesen van.

→° **3.2.10. Feladat [4].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy adott $a$ pozitív valós számra és bármely $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számra $a^{n-1} = 1$. Az állítás igaz, ha $n = 1$. Ha igaz bármely $n + 1$-nél kisebb számra, akkor

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{(n-1)-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

→° **3.2.11. Feladat [4].** Hol a hiba a következő okoskodásban? Bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Ha $n = 1$, akkor $3/2 - 1/n = 1/(1 \cdot 2)$, és ha $n$-re igaz, akkor

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}.$$

° **3.2.12. Feladat [5].** Indukcióval bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

(1) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n};$$

(2) $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n};$$

(3) $$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

(4) $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1;$$

(5) $$0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$$

(6) $$\Big(1 - \frac{1}{4}\Big)\Big(1 - \frac{1}{9}\Big)\Big(1 - \frac{1}{16}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) = \frac{n+2}{2n+2};$$

(7) $$(1+1)\Big(1 + \frac{1}{2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = n+1;$$

(8) $$\Big(2^{2^0} + 1\Big)\Big(2^{2^1} + 1\Big)\Big(2^{2^2} + 1\Big) \cdots \Big(2^{2^n} + 1\Big) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

→° **3.2.13. Feladat [6].** Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1) $$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1;$$

(2) $$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1}n^2.$$

° **3.2.14. Feladat [9].** Fejezzük ki egyszerűbb alakban az alábbi összegeket:

(1) $$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(n-3)(n+1)};$$

(2) $$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

(3) $$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4.$$

° **3.2.15. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

egy $k+1$-ed fokú polinomja $n$-nek.

$\to^\circ$ **3.2.16. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra

(1) $$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n};$$

(2) $$\frac{n}{2} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \le n.$$

$^\circ$ **3.2.17. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy

(1) $$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}} \le 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(2) $$\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(3) $$\frac{(n+1)^n}{n^n} > 2, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(4) $$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \text{ha } n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(5) $$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(6) $$n^{6/7} \le \frac{1}{\sqrt[7]{1}} + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \le \frac{7}{6} n^{6/7}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N}^+;$$

(7) $$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1;$$

(8) $$2^n > n^2, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 4;$$

(9) $$3^n > n^3, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 3;$$

(10) $$2^n > n^3, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 9;$$

(11) $$3^n > 2^n + 7n, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbb{N},\ n > 3.$$

$^\circ$ **3.2.18. Feladat [5].** Indukcióval bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $2^n$ osztja az $(n+1)(n+2)\cdots(2n)$ szorzatot.

° **3.2.19. Feladat [5].** Bizonyítsuk be a *Bernoulli-egyenlőtlenség*et: $x > -1$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén fennáll az $(1+x)^n \geq 1 + nx$ egyenlőtlenség és egyenlőség csak $n = 1$ vagy $x = 0$ esetén teljesül.

° **3.2.20. Feladat [5].** Bizonyítsuk be az *általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség*et:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

ahol $x_1, \ldots x_n$ azonos előjelű és $-1$-nél nagyobb valós számok.

° **3.2.21. Feladat [6].** Fejben: hány jegyű $2^{300}$ tizes számrendszerben?

° **3.2.22. Feladat [6].** Fejben: hány jegyű $10^{60}$ kettes számrendszerben?

° **3.2.23. Feladat [3].** Igazoljuk, hogy $(1 + 1/n)^n > 2$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

° **3.2.24. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} < \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{n+1},$$

ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

° **3.2.25. Feladat [5].** A $k$ szerinti indukcióval bizonyítsuk be, hogy ha $k, n \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq n$, akkor $(1 + 1/n)^k < 1 + k/n + k^2/n^2$. Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy

(1) $(1 + 1/n)^n < 3$, ha $n \in \mathbb{N}^+$;

(2) $n^n < (n!)^2$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$;

(3) $n^{n+1} > (n + 1)^n$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

**3.2.26. Motiváció: további rekurzív definíciók.** A Fibonacci-sorozatot a következőképpen „definiáljuk": Legyen $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, és legyen $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Úgy érezzük, hogy ez a feltétel egyértelműen definiálja a sorozatot, de ennek bizonyítására a rekurziótétel nem használható, mert a sorozat egy tagja nem csak az előzőtől függ. A rekurziótétel alábbi általánosabb változata lehetővé teszi, hogy egy sorozat egy tagját az összes előző tag függvényeként adjuk meg.

**3.2.27. Általános rekurziótétel.** *Legyen adott egy $X$ halmaz és egy $X$-be képező $f$ függvény, amelynek értelmezési tartománya az $X$-beli (nullától indexelt) véges sorozatok halmaza. (Az $f$ adja a rekurziót.) Ekkor egyértelműen létezik egy $g\colon \mathbb{N} \to X$ függvény, amely „$f$-zárt", azaz $g(n) = g_n = f(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.*

A tétel szemléletesen fogalmazva azt mondja, hogy ha adott egy függvényünk, amely egy sorozat esetén kiszámítja a sorozat már megadott részéből, hogy a következő helyre mit kell írnunk, akkor ennek segítségével a sorozatot akármeddig folytathatjuk.

A tétel és a bizonyítás érvényes marad akkor is, ha $\mathbb{N}$ helyett tetszőleges $N$ jólrendezett halmaz szerepel. Ezt az általánosabb változatot szokás *transzfinit rekurziótétel*nek nevezni. Ekkor $f$ értelmezési tartománya az összes, $N$ valamely kezdőszeletéből $X$-be képező függvény halmaza, és azt állítjuk, hogy egyértelműen létezik egy $g\colon N \to X$ függvény, amely „$f$-zárt", azaz $g(n) = f(g|_{]\leftarrow,n[})$ minden $n \in N$-re. (Itt $]\leftarrow, n[$ az $n \in N$-hez tartozó kezdőszelet.)

⋆ **Bizonyítás.** Az egyértelműség bizonyítása $\mathbb{N}$ jólrendezettségén múlik. (Az ilyen bizonyításokat *transzfinit indukció*val történő bizonyításnak nevezzük.) Tegyük fel, hogy $g$ és $g^*$ is eleget tesz a tétel feltételeinek. Legyen $S = \{x \in \mathbb{N} : g(x) \neq g^*(x)\}$. Ha $S$ nem üres, akkor létezik legkisebb eleme, legyen ez $n$. Mivel $g$ és $g^*$ megegyeznek az $]{\leftarrow}, n[$ intervallumon, azt kapjuk, hogy

$$g(n) = f(g|_{]\leftarrow,n[}) = f(g^*|_{]\leftarrow,n[}) = g^*(n),$$

ami ellentmond annak, hogy $n \in S$. A $g$ létezésének bizonyítása hasonlít a rekurziótétel megfelelő részének bizonyítására. Nevezzük $\mathbb{N} \times X$ egy $A$ részhalmazát $f$-zártnak, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden

$$h\colon ]{\leftarrow}, n[ \to X$$

függvényre, amelyre $h \subset A$, az is teljesül, hogy $\big(n, f(h)\big) \in A$. Maga $\mathbb{N} \times X$ egy $f$-zárt halmaz, ilyen halmaz tehát létezik. Legyen $g$ az összes $f$-zárt halmaz metszete. Mivel nyilván $g$ is $f$-zárt, csak azt kell megmutatnunk, hogy $g$ az egész $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Más szóval, azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $k \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $x \in X$, hogy $(k, x) \in g$, továbbá ha $(k, y) \in g$, akkor $x = y$. A bizonyítás megint indirekt, transzfinit indukcióval történik. Legyen $S$ azon $\mathbb{N}$-beli $k$ elemek halmaza, amelyekre ez nem igaz. Legyen $n$ az $S$ legkisebb eleme. Ekkor $g|_{]\leftarrow,n[}$ egy $]{\leftarrow}, n[$-en értelmezett függvény, és mivel a $g$ halmaz $f$-zárt, ha $x = f(g|_{]\leftarrow,n[})$, akkor $(n, x) \in g$. Mivel $n \in S$, ez csak úgy lehet, hogy van olyan $y \in X$, hogy $(n, y) \in g$ és $y \neq x$. Megmutatjuk, hogy $g \setminus \{(n, y)\}$ is $f$-zárt. Ez azt jelenti, hogy $m \in \mathbb{N}$ és $h\colon ]{\leftarrow}, m[ \to X$, $h \subset g \setminus \{(n, y)\}$ esetén $\big(m, f(h)\big) \in g \setminus \{(n, y)\}$. Ez nyilvánvaló akkor is, ha $m = n$, és akkor is, ha $m \neq n$. Viszont ez ellentmond annak, hogy $g$ a legszűkebb $f$-zárt halmaz. □

**3.2.28. Példa: Fibonacci-számok.** Példaként megmutatjuk, hogyan definiálhatók a Fibonacci-számok az előző tétel segítségével pontosan. Legyen $X = \mathbb{N}$, és legyen az $n \mapsto n^-$ leképezése $\mathbb{N}^+$-nak $\mathbb{N}$-re az $n \mapsto n^+$ leképezés inverze. Először az $f(\emptyset) = 0$, $f\Big(\{(0, k)\}\Big) = 1$ bármely $k \in \mathbb{N}$-re definíciókkal előírjuk, hogy az előző tétel szerint adódó $g$-re $g(0) = 0$ és $g(1) = 1$ legyen. Most ha $n > 1$, $h\colon ]{\leftarrow}, n[ \to \mathbb{N}$ egy függvény, akkor legyen $f(h) = h(n^-) + h(n^{--})$. (Vegyük észre, hogy $n = \min\big(\mathbb{N} \setminus \operatorname{dmn}(h)\big)$, így a $h$ meghatározza $n$-et.) Ezzel előírtuk, hogy $g$-re $g(n^{++}) = g(n^+) + g(n)$ teljesüljön minden $n \in \mathbb{N}$-re. Így $g$ a Fibonacci-számok sorozata lesz. Az első néhány Fibonacci-szám:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 |

→° **3.2.29. Feladat [5].** Az alábbi, általános rekurzióval megadott sorozatokat hozzuk zárt alakra:

(1) $a_0 = -1$, $a_1 = 2$, $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$;

(2) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_n = \sqrt[n]{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}$.

° **3.2.30. Feladat [9].** Az alábbi sorozatokat adjuk meg általános rekurzióval:

(1) $a_n$ az $n$-edik prímszám;

(2) $a_n$ a $\sqrt{2}$ tizedes kifejtésének $n$-edik jegye.

$\to^\circ$ **3.2.31. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy az $n$-edik Fibonacci-számra

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

$^\circ$ **3.2.32. Feladat [2].** Határozzuk meg az $F_{1000}$ Fibonacci-szám közelítő értékét.

$^\circ$ **3.2.33. Feladat [5].** Fejezzük ki az alábbi, rekurzióval adott sorozatokat a Fibonacci-számok segítségével, ($r, s, c \in \mathbb{R}$ tetszőleges):

(1) $a_0 = r$, $a_1 = s$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, ha $n \in \mathbb{N}$;

(2) $b_0 = r$, $b_1 = s$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + c$, ha $n \in \mathbb{N}$.

**3.2.34. Feladat [5].** Jelölje $F_n$ az $n$-edik Fibonacci-számot. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat:

(1) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$;

(2) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$, ha $n \in \mathbb{N}$.

$^\circ$ **3.2.35. Feladat [2].** Keressük meg az összes olyan $F_n$ Fibonacci-számot, amelyre $F_n = n$, illetve $F_n = n^2$.

**3.2.36. Szorzatok és összegek.** Legyen $K$ egy test, $x\colon \mathbb{N} \to K$ egy sorozat. Az általános rekurziótételt alkalmazva az $\mathbb{N}$ jólrendezett halmazra, definiálhatjuk a $\prod_{k=1}^n x_k$, $n \in \mathbb{N}$ *szorzat*okat úgy, hogy $\prod_{k=1}^0 x_k = 1$ és $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)\cdot x_{n+1}$. Ha minden $k$-ra $x_k = x$, akkor $\prod_{k=1}^n x_k$ helyett $x^n$-et írunk, és az $x$ elem $n$-edik *hatvány*áról beszélünk, $x$ az *alap*, $n$ pedig a *kitevő*; $x^0 = 1$. A szorzatok tulajdonságait indukcióval bizonyíthatjuk, ezt nem részletezzük. A szorzatok tulajdonságaiból következik, vagy indukcióval közvetlenül is bizonyítható, hogy $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ és $(x^m)^n = x^{mn}$ minden $m, n \in \mathbb{N}$-re. Gyakran $\prod_{k=1}^n x_k$ helyett azt írjuk, hogy $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$; ez a felírás már felhasználja azt az állítást, hogy az asszociativitás miatt a szorzat bármely zárójelezése esetén az eredmény ugyanaz. (Ez az *általános asszociativitás tétele*; teljes indukcióval könnyen belátható.) Ha $x, y \in K$, akkor indukcióval $(xy)^n = x^n y^n$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Ha a szorzás helyett az összeadást tekintjük, akkor szorzat helyett $\sum_{k=1}^n x_k$ *összeg*et írunk, $\sum_{k=1}^0 x_k = 0$. Ha minden $k$-ra $x_k = x$, akkor $\sum_{k=1}^n x_k$ helyett $nx$-et írunk, $n$ az *együttható*. (Ha $K = \mathbb{R}$, akkor $nx$-nek két értelme is van; szerencsére teljes indukcióval azonnal adódik, hogy a kettő megegyezik.) Gyakran $\sum_{k=1}^n x_k$ helyett azt írjuk, hogy $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Ha $x\colon A \to K$ egy tetszőleges függvény és van olyan

$$\varphi\colon \{k \in \mathbb{N}\colon 1 \le k \le n\} \to A$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely $A$-ra képez, akkor a kommutatitivást és asszociativitást felhasználva indukcióval belátható, hogy minden ilyen leképezésre $\sum_{k=1}^n x_{\varphi(k)}$ ugyanaz. (Ez az *általános kommutativitás* tétele.) Ezt a közös értéket $\sum_{a\in A} x_a$-val is jelöljük.

**3.2.37. Az általános disztributivitás tétele.** *Egy $K$ testben*

(1) *ha $m, n \in \mathbb{N}$, valamint $a_1, a_2, \ldots, a_m$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a test tetszőleges elemei, akkor*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j;$$

(2) *ha $m \in \mathbb{N}^+$, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$, valamint $a_{i,j_i} \in K$, ha $1 \le i \le m$, $1 \le j_i \le n_i$, akkor*

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i}\right) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i}.$$

A tétel azt mondja, hogy többtagokat úgy szorzunk, hogy minden tagot minden taggal összeszorzunk.

⋆ **Bizonyítás.** (1) triviális, ha $m = 0$ vagy $n = 0$. Az $n = 1$ eset $m$ szerinti teljes indukcióval következik a jobb oldali disztributivitásból. Végül az általános esetet $n$ szerinti teljes indukcióval kapjuk:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) &= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) b_n \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} a_i b_j + \sum_{i=1}^{m} a_i b_n \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.
\end{aligned}$$

(2) triviális, ha $m = 1$ és (1)-gyel ekvivalens, ha $m = 2$. Az általános esetet (1) felhasználásával $m$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i}\right) &= \prod_{i=1}^{m-1}\left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i}\right) \cdot \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m}\right) \\
&= \left(\sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,j_i}\right) \cdot \left(\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i}. \square
\end{aligned}$$

**3.2.38. Faktoriális, binomiális együttható.** A $\prod_{k=1}^{n} k$ szorzatot $n!$-sal ($n$ faktoriális) jelöljük. Az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k},$$

ha $n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n$ ($n$ alatt a $k$) számokat *binomiális együttható*knak nevezzük. (A jobb oldali kifejezéssel ezek akkor is definiálhatók, ha $n$ tetszőleges szám.) Az elnevezést a következő tétel indokolja.

**3.2.39. Binomiális tétel.** *Az előző pontban definiált binomiális együtthatók pozitív természetes számok. Legyenek $x, y$ egy $K$ test elemei, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**Bizonyítás.** Bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{és} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Indukcióval, $n = 0$-ra az állítás nyilvánvaló. A jobb oldalt közös nevezőre hozva

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

ha $0 \leq k < n$, ahonnan indukcióval adódik, hogy a binomiális együtthatók pozitív természetes számok. Ugyancsak indukcióval, a disztributivitást felhasználva,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^{k+1}y^{n-k} + x^k y^{n-k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(x^k y^{n+1-k}\right). \square$$

⋆ **3.2.40. Következmény.**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \textit{és} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

**Bizonyítás.** A binomiális tételből $x = 1$, $y = 1$, illetve $x = 1$, $y = -1$ helyettesítéssel adódik. □

**3.2.41. Egész számok.** A természetes számok körében az összeadásra nézve csak a 0-nak van inverze, másként szólva, a kivonás általában nem végezhető el. Ez indokolja az egész számok bevezetését. A $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ halmaz elemeit *egész szám*oknak nevezzük. A definíció alapján adódik, hogy $\mathbb{Z}$-ből nem vezet ki az összeadás és az additív inverz képzése, az előjelszabály alapján pedig, hogy a szorzás sem.

**3.2.42. Hatványozás egész kitevővel.** Ha $K$ egy test, $0 \neq x \in K$, akkor az $n \mapsto x^n$ leképezést az $x^{-n} = (x^{-1})^n$, ha $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval kiterjeszthetjük egy $\mathbb{Z}$-n értelmezett leképezéssé.

Mint esetszétválasztással nem nehéz belátni, erre a leképezésre $x^{m+n} = x^m x^n$ és $(x^m)^n = x^{mn}$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$-re, továbbá $(xy)^n = x^n y^n$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re, ha $x, y \in K$ nem nulla elemek.

Ha szorzás helyett az összeadást tekintjük, $x \in K$ tetszőleges, akkor $nx$-et írunk. Figyelem, $(n, x) \mapsto nx$, $x \in K$, $n \in \mathbb{Z}$ nem művelet, hanem ismételt összeadással van definiálva! (Ha $K = \mathbb{R}$, akkor $nx$-nek két értelme is van; szerencsére a kettő megegyezik.) A fenti összefüggések ezzel a jelöléssel $(m+n)x = mx + nx$, $m(nx) = (mn)x$ és $n(x+y) = nx + ny$ minden $m, n \in \mathbb{Z}$, $x, y \in K$ esetén.

**3.2.43. Racionális számok.** Az egész számok körében a nem nulla elemek közül csak 1-nek és −1-nek van multiplikatív inverze, másként szólva, az osztás általában nem végezhető el. Ez indokolja a racionális számok bevezetését. A

$$\mathbb{Q} = \{m/n \in \mathbb{R} \colon m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$$

halmaz elemeit *racionális szám*oknak nevezzük; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ elemeit *irracionális szám*oknak szokás nevezni. A racionális számok rendezett testet alkotnak: $0 = 0/1 \in \mathbb{Q}$, ha $m/n \in \mathbb{Q}$ és $m'/n' \in \mathbb{Q}$, akkor $(-m)/n = -m/n \in \mathbb{Q}$, $m/n + m'/n' = (mn' + m'n)/(nn') \in \mathbb{Q}$ és $(m/n)(m'/n') = (mm')/(nn') \in \mathbb{Q}$, $1 = 1/1 \in \mathbb{Q}$, valamint ha $0 \neq m/n$, akkor $m \neq 0$, így $1/(m/n) = n/m \in \mathbb{Q}$.

**3.2.44. Arkhimédészi tulajdonság.** Egy $F$ rendezett testet *arkhimédészi tulajdonság*únak nevezünk, ha $x, y \in F$, $x > 0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx \geq y$.

**3.2.45. Állítás.** *Egy felső határ tulajdonságú test arkhimédészi tulajdonságú is.*

**Bizonyítás.** Ellenkező esetben ugyanis valamely $F$ felső határ tulajdonságú testre és $x, y \in F$, $x > 0$-ra az $A = \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$ halmaznak az $y$ felső korlátja lenne. Legyen $z = \sup A$. Mivel $z - x < z$, a $z - x$ már nem felső korlát, így van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx > z - x$. De ebből $(n + 1)x > z$. Ez ellentmondás. □

**3.2.46. Egész rész, maradék.** Ha $x \in \mathbb{R}$, legyen $\lfloor x \rfloor$, az $x$ *alsó egész rész*e az a legnagyobb eleme $\mathbb{Z}$-nek, amely nem nagyobb, mint $x$ (szokásos az $[x]$ jelölés is), és legyen $\lceil x \rceil$, az $x$ *felső egész rész*e az a legkisebb eleme $\mathbb{Z}$-nek, amely nem kisebb, mint $x$: Hogy ezek léteznek, az nyilvánvaló, ha $x = 0$ (ekkor mindkettő nulla). Ha $x > 0$, az arkhimédészi rendezettségből és $\mathbb{N}$ jólrendezettségéből következik, hogy van az $x$-nél nagyobb vagy egyenlő természetes számok között egy legkisebb $n$ természetes szám, ez $\lceil x \rceil$. Nyilván $n > 0$. Ha $n = x$, akkor $\lfloor x \rfloor = n$, egyébként $\lfloor x \rfloor = n - 1$. Végül ha $x < 0$, akkor $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ és $\lfloor x \rfloor = -\lceil -x \rceil$.

Ha $x$ valós szám, akkor legyen $x \bmod 0 = x$ és $x \bmod y = x - \lfloor x/y \rfloor \cdot y$, ha $0 \neq y \in \mathbb{R}$. Nyilván ha $y > 0$, akkor $0 \leq x \bmod y < y$, ha pedig $y < 0$, akkor $y < x \bmod y \leq 0$. Megjegyezzük, hogy ha $y \neq 0$, akkor $x = \lfloor x/y \rfloor \cdot y + x \bmod y$ az egyetlen $x = qy + r$ alakú előállítása $x$-nek, amelyben $q \in \mathbb{Z}$ és $0 \leq r < y$, ha $y > 0$ és $y < r \leq 0$, ha $y < 0$. A $q$ számot *hányados*nak, $r$ számot pedig *maradék*nak nevezzük az $x$ szám $y$-nal való maradékos osztásánál. Ha az $x$ egész szám 2-vel való maradékos osztásánál a maradék 0, akkor $x$-et *páros*nak, egyébként *páratlan*nak nevezzük. A páros és páratlan számok összegére és szorzatára vonatkozó szabályok azonnal következnek a maradékos osztás egyértelműségéből.

**3.2.47. Tétel.** *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ akkor van olyan $r \in \mathbb{Q}$, amelyre $a < r < b$.*

**Bizonyítás.** Mivel $b - a > 0$, van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $n(b - a) > 1$. Legyen $m = \lfloor na \rfloor + 1$. Így $m$ olyan egész, amelyre $m - 1 \leq na < m$. Innen $na < m \leq 1 + na < nb$, és mivel $n > 0$, azt kapjuk, hogy $a < m/n < b$. □

**3.2.48. Tétel: gyökvonás.** *Minden $x \geq 0$ valós számhoz és $n \in \mathbb{N}^+$ természetes számhoz pontosan egy olyan $y \geq 0$ valós szám található, amelyre $y^n = x$.*

Az $y$ számot az $x$ szám $n$-edik *gyök*ének nevezzük és $\sqrt[n]{x}$-szel ($n = 2$ esetén $\sqrt{x}$-szel is) vagy $x^{1/n}$-nel jelöljük.

⋆ **Bizonyítás.** Világos, hogy legfeljebb egy ilyen $y$ létezik, hiszen $y_1 < y_2$ esetén $y_1^n < y_2^n$. Ha $x = 0$, akkor $y = 0$. Legyen $E$ azoknak a $t$ pozitív valós számoknak a halmaza, amelyekre $t^n < x$. Ha $t = x/(1+x)$, akkor $0 < t < 1$, így $t^n \leq t < x$, így $E$ nem üres. Ha $t > 1+x$, akkor $t^n \geq t > 1+x$, így $1+x$ az $E$ felső korlátja. Legyen $y = \sup(E)$. Meg fogjuk mutatni, hogy $y^n = x$. A bizonyítás indirekt: megmutatjuk, hogy az $y^n < x$ és $y^n > x$ egyenlőtlenségek mindegyike ellentmondásra vezet.

A

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})$$

azonosság alapján $b^n - a^n \leq (b-a)nb^{n-1}$, ha $0 < a < b$.

Tegyük fel, hogy $y^n < x$. Válasszunk olyan $h$ számot, amelyre $0 < h < 1$ és

$$h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

Legyen $a = y$, $b = y + h$. Ekkor

$$(y+h)^n - y^n \leq hn(y+h)^{n-1} \leq hn(y+1)^{n-1} < x - y^n,$$

így $(y+h)^n < x$, és ezért $y + h \in E$. Ez ellentmond $y$ felső határ voltának.

Tegyük fel, hogy $y^n > x$. Legyen

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}.$$

Ekkor $0 < k < y$. Ha $t \geq y - k$, akkor

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n \leq kny^{n-1} = y^n - x,$$

így $t^n \geq x$, és $t \notin E$. Így $y - k$ az $E$ egy felső korlátja. Ez ellentmond $y$ felső határ voltának.

**3.2.49. Következmény.** *Ha $a$ és $b$ nemnegatív valós számok és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.*

**Bizonyítás.** Legyen $\alpha = \sqrt[n]{a}$ és $\beta = \sqrt[n]{b}$. Ekkor $(\alpha\beta)^n = ab$, így az egyértelműségből következik az állítás. □

⋆ **3.2.50. Állítás.** *Nincs olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2.*

**Bizonyítás.** Ha lenne, akkor felírható lenne $m/n$ alakban, ahol $m, n \in \mathbb{N}^+$. Válasszuk azt a felírást, amelyre a számláló minimális. Mivel $m^2 = 2n^2$, $m$ páros kell legyen. Legyen $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $4k^2 = 2n^2$, ahonnan $2k^2 = n^2$. Innen $n$ is páros. Ez ellentmond annak, hogy a számláló minimális. □

⋆ **3.2.51. Állítás.** *A racionális számok rendezett teste arkhimédészi tulajdonságú, de nem felső határ tulajdonságú.*

**Bizonyítás.** Legyen $x = i/j > 0$, $i, j \in \mathbb{N}^+$. Ha $y \leq 0$, akkor $n = 0$ választással, ha pedig $y = k/m$, $k, m \in \mathbb{N}^+$, akkor $n \geq kj$ választással $nx \geq y$, így kapjuk, hogy $\mathbb{Q}$ arkhimédészi tulajdonságú.

Legyen $A$ az összes olyan $r > 0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2 < 2$, és legyen $B$ az összes olyan $r > 0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2 > 2$. Legyen

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2}.$$

Ekkor

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2}.$$

Ha $r \in A$, akkor $s > r$, de $s^2 < 2$, így $A$-nak nincs legnagyobb eleme. Ha $r \in B$, akkor $s < r$, de $s^2 > 2$, így $B$-nek nincs legkisebb eleme. Innen következik, hogy $A$-nak nincs legkisebb felső korlátja: ha lenne, nem lehetne $A$-ban, mert akkor $A$ legnagyobb eleme lenne, így $B$-ben kellene lennie, de $B$-nek nincs legkisebb eleme. □

**3.2.52. Bővített valós számok.** Legyen a *bővített valós számok* halmaza

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

és legyen $-\infty < x < +\infty$, ha $x \in \mathbb{R}$. Így kiterjesztve $\mathbb{R}$ rendezését, $\overline{\mathbb{R}}$ rendezett halmaz, és benne minden részhalmaznak létezik felső határa és alsó határa, például ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$-ben felülről nem korlátos, akkor $\sup(A) = +\infty$. Megjegyezzük, hogy $\sup(\emptyset) = -\infty$, $\inf(\emptyset) = +\infty$, de ha $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbb{R}}$, akkor $\inf(A) \leq \sup(A)$. Néha (pontatlanul) $+\infty$ helyett $\infty$-t írunk.

→ **3.2.53. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ racionális, $y \in \mathbb{R}$ pedig irracionális, akkor $x + y$ irracionális. Igaz-e, hogy irracionálisok összege irracionális?

→ **3.2.54. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$ racionális, $y \in \mathbb{R}$ pedig irracionális, akkor $xy$ irracionális. Igaz-e, hogy irracionálisok szorzata irracionális?

**3.2.55. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ akkor van köztük racionális és irracionális szám is.

**3.2.56. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\sqrt{n}$ vagy egész, vagy irracionális.

**3.2.57. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irracionális.

**3.2.58. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha $n, k \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[k]{n}$ vagy egész, vagy irracionális.

→ **3.2.59. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy $\{p + q\sqrt{2} \colon p, q \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel.

**3.2.60. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[3]{2} \notin \{p + q\sqrt{2} \colon p, q \in \mathbb{Q}\}$.

**3.2.61. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy $\{p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6} \colon p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel.

**3.2.62. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b$ pozitív racionális számok, akkor $\{p+q\sqrt{a}+r\sqrt{b}+s\sqrt{ab}\colon p, q, r, s \in \mathbb{Q}\}$ test a valós számok szokásos műveleteivel. Általánosítsuk az állítást akárhány pozitív racionális számra.

→ **3.2.63. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$\max\{a,b\} = \frac{|a-b|+a+b}{2}, \qquad \min\{a,b\} = \frac{-|a-b|+a+b}{2}.$$

→ **3.2.64. Feladat [0].** Határozzuk meg az alábbi maradékok értékét:

(1) $100 \bmod 3$;

(2) $100 \bmod 7$;

(3) $(-100) \bmod 7$;

(4) $(-100) \bmod 0$;

(5) $5 \bmod -3$;

(6) $18 \bmod -3$;

(7) $(-2) \bmod -3$;

(8) $1{,}1 \bmod 1$;

(9) $0{,}11 \bmod 0{,}1$;

(10) $0{,}11 \bmod -0{,}1$.

→ **3.2.65. Feladat [1].** Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

(1) $\lfloor x \rfloor < n$ pontosan akkor, ha $x < n$;

(2) $n \le \lfloor x \rfloor$ pontosan akkor, ha $n \le x$;

(3) $\lceil x \rceil \le n$ pontosan akkor, ha $x \le n$;

(4) $n < \lceil x \rceil$ pontosan akkor, ha $n < x$;

(5) $\lfloor x \rfloor = n$ pontosan akkor, ha $x - 1 < n \le x$;

(6) $\lfloor x \rfloor = n$ pontosan akkor, ha $n \le x < n + 1$;

(7) $\lceil x \rceil = n$ pontosan akkor, ha $x \le n < x + 1$;

(8) $\lceil x \rceil = n$ pontosan akkor, ha $n - 1 < x \le n$.

→ **3.2.66. Feladat [4].** Mely összefüggések teljesülnek az alábbiak közül bármely $x \in \mathbb{R}^+$-ra:

(1) $\lfloor\sqrt{\lfloor x \rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$;

(2) $\lceil\sqrt{\lceil x \rceil}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$;

(3) $\lceil\sqrt{\lfloor x \rfloor}\rceil = \lceil\sqrt{x}\rceil$.

**3.2.67. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$-re $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x \bmod 1 + y \bmod 1 < 1$. Teljesül-e hasonló összefüggés a felső egész részre?

**3.2.68. Feladat: öröknaptár [8].** Mutassuk meg, hogy ha $d$, $m$ és $y$ rendre a nap, hónap és év, akkor az 1582. évet követő időpontokra (azóta használatos a Gergely-naptár)

(1) $h = [y \bmod 4 = 0] - [y \bmod 100 = 0] + [y \bmod 400 = 0]$ szökőév esetén 1, egyébként nulla;

(2) $x = \big(d + \lfloor 2{,}6n - 0{,}2 \rfloor + r + \lfloor r/4 \rfloor + \lfloor h/4 \rfloor - 2h - (1+s)\lfloor n/11 \rfloor\big) \bmod 7$ vasárnap 0, hétfőn 1, stb., szombaton 6; itt $h = \lfloor y/100 \rfloor$ az év „évszázad-része", $r = y \bmod 100$ pedig a maradék része, $n = 1 + \big((m-3) \bmod 12\big)$ pedig a hónap „módosított sorszáma", márciust véve elsőnek (mert február a szökőhónap).

**3.2.69. Feladat [3].** Határozzuk meg az alábbi függvények értékkészletét és értelmezési tartományát:

(1) $x \mapsto 1/(\lfloor x \rfloor - 2)$;

(2) $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$;

(3) $x \mapsto x \bmod 1$.

**3.2.70. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számokra

$$|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x| - \big(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\big).$$

**3.2.71. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi feltételt kielégítő valós számok halmazát:

(1) $|x+1| < 1/4$;

(2) $|x-2| > 5$;

(3) $|x| > |x-1|$;

(4) $|2x-1| < |x-1|$;

(5) $|x+2| + |x-2| \leq 12$;

(6) $|x+2| - |x| > 1$;

(7) $\big||x+1| - |x-1|\big| < 1$;

(8) $\big|x(1-x)\big| < 3$;

(9) $(2x-5)/3 < 5 - (x+1)/4$;

(10) $3 + x \leq 4 + 2x$ és $5x - 3 > 4 + 2x$;

(11) $6/x > 3$;

(12) $5/(2x-1) > 7$;

(13) $(3x+5)/(7-3x) > 4$;

(14) $(2x-3)/(x-1) > (3x+5)/(x-1)$;

(15) $x^3 - x < 0$.

$\to$ **3.2.72. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi valós számhalmazok felső és alsó határát, minimumát és maximumát, ha létezik:

(1) $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}^+\}$;

(2) $\{(-1)^n/n \colon n \in \mathbb{N}^+\}$;

(3) $\{1/n + (-1)^n n \colon n \in \mathbb{N}^+\}$;

(4) $\{x \in \mathbb{Q}: -1 < x < 1\}$;

(5) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 2\}$;

(6) $\{(-1)^n/n: n \in \mathbb{N}^+\}$;

(7) $\{(-1)^n + 1/n: n \in \mathbb{N}^+\}$;

(8) $\{1/2^n + 1/2^m: n, m \in \mathbb{N}^+\}$.

→ **3.2.73. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi valós számhalmazok felső és alsó határát:

(1) $\mathbb{R}$;

(2) $\mathbb{Q}$;

(3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

(4) $]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$;

(5) $\{\sqrt{x}: x > 0, x^2 - 5x + 6 > 0\}$;

(6) $\{(-1)^n n: n \in \mathbb{N}^+\}$;

(7) $\{x + 1/x: x < 0$.

**3.2.74. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2,$$

ha $x \in \mathbb{R}$.

→ **3.2.75. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett test pontosan akkor felső határ tulajdonságú, ha alsó határ tulajdonságú, azaz ha minden nem üres alulról korlátos részhalmazának van legnagyobb eleme, továbbá $A$ pontosan akkor felülről korlátos, ha $-A$ alulról korlátos, és ekkor $\inf(-A) = -\sup A$, valamint ha értelmezve van $\max A$, akkor $\min(-A)$ is és $\min(-A) = -\max A$.

**3.2.76. Feladat [4].** Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres halmazok. Mit tudunk mondani $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A \cup B)$ és $\sup(A \cap B)$ kapcsolatáról?

**3.2.77. Feladat [4].** Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres halmazok. Mutassuk meg, hogy $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ és $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

**3.2.78. Feladat [4].** Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}$ nem üres halmazok. Mit tudunk mondani $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$, $\inf B$ és $\sup(AB)$, $\inf(AB)$ kapcsolatáról? És ha feltesszük, hogy $A, B \subset \mathbb{R}^+$?

**3.2.79. Feladat [4].** Legyen $A \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit tudunk mondani $\sup A$, $\inf A$ és $\sup(\lambda A)$, $\inf(\lambda A)$, $\sup(1/A)$, $\inf(1/A)$ kapcsolatáról?

**3.2.80. Feladat [4].** Legyen $X$ nem üres halmaz, $f, g: X \to \mathbb{R}$ függvények. Mutassuk meg, hogy ha $f(X)$ és $g(X)$ felülről korlátosak, akkor $f+g$ értékkészlete is felülről korlátos, és $\sup f(X) + \sup g(X) \geq \sup(f+g)(X)$, valamint ha $f(X)$ és $g(X)$ alulról korlátosak, akkor $f+g$ értékkészlete is alulról korlátos, és $\inf f(X) + \inf g(X) \leq \inf(f+g)(X)$. Mutassunk példát, amikor nem teljesül egyenlőség.

**3.2.81. Feladat [4].** Legyen $X$ nem üres halmaz, $f, g\colon X \to \mathbb{R}^+$ függvények. Mutassuk meg, hogy $\inf f(X) \inf g(X) \leq \inf(fg)(X)$, és $\sup f(X) \sup g(X) \geq \sup(fg)(X)$. Mutassunk példát, amikor nem teljesül egyenlőség.

**3.2.82. Feladat [6].** Legyen $X$ nem üres halmaz, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ függvények, $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit tudunk mondani $\inf f(X)$, $\inf g(X)$, $\sup f(X)$ és $\sup g(X)$ valamint az $\inf(fg)(X)$, $\sup(fg)(X)$, $\inf(1/g)(X)$, $\sup(1/g)(X)$, $\inf(\lambda g)(X)$ és $\sup(\lambda g)(X)$ kapcsolatáról?

**3.2.83. Feladat [4].** Legyen $A_i$, $i \in I$ az $\mathbb{R}$ felülről korlátos, nem üres részhalmazainak egy nem üres családja. Mutassuk meg, hogy $\cup_{i\in I} A_i$ pontosan akkor felülről korlátos, ha a $B = \{\sup A_i\colon i \in I$ halmaz felülről korlátos, és ekkor $\sup A = \sup B$.

**3.2.84. Feladat [6].** Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, és

$$H_r = \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) > r\} \cap \{x \in \mathbb{R}\colon g(x) < r\}, \quad \text{ha} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Mutassuk meg, hogy $\{x \in \mathbb{R}\colon f(x) > g(x)\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}} H_r$.

## 3.3 Megszámlálható halmazok

**3.3.1. Halmazok ekvivalenciája.** Az $X$ és $Y$ halmazokat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha létezik $X$-et $Y$-ra leképező kölcsönösen egyértelmű leképezés. Jelölése: $X \sim Y$.

**3.3.2. Állítás.** *Legyenek $X$, $Y$ és $Z$ halmazok . Ekkor*

(1) $X \sim X$ (reflexivitás)*;*

(2) *ha $X \sim Y$, akkor $Y \sim X$* (szimmetria)*;*

(3) *ha $X \sim Y$ és $Y \sim Z$, akkor $X \sim Z$* (tranzitivitás)*.* □

**3.3.3. Megjegyzés.** Ha $f$ az $X$-et $X'$-re képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, $g$ pedig $Y$-t $Y'$-re leképező kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor az

$$(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés $X \times Y$-t $X' \times Y'$-re képezi le, így ezek ekvivalensek. Egy $h \subset X \times Y$ reláció képe ennél a leképezésnél a $h' = g \circ h \circ f^{-1} \subset X' \times Y'$ reláció. A $h \mapsto h'$ leképezés függvényt függvénybe, kölcsönösen egyértelmű leképezést kölcsönösen egyértelmű leképezésbe, $Y$-ra való leképezést $Y'$-re való leképezésbe visz, speciálisan $Y^X$ és ${Y'}^{X'}$ ekvivalensek.

**3.3.4. Tétel.** *Bármely $n$ természetes számra $\{1, 2, \ldots, n\}$ bármely valódi részhalmaza ekvivalens $\{1, 2, \ldots, m\}$-mel valamely $m < n$ természetes számra.*

⋆ **Bizonyítás.** Teljes indukcióval: 0-ra nyilván igaz, mert az üres halmaznak nincs valódi részhalmaza. Ha $n$-re teljesül az állítás, és $A \subsetneq \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, akkor az $A$ része $\{1, 2, \ldots, n\}$ esetben az állítás nyilván teljesül. Ha $n + 1 \in A$, akkor van olyan $k < n + 1$ természetes szám, amelyre $k \notin A$. Definiáljuk az $f$ függvényt úgy, hogy $f(i)$ legyen $i$, ha $i \in A$, $i \neq n+1$, és legyen $f(n+1) = k$. Az $f$ függvény kölcsönösen egyértelmű leképezése $A$-nak $\{1, 2, \ldots, n\}$ valamely részhalmazára. Ha $f$ értékkészlete $\{1, 2, \ldots, n\}$, akkor $m = n$ választható. Ha $f$ értékkészlete valódi részhalmaza $\{1, 2, \ldots, n\}$-nek, akkor az indukciós feltevés használható. □

**3.3.5. Tétel.** *Ha $n$ természetes szám, akkor nem létezik ekvivalencia $\{1, 2, \ldots, n\}$ és egy valódi részhalmaza között.*

Megjegyezzük, hogy $\mathbb{N}$-re ez nem igaz: $n \mapsto n^+$ ekvivalencia $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}^+$ között.

$\star$ **Bizonyítás.** Teljes indukcióval bizonyítunk: 0-ra az állítás világos. Tegyük fel, hogy $n$-re teljesül, de létezik egy $f$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\{1, 2, \ldots, n+1\}$-nek egy $A$ valódi részhalmazára. Ha $n + 1 \notin A$, akkor $f$ megszorítása $\{1, 2, \ldots, n\}$-re kölcsönösen egyértelmű leképezése $\{1, 2, \ldots, n\}$-nek egy valódi részhalmazára, mivel $f(n+1)$ nem lesz az értékkészletben, ami ellentmond az indukciós feltevésnek. Ha $n + 1 \in A$, akkor viszont úgy kapjuk $\{1, 2, \ldots, n\}$ és $A \setminus \{n+1\}$ egy ekvivalenciáját, hogy a $(k, n+1)$ és az $(n + 1, l)$ párokat kihagyjuk a leképezésből, és helyettük a $(k, l)$ párt vesszük be, hacsak nem $k = l = n + 1$. Ez megint ellentmond az indukciós feltevésnek. $\square$

**3.3.6. Véges és végtelen halmazok.** Egy $X$ halmazt *véges*nek nevezünk, ha valamely $n$ természetes számra ekvivalens a $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal, egyébként *végtelen*nek nevezzük.

Egy halmaz legfeljebb egy $n$-re lehet ekvivalens az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal, mert ha $\{1, 2, \ldots, m\}$-mel is ekvivalens lenne, akkor $m < n$ vagy $n < m$ miatt $\mathbb{N}^+$ egy kezdőszelete ekvivalens lenne egy valódi részhalmazával, ami az előző tétel szerint lehetetlen.

Azt az egyértelműen meghatározott természetes számot, amelyre egy adott $X$ véges halmaz ekvivalens $\{1, 2, \ldots, n\}$-nel, az $X$ halmaz *elemei számá*nak, vagy számosságának nevezzük, és $\natural(A)$-val vagy (a „cardinal number” rövidítéseként) $\mathrm{card}(A)$-val jelöljük. Az $|A|$ és $\overline{\overline{A}}$ jelölés is szokásos.

Például $\natural(\emptyset) = 0$, bármely $a$-ra $\natural\{a\} = 1$, bármely $a, b$-re, ha $a \neq b$ akkor $\natural\{a, b\} = 2$. Azt, hogy a természetes számokat nullával kezdtük, az is indokolja, hogy így a természetes számok a véges halmazok számosságai.

Az előző tételből az is következik, hogy véges halmaz sohasem ekvivalens egy valódi részhalmazával. Mivel ez $\mathbb{N}$-re nem teljesül, $\mathbb{N}$ végtelen halmaz.

**3.3.7. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ halmazok. Ekkor*

(1) *ha $X$ véges és $Y \subset X$, akkor $Y$ is véges és $\natural(Y) \leq \natural(X)$;*

(2) *ha $X$ véges és $Y \subsetneq X$, akkor $\natural(Y) < \natural(X)$;*

(3) *ha $X$ és $Y$ végesek és diszjunktak, akkor $X \cup Y$ is véges és $\natural(X \cup Y) = \natural(X) + \natural(Y)$;*

(4) *ha $X$ és $Y$ végesek, akkor $\natural(X \cup Y) + \natural(X \cap Y) = \natural(X) + \natural(Y)$;*

(5) *ha $X$ és $Y$ végesek, akkor $X \times Y$ is véges, és $\natural(X \times Y) = \natural(X) \cdot \natural(Y)$;*

(6) *ha $X$ és $Y$ végesek, akkor $X^Y$ is véges, és $\natural(X^Y) = \natural(X)^{\natural(Y)}$;*

(7) *ha $X$ véges halmaz, akkor $\wp(X)$ is véges, és $\natural(\wp(X)) = 2^{\natural(X)}$;*

(8) *ha $X$ véges és az $f$ függvény $X$-et $Y$-ra képezi, akkor $Y$ is véges, $\natural(Y) \leq \natural(X)$, és ha $f$ nem kölcsönösen egyértelmű, akkor $\natural(Y) < \natural(X)$.*

$\star$ **Bizonyítás.** (1) nyilvánvaló, ha $Y = X$, ha viszont $Y \subsetneq X$, akkor ekvivalens $\{1, 2, \ldots, \natural(X)\}$ egy valódi részhalmazával, amiről tudjuk, hogy ekvivalens $\{1, 2, \ldots, m\}$-mel valamely $m < n$-re. Ezzel (2)-t is beláttuk. (3) azon múlik, hogy

$$\{m + 1, m + 2, \ldots, m + n\}$$

ekvivalens az
$$\{1, 2, \dots, n\}$$
halmazzal. (3) szerint $\natural(X \cup Y) = \natural(X \setminus Y) + \natural(X \cap Y) + \natural(Y \setminus X)$; mindkét oldalhoz hozzáadva $\natural(X \cap Y)$-t és újra felhasználva (3)-at kapjuk (4)-et. (5) és (6) az $Y$ elemeinek száma szerinti teljes indukcióval következnek. (7) következik (6)-ból és $\wp(X)$-nek a karakterisztikus függvények halmazával való ekvivalenciájából. (8) bizonyításához feltehetjük, hogy
$$X = \{1, 2, \dots, \natural(X)\}.$$
Minden $y \in Y$-ra legyen $g(y)$ az $f^{-1}(y)$ halmaz legkisebb eleme. Ekkor $g$ az $Y$-t kölcsönösen egyértelműen képezi le $X$ egy részhalmazára és ha $f$ nem volt kölcsönösen egyértelmű, akkor ez a részhalmaz valódi. □

**3.3.8. Skatulya elv.** *Ha $X$ és $Y$ véges halmazok, és $\natural(X) > \natural(Y)$, akkor egy $f\colon X \to Y$ leképezés nem lehet kölcsönösen egyértelmű.*

**Bizonyítás.** Egyébként $\{1, 2, \dots, \natural(Y)\}$ egy részhalmaza, azaz $\natural(Y) < \natural(X)$ miatt $\{1, 2, \dots, \natural(X)\}$ egy valódi részhalmaza ekvivalens lenne $\{1, 2, \dots, \natural(X)\}$-nel. □

**3.3.9. Tétel.** *Rendezett halmaz bármely nem üres véges részhalmazának van maximális és minimális eleme.*

⋆ **Bizonyítás.** A részhalmaz elemeinek száma szerinti teljes indukcióval. Ha $A$ egyelemű, akkor nyilvánvaló. Ha $\natural(A) = n + 1$, legyen $a \in A$ és $A' = A \setminus \{a\}$. Ha $a$ nem nagyobb, mint az $A'$ halmaz $a'$ maximális eleme, akkor az $a'$ maximális elem, egyébként $a$ maximális elem. Minimális elemre a bizonyítás hasonló. □

→ **3.3.10. Feladat [0].** Hány szótárra van szükségünk az EU-ban, hogy bármely hivatalos nyelvről bármely hivatalos nyelvre közvetlenül fordíthassunk?

→ **3.3.11. Feladat [0].** Hány rendezése van egy $n$ elemű halmaznak?

→ **3.3.12. Feladat [0].** Hány $f\colon \{\uparrow, \downarrow\}^n \to \{\uparrow, \downarrow\}^m$ logikai függvény van?

→ **3.3.13. Feladat [1].** Hányféleképpen ültethetünk le $n$ embert egy kerek asztal mellé? Két ültetést megegyezőnek tekintünk, ha forgatással átvihetők egymásba.

→ **3.3.14. Feladat [1].** Egy postahivatalban 10 különböző képeslapot árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 12 képeslapot?

→ **3.3.15. Feladat [1].** Hányféleképpen helyezkedhet el 12 ember három szobában, ha az elsőben 2, a másodikban 6, a harmadikban pedig 4 fér el?

→ **3.3.16. Feladat [0].** Egy $n$ elemű halmazon hány binér reláció van? Ezekből hány reflexív, hány szimmetrikus és hány reflexív és szimmetrikus?

→ **3.3.17. Feladat [0].** Hányféleképpen választhatunk ki három különböző számot az $\{1, 2, \dots, 100\}$ halmazból úgy, hogy az összegük páros legyen?

→ **3.3.18. Feladat [7].** A két véges halmaz uniójára vonatkozó $\natural(A \cup B) = \natural(A) + \natural(B) - \natural(A \cap B)$ összefüggést általánosítsuk három illetve négy halmaz uniójára! Egy egyetem 10000 hallgatójából 2521 házas, 6471 férfi, 3115 idősebb 21 évnél, 1915 nős férfi, 1871 házas személy idősebb 21 évnél, és 1302 nős férfi idősebb 21 évnél. Lehetséges ez?

→ **3.3.19. Feladat [0].** Egy esemény *esély*én a bekövetkezését eredményező esetek számának és az összes esetek számának hányadosát fogjuk érteni. Lottóban mennyi az 5, 4, 3, 2, 1, illetve 0 találat esélye?

→ **3.3.20. Feladat [5].** Bridzsben hány leosztás van? Mennyi az esélye, hogy mindenkinél van ász? Hány lehetséges „kéz” van? Mennyi az esélye, hogy egy adott kézben van minden ász? Mennyi az esélye, hogy egy adott kézben egy színből nyolc lap van? Mennyi az esélye, hogy egy adott kéz 4-4-4-1 „elosztású”?

→ **3.3.21. Feladat: születésnap-paradoxon [3].** Egy tanár fogadást ajánl fel egy 30 fős osztálynak, hogy van két diák, akinek ugyanakkor van a születésnapja. Becsüljük meg annak esélyét, hogy veszít.

→ **3.3.22. Feladat [5].** Mennyi az esélye, hogy ötlapos pókerben osztás után a kezünkben royalflös, színsor, póker, full, flös, sor, drill, két pár, egy pár, illetve magas lap van? Mi a helyzet, ha magyar kártyával játszunk?

**3.3.23. Megszámlálható halmazok.** Egy halmazt *megszámlálhatóan végtelen*nek nevezünk, ha ekvivalens $\mathbb{N}$-nel. Ha egy halmaz véges vagy megszámlálhatóan végtelen, akkor *megszámlálható*nak nevezzük. (Vannak, akik megszámlálható alatt megszámlálhatóan végtelent értenek.)

**3.3.24. Tétel.** *Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza.*

**Bizonyítás.** Ha egy halmaznak van végtelen részhalmaza, akkor nem lehet véges, mert véges halmaz minden részhalmaza is véges. A másik irány bizonyításához az általános rekurziótétel felhasználásával az $X$ végtelen halmazból válasszunk ki egy különböző elemekből álló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatot. Ennek értékkészlete $X$ egy megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. $\square$

**3.3.25. Tétel.** *Egy megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható.*

**Bizonyítás.** Elég $\mathbb{N}$ részhalmazaira bizonyítani az állítást. Ha $X \subset \mathbb{N}$ felülről korlátos, akkor véges. Ha nem felülről korlátos, akkor az általános rekurziótételt felhasználva, legyen $x_n$ az $X \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ halmaz legkisebb eleme. Az így kapott sorozat szigorúan monoton növekedő és értékkészlete $X$. $\square$

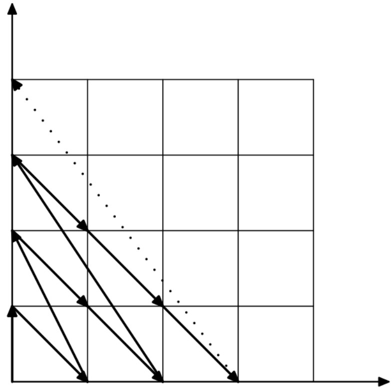
**3.3.26. Tétel.** *Egy $X$ nem üres halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik $\mathbb{N}$-et $X$-re képező leképezés.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ az $\mathbb{N}$-et $X$-re képezi, akkor legyen $g(x)$ az $f^{-1}(x)$ legkisebb eleme. Mivel $g$ kölcsönösen egyértelmű, $X$ ekvivalens $\mathbb{N}$ egy részhalmazával, így az előző tétel szerint megszámlálható. A megfordítás nyilvánvaló, ha $X$ megszámlálható végtelen, ha pedig $X$ véges, $X = \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor legyen $f_k = f_0$, ha $k > n$. $\square$

**3.3.27. Tétel.** *Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz megszámlálható végtelen.*

**Bizonyítás.** Ha $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $k = m + n$, akkor legyen

$$f(m, n) = \frac{k(k+1)}{2} + m.$$



**3.3.1 ábra:** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sorozatbarendezése.

Az $f$ kölcsönösen egyértelmű és $\mathbb{N}$-re képez. □

Az $f$ függvény „működése” a 3.3.1 ábrán tanulmányozható.

**3.3.28. Tétel.** *Megszámlálható halmazok megszámlálható családjának az egyesítése megszámlálható.*

**Bizonyítás.** Legyen $I$ megszámlálható, és $X_i$ megszámlálható minden $i \in I$-re. Nyilván feltehetjük, hogy $I$ és minden $X_i$ nem üres. Válasszunk olyan $f_i$, $i \in I$ és $g$ függvényeket, amelyek $\mathbb{N}$-et $X_i$-re, illetve $I$-re képezik le. Legyen $h(m, n) = f_{g(m)}(n)$. Ekkor $h$ az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-et $X = \cup_{i \in I} X_i$-re képezi le, így az előző tételből következik az állítás. □

**3.3.29. Következmény.** *A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\cup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ halmazok megszámlálhatóak.*

**Bizonyítás.** Mivel $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$, $\mathbb{Q} = \cup_{n=1}^{\infty} \{m/n \colon m \in \mathbb{Z}\}$, az előző tételből kapjuk az első két állítást. A harmadik állítás is az előző tételből következik indukcióval. A negyedik állítás a harmadik következménye. □

**3.3.30. Tétel.** *Ha $X$ megszámlálható, $Y$ pedig végtelen halmaz, akkor $X \cup Y \sim Y$.*

**Bizonyítás.** Az $X$-et helyettesítve $X \setminus Y$-nal, feltehetjük, hogy $X$ és $Y$ diszjunktak. Legyen $Z$ megszámlálható végtelen részhalmaza $Y$-nak. Legyen $f$ egy $Z$-t $X \cup Z$-re képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, és legyen $g(x) = f(x)$, ha $x \in Z$ és $g(x) = x$, ha $x \in Y \setminus Z$. Ekkor $g$ az $Y$-t $X \cup Y$-ra képező kölcsönösen egyértelmű leképezés. □

**3.3.31. Következmény.** *Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával.*

**Bizonyítás.** Már láttuk, hogy véges halmaz nem lehet ekvivalens valódi részhalmazával. Ha $X$ végtelen, és $x \in X$, akkor $Y = X \setminus \{x\}$ sem lehet véges, és az előző tétel szerint ekvivalens $X$-szel. □

**3.3.32. Cantor tétele.** *A $\wp(\mathbb{N})$ halmaz nem megszámlálható.*

**Bizonyítás.** Világos, hogy $\wp(\mathbb{N})$ végtelen, hiszen az egyelemű részhalmazok egy megszámlálható végtelen részhalmazát adják. Nyilván $\wp(\mathbb{N})$ ekvivalens a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ halmazzal, azaz az összes 0–1 sorozatok halmazával, hiszen $\mathbb{N}$ minden részhalmazához hozzárendelhetjük annak $\mathbb{N}$-en értelmezett karakterisztikus függvényét. Tegyük fel, hogy $n \mapsto s_n$

egy kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{N}$-nek $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-be. Megmutatjuk, hogy nem képezhet $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$-re. Egy olyan $S \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatot, amely nem lép fel képként, a Cantor-féle átlós eljárással kaphatunk: legyen $S(n) = 1 - s_n(n)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. $\square$

→ **3.3.33. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy a véges hosszúságú magyar nyelvű szövegek halmaza megszámlálható.

→ **3.3.34. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy az egész számokból képezhető véges sorozatok halmaza megszámlálható.

**3.3.35. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}$ nem üres nyílt intervallumainak bármely páronként diszjunkt rendszere megszámlálható.

**3.3.36. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy a síkbeli nem üres nyílt körlapok bármely páronként diszjunkt rendszere megszámlálható.

° **3.3.37. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy az *algebrai számok* halmaza, azaz azon $z \in \mathbb{C}$ komplex számok halmaza, amelyekhez van olyan egész együtthatós nem azonosan nulla polinom, amelynek $z$ gyöke, megszámlálható. (A nem algebrai komplex számokat *transzcendens szám*oknak nevezzük.)

**3.3.38. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy egy halmaz pontosan akkor véges, ha részhalmazai bármely nem üres rendszerében van maximális elem.

°⋆ **3.3.39. Feladat [11].** A síkon mászik egy hangya, minden egész másodpercben egy rácspontban van, a következő másodpercben pedig egy szomszédos rácspontban; irányt nem változtat. A síkon ugrál egy vak bolha, minden egész másodpercben egy rácspontból átugrik egy tetszőleges másik rácspontba. Nem tudja, hogy a hangya honnan indult és merre tart. Adjunk számára stratégiát, amellyel előbb-utóbb letapossa a hangyát!

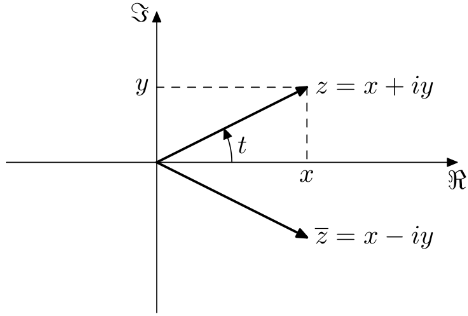
## 3.4 Komplex számok

A görög matematikán, amelynek szabatossága a tudományok mintájául szolgált (Eukleidész műve 2000 évig volt tankönyv!), először a reneszánsz számolóművészeinek sikerült túllépnie, amikor Scipione del Ferro és Nicolo Fontana „*Tartaglia*” harmadfokú egyenleteket oldottak meg. Felfedezéseiket Gerolamo Cardano és tanítványa, Lodovico Ferro fejlesztették tovább, megtalálva az általános harmad- és negyedfokú egyenletek megoldásának módját. Éppen olyan esetekben azonban, amikor három különböző valós gyöke van egy harmadfokú egyenletnek, a Cardano-képletben a négyzetgyökjel alatt negatív szám szerepelt, és így nem adta meg a megoldást: ez a „casus irreducibilis”. Észrevették azonban, hogy negatív számok négyzetgyökeire is bevezethetők megfelelő számolási szabályok. Fokozatosan tisztázódtak a „képzetes” számokkal való számolás szabályai, és a trigonometrikus függvényekkel való kapcsolat. A komplex számok fogalmát Carl Friedrich Gauss tisztázza véglegesen, és bebizonyítja az algebra alaptételét.

**3.4.1. Komplex számok.** A *komplex szám*ok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, azaz a valós számpárok halmaza, az

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y'), \quad \text{illetve} \quad (x,y)\cdot(x',y') = (xx' - y'y, y'x + yx')$$

összeadással, illetve szorzással mint műveletekkel. Egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{C}$ test a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0,0)$ pár, az $(x,y)$ pár additív inverze a $(-x,-y)$




**3.4.1 ábra:** komplex szám, valós és képzetes rész, konjugált, argumentum.

pár, egységelem az $(1,0)$ pár, és a nullelemtől különböző $(x,y)$ pár multiplikatív inverze az $(x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2))$ pár. Vegyük észre, hogy ha $x, x' \in \mathbb{R}$, akkor $(x,0)+(x',0) = (x+x',0)$, $(x,0)\cdot(x',0) = (xx',0)$, így az $x \mapsto (x,0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{C}$-be, így az összes $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$ alakú komplex számok halmazát azonosítjuk $\mathbb{R}$-rel.

Jelölje $i$ a $(0,1)$ komplex számot. (A villamosmérnökök ezt a számot $j$-vel szokták jelölni.) Vegyük észre, hogy $i^2 = -1$, az $i$ segítségével az $(x,y)$ komplex számot $x+iy$ alakban írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ha $z = x+iy \in \mathbb{C}$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $x$-et a $z$ *valós rész*ének, az $y$-t pedig a $z$ *képzetes rész*ének nevezzük. Jelölésük: $\Re(z)$ illetve $\Im(z)$ (vagy $\mathrm{Re}(z)$ illetve $\mathrm{Im}(z)$). A $z$ *konjugált*ja a $\overline{z} = x - iy$ komplex szám. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ha egy komplex szám valós része nulla, akkor *képzetes*nek nevezzük.

A definíció alapján azonnal következnek a $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$, $z + \overline{z} = 2\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2i\Im(z)$, $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ összefüggések.

Megjegyezzük, hogy nincs olyan rendezés, amellyel a komplex számok teste rendezett test lenne, mert rendezett testben $1 > 0$ és $-1 < 0$, de $\mathbb{C}$-ben $i^2 = -1$, ami ellentmond annak, hogy rendezett testben minden nem nulla elem négyzete pozitív.

**3.4.2. Példa.** A $z = 64/(\sqrt{3}+i)$ komplex szám algebrai alakja a nevező konjugáltjával való bővítéssel kapható:

$$z = \frac{64}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i} = \frac{64\cdot(\sqrt{3}-i)}{3+1} = 16\sqrt{3} - 16i.$$

A $z$ valós része $\Re(z) = 16\sqrt{3}$, képzetes része $\Im(z) = -16$, konjugáltja $16\sqrt{3} + 16i$.

**3.4.3. Komplex számok abszolút értéke.** A komplex számok a sík pontjainak, vagyis az origóból kiinduló vektoroknak is tekinthetők. A komplex számok összeadása megfelel a vektorok szokásos összeadásának. Egy komplex szám abszolút értéke ennek a vektornak a hossza: az $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ komplex szám *abszolút érték*e $\big|(x,y)\big| = \sqrt{x^2+y^2}$. Ezzel a jelöléssel $1/z = \overline{z}/|z|^2$, ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$. A valós számokra a szokásos abszolút értéket kapjuk vissza: $\big|(x,0)\big| = |x|$. Nyilván ha $z, w \in \mathbb{C}$, akkor $z\overline{z} = |z|^2$, $|0| = 0$ és $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$, $|\overline{z}| = |z|$, $|zw| = |z||w|$ (mert mindkét oldal négyzete ugyanaz), $\big|\Re(z)\big| \leq |z|$, $\big|\Im(z)\big| \leq |z|$ és $|z| \leq \big|\Re(z)\big| + \big|\Im(z)\big|$. Teljesül a $|z+w| \leq |z| + |w|$ *háromszög-egyenlőtlenség*;

valóban,

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}\\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}+w\overline{w} = |z|^2+2\Re(z\overline{w})+|w|^2\\ &\le |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2 = |z|^2+2|z||w|+|w|^2 = \big(|z|+|w|\big)^2,\end{aligned}$$

ahonnan négyzetgyökvonással következik az egyenlőtlenség. A háromszög-egyenlőtlenségből $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$ minden $z,w\in\mathbb{C}$-re; valóban egyrészt $|z|\le|z-w|+|w|$, ahonnan $|z|-|w|\le|z-w|$, másrészt $z$ és $w$ szerepét felcserélve $|w|-|z|\le|z-w|$.

Legyen $\operatorname{sgn}(0)=0$ és legyen $\operatorname{sgn}(z)=z/|z|$, ha $0\ne z\in\mathbb{C}$. Nyilván $\operatorname{sgn}(\overline{z})=\overline{\operatorname{sgn}(z)}$ és $\big|\operatorname{sgn}(z)\big|=1$, ha $z\ne0$. A valós számokra visszakapjuk az ott definiált sgn függvényt.

→ **3.4.4. Feladat [5].** Határozzuk meg a $z+w$, $z-w$, $zw$, $1/w$, $z/w$, $z^2\ \overline{z}$, $|z|$, $\Re(w)$, $\Im(w)$ értékeket, ha

(1) $z=1+i$, $w=3+4i$;

(2) $z=i$, $w=-5+2i$.

→ **3.4.5. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $z_1,z_2,\dots,z_n$ komplex számokra $|z_1+z_2+\dots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\cdots|z_n|$.

→ **3.4.6. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $z,w$ komplex számokra fennáll a *paralelogramma-azonosság*: $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$. Honnan eredhet a neve?

→ **3.4.7. Feladat [6].** Hozzuk algebrai alakra:

$$\frac{2}{(1-i)(3+i)},\quad \frac{1}{(3+4i)^2},\quad \frac{2+i}{i(-3+4i)},$$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)},\quad \frac{1}{i(3-2i)(1+i)},\quad \frac{i}{(1-i)(1-2i)(1+2i)}.$$

→ **3.4.8. Feladat [6].** Ha $z=1-5i$ és $w=3+4i$, akkor mennyi $z/w$, $\overline{z}/w$, $z/\overline{w}$, $\overline{z/w}$, $z/|w|$, $|z/w|$?

**3.4.9. Feladat [6].** Ha $z=1+i$ és $w=1-2i$, akkor mennyi $z-z/w$, $(z-1)/w$, $z^2-iz/w$, $z/(iw)$, $z/|w|$?

**3.4.10. Feladat [6].** Legyen $z_1=2+i$, $z_2=3-2i$ és $z_3=-1/2+\sqrt{3}i/2$. Mennyi $|3z_1-4z_2|+z_3\overline{z_3}$, $z_1^3+3z_1^2+4z_1-8$, $\big|(2z_2+z_1-5-i)/(2z_1-z_2+3-i)\big|$?

° **3.4.11. Komplex számok argumentuma és trigonometrikus alakja.** A komplex számokat origóból kiinduló vektoroknak tekintve, a vektor koordinátái felírhatók a vektor $r$ hossza és a vektornak az „$x$ tengely pozitív felével” bezárt $\varphi$ szöge, annak szinusza és koszinusza segítségével. Az $(r,\varphi)$ pár a *polár koordináták.* A trigonometrikus alaknak (a geometriára való hivatkozás nélkül történő) bevezetéséhez fel fogjuk használni a cos, sin függvények és a $\pi$ szám definícióját, és számos ezekre vonatkozó (a középiskolából ismert) összefüggést, amelyet később fogunk bizonyítani.

Ha $0\ne z\in\mathbb{C}$, akkor van olyan $t$ valós szám, amelyre $\operatorname{sgn}(z)=\cos t+i\sin t$. Ha ez az összefüggés fennáll $t$-re, akkor a $t+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ számokra is, és csak ezekre.

Nyilván $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, ez a komplex szám *trigonometrikus alak*ja. (Ha $z = 0$, akkor akármilyen $t \in \mathbb{R}$ választható.) Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\arg(z)$ az az egyetlen $t$ valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\operatorname{sgn}(z) = \cos t + i \sin t$; ez az egyetlen $t$ valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $z = |z|(\cos t + i \sin t)$. Nyilván ha $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, akkor $\overline{z} = |z|(\cos t - i \sin t) = |z|\big(\cos(-t) + i \sin(-t)\big)$, összhangban azzal a geometriai képpel, hogy $\overline{z}$ a $z$ vektor „$x$ tengelyre" történő tükrözésével kapható.

Legyen $z, w \in \mathbb{C}$, $z = |z|(\cos t + i \sin t)$ és $w = |w|(\cos s + i \sin s)$, ahol $t, s \in \mathbb{R}$. Ekkor $zw$ trigonometrikus alakja

$$\begin{aligned} zw &= |z| \cdot (\cos t + i \sin t) \cdot |w| \cdot (\cos s + i \sin s) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot (\cos t + i \sin t) \cdot (\cos s + i \sin s) \\ &= |zw|\big(\cos t \cos s - \sin t \sin s + i(\cos t \sin s + \cos s \sin t)\big) \\ &= |zw|\big(\cos(t+s) + i \sin(t+s)\big). \end{aligned}$$

Ezt az összefüggést *Moivre-azonosság*nak nevezzük. Figyelembe véve, hogy ha $w \neq 0$, akkor $1/w = \overline{w}/|w|^2$, ebből

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\big(\cos(t-s) + i \sin(t-s)\big).$$

Ha tehát $z, w$ nem nulla komplex számok, akkor $zw$ argumentuma $\arg(z) + \arg(w)$, ha ez nagyobb, mint $-\pi$, de nem nagyobb, mint $\pi$. Ha $\arg(z) + \arg(w) \leq -\pi$, akkor

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2\pi,$$

ha pedig $\arg(z) + \arg(w) > \pi$, akkor

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) - 2\pi.$$

Tehát a komplex számok szorzásának geometriai jelentése, hogy a hosszak összeszorzódnak, az „$x$ tengely pozitív felével" bezárt szögek pedig összeadódnak. (A komplex számok osztásánál az eredmény hossza a hosszak hányadosa, az „$x$ tengely pozitív felével" bezárt szögek pedig kivonódnak.)

Indukcióval azt kapjuk, hogy $z^n = |z|^n\big(\cos(nt) + i \sin(nt)\big)$, ha $n \in \mathbb{N}$; ha $z \neq 0$, akkor ez az összefüggés minden $n \in \mathbb{Z}$-re teljesül.

**3.4.12. Példa.** A $z = 16\sqrt{3} - 16i$ komplex szám trigonometrikus alakja, mivel $|z| = \sqrt{16^2 \cdot 3 + 16^2} = 32$,

$$z = 16\sqrt{3} - 16i = 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 32\big(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)\big).$$

° **3.4.13. Gyökvonás komplex számból.** Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és vizsgáljuk a $z \mapsto z^n$, $z \in \mathbb{C}$ hatványozás inverzét. Ha $n = 1$, akkor a $z \mapsto z$ leképezés $\mathbb{1}_{\mathbb{C}}$, az identikus leképezés, és inverze saját maga. Ha $n > 1$, $z, w \in \mathbb{C}$ és $z^n = w$, akkor nyilván (indukcióval) $|w| = |z|^n$. Ebből $w = 0$ esetén $z = 0$. Egyébként, ha $t = \arg(w)$, akkor a

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{t + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

különböző komplex számok, és csak ezek azok, amelyeknek $n$-edik hatványa $w$. Vegyük észre, hogy ha $n = 2$, akkor $z_1 = -z_0$. Így tehát $n > 1$ esetén $z \mapsto z^n$ inverze nem függvény, de persze $\mathbb{C}$-beli reláció. Néha mégis szokás az inverzet $\sqrt[n]{\ }$-kel jelölni. Ezzel a jelöléssel $\sqrt[n]{0} = \{0\}$ és $\sqrt[n]{w} = \{z_k : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$; ha $n = 2$, akkor $\sqrt{w} = \{z_0, -z_0\}$. Mivel nagy a veszélye az (egyértelműVé tett) valós gyökvonással való összetévesztésnek, ezt a jelölést a továbbiakban általában nem használjuk.

Speciálisan, ha $w = 1$, akkor az $\varepsilon^n = 1$ feltételnek az

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

komplex számok tesznek eleget. Ezeket $n$-edik *komplex egységgyök*öknek nevezzük. Bizonyos $n$-edik egységgyökök hatványaiként az összes többi előáll (például $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$), ezeket $n$-edik *primitív egységgyök*öknek nevezzük. Az $\varepsilon_0 = 1$ nyilván nem $n$-edik primitív egységgyök, ha $n \neq 1$.

Ha $z^n = w$, akkor $z$ és az $n$-edik komplex egységgyökök segítségével megkaphatjuk az összes komplex számot, amelyek $n$-edik hatványa $w$, ezek $z\varepsilon_0, z\varepsilon_1, \ldots z\varepsilon_n$. Innen következik, hogy ha $n > 1$, akkor az összes olyan komplex számok összege, amelyek $n$-edik hatványa $w$, nulla. Valóban,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z\varepsilon_k = \sum_{k=0}^{n-1} z\varepsilon_1^k = z\frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} = z\frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0.$$

(Geometriailag, $2\pi/n$-nel elforgatva a gyököket, az összegük is elfordul $2\pi/n$-nel. Mivel a gyökök halmaza nem változik, $n > 1$ esetén ez csak úgy lehetséges, hogy az összeg nulla.)

Ugyanúgy, mint a valós esetben, beláthatjuk hogy ha $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, akkor $az^2 + bz + c = 0$ pontosan akkor teljesül, ha

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

ahol $d \neq 0$ esetén $t = \arg(d)$ jelöléssel $\sqrt{d} = \sqrt{|d|}(\cos(t/2) + i\sin(t/2))$.

**3.4.14. Példa.** A $w = 16\sqrt{3} - 16i$ komplex szám ötödik gyökei, mivel a trigonometrikus alakja $w = 32(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6))$, a

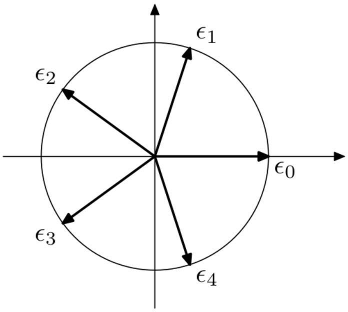
$$z_k = 2(\cos(-\pi/30 + 2k\pi/5) + i\sin(-\pi/30 + 2k\pi/5)), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

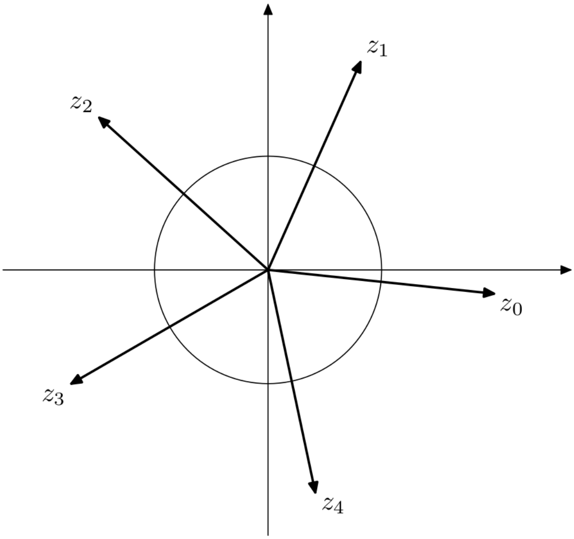
komplex számok.

**3.4.15. Bővített komplex számok.** A *bővített komplex számok* halmaza

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

$\to$ **3.4.16. Feladat [2].** Állítsuk elő trigonometrikus alakban az $i$, $\bar{i}$, $1+i$, $1+i\sqrt{3}$ és $\sqrt{3} - i$ komplex számokat.




**3.4.2 ábra:** ötödik egységgyökök és $16\sqrt{3} - 16i$ ötödik gyökei.

$\rightarrow$ **3.4.17. Feladat [2].** Határozzzuk meg $i$ és $-1+i$ összes harmadik gyökét, valamint 64 és $-64$ összes hatodik gyökét.

$\rightarrow$ **3.4.18. Feladat [6].** Legyen $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy ha

$$x = \sqrt{\frac{|w| + u}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{|w| - u}{2}},$$

akkor $z = x + iy$-ra $v \geq 0$ esetén $z^2 = w$, ha pedig $v \leq 0$, akkor $\overline{z}^2 = w$.

**3.4.19. Feladat [4].** Számítsuk ki az $i$, $\overline{i}$, $3 + 4i$ és $-7 + 24i$ komplex számok négyzetgyökeit.

**3.4.20. Feladat [0].** Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy két komplex szám összege, illetve szorzata valós legyen?

**3.4.21. Feladat [4].** Adjuk meg az alábbi komplex számokat algebrai alakban:

(1)
$$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2};$$

(2)
$$\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1};$$

(3)
$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7};$$

(4)
$$(1+i)^{52};$$

(5)
$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

**3.4.22. Feladat [3].** Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket, ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ és $\omega = -1/2 + i\sqrt{3}/2$:

(1) $(a\omega + b\omega^2)(a\omega^2 + b\omega)$;

(2) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$;

(3) $(a+b\omega+c\omega^2)^3 + (a+b\omega^2+c\omega)^3$.

→ **3.4.23. Feladat [4].** Határozzuk meg azokat a komplex számokat, amelyekre

(1) $\overline{z} = z^2$;

(2) $\overline{z} = z^3$;

(3) $\overline{z} = z^n$ egy adott $n \in \mathbb{N}^+$-ra.

**3.4.24. Feladat [8].** Polár koordinátára áttérve, ábrázoljuk azon $(x, y)$ valós számpárok síkbeli halmazát, amelyek eleget tesznek a megadott összefüggésnek:

(1) $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ (*Bernoulli lemniszkátája*);

(2) $x^4 + y^4 = 2xy$;

(3) $(x^2+y^2-6x)^2 = x^2+y^2$;

(4) $(x^2+y^2-4x)^2 = 16(x^2+y^2)$;

(5) $x^4+y^4 = 8xy^2$;

(6) $x^4+y^4 = x^2+y^2$;

(7) $(x^2+y^2)^2 = 27x^2y^2$;

(8) $(x^2+y^2)^2 = xy$.

**3.4.25. Feladat [8].** Ábrázoljuk az alábbi, $(r, \varphi)$ polárkoordinátákban megadott síkbeli halmazokat:

(1) $r = \varphi$ (*arkhimédészi spirális*);

(2) $r = \pi/\varphi$ (*hiperbolikus spirális*);

(3) $r = \varphi/(1+\varphi)$;

(4) $r = 2^{\varphi/(2\pi)}$ (*logaritmikus spirális*);

(5) $r = 2(1+\cos\varphi)$ (*kardioid*);

(6) $r = \sin 3\varphi$ (*háromlevelű rozetta*);

(7) $r^2 = \cos 2\varphi$ (*Bernoulli lemniszkátája*).

→ **3.4.26. Feladat [4].** Ábrázoljuk a komplex számsíkon az alábbi feltételt kielégítő komplex számok halmazát:

(1) $|z - i| < 1$;

(2) $2 < |z| \leq 3$;

(3) $|z-2-i|<|z|$;

(4) $|z-1|<1$ és $\Re(z)>0$;

(5) $|z+i|>2$ és $\Im(z)<2$;

(6) $|z-1|=2|z-2+i|$.

→ **3.4.27. Feladat [8].** Az alábbi relációkra határozzuk meg értelmezési tartományt, értékkészletet, döntsük el, hogy függvény-e, és hogy az inverze függvény-e.

(1) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon |z-1|=|w|\}$;

(2) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon z^2=w\}$;

(3) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon z=w^2\}$;

(4) $\{(z,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\colon \Re(z)=y\}$;

(5) $\{(z,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\colon |z|+y=0\}$;

(6) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon \Re(z)=\Im(w)\}$;

(7) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon w(z^2-1)=z\}$;

(8) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon w=|z|\}$;

(9) $\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\colon w(z-1)=z\}$.

→ **3.4.28. Feladat [5].** Határozzuk meg az $f\circ g$ függvényt, ha

(1) $g(z)=\operatorname{sgn}(z)$, ha $z\in\mathbb{C}$ és $f(x)=1/(x^2-1)$, ha $x\in\mathbb{R}$;

(2) $g(z)=z^2$, ha $z\in\mathbb{C}$ és $f(x)=1/(x+1)$, ha $x\in\mathbb{R}$;

(3) $g(z)=\Re(z)$, ha $z\in\mathbb{C}$ és $f(x)=x/(x^2-1)$, ha $x\in\mathbb{R}$;

(4) $g(x)=|x|$, ha $x\in\mathbb{R}$ és $f(z)=iz$, ha $z\in\mathbb{C}$.

→ **3.4.29. Feladat [5].** Legyen $f(x)=1/x$, ha $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, és $g(x)=x^2$, $h(x)=x+|x|$, ha $x\in\mathbb{C}$. Határozzuk meg az alábbi függvényeket:

(1) $f+g$;

(2) $f\circ g$;

(3) $g\circ f$;

(4) $\Re(h)$;

(5) $\overline{h}$;

(6) $\Im(g)+\Re(h)$;

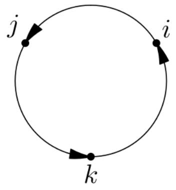
(7) $|g|$;

(8) $h^2$.

**3.4.30. Feladat [3].** Legyen $f(z)=z^2+1$, ha $z\in\mathbb{C}$ és $g(x)=x+2$, ha $x\in\mathbb{R}$. Határozzuk meg $(1/g)\circ\Im(\overline{f})$ értelmezési tartományát!

**3.4.31. Feladat [3].** Legyen $f(z)=1/(z^2-3z+2)$, ha $z\in\mathbb{C}$ és $g(x)=x^3+i2^{\cos x}$, ha $x\in\mathbb{R}$. Határozzuk meg a $f\circ\big(\Re(g)\big)^{-1}$ függvényt!

**3.4.32. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a koordinátánkénti összeadással és szorzással kommutatív egységelemes gyűrű, de nem test!




**3.4.3 ábra:** kvaterniók szorzása.

**3.4.33. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha az $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezések mindegyike külön-külön forgatás (valamely pont körül) vagy eltolás, akkor az összetételük is forgatás vagy eltolás.

**3.4.34. Kvaterniók.** A komplex számok segítségével természetesen síkgeometriai feladatokat is megoldhatunk. További általánosítással egyenesen a téridő vektoraihoz juthatunk.

Ha a komplex számok bevezetésénél használt *duplázási eljárás*t megismételjük, a William Rowan Hamilton ír matematikus, fizikus és csillagász által bevezetett *kvaterniók*hoz vagy *Hamilton-féle számok*hoz jutunk: ezek halmaza $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, a komplex számpárok halmaza, a $(z, w)+(z', w') = (z+z', w+w')$ összeadással és a $(z, w)\cdot(z', w') = (zz' - \overline{w'}w, w'z + w\overline{z'})$ szorzással mint műveletekkel. (Figyeljük meg, hogy a szorzás hasonló a komplex számoknál bevezetett szorzáshoz, de itt konjugálások is szerepelnek.) Egyszerű számolás mutatja, hogy $\mathbb{H}$ ferdetest a fenti műveletekkel: a nullelem a $(0, 0)$ pár, a $(z, w)$ pár additív inverze a $(-z, -w)$ pár, egységelem az $(1, 0)$ pár, és a nullelemtől különböző $(z, w)$ pár multiplikatív inverze a $(\overline{z}/(z\overline{z} + w\overline{w}), -w/(z\overline{z} + w\overline{w}))$ pár. Vegyük észre, hogy ha $z, z' \in \mathbb{C}$, akkor $(z, 0) + (z', 0) = (z + z', 0)$, $(z, 0) \cdot (z', 0) = (zz', 0)$, azaz a $z \mapsto (z, 0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{C}$-nek $\mathbb{H}$-ba, így az összes $(z, 0)$, $z \in \mathbb{C}$ alakú kvaterniók halmazát azonosítjuk $\mathbb{C}$-vel, azaz úgy tekinthetjük, hogy $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Jelölje $j$ a $(0, 1)$ kvaterniót. Vegyük észre, hogy $j^2 = -1$, a $j$ segítségével a $(z, w)$ kvaterniót $z + wj$ alakba írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ha $k$ a $(0, i)$ kvaterniót jelöli, akkor a $(z, w)$ kvaterniót felírhatjuk $a + bi + cj + dk$ alakban, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, és ez a felírás egyértelmű, mert $a = \mathfrak{R}(z)$, $b = \mathfrak{I}(z)$, $c = \mathfrak{R}(w)$ és $d = \mathfrak{I}(w)$. A definíció alapján $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Míg egy valós szám bármely kvaternióval felcserélhető, a komplex számokra ez már nem igaz; például ha $z \in \mathbb{C}$, akkor $jz = \overline{z}j$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$. A számolási szabályok legegyszerűbben a 3.4.3 ábra alapján jegyezhetők meg: a nyilak mentén haladva ciklikusan körbe, a két kvaternió szorzata a harmadik, míg ellenkező irányba haladva az ellentettje. Ezek alapján legegyszerűbb a kvaterniókat

$$a + bi + cj + dk$$

alakba írni, és a disztributivitást, az asszociativitást, a fenti szorzási szabályokat, valamint a valós számok $i, j, k$-val való felcserélhetőségét felhasználva számolni velük.

Ha $p = a+bi+cj+dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor az $a$ valós számot a $p$ *valós rész*ének, *időszerű rész*ének vagy *skalár rész*ének, a $bi + cj + dk$ kvaterniót pedig a $p$ *képzetes rész*ének, *térszerű rész*ének vagy *vektor rész*ének nevezzük. Jelölésük: $\mathfrak{R}(p)$ illetve $\mathfrak{I}(p)$.

(A jelölés eltér a komplex számoknál szokásostól!) A $p$ *konjugált*ja a $\overline{p} = a - bi - cj - dk$ kvaternió. A komplex számokra a szokásos konjugálást kapjuk vissza. Egy kvaternió pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával, azaz $b = c = d = 0$. Ha egy kvaternió valós része nulla, akkor *tisztán képzetes*nek, *térszerű*nek vagy egyszerűen csak *vektor*nak nevezzük. A definíció alapján azonnal következnek a $\overline{\overline{p}} = p$, $\overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}$, $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$ (sic!), $p + \overline{p} = 2\mathfrak{R}(p)$, $p - \overline{p} = 2\mathfrak{I}(p)$, ha $p, q \in \mathbb{H}$ összefüggések.

**3.4.35. Kvaterniók abszolút értéke.** Egy kvaternió abszolút értéke a hossza (mint vektornak): ha $p = a + bi + cj + dk$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, akkor legyen a $p$ kvaternió *abszolút érték*e $|p| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. (Ezzel a jelöléssel most is $1/p = (1/|p|^2)\overline{p}$, ha $0 \neq p \in \mathbb{H}$.) A komplex számokra a szokásos abszolút értéket kapjuk vissza. Nyilván $p\overline{p} = |p|^2$, $|0| = 0$ és $p \neq 0$ esetén $|p| > 0$, $|\overline{p}| = |p|$, $\left|\mathfrak{R}(p)\right| \leq |p|$, $\left|\mathfrak{I}(p)\right| \leq |p|$, és $|pq| = |p||q|$ (mert mindkét oldal négyzete $p\overline{p}q\overline{q}$). Teljesül a $|p + q| \leq |p| + |q|$ *háromszög-egyenlőtlenség* és a belőle kapható $\big||p| - |q|\big| \leq |p - q|$ egyenlőtlenség; mindkettő ugyanúgy kapható, mint a komplex számoknál.

→ **3.4.36. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy egy $p$ kvaternióra $\left|\mathfrak{R}(p)\right| \leq |p|$, $\left|\mathfrak{I}(p)\right| \leq |p|$ és $|p| \leq \left|\mathfrak{R}(p)\right| + \left|\mathfrak{I}(p)\right|$.

→ **3.4.37. Feladat [4].** Ha $p = 1 + i + j + k$ és $q = k$ kvaterniók, határozzuk meg a $\overline{p}$, $p^2$, $1/p$, $q(1/p)$ és $(1/p)q$ kvaterniókat!

→ **3.4.38. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $q$ tetszőleges kvaternió, akkor $q - iqi - jqj - kqk = 4\mathfrak{R}(q)$.

→ **3.4.39. Feladat [4].** Határozuk meg az alábbi kvaternió értékű függvényeket, ha $f(x) = 1/\sin x$, ha $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \neq 0$, $g(x) = \cos(x) + i \sin x$, ha $x \in \mathbb{R}$ és $h(x) = xk$, ha $x \in \mathbb{R}$:

(1) $1/f$;

(2) $gf$;

(3) $\mathfrak{R}(g)$;

(4) $g + h$;

(5) $|h|$;

(6) $fh$.

**3.4.40. Vektoriális szorzás.** A kvaterniószorzás eltérését a kommutativitástól a $p \times q = \frac{1}{2}(pq - qp)$ mennyiséggel mérhetjük. Ez egy új szorzás a kvaterniók között, amelyet *vektoriális szorzás*nak nevezünk, mert a könnyen ellenőrizhető $\mathfrak{R}(pq) = \mathfrak{R}(qp)$ egyenlőség miatt a valós része mindig nulla. A vektoriális szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve és valós szám bármelyik tényezőjéből kiemelhető. Nyilván $p \times p = 0$ bármely $p \in \mathbb{H}$-ra, ahonnan

$$\begin{aligned} 0 &= (p + q) \times (p + q) = p \times p + p \times q + q \times p + q \times q \\ &= p \times q + q \times p, \end{aligned}$$

tehát tetszőleges $p, q \in \mathbb{H}$-ra $p \times q = -q \times p$, azaz a vektoriális szorzás nem kommutatív, hanem *antikommutatív*. A definícióból könnyen adódik, hogy $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$, és teljesül a *Jacobi-identitás*: tetszőleges $p, q, r \in \mathbb{H}$-ra

$$(p \times q) \times r + (q \times r) \times p + (r \times p) \times q = 0.$$

A vektoriális szorzás nem asszociatív, például $i \times (i \times j) = i \times k = -j$, míg $(i \times i) \times j = 0$.

**3.4.41. Kvaterniók és a háromdimenziós euklidészi tér.** A kvaterniók a fentiek alapján $\mathbb{R}^4$ (azaz a négydimenziós *téridő*) pontjainak is tekinthetők. A kvaterniók összeadása megfelel az $\mathbb{R}^4$-beli összeadásnak. A tisztán képzetes kvaterniók $\mathbb{R}^3$-mal, és így a háromdimenziós tér pontjaival azonosíthatók: egy derékszögű koordináta-rendszerben $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koordinátákkal rendelkező pontnak az $xi+yj+zk$ tisztán képzetes kvaternió felel meg. Ily módon $i$, $j$ és $k$ rendre a koordináta-rendszer három tengelyén vett egységvektoroknak felelnek meg. Ha mást nem mondunk, akkor a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy *jobbsodrású* legyen, azaz egy jobbmenetes csavart az $i$ vektor irányából a $j$ vektor irányába forgatva, a $k$ vektor irányába haladjon. A tisztán képzetes kvaterniók összeadása megfelel a térbeli vektorok szokásos (paralelogramma-szabály) összeadásának. A $v = xi + yj + zk$ és $v' = x'i + y'j + z'k$ tisztán képzetes kvaterniók szorzatának valós része $-\langle v, v'\rangle$, ahol $\langle v, v'\rangle = xx' + yy' + zz'$, képzetes része pedig

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(vv') &= \frac{1}{2}(vv' - \overline{vv'}) = \frac{1}{2}(vv' - \overline{v}'\overline{v}) = \frac{1}{2}(vv' - (-v')(-v)) = \frac{1}{2}(vv' - v'v)\\ &= v \times v' = (yz' - zy')i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k.\end{aligned}$$

A $(v, v') \mapsto \langle v, v'\rangle$ leképezést *belső szorzás*nak vagy *skaláris szorzás*nak nevezzük (bár nem művelet, de „kommutatív” és „mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve”). Nyilván $\langle v, v\rangle = |v|^2$. Egy kvaternió pontosan akkor vektor, ha a négyzete valós és kisebb vagy egyenlő nulla: ha $s$ skalár, $v$ vektor, akkor

$$(s + v)^2 = s^2 + v^2 + 2sv = s^2 - \langle v, v\rangle + v \times v + 2sv = s^2 - \langle v, v\rangle + 2sv;$$

ez az $s = 0$ esetben valós és kisebb vagy egyenlő nulla, és ha valós, akkor $v = 0$ vagy $s = 0$, de a $v = 0$, $s \neq 0$ esetben nagyobb, mint nulla. Ha $v''$ is egy vektor, akkor, mint könnyen kiszámolható, $v \times (v' \times v'') = \langle v, v''\rangle v' - \langle v, v'\rangle v''$. Végül a $(v, v', v'') \mapsto \langle v, v' \times v''\rangle$ leképezést *vegyes szorzás*nak szokás nevezni.

**3.4.42. A szorzások geometriai jelentése.** Ha egy vektort valós számmal (skalárral) szorzunk, az a vektor nyújtásának, illetve összehúzásának felel meg, negatív valós szám esetén pedig az irányítás is változik. Az előző pont szerint ha $v$ és $v'$ tisztán képzetes kvaterniók, azaz vektorok, akkor

$$\langle v, v'\rangle^2 + |v \times v'|^2 = |v|^2|v'|^2. \tag{1}$$

Innen $\big|\langle v, v'\rangle\big| \leq |v||v'|$ és $|v \times v'| \leq |v||v'|$.

A koszinusztételből, ha a $v$ és $v'$ vektorok által bezárt szög $\varphi$, akkor

$$\begin{aligned}2|v||v'|\cos\varphi &= |v|^2 + |v'|^2 - |v - v'|^2\\ &= \langle v, v\rangle + \langle v', v'\rangle - (\langle v, v\rangle + \langle v', v'\rangle - \langle v, v'\rangle - \langle v', v\rangle)\\ &= 2\langle v, v'\rangle,\end{aligned}$$

tehát $\langle v, v'\rangle = |v||v'|\cos\varphi$. Ha $v$ egységvektor és $v' \neq 0$, akkor $\langle v, v'\rangle$ abszolút értéke a $v'$ vektor $v$ irányú vetületének hossza, előjele pedig pozitív, ha a két vektor hegyesszöget zár be, negatív, ha a két vektor tompaszöget zár be, és nulla, ha merőlegesek.

Ebből az eredményből (1) felhasználásával $|v \times v'| = |v||v'||\sin\varphi|$, a $v$ és $v'$ által kifeszített paralelogramma területe. Tehát ha $v$ és $v'$ párhuzamosak, akkor vektori szorzatuk nulla lesz. Egyszerű számolással adódik, hogy $\langle v, v \times v'\rangle = 0$ és $\langle v', v \times v'\rangle = 0$, azaz $v \times v'$ merőleges a $v$ és $v'$ vektorokra. Az irányítás meghatározásához vegyük észre, hogy ha a $v$ vektort az $i$ irányba, a $v'$ vektort pedig az $i$ és $j$ által adott síkba forgatjuk, de úgy, hogy második koordinátája ne legyen negatív, akkor vektori szorzatuk $k$ irányú. Ez azt jelenti, hogy $v$, $v'$ és $v \times v'$ ugyanolyan irányítású vektorrendszert alkotnak, mint $i$, $j$ és $k$.

Végül a vegyes szorzat geometriai jelentése a $v$, $v'$ és $v''$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, hiszen ennek alapterülete $|v' \times v''|$, magassága pedig $|v|\cos\varphi$, ahol $\varphi$ a $v$ és $v' \times v''$ által bezárt szög.

**3.4.43. Feladat [3].** Határozzuk meg az alábbi vektorok által bezárt szög koszinuszát:

(1) $3i + j + 3k$ és $i - 2j + 2k$;

(2) $2i + 3j - k$ és $-i + j + 6k$;

(3) $4i + 2j - 3k$ és $3i + 6j + 8k$.

**3.4.44. Feladat [3].** Számítsuk ki az alábbi vektori szorzatok hosszának négyzetét:

(1) $i \times j$;

(2) $2i \times 3j$;

(1) $(3i - j) \times (i \times 2j)$.

**3.4.45. Feladat [3].** Számítsuk ki a $2i - j + 2k$, $3i + j + 5k$ és $ai + 2j - k$ vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát! Milyen a értékre lesz 10?

**3.4.46. Forgatások.** A kvaterniókat a háromdimenziós forgatásokkal való szoros kapcsolatuk miatt felhasználják robotok vezérlésénél. Legyen $p$ egy *egységvektor*, azaz egységnyi abszolút értékű vektor, $v$ pedig egy tetszőleges $p$-re merőleges vektor. Megmutatjuk, hogy a $v \mapsto qv$ leképezés, ahol $q$ az egységnyi abszolút értékű $q = \cos\varphi + p\sin\varphi$ kvaternió, a $v$ vektornak a $\varphi$ szöggel való elforgatása az origón átmenő $p$ tengely körül, éspedig a $p$ vektor vége felől nézve olyan irányba, mint a $k$ vektor vége felől $i$-nek $j$-be való forgatása. Mivel $\langle v, p\rangle = 0$,

$$qv = (\cos\varphi + p\sin\varphi)v = v\cos\varphi + pv\sin\varphi = v\cos\varphi + p \times v\sin\varphi,$$

amiből adódik az állítás.

Most tekintsük a $v \mapsto qvq^{-1}$ leképezést. Megmutatjuk, hogy ez tetszőleges $v$ vektorra az origón átmenő $p$ tengely körüli $2\varphi$ szöggel való elforgatás. Először tegyük fel, hogy $v$ merőleges $p$-re. Mivel $q^{-1} = \cos\varphi - p\sin\varphi$, a $\tilde{v} = qv$ jelöléssel, mivel $\tilde{v}$ merőleges $p$-re,

$$\tilde{v}q^{-1} = \tilde{v}(\cos\varphi - p\sin\varphi) = \tilde{v}\cos\varphi - \tilde{v} \times p\sin\varphi = \tilde{v}\cos\varphi + p \times \tilde{v}\sin\varphi,$$

azaz $\tilde{v}q^{-1}$ a $\tilde{v}$ vektor $\varphi$ szöggel történő továbbforgatásával kapható. Most legyen $v$ tetszőleges, és írjuk fel $v = v' + v''$ alakban, ahol $v' = \alpha p$, $\alpha = \langle v, p\rangle$ és $v'' = v - v'$. Mivel $v''$ merőleges $p$-re, $qv''q^{-1}$ a $v''$-nek $2\varphi$ szöggel való elforgatásával adódik. Másrészt

$$qv'q^{-1} = (\cos\varphi + p\sin\varphi)\alpha p(\cos\varphi - p\sin\varphi) = \alpha p(\cos^2\varphi + \langle p, p\rangle\sin^2\alpha) = \alpha p = v',$$

azaz $v'$ a transzformációnál nem változik. Ezzel az állítást beláttuk.

Az állításból azonnal adódik, hogy két origón átmenő tengely körüli forgatás egymásutánja is forgatás, és ennek tengelye és szöge is meghatározható, mert a $v \mapsto q'vq'^{-1}$ és $v \mapsto q''vq''^{-1}$ leképezések összetétele a $v \mapsto qvq^{-1}$ leképezés, ahol $q = q''q'$ egységnyi abszolút értékű kvaternió. Vegyük figyelembe, hogy $\varphi$ és $\varphi + \pi$ ugyanazt a forgatást adják, de a $\cos\varphi + p\sin\varphi$ és a $\cos(\varphi+\pi) + p\sin(\varphi+\pi) = -\cos\varphi - p\sin\varphi$ kvaterniók egymás ellentettjei. Általánosabban, bármely $q \neq 0$ kvaternióra és $\alpha \neq 0$ valós számra a $v \mapsto qvq^{-1}$ és a $v \mapsto q'vq'^{-1}$ leképezések megegyeznek, ha $q' = \alpha q$.

**3.4.47. Egyéb geometriai alkalmazások.** A háromdimenziós térben $p_0$ és $p_1$ által megadott pontok *távolság*a $|p_1 - p_0|$. Ha $p_0 \neq p_1$, akkor a két ponton átmenő egyenesnek a $v = p_1 - p_0$ vektor egy *irányvektor*a; az egyenes bármely $p$ pontjára a $p - p_0$ vektor a $v$ vektor egy skalárszorosa, azaz valamely $t \in \mathbb{R}$-re $p = p_0 + tv$. Ez az *egyenes paraméteres egyenlete*. Ha $p_0$, $p_1$ és $p_2$ három pont, amelyek nem esnek egy egyenesbe, akkor a három ponton átmenő sík tetszőleges $p$ pontjához léteznek olyan $t_1$ és $t_2$ valós számok, amelyekkel a $p - p_0 = v$ irányvektorra $v = t_1v_1 + t_2v_2$, ahol $v_1$ illetve $v_2$ a $p_1 - p_0$ illetve $p_2 - p_0$ irányvektorok. Innen $p = p_0 + t_1v_1 + t_2v_2$, ez a *sík paraméteres egyenlete*. A koordinátákat kiírva, ez három összefüggést jelent. Kettőből kifejezve a $t_1$ és $t_2$ paramétereket, és beírva a harmadikba, egy egyenletet kapunk, ez a *sík egyenlete*. Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy választunk egy, a $v_1$-re és a $v_2$-re is merőleges $n$ *normálvektor*t, például $v_1 \times v_2$-t, és észrevesszük, hogy a $v$ vektorokat az jellemzi, hogy merőlegesek $n$-re, azaz $\langle p, n\rangle = \langle p_0, n\rangle$. Hasonló módon, az egyenes paraméteres egyenletéből két sík egyenletét kaphatjuk (az egyenes ezek metszete), ez az *egyenes egyenletrendszere*.

A $p$ pont és a $p_0$ ponton átmenő, $n$ normálvektorú sík távolságát különösen egyszerű számolni, ha $n$-et egységvektornak választjuk, mivel ez a $p - p_0$ vektor $n$ irányú vetületének hossza, azaz $\langle p - p_0, n\rangle$ abszolút értéke. Egy $p$ pont távolságát a $p_0$ ponton átmenő, $v$ irányvektorú egyenestől ugyancsak akkor a legegyszerűbb számolni, ha $v$ egységvektor: ez $(p - p_0) \times v$ hossza, a $p$-hez legközelebbi pont előjeles távolsága $p_0$-tól pedig $\langle (p - p_0), v\rangle$. A $p_1$ illetve $p_2$ pontokon átmenő, $v_1$ illetve $v_2$ irányvektorú egyenesek távolsága, ha $n$ egységvektor, amely merőleges $v_1$-re és $v_2$-re is, $\langle p_2 - p_1, n\rangle$ abszolút értéke. Ezen két egyenes hajlásszöge a $v_1$ és $v_2$ vektorok által bezárt szög, amelynek koszinusza $\langle v_1, v_2\rangle$ abszolút értéke, ha $v_1$ és $v_2$ egységvektorok. Végül a $v$ irányvektorú egyenes és az $n$ normálvektorú sík hajlásszögének szinusza, ha $n$ és $v$ is egységvektor, $\langle v, n\rangle$ abszolút értéke.

$\to$ **3.4.48. Feladat [5].** Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét és paraméteres egyenletét, amely

(1) átmegy a $(-2, 5, 1)$ ponton és párhuzamos a $(-1, 2, 3)$ vektorral;

(2) átmegy a $(3, 1, 2)$ és a $(-1, 1, 3)$ ponton;

(3) átmegy az $(5, 1, 4)$ ponton és párhuzamos a $(0, 0, 1)$ vektorral;

(4) átmegy a $(6, -3, 4)$ ponton és merőleges a $(-2, 3, 1)$ és $(2, 0, 1)$ vektorokra.

$\to$ **3.4.49. Feladat [4].** Határozzuk meg a $(-2, 1, 0)$ pontra és az $x = t + 2$, $y = 3t$, $z = 2$ paraméteres egyenletű egyenesre illeszkedő sík egyenletét!

$\to$ **3.4.50. Feladat [5].** Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy $(3, 1, 0)$ ponton és párhuzamos az $x = 1 - 2t$, $y = 2 + t$, $z = -2t$ és a $x + 2 = 2y = -2z$ egyenesekkel!

→ **3.4.51. Feladat [4].** Igazoljuk, hogy a $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ és az $x - 2y + z - 1$ síkok párhuzamosak és határozzuk meg a távolságukat!

→ **3.4.52. Feladat [6].** Határozzuk meg a pont távolságát az egyenestől:

(1) $(-2, 3, 7)$ és $x - 1 = 6 - 3y$, $z = 2$;

(2) $(-1, 2, 1)$ és $x = 1 + 2t$, $y = 12 - t$, $z = 3 + 3t$;

(3) $(2, 2, 1)$ és $9 - x = 2y + 4 = 4z + 20$;

(4) $(3, 1, 2)$ és a $(0, 2, 1)$ és $(1, -1, 3)$ pontokon átmenő egyenes;

(5) $(-2, 4, 1)$ és a $(-1, 4, 1)$ ponton és az origón átmenő egyenes.

→ **3.4.53. Feladat [6].** Határozzuk meg az adott egyenesek távolságát és szögét:

(1) $x + 4 = 8 - 2y = z - 1$ és $x = 4t - 5$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 5$;

(2) $6(2x + 1) = 4(3 - y) = (3(5z - 6))$ és $x = y = z$;

(3) $x = 5 + 3t$, $y = t$, $z = 4t + 9$ és $x = 4 - u$, $y = u - 3$, $z = 4 - 4u$.

→ **3.4.54. Feladat [5].** Van-e a $t$ paraméternek olyan értéke, amelyre az $x + ty + z - 1$ egyenletű sík $60°$-os szöget zár be az $x$, az $y$, illetve a $z$ tengellyel?

⋆ **3.4.55. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha az $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezések forgatások metsző egyenesek körül, akkor az összetételük is forgatás.

# 3.5 Polinomok

**3.5.1. Jelölés: $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{K}}$.** A továbbiakban gyakran egyszerre kívánjuk tárgyalni a valós, illetve a komplex esetet. Ilyenkor hasznos az a jelölés, hogy $\mathbb{K}$ vagy $\mathbb{R}$-et vagy $\mathbb{C}$-t jelenti, $\overline{\mathbb{K}}$ pedig vagy $\overline{\mathbb{R}}$-t vagy $\overline{\mathbb{C}}$-t jelenti.

**3.5.2. Polinomok és racionális törtfüggvények.** A $\mathbb{K}$ feletti konstans függvényekből és az identikus függvényből véges sok szorzás és összeadás segítségével kapható függvényeket *polinomfüggvény*eknek vagy röviden csak *polinom*oknak, pontosabban $\mathbb{K}$ *feletti polinom*oknak nevezzük. Nyilván a polinomok $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k x^k$, $x \in \mathbb{K}$ alakú függvényeket, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{K}$. Az üres szorzatot egynek, az üres összeget nullának tekintjük, így $x^0 = 1$, az azonosan nulla polinom pedig üres összegként is írható. A binomiális tétel szerint, akármilyen $c \in \mathbb{K}$-ra, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k (x - c)^k$ is polinom. Ha valamely $c \in \mathbb{K}$-ra $f(c) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $c$ az $f$ polinom *gyök*e. Azokat a függvényeket, amelyek előállnak $x \mapsto f(x)/g(x)$ alakban, ahol $f, g$ polinomok, *racionális törtfüggvény*eknek nevezzük; ez a függvény a $g$ gyökeiben nincs értelmezve.

**3.5.3. A maradékos osztás tétele polinomokra.** *Legyenek*

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_m x^m \quad \text{és} \quad g(x) = g_0 + g_1 x + \cdots + g_n x^n$$

*polinomok $\mathbb{K}$ felett, $n \geq 0$ és $g_n \neq 0$. Ekkor léteznek olyan $q$ és $r$ polinomok, hogy $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ minden $x \in \mathbb{K}$-ra, továbbá ha $m < n$, akkor $q$ az üres összeg, egyébként $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_{m-n} x^{m-n}$, $q_{m-n} = f_m/g_n$ és $r(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{n-1} x^{n-1}$.*

Figyeljük meg, hogy a bizonyítás algoritmust ad a maradékos osztás elvégzésére.

**Bizonyítás.** Az $m$ szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $m < n$, akkor legyen $q$ az üres összeg és $r_j = f_j$, ha $0 \leq j \leq m$ és $r_j = 0$, ha $m < j < n$. Indukcióval, tegyük fel, hogy $m-1$-re igaz az állítás. Legyen $q_{m-n} = f_m/g_n$, és legyen $f_j^* = f_j - q_{m-n}g_{j-m+n}$, ha $j = m-n, m-n+1, \ldots, m$ és legyen $f_j^* = f_j$, ha $j = 0, 1, \ldots, m-n-1$. Ekkor $f^*(x) = f_0^* + f_1^*x + \cdots + f_{m-1}^*x^{m-1}$, így az indukciós feltevés szerint léteznek olyan $q_0, q_1, \ldots, q_{m-n-1}$ és $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ számok, hogy

$$f^*(x) = g(x)\left(\sum_{j=0}^{m-n-1} q_jx^j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} r_jx^j.$$

Mindkét oldalhoz hozzáadva $g(x)q_{m-n}x^{m-n}$-et, kapjuk az állítást. $\square$

**3.5.4. Következmény: Horner-elrendezés.** A maradékos osztás tételét alkalmazva az $f$ és a $g(x) = x - c$ polinomra azt kapjuk, hogy $f(x) = (x-c)q(x) + r$, ahol $r$ konstans. Az $x = c$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy $r = f(c)$. Így $m-1$ szorzással és ugyanannyi összeadással megkaphatjuk $f(c)$-t. $\square$

**3.5.5. Következmény: gyöktényező leválasztása.** *Ha $c$ az $f$ gyöke, akkor valamely $q$ polinomra $f(x) = (x-c)q(x)$.*

**Bizonyítás.** Az előző következményben $r = f(c)$ nulla kell legyen. $\square$

**3.5.6. Következmény.** *Ha $m \geq 0$ és $f_m \neq 0$, akkor $f$-nek legfeljebb $m$ gyöke van.*

**Bizonyítás.** Az $m$ szerinti indukcióval dolgozunk. Ha $m = 0$, igaz az állítás. Ha $m > 0$, és $c$ egy gyök, akkor $f(x) = (x-c)q(x)$, ahol $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_{m-1}x^{m-1}$. Ha $d$ az $f$ egy gyöke, akkor vagy $d - c = 0$, azaz $d = c$, vagy $d$ gyöke $q$-nak, ahonnan következik az állítás. $\square$

**3.5.7. Következmény.** *Ha $m \geq 0$ és az $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m$ és $f^*(x) = f_0^* + f_1^*x + \cdots + f_m^*x^m$ polinomok $m+1$ különböző helyen ugyanazt az értéket veszik fel, akkor $f_j = f_j^*$, ha $j = 0, 1, \ldots, m$.*

**Bizonyítás.** Egyébként a különbségpolinom olyan $h(x) = h_0 + h_1x + \cdots + h_mx^m$ polinom lenne, amelynek nem minden együtthatója nulla, de $m+1$ gyöke van. $\square$

**3.5.8. Polinomok egyértelmű felírása.** Az előző következmény szerint egy $\mathbb{K}$ feletti $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_kx^k$ polinom egyértelműen meghatározza az $f_k$ számokat, bár a felírás nem egyértelmű, mert nulla együtthatójú tagokat elhagyhatunk, illetve a felíráshoz további nulla együtthatójú tagok adhatók hozzá. Egyértelművé válik azonban a felírás, ha kikötjük, hogy $f_n \neq 0$ legyen és minden $n$-nél alacsonyabb fokú tag is szerepeljen. Ekkor $f_n$ a polinom *főegyütthatój*a, $n$ pedig a polinom *fok*a, jelölése $\deg(f)$. Ha egy polinom főegyütthatója 1, akkor *főpolinom*nak nevezzük. (Egy másik lehetőség a felírás egyértelművé tételére, hogy minden nulla együtthatójú tagot elhagyunk.) Az azonosan nulla polinom egyértelmű felírása az üres összeg, nincs főegyütthatója és foka definíció szerint $\deg(f) = -\infty$. (Vannak, akik a nulla polinom fokát nem definiálják vagy $-1$-nek definiálják.) Két nem nulla polinom szorzatának a főegyütthatója a főegyütthatók szorzata, foka pedig a fokok összege. Az $f_k$ neve a $k$-adfokú tag*együtthatój*a. A nulladfokú tag együtthatója a polinom *konstans tag*ja. Két polinom szorzatának a konstans tagja a konstans tagok szorzata. A konstans polinomok a legfeljebb nulladfokú polinomok. A legfeljebb elsőfokú polinomok a *lineáris polinom*ok. Azokat a polinomokat, amelyek $a_kx^k$ alakba írhatók, *monom*oknak nevezzük.

**3.5.9. A maradékos osztás egyértelműsége.** *Legyenek $f, g$ polinomok $\mathbb{K}$ felett, $\deg(g) \geq 0$. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$ feletti $q, r$ polinomok, amelyekre $f = gq + r$, ahol* $\deg r < \deg g$.

**Bizonyítás.** Csak az egyértelműséget kell bizonyítanunk. Ez onnan következik, hogy $gq + r = gq^* + r^*$ esetén $g(q - q^*) = r^* - r$; innen, ha valamelyik oldal nem nulla, akkor a másik sem, de a bal oldal fokszáma legalább $\deg(g)$, a jobb oldal fokszáma pedig ennél kisebb. □

**3.5.10. Többszörös gyökök.** Azt mondjuk, hogy $c \in \mathbb{K}$ a $\mathbb{K}$ feletti $f$ polinom egy $n$-szeres gyöke, ha $f(x) = (x - c)^n g(x)$, ahol $g$-nek $c$ nem gyöke.

A komplex számok körében a következő tétel biztosítja a gyökök létezését.

**3.5.11. Az algebra alaptétele.** *Minden legalább elsőfokú polinomnak van komplex gyöke.*

A tétel később, a komplex függvénytanban bizonyítjuk. □

**3.5.12. Gyöktényezős előállítás.** A komplex számtest felett az algebra alaptétele szerint minden nem konstans polinomnak van gyöke, így a gyöktényező leválasztására vonatkozó állítás szerint indukcióval bármely $n$-edfokú $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinomot felírhatunk

$$a_n (x - c_1)^{\alpha_1} (x - c_2)^{\alpha_2} \cdots (x - c_k)^{\alpha_k}$$

alak *gyöktényezős alak*ban, ahol a különböző $c_1, c_2, \ldots, c_k$ komplex számok a gyökök, az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ pozitív egész számok pedig az egyes gyökök multiplicitásai,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n.$$

A gyöktényezős előállítás tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű; ha ez nem lenne igaz, egy minimális fokszámú polinomot választva amelyre nem igaz, ha egy másik előállításban egy $(x - c_j)$ tényező nem szerepelne, akkor az egyik előállításnak gyöke lenne $c_j$, a másiknak nem, ha pedig magasabb hatványon szerepelne, akkor $(x - c_j)^{\alpha_j}$-vel végigosztva, lenne alacsonyabb fokú polinom nem egyértelmű előállítással.

Egy a valós számtest feletti, azaz valós együtthatós $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinom tekinthető komplex együtthatósnak is, így az algebra alaptétele szerint $n \geq 1$ esetén van olyan $c \in \mathbb{C}$, hogy $a_0 + a_1 c + \cdots + a_n c^n = 0$. Ha $c$ valós, akkor egy $x - c$ gyöktényező leválasztható. Ha $c \notin \mathbb{R}$, akkor konjugálással $a_0 + a_1 \bar{c} + \cdots + a_n \bar{c}^n = 0$, tehát $c$ konjugáltja is gyök. A $g_c = (x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - 2\Re c + |c|^2$ valós együtthatós polinommal $\mathbb{R}$ felett maradékosan osztva, $f = g_c q + r$. Az $r$ csak nulla lehet, mert egyébként legfeljebb elsőfokú lenne és nem lehetne nem valós komplex gyöke. Tehát a valós számtest felett minden $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinom legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok szorzatára bontható. Az, hogy az előállítás lényegében egyértelmű, a komplex előállítás lényegében egyértelmű voltából következik.

**3.5.13. Lagrange-interpoláció.** A polinomok osztására vonatkozó tétel egyik következményéből, ha $c_0, c_1, \ldots, c_n$ különböző, $d_0, d_1, \ldots, d_n$ pedig tetszőleges elemei $\mathbb{K}$-nak, akkor legfeljebb egy olyan legfeljebb $n$-edfokú $f$ polinom létezik, amelyre

$$f(c_j) = d_j, \quad \text{ha} \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

mert egyébként két ilyen polinom különbségének $n+1$ gyöke lenne. Mindig létezik is ilyen polinom, és az alábbi *Lagrange-féle interpolációs eljárás*sal megkapható. Legyen

$$l_j(x) = \frac{\prod_{i\neq j}(x - c_i)}{\prod_{i\neq j}(c_j - c_i)}$$

a $j$-edik *Lagrange-interpolációs alappolinom* [erre $l_j(x_j) = 1$ és $l_j(x_i) = 0$, ha $i \neq j$] és legyen $f = \sum_{j=0}^{n} d_j l_j$.

**3.5.14. Többváltozós polinomok és racionális törtfüggvények.** Legyen $n$ pozitív természetes szám. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_k$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ függvényt $k$-adik *koordinátafüggvény*nek nevezzük ($k = 1, 2, \ldots, n$). A $\mathbb{K}^n$ feletti konstans függvényekből és koordinátafüggvényekből véges sok szorzás és összeadás segítségével kapható függvényeket $n$-változós *polinomfüggvény*eknek vagy röviden csak $n$-változós *polinom*oknak, pontosabban $\mathbb{K}^n$ feletti polinomoknak nevezzük. Nyilván a $\mathbb{K}^n$ feletti polinomok

$$x \mapsto f(x) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n\in\mathbb{N}} f_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \quad (x_1, x_n, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

alakú függvények, ahol az összeg véges, és $f_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{K}$. Az egyváltozós polinomok éppen az eddig vizsgált polinomok. Itt is az üres szorzatot egynek, az üres összeget nullának tekintjük, így $x_k^0 = 1$, az azonosan nulla polinom pedig üres összegként is írható.

Mivel egy többváltozós polinom felírásából is nulla tagokat elhagyhatunk, vagy további nulla tagokat adhatunk a felíráshoz, a többváltozós polinomok felírása nem egyértelmű. Megmutatjuk azonban, hogy ettől eltekintve egyértelmű, vagyis egy

$$x \mapsto \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n\in\mathbb{N}} f_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}, \quad (x_1, x_n, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

függvény (ahol az összeg véges) egyértelműen meghatározza az $f_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \in \mathbb{K}$ számokat. Az $n$ szerint teljes indukcióval dolgozunk. Az $n = 1$ esetben már beláttuk az állítást. Elég azt belátni, hogy ha az összeg azonosan nulla, akkor minden $f_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ nulla. Írjuk az összeget

$$\sum_{k=0}^{m} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) x_n^k$$

alakban, ahol az $f_k$ függvények $n-1$-változós polinomok. Ha bárhogyan rögzítve az $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ változókat, a kapott polinomja $x_n$-nek azonosan nulla, akkor minden $f_k$-nak nullának kell lennie, mert az egyváltozós esetben igaz az állítás. Tehát az $f_k$ polinomok azonosan nullák, és az indukciós feltevésből kapjuk az állítást.

Az $f_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ tagokat *monom*oknak, az $f_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ számot a monom *együttható*jának, a

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$$

$n$-est a monom *multifok*ának, a $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ természetes számot pedig a monom *fok*ának nevezzük. A polinom egyetlen nulladfokú tagjának az $f_{0,0,\ldots,0}$ együtthatója a polinom *konstans tag*ja. Két polinom szorzatának a konstans tagja a konstans tagok szorzata. Azt a legkisebb $m$-et, amelyre a polinom minden (nem nulla) tagjának a foka legfeljebb $m$, a polinom *fok*ának nevezzük; az azonosan nulla polinom foka megállapodás szerint $-\infty$. (Vannak, akik a nulla polinom fokát nem definiálják vagy $-1$-nek definiálják.) Az $f$ polinom fokát $\deg(f)$-fel jelöljük. Két polinom szorzatának foka a fokok összege. A konstans és elsőfokú polinomok együtt a *lineáris polinom*ok. Ha egy polinom minden (nem nulla) tagjának ugyanaz a $k$ a foka, akkor $k$-adfokú *homogén polinom*nak nevezzük.

Azokat a függvényeket, amelyek előállnak $x \mapsto f(x)/g(x)$, alakban, ahol $f, g$ polinomok $\mathbb{K}^n$ felett, $\mathbb{K}^n$ feletti *racionális törtfüggvény*eknek nevezzük; ez a függvény nincs értelmezve ott, ahol $g$ nulla. A két lineáris függvény hányadosaként előálló függvényeket *lineáris törtfüggvény*eknek nevezzük.

$\to$ **3.5.15. Feladat [2].** Határozzuk meg a $3x^8 + 5x^6 - 11x^3 + 7x^2 - 15x + 8$ és $16x^7 - 13x^6 + 6x^3 - 13x + 21$ polinomok szorzatában a 0-ad, 9-ed, 14-ed, 15-öd és 20-ad fokú tag együtthatóját!

$\to$ **3.5.16. Feladat [3].** Osszuk el az első polinomot a másodikkal maradékosan:

(1) $42x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 43x - 12$, $x^2 - x + 1$;

(2) $x^3 - 3x^2 - x - 1$, $3x^2 - 2x + 1$;

(3) $5x^4 + 2x - 3$, $2x^2 - 3x + 4$;

(4) $x^3$, $2x + 3$;

(5) $x^2 + 3x - 2$, $6x^4 + 5x^2 - 3x + 2$;

(6) $x^3 + x^2 + 3x + 2$, $2x^2 + 4$.

$\to$ **3.5.17. Feladat [3].** Határozzuk meg $a$-t és $b$-t úgy, hogy $x^4 + 3x^2 + ax + b$ osztható legyen $x^2 - 2ax + 2$-vel $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett.

$\to$ **3.5.18. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy a Horner-elrendezés lényegében az

$$f(c) = \Big(\ldots((f_n c + f_{n-1})c + f_{n-2})c + \cdots + f_1\Big)c + f_0$$

összefüggéssel ekvivalens. (Innen kapta az „elrendezés” nevet.)

$\to$ **3.5.19. Feladat [4].** Az $x - c$-vel való maradékos osztás segítségével határozzuk meg az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomok helyettesítési értékét a megadott helyen:

(1) $x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $c = 4$;

(2) $x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $c = -2 - i$;

(3) $x^4 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $c = 1 + 2i$.

$\to$ **3.5.20. Feladat [4].** Az $x - c$-vel való ismételt maradékos osztás segítségével írjuk fel az alábbi $\mathbb{C}[x]$-beli polinomokat $x - c$ hatványai segítségével:

(1) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$, $c = -1$;

(2) $x^5$, $c = 1$.

$\to$ **3.5.21. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi függvények Lagrange interpolációs polinomját az adott alappontokkal és ábrázoljuk a közelítést az adott intervallumon:

(1) $x \mapsto \sin x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $k\pi/(2n)$, $-n \le k \le n$, $n = 2, 3, 4$;

(2) $x \mapsto \sin 2x$, $[-\pi/2, \pi/2]$, $k\pi/(2n)$, $-n \le k \le n$, $n = 2, 3, 4$;

(3) $x \mapsto |x|$, $[-1, 1]$, $k/n$, $-n \le k \le n$, $n = 2, 3, 4, 10$.

# 4

# Határérték

Ez a fejezet az analízis legfontosabb fogalmával, a határértékkel foglalkozik a számokon értelmezett számértékű (skalár–skalár) függvények körében. Egy egyszerűbb fogalommal, a folytonossággal kezdjük. Ezt — valós változós, valós értékű függvényekre — szemléletesen szokás úgy fogalmazni, hogy „a függvénygörbét a ceruza felemelése nélkül le tudjuk rajzolni". Ez nem pontos, mert vannak olyan valós változós, valós értékű folytonos függvények, amelyek görbéje már egy véges intervallumon is végtelen hosszú, így lerajzolása végtelen sokáig tartana. Komplex változós, komplex értékű függvényekre ez a megfogalmazás értelmetlen. Egy másik megfogalmazás, hogy tekintsük az $x \mapsto y(x)$ függvényt, és változtassuk meg $x$ értékét a végtelen kis $dx$ értékkel (differenciális változás). Ekkor — ha a függvény folytonos — a függvényérték is végtelen kicsit, $y(x+dx)$-re változik, azaz a függvényérték változása a végtelen kicsiny (differenciális) $dy = y(x+dx) - y(x)$ érték. Sajnos, a valós számok között nincsenek végtelen kicsinyek. Az ötletet úgy menthetjük meg, hogy azt mondjuk, az $x \mapsto y(x)$ függvény folytonos az $x$ pontban, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan elég kicsiny $\delta > 0$ valós szám, hogy ha $|dx| < \delta$, akkor a $dy$ különbségre $|dy| < \varepsilon$. Néhány fogalom bevezetésével még egyszerűbben tudunk majd fogalmazni. A $\mathbb{K}$ jelöléssel egyszerre tudunk a valós és a komplex számok körében dolgozni. Ha esetleg kezdetben ez zavar valakit, akkor gondolja át előbb a valós, majd a komplex számok esetét. Hamarosan ráérez, hogy nincs semmi lényeges különbség, mert minden az abszolút érték segítségével definiált távolság tulajdonságain múlik.

## 4.1 Folytonosság

**4.1.1. Távolság, környezetek, korlátosság.** Az $x, y \in \mathbb{K}$ *távolság*a $|x-y|$. Az $x \in \mathbb{K}$ szám $r > 0$ sugarú $\mathbb{U}_r(x)$ *környezet*én a $\{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}$ halmazt érjük. Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen $x$ egy $U$ környezetéről beszélünk. A számegyenesen az $\mathbb{U}_r(x)$ környezet egy $x$ középpontú, $2r$ hosszúságú szakasz a végpontok nélkül, a komplex síkon pedig egy $x$ középpontú, $r$ sugarú körlap a széle nélkül. Az $A \subset \mathbb{K}$ halmaz *korlátos*, ha van a nullának olyan környezete, amelyben benne van, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy $|x| < K$ minden $x \in A$-ra. Ha $A_1, \ldots, A_n$ véges sok korlátos halmaz, akkor az $A$ egyesítésük is korlátos, hiszen $K$-nak választhatjuk az $A_i$ halmazokhoz tartozó $K_i$ számok legnagyobbikát.

**4.1.2. Belső, izolált és torlódási pontok.** Legyen $A \subset \mathbb{K}$ és $x \in \mathbb{K}$. Az $x$ pontot az $A$ halmaz *belső pont*jának nevezzük, ha van olyan $U$ környezete $x$-nek, amelyre $U \subset A$. Az $x$ *izolált pont*ja $A$-nak, ha van olyan $U$ környezete, hogy $U$-ban ő az egyetlen $A$-beli pont. Ha $x$ minden környezete tartalmaz $x$-től különböző pontot $A$-ból, akkor azt mondjuk, hogy $x$ *torlódási pont*ja $A$-nak. A belső pont és az izolált pont eleme $A$-nak, a torlódási pont nem feltétlenül. Például a számegyenesen a nemnegatív valós számok halmazának minden $x$ pozitív valós szám belső pontja, $r = x$ választható, a 0 viszont nem belső pont, de torlódási pont. Ugyancsak $\mathbb{R}$-ben a $\{1/n : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ halmaznak minden pontja izolált pont, $1/n$ esetén $r$-et legfeljebb $1/n$ és $1/(n+1)$ távolságának kell választani, a 0 viszont torlódási pont.

**4.1.3. Nyílt és zárt halmazok.** Ha az $A \subset \mathbb{K}$ halmaz minden pontja belső pontja $A$-nak, akkor $A$-t *nyílt*nak nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}$ nyílt halmazok. Ha az $A$ halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, akkor *zárt*nak nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $\mathbb{K}$ zártak.

**4.1.4. Állítás.** *Egy $A \subset \mathbb{K}$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementere zárt.*

**Bizonyítás.** Ha $A$ nyílt, $x$ pedig a komplementer egy torlódási pontja, akkor $x$ nem lehet $A$-ban, mert annak minden pontja belső pont, így van olyan környezete, amelyben csak $A$-beli pontok vannak. Ha $A$ komplementere zárt, $x$ pedig $A$ egy pontja, akkor $x$ nem lehet torlódási pontja $A$ komplementerének, mert az minden torlódási pontját tartalmazza. Mivel ő maga $A$-ban van, van olyan környezete, amelyben nincs pontja a komplementernek, tehát $x$ belső pontja $A$-nak. □

**4.1.5. Állítás.** *Ha $x \in \mathbb{K}$ és $r \geq 0$, akkor $\{y \in \mathbb{K}\colon |y-x| < r\}$ nyílt, $\{y \in \mathbb{K}\colon |y-x| \leq r\}$ pedig zárt halmaz.*

Ezeket a halmazokat $r$ sugarú *nyílt gömb*nek, illetve *zárt gömb*nek nevezzük. Vegyük észre, hogy nulla sugarat is megengedtünk, ekkor a nyílt gömb üres, a zárt gömb pedig egyelemű.

**Bizonyítás.** Ha $|y-x| < r$, azaz $y$ az első halmaz eleme, akkor $\varepsilon = r - |y-x| > 0$ választással $|z-y| < \varepsilon$ esetén $|z-x| \leq |y-x| + |z-y| < r$, azaz $y$ belső pontja az első halmaznak. Ha $|y-x| > r$, azaz $y$ nem eleme a második halmaznak, akkor $\varepsilon = |y-x| - r > 0$ választással $|z-y| < \varepsilon$ esetén $|z-x| \geq |y-x| - |z-y| > \varepsilon$, így a második halmaz komplementere nyílt. □

**4.1.6. Példák.** Mint $\mathbb{R}$ részhalmaza, $\{1, 2, \dots, n\}$ nem nyílt (mert egyik pontja sem belső pont), zárt (mert nincs torlódási pontja), korlátos (mert benne van a 0 középpontú $n+1$ sugarú gömbben); $\mathbb{N}$ nem nyílt, zárt, nem korlátos; $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}, n > 0\}$ nem nyílt, nem zárt (mert a 0 torlódási pontja), korlátos; ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor $]a, b[$ nyílt, nem zárt (mert $a$ és $b$ torlódási pontok), korlátos; ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, akkor $[a, b]$ nem nyílt (mert $a$ és $b$ nem belső pontok), zárt, korlátos; $\mathbb{R}$ nyílt, zárt, nem korlátos. Ha $\mathbb{C}$ részhalmazának tekintjük ezeket a halmazokat, akkor $]a, b[$ és $\mathbb{R}$ nem nyílt. Mint $\mathbb{C}$ részhalmaza az $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ halmaz nyílt, nem zárt, korlátos; az $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$ halmaz nem nyílt, zárt, korlátos; ha $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, akkor

$$\{z \in \mathbb{C}\colon a_1 < \Re(z) < a_2 \text{ és } b_1 < \Im(z) < b_2\}$$

nyílt, nem zárt és korlátos; ha $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, akkor

$$\{z \in \mathbb{C}\colon a_1 \leq \Re(z) \leq a_2 \text{ és } b_1 \leq \Im(z) \leq b_2\}$$

nem nyílt, zárt és korlátos; $\mathbb{C}$ nyílt, zárt, nem korlátos.

**4.1.7. Feladat [4].** Adjuk meg a valós számok egy olyan részhalmazát, amelynek pontosan három torlódási pontja van!

**4.1.8. Feladat [5].** Igaz-e, hogy tetszőleges $A \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz minden pontja torlódási pontja $A$-nak? Igaz-e ez, ha $A$ zárt?

° **4.1.9. Feladat [5].** Mik az $\{n^2/(1+n^2)\cos(2\pi n/3) : n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz torlódási pontjai?

**4.1.10. Feladat [7].** Határozzuk meg az $\{1/m + i/m^n : n, m \in \mathbb{N}^+\} \subset \mathbb{C}$ halmaz torlódási pontjait, határát és belsejét!

**4.1.11. Definíció.** Egy $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvényt *páros*nak illetve *páratlan*nak nevezünk, ha $f(x) = f(-x)$ illetve $f(x) = -f(-x)$ minden $x \in \mathbb{K}_1$-re. Egy $\mathbb{K}$-n értelmezett függvényt *periodikus*nak nevezzük $p \in \mathbb{K}$ periódussal, ha $f(x+p) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{K}$-ra. Nyilván ekkor $kp$ is periódus minden $k \in \mathbb{Z}$-re. Egy $\mathbb{K}$-beli értékű függvényt *korlátos*nak nevezünk, ha az értékkészlete korlátos.

**4.1.12. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi függvények inverzét:

(1) $x \mapsto (x+1)/(x-1)$, $1 \neq x \in \mathbb{R}$;

(2) $x \mapsto 1/(2x+3)$, $-3/2 \neq x \in \mathbb{R}$;

(3) $x \mapsto x/(1+|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.

**4.1.13. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy minden $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény felírható egy páros és egy páratlan függvény öszegeként.

**4.1.14. Folytonosság.** Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és $f : A \to \mathbb{C}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *folytonos* az $a \in A$ pontban, ha $f(a)$ bármely $V$ környezetéhez van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \in U \cap A$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $|x-a| < \delta$, akkor $\big|f(x)-f(a)\big| < \varepsilon$. Nyilván ha egy függvény folytonos egy $a$ pontban, akkor bármely megszorítása, amely értelmezve van $a$-ban, szintén folytonos $a$-ban. Figyeljük meg, hogy a folytonosság csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha $f$-et megváltoztatjuk $a$ valamely környezetén kívül, hiszen $\delta$ mindig választható legfeljebb akkorának, mint az adott környezet sugara. Ha $a$ izolált pontja $A$-nak, akkor $f$ biztos, hogy folytonos $a$-ban, hiszen elég kis sugarú környezetben már nincs is más pont.

Ha $f$ az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy *folytonos*.

Azokat az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényeket, amelyekre az

$$\frac{\big|f(y)-f(x)\big|}{|y-x|}, \quad x \neq y,\ x, y \in \mathrm{dmn}(f)$$

számhalmaz felülről korlátos, *Lipschitz-függvény*eknek nevezzük. Ezek mind folytonosak, mert ha $B$ a fenti halmaz egy pozitív felső korlátja, akkor $\varepsilon > 0$-hoz $\delta = \varepsilon/B$ választható.

A folytonosságot valós változós, illetve valós értékű függvényekre is definiálhatjuk. Ez azonban semmi újdonságot nem ad, ugyanazt kapjuk, mint ha a függvényt $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$-beli függvénynek tekintjük.

**4.1.15. Példák.** A konstans függvény, az identikus leképezés és az abszolút érték függvény Lipschitz-függvények, így folytonosak. Valóban, az első esetben a hányadosok 0-k, a második esetben 1-ek, a harmadik esetben pedig legfeljebb 1-ek.

**4.1.16. A Dirichlet-függvény.** A $\mathbb{Q}$ halmaz $\mathbb{R}$-en értelmezett karakterisztikus függvényét *Dirichlet-függvény*nek szokás nevezni.

Ez a függvény egyetlen pontban sem folytonos: ez a definíció alapján, $\varepsilon = 1$ választással adódik, mivel bármely valós szám bármely környezetében van racionális és irracionális szám is.

Egyébként ennek a függvénynek nincs legkisebb pozitív periódusa.

**4.1.17. Példa.** A sgn függvény $\mathbb{R}$-en minden nem nulla pontban folytonos, a nullában azonban nem. Az első állítás abból következik, hogy a folytonosság lokális tulajdonság és a nullától különböző pontokban a függvény lokálisan konstans, a második pedig $\varepsilon = 1$ választással a definícióból.

**4.1.18. Tétel.** *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f\colon A \to \mathbb{C}$. Az $f$ pontosan akkor folytonos $a$-ban, ha $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ folytonosak $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Mivel

$$\Big|\mathfrak{R}(f(x)) - \mathfrak{R}(f(a))\Big| = \Big|\mathfrak{R}(f(x) - f(a))\Big| \le \big|f(x) - f(a)\big|$$

és

$$\Big|\mathfrak{I}(f(x)) - \mathfrak{I}(f(a))\Big| = \Big|\mathfrak{I}(f(x) - f(a))\Big| \le \big|f(x) - f(a)\big|,$$

az $f$ folytonosságából következik $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ folytonossága: adott $\varepsilon > 0$-hoz ugyanaz a $\delta$ jó.

Megfordítva, az $\varepsilon$ felezésével, adott $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_1$ illetve $\delta_2$-t, hogy ha $|x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor

$$\Big|\mathfrak{R}(f(x)) - \mathfrak{R}(f(a))\Big| < \varepsilon/2,$$

ha pedig $|x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor

$$\Big|\mathfrak{I}(f(x)) - \mathfrak{I}(f(a))\Big| < \varepsilon/2$$

teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $|x - a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(a)\big| &\le \Big|\mathfrak{R}(f(x) - f(a))\Big| + \Big|\mathfrak{I}(f(x) - f(a))\Big| \\ &= \Big|\mathfrak{R}(f(x)) - \mathfrak{R}(f(a))\Big| + \Big|\mathfrak{I}(f(x)) - \mathfrak{I}(f(a))\Big| < \varepsilon.\square\end{aligned}$$

**4.1.19. Tétel.** *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ függvények. Ha $f(a) = 0$, $f$ folytonos $a$-ban, $g$ pedig lokálisan korlátos $a$-ban, azaz van olyan $U$ környezete $a$-nak és $K$ valós szám, hogy $x \in U \cap A$ esetén $\big|g(x)\big| < K$, akkor $fg$ folytonos $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Adott $\varepsilon > 0$-ra $\varepsilon/K$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x-a| < \delta$, $x \in A$ esetén $\big|f(x)\big| < \varepsilon/K$. Nyilván $\delta$ választható úgy is, hogy ne legyen nagyobb, mint $U$ sugara. Ekkor $\big|f(x)g(x) - f(a)g(a)\big| = \big|f(x)g(x)\big| < \varepsilon$. $\square$

**4.1.20. Tétel.** *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ és $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ az $a$-ban folytonos függvények. Ekkor*

(1) *$f + g$ és $f - g$ folytonosak $a$-ban;*

(2) *$fg$ folytonos $a$-ban;*

(3) *ha $f(a) \neq 0$, akkor $a$ valamely $U$ környezetére $1/f$ értelmezve van $A \cap U$-ban és folytonos $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Adott $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_1$ illetve $\delta_2$-t, hogy ha $|x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < \varepsilon/2$, ha pedig $|x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $\bigl|g(x) - g(a)\bigr| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $|x - a| < \delta$, $x \in A$, akkor

$$\bigl|(f+g)(x) - (f+g)(a)\bigr| \leq \bigl|f(x) - f(a)\bigr| + \bigl|g(x) - g(a)\bigr| < \varepsilon$$

és

$$\bigl|(f-g)(x) - (f-g)(a)\bigr| \leq \bigl|f(x) - f(a)\bigr| + \bigl|g(x) - g(a)\bigr| < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (1)-et.

Mivel

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(a) &= f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)\\ &= f(x)\bigl(g(x) - g(a)\bigr) + g(a)\bigl(f(x) - f(a)\bigr),\end{aligned}$$

valamint (1) szerint $g(x) - g(a)$ és $f(x) - f(a)$ folytonosak $a$-ban és értékük nulla, (2) következik az előző tételből, mert $a$ valamely $U$ környezetében $\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < 1$, ahonnan $\bigl|f(x)\bigr| < \bigl|f(a)\bigr| + 1$, azaz $f$ lokálisan korlátos.

Mivel $f(a) \neq 0$, választhatunk olyan $U$ környezetét $a$-nak, amelyben

$$\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < \frac{\bigl|f(a)\bigr|}{2}.$$

Ebben a környezetben nyilván $f(x) \neq 0$, sőt, $\bigl|f(x)\bigr| > \bigl|f(a)\bigr|/2$. Mivel

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} = \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)},$$

és a nevező abszolút értéke legalább $\bigl|f(a)\bigr|^2/2$, ha $x \in U \cap A$, a reciproka lokálisan korlátos, így (3) következik az előző tételből. □

**4.1.21. Következmény.** *Az egyváltozós polinomok folytonosak. Az egyváltozós racionális törtfüggvények folytonosak minden olyan pontban, ahol értelmezve vannak.* □

**4.1.22. Tétel.** *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$, és legyenek $f\colon A \to \mathbb{C}$, $g\colon B \to \mathbb{C}$ függvények. Ha $a \in A$ és $b = f(a) \in B$, továbbá $f$ folytonos $a$-ban, $g$ pedig folytonos $b$-ben, akkor $g \circ f$ folytonos $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Legyen $W$ egy tetszőleges környezete $g(b) = g\bigl(f(a)\bigr)$-nak. Ehhez van olyan $V$ környezete $b = f(a)$-nak, hogy ha $y \in B \cap V$, akkor $g(y) \in W$. Másrészt $V$-hez létezik olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azt jelenti, hogy ha $x \in U$, és $(g \circ f)(x)$ értelmezve van, akkor $(g \circ f)(x) \in W$. □

**4.1.23. Weierstrass tétele.** *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Van olyan* $c, d \in [a,b]$*, hogy* $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$*, ha* $x \in [a,b]$*.*

**Bizonyítás.** Csak $c$ létezését bizonyítjuk, $d$ létezésének bizonyítása teljesen hasonló. Legyen $m = \inf \operatorname{rng}(f)$ és legyen $S$ azon $x \in [a,b]$ számok halmaza, amelyekre $\inf f([x,b]) = m$. Legyen $c = \sup S$. Ha $f(c) > m$, akkor a folytonosság miatt $c$ nem felső korlátja $S$-nek. Nyilván $f(c) < m$ nem lehetséges. □

**4.1.24. Példák.** Az $x \mapsto 1/x$ függvény $]0,1[$-en nem korlátos felülről és nem veszi fel infimumát, $[1,+\infty[$-en pedig nem veszi fel infimumát. Az $x \mapsto x$ függvény $]-\infty,+\infty[$ intervallumon sem alulról, sem felülről nem korlátos.

**4.1.25. Bolzano tétele.** *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Ha* $f(a) < c < f(b)$ *vagy* $f(b) < c < f(a)$*, akkor van olyan* $x \in ]a,b[$*, amelyre* $f(x) = c$*.*

A tétel alapján algoritmust adhatunk $f(x) = c$ típusú egyenletek megoldásának közelítésére: kettéosztva, például elfelezve az intervallumot, ha az osztópont nem megoldás, valamelyik részintervallumban van megoldás, stb.

**Bizonyítás.** Elég az első esetet bizonyítani. Legyen $S = \{y \in [a,b]\colon f(y) \leq c\}$ és $x = \sup S$. Ha $f(x) > c$ lenne, akkor a folyonosság miatt lenne olyan $U$ környezete $x$-nek, hogy az abból vett $y$ pontokra $f(y) > c$, ami ellentmond annak, hogy $x$ a legkisebb felső korlát. Az $f(x) < c$ eset ellentmond annak, hogy $x$ felső korlát. □

**4.1.26. Következmény.** *Ha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum, akkor egy* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény értékkészlete is intervallum.*

**Bizonyítás.** Az intervallumokat az jellemzi, hogy bármely két elemükre az összes közbeeső elemet is tartalmazzák. A tétel szerint $f$ értékkészlete is ilyen. □

**4.1.27. Következmény.** *Ha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum, akkor egy* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha szigorúan monoton.*

**Bizonyítás.** Szigorúan monoton függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű. Megmutatjuk, hogy ha $f$ kölcsönösen egyértelmű, akkor szigorúan monoton. Azt kell megmutatni, hogy nem létezhetnek olyan $x, y, u, v \in I$ számok, hogy $x < y$, $u < v$, $f(x) < f(y)$ de $f(u) > f(v)$, mert egyenlőség nyilván nem állhat. Ha léteznének ilyen számok, akkor közülük kiválaszthatnánk hármat, mondjuk $a, b, c$-t úgy, hogy $a < b < c$ és

$$\text{vagy} \quad f(a) < f(c) > f(b) \quad \text{vagy} \quad f(a) > f(c) < f(b).$$

Mindkét esetben létezne olyan $a < p < b < q < c$, amelyre $f(p) = f(q)$, ami ellentmondás. □

**4.1.28. Jobb és bal oldali folytonosság.** Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$ és $f\colon A \to \mathbb{K}$ egy függvény, akkor ha az $f$ függvény $\{x \in A\colon x \geq a\}$ illetve $\{x \in A\colon x \leq a\}$ halmazra való megszorítása folytonos $a$-ban, akkor az mondjuk, hogy $f$ *jobbról folytonos*, illetve *balról folytonos* $a$-ban. Ha $f$ folytonos $a$-ban, akkor nyilván jobbról és balról is folytonos $a$-ban, hiszen minden megszorítása folytonos $a$-ban. Megfordítva, ha $f$ jobbról és balról is folytonos $a$-ban, akkor folytonos $a$-ban, mert minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan van olyan $\delta_+ > 0$ és $\delta_- > 0$, hogy $x \in A$, $x \geq a$, $|x - a| < \delta_+$ illetve $x \in A$, $x \leq a$, $|x - a| < \delta_-$ esetén $\bigl|f(x) - f(a)\bigr| < \varepsilon$, így $\delta = \min\{\delta_+, \delta_-\}$ választható.

**4.1.29. Példa.** A $\Theta(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és $\Theta(x) = 1$, ha $x > 0$ *Heaviside-függvény* a nullában balról folytonos, de jobbról nem.

**4.1.30. Tétel.** *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor egy $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény inverze folytonos.*

⋆ **Bizonyítás.** Csak a szigorúan monoton növekedő esettel foglalkozunk, a másik eset teljesen hasonlóan kezelhető. Legyen $c \in f(I)$, $a = f^{-1}(c)$ és $\varepsilon > 0$. Ha $a$ nem az $I$ jobb oldali végpontja, akkor válasszunk olyan $b \in I$-t, amelyre $a < b < a + \varepsilon$. Ekkor $c = f(a) < f(b)$, tehát egy alkalmas $\delta > 0$-ra $c + \delta < f(b)$. Ha $x \in f(I)$ és $c \leq x < c + \delta$, akkor $a \leq f^{-1}(x) < f^{-1}(c + \delta) < f^{-1}(f(b)) = b < a + \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $f^{-1}$ jobbról folytonos $c$-ben. Ha $a$ az $I$ jobb oldali végpontja, akkor $c$ az $f(I)$ jobb oldali végpontja, így $f^{-1}$ triviálisan jobbról folytonos $c$-ben. A bal oldali folytonosság bizonyítása teljesen hasonló. □

**4.1.31. Következmény: a gyökvonás folytonossága.** *Ha $n \in \mathbb{N}^+$, az $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ leképezés folytonos $[0, +\infty[$-en.*

**Bizonyítás.** Ez a függvény a $[0, +\infty[$-en tekintett $x \mapsto x^n$ függvény inverze. □

**4.1.32. Feladat [3].** Legyen $f$ folytonos leképezése $[0, 1]$-nek önmagába. Bizonyítandó, hogy van olyan $x$, amelyre $f(x) = x$.

# 4.2 Határérték

**4.2.1. Határérték.** Legyen $A \subset \mathbb{C}$ és $f\colon A \to \mathbb{C}$ egy függvény, $a$ pedig torlódási pontja $A$-nak. Azt írjuk, hogy $f(x) \to b$, ha $x \to a$, vagy $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ha $b \in \mathbb{C}$ és a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \setminus \{a\}, \\ b, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos $a$-ban. Másként fogalmazva ez azt jelenti , hogy $b$ bármely $V$ környezetéhez van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \neq a$, $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $0 < |x - a| < \delta$, akkor $\bigl|f(x) - b\bigr| < \varepsilon$. A határérték és a folytonosság definíciójának összevetéséből azt kapjuk, hogy ha $a$ torlódási pontja $A$-nak, akkor $f$ pontosan akkor folytonos $a$-ban, ha $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Nyilván ha egy függvény határértéke $a$-ban $b$, akkor bármely megszorításának, ha az értelmezési tartománynak torlódási pontja $a$, szintén határértéke $b$. Figyeljük meg, hogy a határérték létezése és értéke csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha $f$-et megváltoztatjuk $a$ valamely környezetén kívül.

A határértéket valós változós, illetve valós értékű függvényekre is definiálhatjuk. Ez azonban semmi újdonságot nem ad, ugyanazt kapjuk, mint ha a függvényt $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$-beli függvénynek tekintjük.

**4.2.2. Tétel.** *Függvény határértéke, ha létezik, egyértelmű.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ és $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$. Bármely $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_1$ illetve $\delta_2$-t, hogy ha $0 < |x - a| < \delta_1$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_1| < \varepsilon$, ha pedig $0 < |x - a| < \delta_2$, $x \in A$, akkor $|f(x) - b_2| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

választással, ha $0 < |x - a| < \delta$, $x \in A$ (ilyen $x$ létezik, mivel $a$ torlódási pontja $A$-nak), akkor

$$|b_2 - b_1| \le \bigl|f(x) - b_1\bigr| + \bigl|f(x) - b_2\bigr| < 2\varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, csak $b_1 = b_2$ lehetséges. □

**4.2.3. Tétel.** *Legyen $A \subset \mathbb{C}$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ függvények.*

(1) *Pontosan akkor létezik $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ha a*

$$\lim_{x\to a} \Re(f)(x) = b' \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to a} \Im(f)(x) = b''$$

*határértékek léteznek, továbbá ekkor $b = b' + ib''$.*

(2) *Ha $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, a $g$ pedig lokálisan korlátos, azaz van olyan $U$ környezete $a$-nak és $K$ valós szám, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén $\bigl|g(x)\bigr| < K$, akkor $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 0$.*

*Ha $\lim_{x\to a} f(x) = b$ és $\lim_{x\to a} g(x) = c$, akkor*

(3) *$\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$;*

(4) *$\lim_{x\to a}(fg)(x) = bc$;*

(5) *ha $b \neq 0$, akkor $a$ valamely $U$ környezetére $1/f(x)$ értelmezve van, ha $a \neq x \in A \cap U$ és $\lim_{x\to a}(1/f)(x) = 1/b$.*

**Bizonyítás.** A tétel a folytonosság és a határérték kapcsolatából következik. □

**4.2.4. Példa.** Határátmenetek általában nem cserélhetők fel. Például

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x - y}{x + y} = 1,$$

de

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x - y}{x + y} = -1.$$

**4.2.5. Jobb és bal oldali határérték.** Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ és $f\colon A \to \mathbb{K}$ egy függvény, akkor az $f$ függvény $\{x \in A\colon x \ge a\}$ illetve $\{x \in A\colon x \le a\}$ halmazra való megszorítása határértékeit $a$-ban (ha léteznek) az $f$ *jobb oldali határérték*ének, illetve *bal oldali határérték*ének nevezzük. Jelölésük : $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ illetve $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ vagy $f(a+)$ illetve $f(a-)$. A folytonosság és a határérték kapcsolata alapján világos, hogy ha mindkét oldali határérték létezik $a$-ban, akkor a határérték pontosan akkor létezik, hogyha a jobb és a bal oldali határérték megegyeznek, és ekkor ugyanaz a szám a határérték is.

**4.2.6. Példa.**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} = 1,$$

mert ha $x \neq 2$, akkor a függvény megegyezik az $1/(x-1)$ függvénnyel, ami folytonos 2-ben. Hasonló érvelés használható jobb és bal oldali határérték meghatározására is. Erősebb eszközt határérték meghatározására a differenciálszámításnál fogunk tanulni.

**4.2.7. Szakadások.** Ha $f$ nem folytonos $a$-ban, akkor azt mondjuk, hogy *szakadás*a van $a$-ban. Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik, de nem egyenlő $f(a)$-val, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *megszüntethető szakadás*a van, egyébként a szakadás *nem megszüntethető szakadás*.

Ha $f$ valós változós, $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ és $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ léteznek, de nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *elsőfajú szakadás*a vagy *ugrás*a van $a$-ban, minden más nem megszüntethető szakadást *másodfajú szakadás*nak nevezünk.

**4.2.8. Példák.** A sgn függvény $\mathbb{R}$-en minden nem nulla pontban folytonos, a nullában nem megszüntethető elsőfajú szakadása van, mert a jobb oldali határértéke 1, a bal oldali pedig $-1$. Az $|\operatorname{sgn}|$ függvénynek $\mathbb{R}$-en a nullában megszüntethető szakadása van. A Dirichlet-függvénynek minden pontban nem megszüntethető másodfajú szakadása van, mert nem létezik határértéke, ugyanis a racionális számokra vett megszorításának a határértéke 1, míg az irracionális számokra vett megszorításának határértéke 0. Legyen $f(x) = x$, ha $x \in \mathbb{Q}$, és $f(x) = 0$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Az $f$ a nullában folytonos, minden más pontban nem megszüntethető másodfajú szakadása van.

$\star$ **4.2.9. Példa.** A *Riemann-függvény* nulla, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ és $1/q$, ha $x \in \mathbb{Q}$ és $q$ a legkisebb pozitív természetes szám, amivel $x$ felírható $p/q$, $p \in \mathbb{Z}$ alakban. Ez a függvény az irracionális pontokban folytonos, a racionális pontokban megszüntethető elsőfajú szakadása van: A határérték mindenütt nulla, mert $a$ egy elég kis környezetében nincs olyan pont, ahol a függvényérték nagyobb, mint $1/q$, legfeljebb $a$ lehet ilyen. $\square$

**4.2.10. A bővített valós és bővített komplex számok topológiája.** Az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazban $+\infty$ *környezet*ein $]a, +\infty]$, $a \in [-\infty, +\infty[$ alakú halmazokat, $-\infty$ *környezet*ein pedig $[-\infty, a[$, $a \in ]-\infty, +\infty]$ alakú halmazokat fogunk érteni. Az $\overline{\mathbb{C}}$ halmazban $\infty$ környezetein az $\{\infty\} \cup \{z\colon |z| > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ alakú halmazokat értjük.

Mindazokat a fogalmakat, amelyeket környezetek segítségével értelmeztünk (belső pont, izolált pont, torlódási pont, nyílt halmaz, zárt halmaz, lokális tulajdonság, folytonosság, jobb és bal oldali folytonosság, határérték, jobb és bal oldali határérték, szakadás, megszüntethető szakadás, nem megszüntethető szakadás, elsőfajú szakadás, másodfajú szakadás), átvihetjük erre az esetre is. Számos tétel is érvényben marad, például a 4.1.19, 4.1.22 és 4.2.2 tételek.

**4.2.11. Példa.** A környezetek definíciója alapján nyilván

$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} 1/x = 0,$$

$$\lim_{x\downarrow 0} 1/x = +\infty, \qquad \lim_{x\uparrow 0} 1/x = -\infty.$$

Komplexben

$$\lim_{x\to 0} 1/x = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} 1/x = 0.$$

Általánosabban, ha $f$ bővített valós értékű pozitív függvény, és $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, akkor $\lim_{x\to a} 1/f(x) = +\infty$; valóban, ha $K > 0$ tetszőleges, akkor $\varepsilon = 1/K$-hoz választva olyan $U$ környezetét $a$-nak, amelyre $a \neq x \in U \cap \operatorname{dmn}(f)$ esetén $\left|f(x) - 0\right| < \varepsilon$, ezekre az $x$-ekre $f(x) > K = 1/\varepsilon$. Hasonlóan, ha $f(x) < 0$ minden $x$-re az $a$ egy környezetéből, akkor $\lim_{x\to a} 1/f(x) = -\infty$; végül komplexben, ha $f(x) \neq 0$ minden $x$-re az $a$ egy környezetéből, akkor $\lim_{x\to a} 1/f(x) = \infty$.

**4.2.12. Műveletek bővített valós és bővített komplex számokkal.** Legyen $\overline{\mathbb{R}}$-ben

$$+\infty + x = +\infty = x + (+\infty), \quad \text{ha} \quad x \in ]-\infty, +\infty];$$

$$-\infty + x = -\infty = x + (-\infty), \quad \text{ha} \quad x \in [-\infty, +\infty[;$$

$$+\infty \cdot x = +\infty = x \cdot (+\infty), \quad \text{ha} \quad x \in ]0, +\infty];$$

$$+\infty\cdot x=-\infty=x\cdot(+\infty),\quad \text{ha}\quad x\in[-\infty,0[;$$

$$-\infty\cdot x=-\infty=x\cdot(-\infty),\quad \text{ha}\quad x\in\,]0,+\infty];$$

$$-\infty\cdot x=+\infty=x\cdot(-\infty),\quad \text{ha}\quad x\in[-\infty,0[;$$

$$x/+\infty=0=x/-\infty,\quad \text{ha}\quad x\in\,]-\infty,+\infty[.$$

Más esetekben az eredményt nem definiáljuk.

Legyen $\overline{\mathbb{C}}$-ban

$$\infty+x=\infty=x+(\infty),\quad \text{ha}\quad x\in\overline{\mathbb{C}};$$

$$\infty\cdot x=\infty=x\cdot\infty,\quad \text{ha}\quad 0\neq x\in\overline{\mathbb{C}};$$

$$x/\infty=0,\qquad x/0=\infty,\quad \text{ha}\quad x\in\mathbb{C}.$$

A $0\cdot\infty$ és $\infty\cdot 0$ szorzatokat nem definiáljuk.

**4.2.13. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $A\subset\overline{\mathbb{K}}_1$, $a$ torlódási pontja $A$-nak, $f,g\colon A\to\overline{\mathbb{K}}_2$ és $\lim_{x\to a}f(x)=b$, $\lim_{x\to a}g(x)=c$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor*

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=b+c$;

(2) $\lim_{x\to a}(fg)(x)=bc$;

(3) $\lim_{x\to a}(f/g)(x)=b/c$.

Megjegyezzük, hogy van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy (3)-ban $a\neq x\in U\cap A$ esetén a bal oldalon álló függvény értelmezve van.

**Bizonyítás.** Az $a\in\mathbb{K}_1$, $b,c\in\mathbb{K}_2$ eseteket már láttuk. A többi eset hasonlóan bizonyítható. Például ha $\overline{\mathbb{K}}_2=\overline{\mathbb{R}}$, $b\in\mathbb{R}$ és $c=+\infty$, akkor van olyan $U_1$ környezete $a$-nak, hogy $a\neq x\in U_1\cap A$ esetén $\left|f(x)-b\right|<1$, valamint tetszőleges $B\in\mathbb{R}$-hez van olyan $U_2$ környezete $a$-nak, hogy $a\neq x\in U_2\cap A$ esetén $g(x)>B-b+1$. Innen $U=U_1\cap U_2$ jelöléssel $a\neq x\in U\cap A$ esetén $(f+g)(x)$ értelmezve van, és nagyobb, mint $B$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$. □

**4.2.14. Megjegyzés.** Éppen ez a tétel motiválja, hogy mikor értelmezzük a műveleteket: $A+B$, $AB$ és $A/B$ pontosan akkor és úgy van definiálva, hogy a fenti tétel igaz legyen. Például $\lim_{x\to+\infty}1/x^2=0$ és $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, szorzatuk határértéke pedig 0, míg $\lim_{x\to+\infty}1/x=0$ és $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, szorzatuk határértéke pedig $+\infty$, ezért $0\cdot(+\infty)$-t nem definiáltuk.

**4.2.15. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $A\subset\overline{\mathbb{K}}$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és az $f,g\colon A\to\overline{\mathbb{R}}$ függvényeknek létezik határértéke $a$-ban.*

(1) *Ha $\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}g(x)$, akkor van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy*

$$f(x)<g(x),\qquad \text{ha}\quad a\neq x\in U\cap A;$$

(2) *ha $a$ valamely $U$ környezetére $a\neq x\in U\cap A$ esetén $f(x)\le g(x)$, akkor*

$$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $b=\lim_{x\to a}f(x)<d<c=\lim_{x\to a}g(x)$, és válasszuk $V$ illetve $W$ környezeteit $b$-nek illetve $c$-nek úgy, hogy $V\subset[-\infty,d[$, $W\subset\,]d,+\infty]$ teljesüljön. Legyen $U$ az $a$ megfelelő környezeteinek metszete. Ekkor $a\neq x\in U\cap A$ esetén $f(x)<d<g(x)$, amivel beláttuk (1)-et. (2) indirekt következik (1)-ből. □

**4.2.16. Tétel: rendőr-elv.** *Ha $A \subset \overline{\mathbb{K}}$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és az $a$ valamely $U$ környezetére az $f, g, h\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényekre $f(x) \le g(x) \le h(x)$, továbbá*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x),$$

*akkor*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $V$ környezete az $f$ és $h$ közös határértékének, $U$ pedig az $a$ megfelelő környezeteinek metszete. □

**4.2.17. Tétel.** *Legyen $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a = \inf A$ és $f\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ egy monoton függvény. Tegyük fel, hogy $a$ torlódási pontja $A$-nak.*

(1) *ha $f$ monoton növekedő, akkor* $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \inf_{a < x \in A} f(x)$;

(2) *ha $f$ monoton csökkenő, akkor* $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \sup_{a < x \in A} f(x)$.

Hasonló állítás igaz a bal oldali határértékre, ha $a = \sup A$, de akkor az inf és sup szerepe felcserélődik.

**Bizonyítás.** Csak a monoton növekedő függvény esetével foglalkozunk, a másik eset hasonlóan kezelhető. Legyen az $\{f(x)\colon a < x \in A\}$ számok halmazának alsó határa $b$. Meg kell mutatnunk, hogy $b = f(a+)$. Ha $b = +\infty$, akkor $f$ mindenütt $+\infty$. Egyébként legyen $c > b$. Mivel $b$ pontos alsó korlát, van olyan $a < d \in A$, hogy $b \le f(d) < c$. Innen $a < x \in A$, $x < d$ esetén $b \le f(x) < c$. □

**4.2.18. Következmény.** *Legyen $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ és $f\colon ]a, b[ \to \mathbb{R}$ egy monoton függvény, $a < c < b$. Ha $f$ monoton növekedő, akkor*

$$\sup_{a<x<c} f(x) = f(c-) \le f(c) \le f(c+) = \inf_{c<x<b} f(x),$$

*ha pedig $f$ monoton csökkenő, akkor*

$$\inf_{a<x<c} f(x) = f(c-) \ge f(c) \ge f(c+) = \sup_{c<x<b} f(x),$$

*tehát csak elsőfajú szakadási helye lehet $c$-ben, továbbá mindkét esetben csak megszámlálható sok olyan $c$ van, amelyre $f(c-) \ne f(c+)$.*

**Bizonyítás.** Csak az utolsó állítást kell még belátnunk. Az összes $]f(c-), f(c+)[$ nyílt intervallumok halmaza, ahol $c$ az $]a, b[$ azon pontjait futja be, ahol a jobb és bal oldali határérték nem egyenlő, diszjunkt nem üres intervallumokból áll. Mivel minden intervallum tartalmaz racionális számot, az intervallumok halmaza megszámlálható. □

°⋆ **4.2.19. Példa.** Legyen $x_n$ egy olyan sorozat, amelynek minden tagja különböző és értékkészlete $\mathbb{Q}$. Legyen $f(x) = \sum_{x_n < x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $f$ szigorúan monoton növekedő, az irracionális számokban a jobb és bal oldali határértéke megegyezik, $x_n$-ben pedig a két határérték különbsége $1/2^n$. □

**4.2.20. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő és minden racionális szám az értékkészletében van, akkor folytonos. □

**4.2.21. Feladat [5].** Határozzuk meg a jobb és bal oldali határértékeket az alábbi függvényekre:

(1) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$;

(2) $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$;

(3) $x \mapsto x\lfloor 1/x \rfloor$;

(4) $x \mapsto \lfloor x \rfloor / x$.

**4.2.22. Feladat [8].** Határozzuk meg a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + \alpha x} - x - 1},$$

határértéket!

**4.2.23. Feladat [8].** Hol és milyen szakadása van az alábbi függvényeknek:

(1) $(x^2 - 4x + 3)/(x^3 - 2x^2 - x + 2)$;

(2) $(x - a)/(\sqrt[3]{x} - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

**4.2.24. Feladat [5].** Lipschitz-függvény-e $x \mapsto \sqrt{x}$ a $[0, 1]$ intervallumon?

# 4.3 Sorozatok

**4.3.1. Sorozatok.** A sorozatok $\mathbb{N}^+$-on értelmezett függvények, így beszélhetünk $\overline{\mathbb{K}}$-beli sorozatok $+\infty$-ben vett határértékéről. Az, hogy $A$ az $a_n$ sorozat határértéke, azt jelenti, hogy $A$ bármely környezetére véges sok $n$ kivételével minden $n$-re $a_n$ benne van az adott környezetben. Jelölése: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \to A$. Tudjuk, hogy a határérték egyértelmű. Világos, hogy a határérték nem változik, ha a sorozatnak véges sok tagját megváltoztatjuk. Ha $A \in \mathbb{K}$, akkor az $a_n$ sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergens* vagy $A$-hoz *konvergál*. Az $a_n$ akkor és csak akkor konvergál $A$-hoz, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$ (itt $n > N$ illetve $|a_n - A| \leq \varepsilon$ is írható). Konvergens sorozatnak véges sok tag kivételével minden tagja $\mathbb{K}$-ban van. Egy sorozatot *korlátos*nak nevezünk, ha értékkészlete korlátos. Konvergens $\mathbb{K}$-beli sorozat nyilván korlátos. Ha egy sorozat nullához konvergál, akkor *nullsorozat*nak nevezzük. Az, hogy $a_n$ konvergál $A$-hoz, azzal ekvivalens, hogy $a_n - A$ nullsorozat. Az, hogy $a_n$ nullsorozat, azzal ekvivalens, hogy $|a_n|$ nullsorozat $\mathbb{R}$-ben. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor *divergens*nek nevezzük. Természetesen indexelhetjük a sorozatokat nullától is. Ha $n_k$ természetes számok (illetve poyitív természetes számok) egy szigorúan monoton növekedő sorozata, akkor az $a_{n_k}$ sorozatot az $a_n$ sorozat egy *részsorozat*ának nevezzük. Ha az $a_n$ sorozatnak van határértéke, akkor a részsorozatnak is ugyanaz a határértéke. Ha $n_k$ egy permutáció, akkor az $a_{n_k}$ sorozatot az $a_n$ sorozat egy *permutáció*jának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy egy *konstans sorozat*, azaz egy olyan sorozat, amelynek minden tagja ugyanaz a $c$ szám, konvergens, és határértéke az adott $c$ konstans.

**4.3.2. Feladat [0].** Az alábbi sorozatok közül melyek az 1,2,3,... sorozat részsorozatai, illetve permutációi:

(1) $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$;

(2) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$;

(3) $2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots$;

(4) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$.

**4.3.3. Feladat [0].** Határozzuk meg az $a_n = 1/n^2$ sorozatnak az alábbi indexsorozatokhoz tartozó részsorozatát:

(1) $11, 12, 13, \ldots$;

(2) $5, 10, 15, 20, \ldots$;

(3) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$.

**4.3.4. Feladat [5].** Az alábbi sorozatok közül melyek monoton sorozatok? Melyek korlátosak?

(1) $1 + 1/n^2$;

(2) $1 + (-1)^n/n$;

(3) $((5n + 1)/(n - 11{,}5)$;

(4) $a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n^2$, $a_1 < a_2$ adott.

**4.3.5. Feladat [2].** Írjuk fel az alábbi sorozatok egy monoton részsorozatát:

(1) $a_n = (-1)^{3n+2}$;

(2) $a_n = (-1)^n/n + n/(n - 100{,}5)$.

**4.3.6. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy ha $a_n$ monoton, akkor

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

is monoton!

**4.3.7. Feladat [3].** Adjunk meg olyan valós számsorozatot, amelynek határértéke $+\infty$, de amelyre minden $k$-hoz van olyan $n > m > k$, amelyre $a_n < a_m$.

A következő négy tétel azonnal következik a függvények határértékére tanultakból.

**4.3.8. Tétel.** *Egy $a_n$ komplex számsorozat pontosan akkor konvergál $\mathbb{C}$-ben, ha $\Re(a_n)$ és $\Im(a_n)$ konvergálnak $\mathbb{R}$-ben, és ha $a_n \to A$, $\Re(a_n) \to A'$, $\Im(a_n) \to A''$, akkor $A = A' + iA''$. Speciálisan, valós számsorozatokra az $\mathbb{R}$-beli és a $\mathbb{C}$-beli konvergencia és határérték egybeesik.* $\square$

**4.3.9. Tétel.** *Ha $a_n$ nullsorozat, $b_n$ pedig korlátos sorozat $\mathbb{C}$-ben, akkor $a_n b_n$ nullsorozat.* $\square$

**4.3.10. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $\overline{\mathbb{K}}$-ban $a_n \to A$ és $b_n \to B$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor*

(1) $(a_n + b_n) \to (A + B)$;

(2) $(a_n b_n) \to (AB)$;

(3) $(a_n/b_n) \to (A/B)$. $\square$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon álló sorozatok esetleg véges sok helyen nincsenek értelmezve.

**4.3.11. Tétel.** *Egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli monoton sorozatnak létezik határértéke. Monoton növekedő sorozat határértéke az értékkészletének felső határa, monoton csökkenő sorozat határértéke az értékkészletének alsó határa.* □

**4.3.12. Példák.** (1) Az $a_n = a_0 + nd$ sorozat *számtani sorozat* $d = 0$ esetén konstans, konvergens, határértéke $a_0$, korlátos, értékkészlete egyelemű; $d \neq 0$ esetén nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{C}}$-ben $\infty$. Ha $a_0$ és $d$ valósak, akkor $\overline{\mathbb{R}}$-ban határértéke $d > 0$ esetén $+\infty$, ha pedig $d < 0$, akkor $-\infty$.

(2) Az $a_n = n^2$ sorozat nem korlátos, divergens, értékkészlete végtelen, határértéke $\overline{\mathbb{R}}$-ban $+\infty$.

(3) Az $a_n = 1/n$ sorozat nullsorozat (legyen $N\varepsilon > 1$), korlátos, értékkészlete végtelen.

(4) Az $a_n = 1 + (-1)^n/n$ sorozat konvergens, határértéke 1, korlátos, értékkészlete végtelen.

(5) Az $a_n = i^n$ sorozat divergens, korlátos, értékkészlete négyelemű, határértéke nincs.

**4.3.13. Átviteli elv.** *Tegyük fel, hogy $A \subset \overline{\mathbb{K}}_1$, $f\colon A \to \overline{\mathbb{K}}_2$, és a torlódási pontja $A$-nak. Pontosan akkor teljesül, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ha minden olyan $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, teljesül hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

**Bizonyítás.** Ha $\lim_{x\to a} f(x) = b$, akkor minden $V$ környezetéhez $b$-nek van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy $x \in U \cap A$, $x \neq a$ esetén $f(x) \in V$. Egy adott $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, legyen $N$ olyan index, hogy $n \geq N$ esetén $x_n \in U$; ekkor $f(x_n) \in V$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = b$ nem teljesül. Ekkor van olyan $V$ környezete $b$-nek, hogy $a$ egyetlen $U$ környezetére sem teljesül, hogy $f(U \setminus \{a\}) \subset V$. Ha $a \in \mathbb{K}_1$, akkor $U = \mathbb{U}_{1/n}(a)$ választással van olyan $x_n \in \mathbb{U}_{1/n}(a) \cap A$, $x_n \neq a$, amelyre $f(x_n) \notin V$. Az így kiválasztott $x_n$ sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, de $\lim n \to \infty f(x_n) = b$ nem teljesül. Ha $\overline{\mathbb{K}}_1 = \overline{\mathbb{R}}$, $a = +\infty$, akkor $U = \,]n, +\infty]$ választással hasonlóan járunk el. Az $a = -\infty$ és $a = \infty$ esetek is hasonlóan kezelhetők.

**4.3.14. Felső és alsó határérték.** Legyen $a_n$ egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli sorozat, és $b_n = \sup_{k\geq n} a_k$. A $b_n$ sorozat monoton csökkenő, így létezik határértéke. Ezt az $a_n$ sorozat *felső határértékének* nevezzük, és $\limsup_{n\to\infty} a_n$-nel jelöljük. Tehát

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k.$$

Hasonlóan, a $c_n = \inf_{k\geq n}$ sorozat monoton növekvő, így létezik határértéke; ezt az $a_n$ sorozat *alsó határértékének* nevezzük, és $\liminf_{n\to\infty} a_n$-el jelöljük. Tehát

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Mivel nyilván $c_n \leq b_n$, kapjuk, hogy $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

**4.3.15. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha $x > \limsup_{n\to\infty} a_n$, akkor csak véges sok olyan index van, amelyre $a_n \geq x$;*

(2) *ha $x < \limsup_{n\to\infty} a_n$, akkor végtelen sok olyan index van, amelyre $a_n \geq x$;*

(3) *az előző tulajdonságok jellemzik a* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;*

(4) *ha* $x < \liminf_{n\to\infty} a_n$*, akkor csak véges sok olyan index van, amelyre* $a_n \le x$*;*

(5) *ha* $x > \liminf_{n\to\infty} a_n$*, akkor végtelen sok olyan index van, amelyre* $a_n \le x$*;*

(6) *az előző tulajdonságok jellemzik a* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *bővített valós számot, azaz ez az egyetlen bővített valós szám, amely mindkét tulajdonsággal rendelkezik;*

(7) $\lim_{n\to\infty} a_n$ *pontosan akkor létezik, ha* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$*, és ekkor* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

**Bizonyítás.** Az előző definíció jelöléseit fogjuk használni. Ha (1) nem teljesülne, akkor $b_n \ge x$ lenne minden $n$-re. Ha (2) nem teljesülne, akkor egy indextől kezdve $b_n \le x$ teljesülne. (3) abból következik, hogy ha $A < B$, és $A$ is, $B$ is rendelkezne az (1) és (2) tulajdonságokkal, akkor választva egy $A < x < B$ számot ellentmondást kapnánk. (4)–(6) bizonyítása teljesen hasonló (1)–(3) bizonyításához.

Végül ha $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ létezik, akkor $x > A$ esetén (1), $x < A$ esetén pedig (2) teljesül, így $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Teljesen hasonlóan adódik, hogy $A = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Megfordítva, ha $A = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$, akkor bármely $x > A$-ra véges sok index kivételével $a_n < x$, és bármely $y < A$-ra véges sok index kivételével $a_n > y$, így $A$ bármely környezetében a sorozatnak véges sok kivételével minden tagja benne van. □

**4.3.16. Állítás.** *Ha* $a_n$ *és* $b_n$ *két* $\overline{\mathbb{R}}$*-beli sorozat, és véges sok tag kivételével* $a_n \le b_n$*, akkor* $\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n$ *és* $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n$. □

**4.3.17. Cauchy-sorozatok.** Egy $\mathbb{K}$-beli sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $n, m \ge N$, akkor $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

A fogalom jelentőségét az adja, hogy anélkül dönthetünk segítségével a konvergenciáról, hogy ismernénk a határértéket.

**4.3.18. Cauchy-féle konvergenciakritérium.** *Egy* $\mathbb{K}$*-beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens.*

⋆ **Bizonyítás.** Az egyik irány egyszerű: ha $a_n \to A$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \ge N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon/2$, így $n, m \ge N$ esetén $|a_n - a_m| \le |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon$.

A megfordítást elég valós sorozatokra bizonyítani, mert ha $a_n$ Cauchy-sorozat, akkor a valós és a képzetes része is. Először is vegyük észre, hogy egy Cauchy-sorozat korlátos, mert ha $n, m \ge N$ esetén $|a_n - a_m| < 1$, akkor az értékkészlete $\mathbb{U}_1(a_N)$ és véges sok egyelemű halmaz egyesítése. Legyen $A = \limsup_{n\to\infty} a_n$. A korlátosság miatt $A \in \mathbb{R}$. Ha $x < A$, választva $\varepsilon = (A - x)/2$-höz $N$-et, $\sup_{k\ge N} a_k \ge A$ miatt van olyan $m \ge N$, hogy $a_m > A - \varepsilon$. Innen $n \ge N$ esetén $a_n > A - 2\varepsilon = x$. Ez azt jelenti, hogy $\liminf_{n\to\infty} a_n = A$, amiből $a_n \to A$. □

⋆ **4.3.19. Megjegyzés.** A racionális számok körében nem minden Cauchy-sorozat konvergens. Ha veszünk egy olyan racionális számokból álló monoton növekedő sorozatot, amelynek $\mathbb{R}$-ben a határértéke $\sqrt{2}$, akkor ez Cauchy-sorozat, de $\mathbb{Q}$-ban nem konvergens.

**4.3.20. Nevezetes sorozatok határértéke.**

(1) *ha* $p \in \mathbb{N}^+$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} 1/n^{1/p} = 0$*;*

(2) *ha* $a \in \mathbb{R}^+$*, akkor* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$*;*

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(4) *ha* $a \in \mathbb{R}^+$ *és* $k \in \mathbb{N}$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} n^k/(1+a)^n = 0$;

(5) *ha* $a \in \mathbb{C}$, *akkor* $|a| < 1$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, $a = 1$ *esetén* $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ *esetén* $a^n$ *korlátos, de nem konvergens,* $|a| > 1$ *esetén* $a^n$ *nem korlátos, így nem konvergens;*

(6) *ha* $a \in \mathbb{C}$, *akkor* $\lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0$.

**Bizonyítás.** (1) bizonyításához legyen $N > (1/\varepsilon)^p$.

Ha (2)-ben $a > 1$, akkor legyen $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Ekkor $x_n > 0$, és a binomiális tétel alapján $1 + nx_n \le (1+x_n)^n = a$, így $0 < x_n \le (a-1)/n$, ezért $x_n \to 0$. Az $a = 1$ eset triviális. Ha $0 < a < 1$, vegyük a reciprokát, és arra alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat.

(3) bizonyításához legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Ekkor $x_n \ge 0$, és a binomiális tétel alapján $n = (1+x_n)^n \ge n(n-1)x_n^2/2$. Ezért $0 \le x_n \le \sqrt{2/(n-1)}$, ha $n \ge 2$. Így (1)-ből következik az állítás.

(4) bizonyításához legyen $K = k+1$. Ha $n > 2K$, akkor

$$(1+a)^n > \binom{n}{K} a^K = \frac{n(n-1)\cdots(n-K+1)}{K!} a^K > \frac{n^K a^K}{2^K K!}.$$

Ezért

$$0 < \frac{n^k}{(1+a)^n} < \frac{2^K K!}{a^K} n^{k-K}, \quad \text{ha} \quad n > 2K.$$

Mivel $k - K = -1$, (1) alapján $n^{k-K} \to 0$.

(5)-ben az $a = 0$ és $a = 1$ esetek triviálisak. A $0 < |a| < 1$ esetben $|a| = 1/(1+b)$ valamely $b > 0$-ra, így (4)-ből $k = 0$ választással következik, hogy $|a|^n$ és így $a^n$ is nullsorozat. Ha $|a| > 1$, akkor $a^n$ nem lehet korlátos, mert akkor $1/|a|^n \ge \varepsilon$ lenne valamely $\varepsilon > 0$-ra. Végül ha $|a| = 1$, $a \neq 1$, akkor $|a^n| = 1$ de

$$|a^{n+1} - a^n| = |a^{n+1} - a^n|/|a|^n = |a-1|,$$

így $a^n$ nem Cauchy-sorozat.

(6) bizonyításához legyen $N = \lfloor |a| \rfloor + 1$. Ekkor $|a|/n < 1$, ha $n \ge N$, és így

$$\left| \frac{a^n}{n!} \right| = \prod_{k=1}^{n} \frac{|a|}{k} \le \frac{|a|}{n} \prod_{k=1}^{N} \frac{|a|}{k} = \frac{|a|^{N+1}}{N!} \frac{1}{n},$$

ha $n > N$, ahonnan következik, hogy a sorozat nullsorozat. □

**4.3.21. Feladat [6].** Melyik sorozatnak van határértéke, melyiknek nincs? Mi a határérték?

(1) $1 + 1/n^2$;

(2) $1 + (-1)^n/n$;

(3) $((5n+1)/(n-11{,}5)$;

(4) $a^n/(1+a^n)$, $a \in \mathbb{R}$;

(5) $a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n^2$, $a_1 < a_2$ adott;

(6) $a_n = (-1)^{3n+2}$;

(7) $a_n = (-1)^n/n + n/(n-100{,}5)$;

(8) $a_n = \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$;

(9) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

**4.3.22. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $a_n \to A > 1$, akkor $a_n^n \to +\infty$.

**4.3.23. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $a_n \to A$, ahol $|A| < 1$, akkor $a_n^n \to 0$.

**4.3.24. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $a_n \to A > 0$, akkor $\sqrt[n]{a_n} \to 1$.

**4.3.25. Feladat [4].** Mennyi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n - n}$?

**4.3.26. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy ha $a_n$-nek van határértéke, akkor a

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

sorozatnak is ugyan az a határértéke!

**4.3.27. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_k \geq 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$$

**4.3.28. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ és $\sup(A) = \alpha \notin A$, akkor van olyan szigorúan monoton növekedő $A$-beli sorozat, amelyre $a_n \to \alpha$. Igaz-e ez, ha $\alpha \in A$?

**4.3.29. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, rekurzióval definiált sorozatok konvergensek, és határozzuk meg a határértéküket:

(1) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, ahol $a > 0$ adott;

(2) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1/(1 - a_n)$;

(3) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1/(4 - a_n)$;

(4) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$;

(5) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2}\sqrt{a_n}$.

**4.3.30. Feladat [5].** Legyen $a > 0$ adott, és legyen $a_1 = a$, $a_{n+1} = (a_n + a/a_n)/2$. Bizonyítandó, hogy $a_n \to \sqrt{a}$.

**4.3.31. Feladat [5].** Legyen $a, b > 0$, $a_1 = a$, $b_1 = b$ és $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Mutassuk meg, hogy $a_n$ és $b_n$ közös határértékhez tartanak! (Ez az $a$ és $b$ *számtani-mértani közepe*.)

**4.3.32. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi sorozatok $\limsup$-ját és $\liminf$-jét:

(1) $(-1)^n$;

(2) $(n + (-2)^n)/(n + 2^n)$;

(3) $2\sqrt{n^2+2}$, ha $n$ páros, $3\sqrt[3]{n^3+3}$ egyébként;

(4) $(n^2/(1+n^2))\cos(2n\pi/3)$.

## 4.4 Sorok

**4.4.1. Sorok.** Ha $a_0, a_1, \ldots$ egy $\mathbb{K}$-beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ vagy $\sum a_n$ *végtelen sor*t vagy röviden *sor*t az $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *részletösszeg*ek sorozatával azonosítjuk. Az $a_n$ számot a sor $n$-edik *tag*jának nevezzük. A sor tagjait rendszerint nullától indexeljük, mert a sorok szorzásánál ez a célszerű. A részletösszegekből visszakaphatjuk a sor tagjait, hiszen $a_0 = s_0$ és $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, és *összege* $A$, ha az $s_n$ részletösszegek sorozata $A$-hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha $\overline{\mathbb{R}}$-ban $s_n \to +\infty$ illetve $s_n \to -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\overline{\mathbb{C}}$-ban $s_n \to \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, de ilyenkor a sort nem nevezzük konvergensnek. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Konvergens, de nem abszolút konvergens sort *feltételesen konvergens*nek nevezünk. Sorokat általában nem szabad átrendezni, még zárójelezni sem. Például $1-1+1-1+\cdots$ divergens, de $(1-1)+(1-1)+\cdots$ összege 0, míg $1-(1-1)-(1-1)-\cdots$ összege 1.

A sorozatokra vonatkozó legtöbb tétel egyszerűen átfogalmazható sorokra. Például a sorozatok összegére és konstansszorosára vonatkozó tétel, illetve a Cauchy-féle konvergenciakritérium az alábbi alakba írható át:

**4.4.2. Tétel.** *Legyen $c \in \mathbb{K}$, a $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorokra $\sum a_n = A \in \overline{\mathbb{K}}$ és $\sum b_n = B \in \overline{\mathbb{K}}$. Ha $A + B$ definiálva van, akkor $\sum(a_n + b_n) = A + B$, és ha $cA$ definiálva van, akkor $\sum(ca_n) = cA$.*

**Bizonyítás.** A részletösszegek felhasználásával azonnal következik. □

**4.4.3. Cauchy-féle konvergenciakritérium.** *A $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergál, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $m \ge n \ge N$ esetén $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$.*
□

**4.4.4. Következmény.** *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

**Bizonyítás.** Legyen $m = n$. □

**4.4.5. Állítás.** *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergál, ha részletösszegei korlátos sorozatot alkotnak.*

**Bizonyítás.** A monoton sorozatokra vonatkozó tételből kapjuk. □

**4.4.6. Összehasonlító kritérium.** *Ha véges sok $n$ kivételével $|a_n| \le b_n$, és $\sum b_n$ konvergál, akkor $\sum a_n$ is.*

**Bizonyítás.** A Cauchy-kritériumból minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $m \ge n \ge N$, akkor

$$|a_n| \le b_n \quad \text{és} \quad \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon.$$

Innen $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$, és így az állítás következik a Cauchy-kritériumból. □

**4.4.7. Következmény.** *Ha véges sok $n$ kivételével $b_n \geq a_n \geq 0$, és $\sum a_n$ divergál, akkor $\sum b_n$ is.*

**Bizonyítás.** Ha $\sum b_n$ konvergálna, akkor $\sum a_n$ is. □

**4.4.8. Következmény.** *Abszolút konvergens sor konvergens is.*

**Bizonyítás.** Legyen $b_n = |a_n|$. □

**4.4.9. Következmény.** *Tegyük fel, hogy $a_n, b_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}^+$-ra. Ekkor*

(1) *ha $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c > 0$, akkor $\sum a_n$ pontosan akkor konvergens, ha $\sum b_n$ konvergens;*

(2) *ha $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is.*

**Bizonyítás.** Az első esetben véges sok $n$ kivételével $cb_n/2 \leq a_n \leq 2cb_n$. A második esetben akármilyen $c > 0$-ra véges sok $n$ kivételével $a_n \leq cb_n$. □

**4.4.10. Leibniz-kritérium.** *Ha a pozitív tagú $a_n$ sorozat monoton csökkenően nullához tart, akkor $\sum_n (-1)^n a_n$ konvergens, és ha $s_n$ a sor $n$-edik részletösszege, $s$ pedig az összege, akkor $s_n \leq s \leq s_n + a_{n+1}$, ha $n$ páratlan és $s_n - a_{n+1} \leq s \leq s_n$, ha $n$ páros.*

**Bizonyítás.** Ha $n$ páratlan, akkor minden $m > 0$ esetén

$$0 \leq s_{n+m} - s_n = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \leq a_{n+1},$$

ha pedig $n$ páros, akkor

$$0 \leq s_n - s_{n+m} = a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots + (-1)^{m-1} a_{n+m} \leq a_{n+1},$$

így $|s_{n+m} - s_n| \leq a_{n+1}$; ennek a becslésnek az alapján a Cauchy-kritériumból következik a konvergencia. Az $m \to \infty$ határátmenettel következnek az egyenlőtlenségek. □

**4.4.11. Néhány nevezetes sor.**

(1) *A $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$* végtelen mértani sor *$|a| < 1$ esetén konvergens, összege $1/(1-a)$, míg $|a| \geq 1$ esetén divergens;*

(2) *a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$* harmónikus sor *divergens;*

(3) *a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens;*

(4) *a $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ sor (abszolút) konvergens.*

A harmonikus sor neve onnan ered, hogy egységnyi hosszú húr $1/n$ hosszú részének a hangja a húr hangjának felhangja, harmonikusa.

**Bizonyítás.** Ha $|a| \geq 1$, akkor $a^n$ nem tart nullához. Indukcióval

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a},$$

ha $n \in \mathbb{N}$, ahonnan következik (1) másik része.

(2) abból következik, hogy az $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ részletösszegekre

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1/2.$$

Innen $m$ szerinti teljes indukcióval $s_{2^m} \geq (m+1)/2$, azaz a részletösszegek sorozata nem korlátos.

Az, hogy a (3)-ban szereplő sor konvergens, következik a Leibniz-kritériumból, az pedig, hogy nem abszolút konvergens, következik (2)-ből.

Végül vegyük észre, hogy

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

ha $n > 1$, így a (4)-ben szereplő sor részletösszegei korlátos monoton sorozatot alkotnak. □

**4.4.12. Cauchy-féle gyökkritérium.** *Egy $\mathbb{K}$-beli $\sum a_n$ sor, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

*akkor konvergens, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

*akkor divergens.*

Egyenlőség esetén semmit sem mondhatunk: $\sum 1/n$ divergens, $\sum 1/n^2$ konvergens.

**Bizonyítás.** Ha $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $\alpha < 1$, akkor $\alpha < \beta < 1$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$, azaz $|a_n| \leq \beta^n$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\alpha > 1$, akkor $\alpha > \beta > 1$ esetén végtelen sok $n$-re $|a_n| \geq \beta^n > 1$, így $a_n$ nem tart nullához. □

**4.4.13. D'Alambert-féle hányadoskritérium.** *Egy $\mathbb{K}$-beli, nem nulla tagokból álló $\sum a_n$ sorra, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

*akkor konvergens, ha*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

*vagy ha véges sok $n$ kivételével $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, akkor divergens.*

A bizonyítás mutatja, hogy a kritérium nem erősebb, mint a gyökkritérium, viszont gyakran kényelmesebb használni.

**Bizonyítás.** Ha $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, akkor van olyan $\beta < 1$ szám és $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \beta$. Innen indukcióval $|a_n| \leq |a_N|\beta^{n-N}$, ha $n \geq N$, így az összehasonlító kritérium (vagy a gyökkritérium) szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$. Innen indukcióval $|a_n| \geq |a_N|$, ha $n \geq N$, így $a_n$ nem tart nullához. □

**4.4.14. Sorok szorzata.** A $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *Cauchy-szorzat*án vagy röviden *szorzat*án a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor értjük, ahol $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, ha $n = 0, 1, \ldots$.

Hogy miért így célszerű sorok szorzatát definiálni, az a hatványsoroknál válik világossá.

**4.4.15. Kettős sor tétel.** *Legyen $a_{j,k} \in \mathbb{K}$, ha $j, k \in \mathbb{N}$. Ha van olyan $K$ valós szám, hogy $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \leq K$ minden $n, m \in \mathbb{N}$-re, akkor az alábbi sorok abszolút konvergensek és*

(1)
$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

Vegyük észre, hogy a feltétel teljesülése következik, ha feltesszük, hogy (1)-ben vagy a jobb, vagy a bal oldalon minden tagot az abszolút értékével helyettesítve a kapott sorok konvergensek.

⋆ **Bizonyítás.** Rögzített $m$-re $n \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, ahonnan $m \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, és hasonlóan kapjuk, hogy a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy $K$ a pontos felső korlát, $\varepsilon > 0$, elég nagy $m$-re és $n$-re $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \geq K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n'} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből $n' \to \infty$ határátmenettel

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\Big| \leq 2\varepsilon.$$

Ha most $n \to \infty$, majd $m \to \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását. □

**4.4.16. Következmény: sorok átrendezése.** *Ha $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), és a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, összege $A$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege $A$.*

A következmény alapján ha $M$ megszámlálható végtelen halmaz, $m \in M$ esetén $a_m \in \mathbb{K}$, és van olyan $K$ valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$-re $\sum_{m \in M'} |a_m| \leq K$, akkor bármely $p\colon \mathbb{N} \to M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m \in M} a_m$.

**Bizonyítás.** Legyen $a_{j,k} = a_j$, ha $k = p_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. □

**4.4.17. Következmény: sorok átzárójelezése.** *Ha a $K$ megszámlálható halmaz a $K_j$, $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, $a_k \in \mathbb{K}$, ha $k \in K$, és $\sum_{k\in K} |a_k| < \infty$, akkor*

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{j\in J} \sum_{k\in K_j} a_k.$$

**Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $K, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $a_{j,k} = a_k$, ha $k \in K_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt. □

$\star$ **4.4.18. Riemann átrendezési tétele.** *Ha a $\sum a_n$ valós számsor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \leq \beta$ esetén van a sornak olyan $\sum b_n$ átrendezése, amelynek $s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ részletösszegeire* $\liminf_{n\to\infty} s_n = \alpha$ *és* $\limsup_{n\to\infty} s_n = \beta$.

**Bizonyítás.** A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+$ illetve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$ sorok mindketten divergensek: ha csak az egyik lenne konvergens, akkor összegük, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens lenne, ha pedig mindkettő konvergens lenne, akkor különbségük, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor is konvergens lenne. Válasszunk olyan, monoton csökkenő $\alpha_n$ illetve monoton növekedő $\beta_n$ valós számsorozatokat, amelyekre $\alpha_n \leq \beta_n$ minden $n$-re, és $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. Első lépésként tekintsük a negatív $a_n$-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_0, b_1, \ldots, b_{n_1}$ — addig, amíg $m_1 = n_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_1} b_j$ kisebb nem lesz, mint $\alpha_1$. Második lépésként tekintsük a nemnegatív $a_n$-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_1+1}, b_{m_1+2}, \ldots, b_{m_1+p_1}$ — addig, amíg $m_2 = m_1 + p_1$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_2} b_j$ nagyobb nem lesz, mint $\beta_1$. Így folytatjuk, felváltva választva negatív, majd nemnegatív tagokat: ha $b_0, b_1, \ldots, b_{m_{2k}}$ már ki van választva, és eddig $a_{n_k}$ az utolsó felhasznált negatív tag, akkor tekintsük az $n_k$-nál nagyobb indexű negatív $a_n$-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k}+1}, b_{m_{2k}+2}, \ldots, b_{m_{2k}+n_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+1} = m_{2k} + n_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+1}} b_j$ kisebb nem lesz, mint $\alpha_{k+1}$, majd tekintsük a $p_k$-nál nagyobb indexű nemnegatív $a_n$-ek közül az első néhányat — ezek lesznek $b_{m_{2k+1}+1}, b_{m_{2k+1}+2}, \ldots, b_{m_{2k+1}+p_{k+1}}$ — addig, amíg $m_{2k+2} = m_{2k+1} + p_{k+1}$ jelöléssel $\sum_{j=0}^{m_{2k+2}} b_j$ nagyobb nem lesz, mint $\beta_{k+1}$. Mivel $n_1 < n_2 < \ldots$ és $p_1 < p_2 < \ldots$, minden $a_n$-et felhasználtunk, tehát $b_n$ az $a_n$ átrendezése. Mivel $s_{m_{2k}} > \beta_k$, de $m_{2k} \leq j < m_{2k+2}$ esetén $s_j \leq \beta_{k+1} + a_{m_{2k}}$, azt kapjuk, hogy

$$\beta = \limsup_{k\to\infty} \beta_k \leq \limsup_{j\to\infty} s_j \leq \limsup_{k\to\infty} \beta_{k+1} + \limsup_{k\to\infty} a_{m_{2k}} = \beta.$$

Hasonlóan adódik, hogy $\liminf_{n\to\infty} s_n = \alpha$. □

**4.4.19. Tétel.** *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergensek, összegük $A$, illetve $B$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ szorzatuk is abszolút konvergens, és összege $AB$.*

$\star$ **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a kettős sor tételt $a_{j,k} = a_j b_{k-j}$, ha $j \leq k$ és $a_{j,k} = 0$ egyébként választással. □

**4.4.20. Abel folytonossági tétele.** *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens és összege $A$, akkor* $\lim_{t\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A$.

⋆ **Bizonyítás.** Mivel $a_0$ helyettesíthető $a_0 - A$-val, feltehetjük, hogy $A = 0$. Mivel $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nullához tart, korlátos is valamely $K$ korláttal. Tetszőleges $0 < t < 1$ mellett

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k,$$

mert a szereplő sorok abszolút konvergensek, így beszorzás után a jobb oldali sor átrendezhető és átzárójelezhető, és a bal oldalit adja. Legyen $\varepsilon > 0$, és legyen $N$-re $|s_n| < \varepsilon/2$, ha $n \geq N$. Ekkor

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\Big| &\leq (1-t)\Big(\sum_{k=0}^{N-1} |s_k t^k| + \sum_{k=N}^{\infty} |s_k t^k|\Big)\\ &< (1-t)KN + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Innen következik az állítás, sőt látjuk, hogy ha $0 < \tau < 1$, akkor minden $t \geq \tau$-ra ugyanaz az $N$ megfelel. □

**4.4.21. Következmény: Abel tétele.** *Ha a $\mathbb{K}$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok, valamint a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzatuk is konvergens, az összegek rendre $A$, $B$, illetve $C$, akkor $C = AB$.*

⋆ **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy a binomiális tétel szerint minden $0 < t < 1$-re

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

majd alkalmazzuk Abel folytonossági tételét. □

**4.4.22. Számrendszerek.** *Legyen $q > 1$ természetes szám, és legyen $A \in \mathbb{R}^+$. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{Z}$ és olyan $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $k = n, n+1, n+2, \ldots$ sorozat, amelyre $a_n \neq 0$ és*

$$A = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{q^k}. \tag{1}$$

*Ha az előállítás választható végesnek is, azaz*

$$A = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{q^k} \tag{2}$$

*alakúnak, ahol $a_m \neq 0$, akkor nem egyértelmű, de csak egy másik előállítás létezik, ez*

$$A = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{a_k}{q^k} + \frac{a_m - 1}{q^m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{q-1}{q^k}, \tag{3}$$

*egyébként $n$ és az $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ jegyek egyértelműek.*

Nyilván 0 is előállítható (1) alakban, lényegében egyértelműen: $n$ tetszőleges és $a_k = 0$ minden $k \geq n$-re.

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $n$ az a legkisebb egész szám, amelyre $1/q^n \le A$. Mivel $n$ a legkisebb, $1/q^n \le A < 1/q^{n-1} = q/q^n$, azaz $1 \le q^n A < q$. Legyen $a_n = \lfloor q^n A \rfloor$. Ekkor $a_n \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, $0 \le q^n A - a_n < 1$, azaz $A_n = A - a_n/q^n$ jelöléssel $A = a_n/q^n + A_n$ és $0 \le A_n < 1/q^n$. Tegyük fel, hogy indukcióval $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ és $0 \le A_k < 1/q^k$, $k = n, n+1, \ldots, m$ már definiálva van úgy, hogy $A = A_m + \sum_{k=n}^m a_k/q^k$. Ekkor $0 \le q^{m+1} A_m < q$, és ha $a_{m+1} = \lfloor q^{m+1} A_m \rfloor$, $A_{m+1} = A_m - a_{m+1}/q^{m+1}$, akkor $0 \le A_{m+1} < q^{m+1}$ és $A = A_{m+1} + \sum_{k=n}^{m+1} a_k/q^k$. Mivel $\lim_{m\to\infty} A_m = 0$, azt kapjuk, hogy $A = \sum_{k=n}^\infty a_k/q^k$.

Az egyértelműség bizonyításához először is vegyük észre, hogy ha (2) fennáll, akkor (3) is. Legyen $A \in \mathbb{R}^+$, és tegyük fel, hogy $A = \sum_{k=n}^\infty a_k/q^k = \sum_{k=n'}^\infty a'_k/q^k$, ahol $a_n \ne 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, ha $k = n, n+1, \ldots$ és $a'_{n'} \ne 0$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, ha $k = n', n'+1, \ldots$. Feltehetjük, hogy $n \le n'$. Legyen $a'_k = 0$, ha $n \le k < n'$, és írjuk a második előállítást $A = \sum_{k=n}^\infty a'_k/q^k$ alakba. Legyen $m$ a legkisebb olyan index, amelyre $a_m \ne a'_m$. Feltehetjük, hogy $a_m > a'_m$. A két előállítást kivonva egymásból,

$$\frac{a_m - a'_m}{q^m} = \sum_{k=m+1}^\infty \frac{a'_k - a_k}{q^k} \le \sum_{k=m+1}^\infty \frac{q-1}{q^k} = \frac{q-1}{q^{m+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^m}.$$

Innen $a'_m = a_m - 1$ és az egyenlőtlenség egyenlőség, amiből $a'_k = q-1$ és $a_k = 0$ minden $k > m$-re. □

**4.4.23. Következmény.** *A* $\wp(\mathbb{N})$ *halmaz és* $]0,1]$ *ekvivalensek.*

⋆ **Bizonyítás.** Minden $n \in \mathbb{N}$-re $\wp(\mathbb{N})$-nak megszámlálható sok olyan $A$ eleme van, amelyre $\natural(A) \le n$. Így $\mathbb{N}$ összes véges részhalmazainak $\mathcal{F}$ halmaza megszámlálható. Ha $A \subset \mathbb{N}$, jelölje $\chi_A$ az $A$ halmaz $\mathbb{N}$-en értelmezett karakterisztikus függvényét. Az

$$A \mapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{\chi_A(k)}{2^{k+1}}$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ halmazt, azaz $\mathbb{N}$ összes végtelen részhalmazait $]0,1]$-re. Így $]0,1] \sim \wp(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F} \sim \wp(\mathbb{N})$. □

**4.4.24. Következmény.** *Ha* $\mathbb{R}$ *egy részhalmazának van belső pontja, akkor nem lehet megszámlálható.*

⋆ **Bizonyítás.** Ha az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van belső pontja, akkor tartalmaz egy $]a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ intervallumot, ez viszont ekvivalens $]0,1]$-gyel. Így az előző tétel szerint $]a,b]$ nem megszámlálható. Innen $A$ sem lehet megszámlálható, mert megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható. □

⋆ **4.4.25. Végtelen szorzatok.** Ha $a_0, a_1, \ldots$ egy $\mathbb{K}$-beli sorozat, akkor a $\mathbb{K}$-beli $\prod_{n=0}^\infty a_n$ vagy $\prod a_n$ *végtelen szorzat*ot a $p_n = \prod_{k=0}^n a_k$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *részletszorzat*ok sorozatával azonosítjuk. Az $a_n$ számot a szorzat $n$-edik *tényező*jének nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\prod_{n=0}^\infty a_n$ *szorzat konvergens*, és értéke $A$, ha a $p_n$ részletszorzatok sorozata $A$-hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\prod_{n=0}^\infty a_n = A$. Ha a szorzat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens*. Ha $\overline{\mathbb{R}}$-ban $p_n \to +\infty$ illetve $p_n \to -\infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^\infty a_n = +\infty$ illetve $\prod_{n=0}^\infty a_n = -\infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek. Hasonlóan, ha $\overline{\mathbb{C}}$-ban $p_n \to \infty$, akkor azt írjuk, hogy $\prod_{n=0}^\infty a_n = \infty$, de ilyenkor a szorzatot nem nevezzük konvergensnek.

**4.4.26. Feladat [5].** Adjunk meg $\varepsilon > 0$-hoz megfelelő küszöbindexet, ahonnan kezdve az $s_n$ részletösszegek $\varepsilon$-nál jobban megközelítik a sor összegét:
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^n$;
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2/3)^n$;
(3) $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$;
(4) $1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + \cdots$.

**4.4.27. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi sorok összegét:
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + 2n)$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 + 4n + 3)$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^3 - n)$.

**4.4.28. Feladat [7].** Konvergensek-e az alábbi sorok:
(1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[n]{2}$;
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[n]{n}$;
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^{\sqrt{n}} - 2^n)/(3^{\sqrt{n}} + 2^n)$.

**4.4.29. Feladat [1].** Legyen $\sum a_n$ konvergens. Mi lesz

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2^n}$$

értéke?

**4.4.30. Feladat [3].** Bizonyítsuk be, hogy ha $|a_{n+1} - a_n| < 1/n^2$ minden $n$-re, akkor $\sum a_n$ konvergens!

**4.4.31. Feladat [1].** Bizonyítsuk be a rendőr-tétel megfelelőjét sorokra.

**4.4.32. Feladat [5].** Adjunk példát olyan sorra, amelynek konvergenciája a gyökkritériummal bizonyítható, de a hányadoskritériummal nem!

**4.4.33. Feladat [8].** Konvergensek-e az alábbi sorok?
(1) $\sum n^{10}/(3^n - 2^n)$;
(2) $\sum 1/\sqrt{n(n+1)}$;
(3) $\sum n^{100} q^n$, $|q| < 1$;
(4) $\sum 1/(\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})$;
(5) $\sum 1/(n + 1000\sqrt{n})$;
(6) $\sum n^2 2^{-\sqrt{n}}$;
(7) $\sum (\sqrt{n} + \sqrt[4]{n})/(n^3 + \sqrt[4]{n})$;
(8) $\sum n/\sqrt{n^4 - \sqrt[4]{n}}$;
(9) $\sum (\sqrt{n^2+1} - n)$;
(10) $\sum 1/\big(n + (2n-1)i\big)^2$.

**4.4.34. Feladat [6].** Konvergensek-e az alábbi sorok?
(1) $\sum n^7/7^n$;
(2) $\sum (1/2 + 1/n)^n$;
(3) $\sum (1 + \cos n)^{2n}/(2 + \cos n)^{2n}$.

## 4.5 Elemi függvények

*Az exponenciális függvény a legfontosabb függvény a matematikában.*

*Walter Rudin*

**4.5.1. Hatványsorok.** A polinomok általánosításai „végtelen fokszámra” a hatványsorok. A

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

alakú függvénysorokat ($x, c, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{K}$) *hatványsor*nak nevezzük ($0^0 = 1$); $a_0, a_1, \ldots$ a hatványsor *együtthatói*, $c$ a hatványsor *konvergencia-középpontja*. Az utóbbi elnevezés értelmére a következő tétel világít rá.

**4.5.2. Cauchy–Hadamard-tétel.** *Az előző pont jelöléseivel, legyen*

$$R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

*(itt $1/0 = +\infty$). Ekkor $|x-c| < R$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ abszolút konvergens, $|x-c| > R$ esetén pedig divergens.*

Az $|x-c| = R$ esetben semmit sem mondhatunk a konvergenciáról. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n/n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^2$ sorok mindegyikére $R = 1$, de az első sor $|x| = 1$ esetén divergens, a második $x = 1$-re divergens, míg $x = -1$-re konvergens (de nem abszolút konvergens), a harmadik $x = 1$-re konvergens (de nem abszolút konvergens), míg $x = -1$-re divergens, a negyedik pedig $|x| = 1$ esetén abszolút konvergens.

⋆ **Bizonyítás.** Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x-c)^n|} = |x-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-c|}{R}. \square$$

**4.5.3. Konvergenciasugár, konvergenciatartomány.** Az előző pont jelöléseivel, $R$ a hatványsor *konvergenciasugar*a, $\{x \in \mathbb{K} : |x-c| < R\}$ pedig a *konvergenciatartomány*a.

**4.5.4. Hatványsorok átrendezése.** *Az előző tétel jelöléseivel, ha $|x-c| < R$ esetén $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, továbbá $d \in \mathbb{K}$, és $|d-c| < R$, akkor $r = R - |d-c|$ jelöléssel (azaz a középpont áthelyezésével) $|x-d| < r$ esetén $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-d)^m$, ahol*

$$b_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d-c)^{n-m}.$$

*Valamennyi sor abszolút konvergens.*

A $b_m$-re adott formulát könnyű kitalálni: úgy adódik, hogy $f$ sorába $(x-c)$ helyére mindenütt $((x-d) + (d-c))$-t írunk, és elvégezzük a hatványozásokat.

⋆ **Bizonyítás.**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((x-d)+(d-c)\big)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (d-c)^{n-m}(x-d)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d-c)^{n-m} \right) (x-d)^m,
\end{aligned}$$

ami a kívánt előállítás; az összegzés sorrendje a kettős sor tétel miatt cserélhető fel: Ez megengedhető, ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left| a_n \binom{n}{m} (d-c)^{n-m}(x-d)^m \right|$$

konvergens. De ez ugyanaz, mint

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|x-d| + |d-c|\big)^n,$$

és ez a sor konvergál, ha $|x-d| + |d-c| < R$, mert ha $|y-c| = |x-d| + |d-c|$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-c)^n$ abszolút konvergens. □

**4.5.5. Analitikus függvények.** Az $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ függvényt *analitikus*nak nevezzük a $c$ pontban, ha előáll $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ alakban, azaz hatványsor összegfüggvényeként a $c$ pont valamely környezetében. Az $f$ függvényt *analitikus*nak nevezzük a $D \subset \mathbb{K}$ halmazon, ha annak minden pontjában analitikus. Persze, ez csak akkor lehet, ha $D$ nyílt. Az előző tétel szerint hatványsor összegfüggvénye analitikus a konvergenciatartomány minden pontjában. Ha $f$ és $g$ analitikusak a $c$ pontban, akkor (hatványsoruk összeadásával adódik, hogy) $f+g$ is analitikus $c$-ben, és (hatványsoruk Cauchy-szorzásával

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k b_{n-k} (x-c)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x-c)^n,
\end{aligned}$$

azaz) $fg$ is analitikus $c$-ben.

**4.5.6. Példa.** Az $x \mapsto 1/x$ függvény analitikus minden $0 \neq a \in \mathbb{C}$ pontban. A geometriai sor összegét fogjuk felhasználni.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a-(a-x)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1-(x-a)/(-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n.$$

**4.5.7. Tétel.** *Analitikus függvény folytonos.*

⋆ **Bizonyítás.** Legyen a $c$ pont egy $R > 0$ sugarú környezetében

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n.$$

Legyen $0 < r < R$. Mivel a hatványsor konvergenciasugara legalább $R$, ha $|y-c| = r$, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y-c)^n$ abszolút konvergens, azaz $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergens. De akkor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1}$ is konvergens. Legyen ez utóbbi sor összege $A$. Ekkor $|x-c| \le r$ esetén

$$\bigl|f(x) - f(c)\bigr| = \bigl|f(x) - a_0\bigr| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x-c|^n \le A|x-c|,$$

ahonnan következik a folytonosság. □

° **4.5.8. Motiváció.** A hatványozás, azaz az $x \mapsto a^x$ függvény legjellemzőbb tulajdonsága az $a^{x+y} = a^x a^y$ összefüggés teljesülése. Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor alakban keresünk olyan $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely megoldása az $f(x+y) = f(x)f(y)$, vagy akár csak az ebből $y = x$ helyettesítéssel adódó $f(2x) = f^2(x)$ függvényegyenletnek, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_0 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + \cdots = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (2a_0 a_2 + a_1^2) x^2 + \cdots.$$

Mint később megmutatjuk, két, egy adott pontban analitikus függvény csak akkor lehet egyenlő az adott pont egy környezetében, ha hatványsoraik együtthatói megegyeznek. (Lásd a Taylor-tételt.) Ezt felhasználva az

$$\begin{aligned} &a_0 = a_0^2, \quad 2a_1 = 2a_0 a_1, \quad 4a_2 = 2a_0 a_2 + a_1^2, \\ &8a_3 = 2a_0 a_3 + 2a_1 a_2, \ \ldots, \ 2^n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \ \ldots \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenlet egyik megoldása $a_0 = 0$, ez az érdektelen $f \equiv 0$ megoldáshoz vezet. A másik megoldás $a_0 = 1$, ekkor $a_1$ szabadon választható. Legtermészetesebb választásnak $a_1 = 1$ tűnik, ekkor teljes indukcióval $a_n = 1/n!$ adódik, és az exp exponenciális függvény definíciójához jutunk. (Ha $a_1 \ne 1$, akkor $z \mapsto \exp(a_1 z)$ adódik.)

**4.5.9. Az exponenciális függvény.** Az *exponenciális függvény*t

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

összefüggéssel definiáljuk, ha $z \in \mathbb{C}$; a hányadoskritérium alapján adódik, hogy a hatványsor minden $z \in \mathbb{C}$-re konvergens, így konvergenciasugara $+\infty$. Hatványsorok Cauchy-szorzásával

$$\begin{aligned} \exp(z_1)\exp(z_2) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{n-k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \\ &= \exp(z_1 + z_2), \quad \text{ha} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ahogy várjuk, azaz exp eleget tesz a (felhasználtnál általánosabb)

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2), \quad \text{ha} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

függvényegyenletnek is. Nyilván $\exp(0) = 1$ és $\exp(-z)\exp(z) = \exp(0) = 1$, így az exponenciális függvény sohasem nulla és $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. Mivel exp sorának együtthatói valósak, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$, így valós $z$-re $\exp(z)$ valós.

**4.5.10. Az $e$ szám.** Az $e\colon= \exp(1)$ számra $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ jelöléssel nyilván

$$s_n < e < s_n + \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\Big) = s_n + \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)},$$

ahonnan $n = 35$ választással $e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775 72\ldots$. Ha $x \geq 0$, akkor $\exp(x) \geq 1$, és mivel $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, minden valós $x$-re $\exp(x) > 0$. Az exp függvény addíciós képletéből teljes indukcióval $\exp(qx) = \exp(x)^q$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re, ha $q \in \mathbb{N}$. Speciálisan, ha $q > 0$, akkor $x = 1/q$ választással $e^{1/q} = \exp(1/q)$. Innen ha $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\exp(p/q) = \big(e^{1/q}\big)^p$, másrészt, mivel

$$\exp(p/q)^q = \exp\big(q \cdot (p/q)\big) = \exp(p) = e^p,$$

kapjuk, hogy $\exp(p/q) = \big(e^p\big)^{1/q}$. Ezek az összefüggések az $e^x\colon= \exp(x)$, ha $x \in \mathbb{R}$ definíciót sugallják.

**4.5.11. Természetes logaritmus.** Az előző pont eredményeit felhasználva, ha $x > 0$, akkor $e^x > 1 + x$, amiből $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ és $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Mivel ha $x < y$, akkor $e^y = e^{y-x}e^x > e^x$, az $x \mapsto e^x$ függvény szigorúan monoton növekedő és folytonos leképezése $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{R}^+$-ra. Ennek inverzét *természetes logaritmus* függvénynek nevezzük, és ln-nel jelöljük („logaritmus naturalis”).

° **4.5.12. Megjegyzés.** A „természetes” jelző ln-nél a differenciálással és integrálással való egyszerű kapcsolatra utal: mivel az analitikus függvények folytonosak, így az exponenciális függvényre

$$\frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z)\frac{\exp(h) - 1}{h} \to \exp(z),$$

ha $h \to 0$, azaz az exponenciális függvény deriváltja önmaga, az inverz függvény differenciálására vonatkozó tételből pedig

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'\big(\ln(x)\big)} = \frac{1}{x}, \quad \text{ha} \quad x > 0.$$

Ez utóbbi összefüggés miatt szerepel a természetes logaritmus oly gyakran az integrálásnál. Látjuk, hogy mindkét összefüggés (az előző motiváció jelöléseivel) az

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} \to a_1 = 1$$

határértéken, így az $a_1 = 1$ választáson alapul, és mutatják annak célszerűségét. Erre további indok az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolat; lásd a tétel után.

**4.5.13. Tétel.**

(1) *Az* $x \mapsto \ln(x)$ *leképezés folytonos és szigorúan monoton növekedő kölcsönösen egyértelmű leképezése* $\mathbb{R}^+$*-nak* $\mathbb{R}$*-re;*

(2) $\ln(1) = 0$*;*

(3) $\ln(e^x) = x$*, ha* $x \in \mathbb{R}$*;*

(4) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*, ha* $x, y \in \mathbb{R}^+$*.*

**Bizonyítás.** (1)–(3) következnek a definícióból és a tanult általános tételekből. (4) az

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{(\ln x + \ln y)}$$

összefüggésből következik. □

**4.5.14. Megjegyzés.** A faktoriálisok — vagy a túlcsordulás elkerülésére a logaritmusuk — kiszámítására nagy $n$ esetén a *Stirling-formulá*t érdemes használni: $n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+1/(12n)-c_n}$, ahol $0 \le c_n \le 1/(180n^3)$. Megmutatható, hogy $n > 8$ esetén $c_n = 0$ választással a relatív hiba kisebb, mint 0,0008% (lásd [21]).

° **4.5.15. Motiváció.** Vizsgáljuk a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezést, azaz az exponenciális függvény viselkedését a képzetes tengelyen! Mivel $\overline{\exp(it)} = \exp(-it)$, így $|\exp(it)|^2 = \exp(it)\exp(-it) = 1$, azaz ennek a függvénynek az értékei az $\{z \colon |z| = 1\}$ egységkörön vannak. Mivel

$$\frac{\exp(i(t+h)) - \exp(it)}{h} = i\exp(it)\frac{\exp(ih) - 1}{ih} \to i\exp(it),$$

ha $h \to 0$, a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezés egy, az egységkörön való mozgásnak felel meg, ami $t = 0$-ban az 1 pontból felfelé indul, és sebességének abszolút értéke egységnyi. Szemléletünknek megfelelő tehát a $\cos(t)$ és $\sin(t)$ értékeket $\exp(it)$ valós, illetve képzetes részeként definiálni. Mindkettő kifejezhető $\exp(it)$ és $\exp(-it)$ segítségével, így természetes módon jutunk a *koszinusz* és *szinusz* függvény alábbi — tetszőleges komplex számra alkalmazható — definíciójához.

**4.5.16. Trigonometrikus és hiperbolikus függvények.** Legyen

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2},$$
$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$

ha $z \in \mathbb{C}$. Természetesen a definícióból mindkettő valós, ha $z$ valós, és az egész komplex síkon teljesülnek az alábbi hatványsor-előállítások:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A két definícióból kapjuk a nagyon fontos

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z), \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}$$

*Euler-féle összefüggés*t. Ugyancsak a definícióból

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C},$$

valamint az exponenciális függvény addíciós képletét felhasználva következnek az *addíciós formulák* minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$-re:

$$\begin{aligned}
\cos(z_1 + z_2) &= \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2),\\
\sin(z_1 + z_2) &= \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2).
\end{aligned}$$

Ezek speciális eseteként adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1,\\
&\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z).
\end{aligned}$$

A sin és cos függvény segítségével definiálhatjuk a többi trigonometrikus függvényt is: $\operatorname{tg} = \sin / \cos$, $\operatorname{ctg} = \cos / \sin$, $\sec = 1/\cos$ és $\operatorname{cosec} = 1/\sin$. A trigonometrikus függvényekhez hasonlóan hasznosak a hiperbolikus függvények:

$$\begin{aligned}
\chi(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\\
\operatorname{sh}(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

Nyilván $\chi^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$ minden $z \in \mathbb{C}$-re. (A „hiperbolikus függvény” elnevezés arra utal, hogy míg a $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ leképezés $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ miatt egy kört paraméterez, a $t \mapsto (\chi t, \operatorname{sh} t)$ leképezés $\chi^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ miatt egy hiperbolát.) A többi hiperbolikus függvényt ezek segítségével definiáljuk: $\operatorname{th} = \operatorname{sh}/\chi$, $\operatorname{cth} = \chi/\operatorname{sh}$, $\operatorname{sech} = 1/\chi$ és $\operatorname{cosech} = 1/\operatorname{sh}$. Ezek tulajdonságai hasonlóan bizonyíthatók, mint a trigonometrikus függvények tulajdonságai.

A következő tétel összefoglalja a most belátott összefüggések és a hasonlóan belátható összefüggések közül a legfontosabbakat.

**4.5.17. Tétel.** *Ha $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, akkor*

(1) $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$;

(2) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$;

(3) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$;

(4) $\cos(-z) = \cos(z), \qquad \sin(-z) = -\sin(z)$;

(5) $\cos(z) = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$;

(6) $\sin(z) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$;

(7) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$;

(8) $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$;

(9) $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$;

(10) $\chi(iz) = \cos(z), \qquad \mathrm{sh}(iz) = i\sin(z)$;

(11) $\exp(z) = \chi(z) + \mathrm{sh}(z)$;

(12) $\chi(-z) = \chi(z), \qquad \mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}(z)$;

(13) $\chi(z) = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$;

(14) $\mathrm{sh}(z) = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$;

(15) $\chi^2(z) - \mathrm{sh}^2(z) = 1$;

(16) $\chi(z_1 + z_2) = \chi(z_1)\chi(z_2) + \mathrm{sh}(z_1)\,\mathrm{sh}(z_2)$;

(17) $\mathrm{sh}(z_1 + z_2) = \mathrm{sh}(z_1)\chi(z_2) + \chi(z_1)\,\mathrm{sh}(z_2)$. $\square$

**4.5.18. A $\pi$ szám.** Mint a trigonometrikus függvények bevezetésénél megbeszéltük, a $t \mapsto \exp(it)$, $t \in \mathbb{R}$ leképezés egy, az egységkörön való mozgásnak felel meg, sebességének abszolút értéke egységnyi, és a $t = 0$-ban az 1 pontból felfelé indul. A $\pi$ szám szokásos geometriai jelentése a kör kerületének és átmérőjének hányadosa. Szemléletünknek megfelelő tehát, ha $\pi$-t mint a legkisebb olyan pozitív számot definiáljuk, amelyre $\exp(2\pi i) = 1$. Természetesen meg kell mutatnunk, hogy ilyen pozitív szám létezik. Először megmutatjuk, hogy a koszinusz függvénynek van pozitív valós zérushelye. A szinusz függvény hatványsorából

$$\frac{\sin(z)}{z} \to 1, \quad \text{ha} \quad z \to 0,$$

ebből elég kis pozitív $t$-kre $\sin(t) > 0$, tehát $\cos(t) < 1$. Ha $t > 0$ esetén $\cos(t)$ mindenütt pozitív lenne, akkor teljes indukcióval $0 < \cos(2^n t) \le \cos^{2^n}(t) \to 0$ következne, így valamely $t_0$-ra $0 < \cos(t_0) < 1/2$, de ekkor $\cos(2t_0) = 2\cos^2(t_0) - 1 < 0$, ami ellentmondás. Jelölje $\tau$ a koszinusz legkisebb pozitív zérushelyét. A $\sin(2z)$-re vonatkozó összefüggésből $\sin(2\tau) = 0$ és $2\tau$ a legkisebb pozitív szám, amelynek szinusza nulla: ha a legkisebb ilyen szám $0 < 2t < 2\tau$ lenne, akkor $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ miatt $\cos(t) = 0$ következne, ami ellentmondás. Így $\sin(\tau) = 1$, és $\exp(\tau i) = i$, $\exp(2\tau i) = -1$, $\exp(4\tau i) = 1$. Mivel $\cos(t + \tau) = -\sin(t)$, kapjuk, hogy $\tau \le t \le 2\tau$ esetén $\cos(t) \le 0$, és mivel $\cos(t + 2\tau) = -\cos(t)$, kapjuk, hogy $\cos(t) < 1$, ha $0 < t < 4\tau$, azaz $\pi = 2\tau$.

Megmutatjuk, hogy $t \mapsto \exp(it)$ a $[0, 2\pi[$ intervallumot kölcsönösen egyértelműen képezi le a $\{z\colon |z| = 1\}$ egységkörre. Ha $0 \le t_1 < t_2 < 2\pi$, akkor

$$\frac{\exp(it_2)}{\exp(it_1)} = \exp(i(t_2 - t_1)) \ne 1.$$

Ebből következik, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ahhoz, hogy belássuk, a leképezés az egységkörre történik, rögzítsünk olyan $z$ számot, amelyre $|z| = 1$. Legyen $x = \mathfrak{R}(z)$, $y = \mathfrak{I}(z)$. Mivel cos folytonos, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$, van olyan $t \in [0, \pi]$, hogy $\cos t = x$. Ekkor $\sin t = \pm y$; ha $\sin t = y$, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor $\cos(2\pi - t) = \cos t = x$ és $\sin(2\pi - t) = -\sin t = y$, tehát ekkor a keresett $t$ a $]\pi, 2\pi[$ intervallumban van.

Az exponenciális függvény addíciós képletéből $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$ periódusa exp-nek. Megfordítva, legyen $c$ periódusa exp-nek. Ekkor $\exp(z+c) = \exp(z)$, így $\exp(c) = 1$. Mivel $\left|\exp(x+iy)\right| = \exp(x)$, és ha $x > 0$, akkor $\exp(x) > 1$, ha pedig $x < 0$, akkor $\exp(x) = 1/\exp(-x) < 1$, a $c$ tiszta képzetes. Az $i\omega = c$ jelöléssel, ha

$$2k\pi < \omega < 2(k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

akkor $0 < t = \omega - 2k\pi < 2\pi$ olyan szám, amelyre $\exp(it) = 1$, ami lehetetlen. Így exp összes periódusa $2k\pi i$ alakú.

A következő tétel összefoglalja a most belátott összefüggések közül a legfontosabbakat.

**4.5.19. Tétel.** *Az exponenciális függvényre* $\exp(\pi i/2) = i$, $\exp(\pi i) = -1$, *és a* $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$ *halmaz adja* exp *összes periódusát;* $t \mapsto \exp(it)$ *kölcsönösen egyértelmű leképezése* $[0, 2\pi[$*-nek* $\{z\colon |z| = 1\}$*-re, továbbá ha* $z \in \mathbb{C}$*, akkor*

(1) $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$*;*

(2) $\exp(z+2\pi i) = \exp(z)$*;*

(3) $\cosh(z+2\pi i) = \cosh(z)$, $\operatorname{sh}(z+2\pi i) = \operatorname{sh}(z)$. □

**4.5.20. Hatványozás.** Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Mivel $a = e^{\ln a}$ és

$$\left(e^{\frac{\ln a}{q}}\right)^q = e^{\ln a} = a,$$

így

$$a^{1/q} = e^{\frac{\ln a}{q}} \quad \text{és} \quad \left(a^{1/q}\right)^p = e^{\frac{p \ln a}{q}},$$

másrészt

$$a^p = \left(e^{\ln a}\right)^p = e^{p \ln a} \quad \text{és} \quad \left(e^{\frac{p \ln a}{q}}\right)^q = e^{p \ln a} = a^p,$$

így

$$\left(a^p\right)^{1/q} = e^{\frac{p \ln a}{q}}.$$

Ezek az összefüggések az $a^x := e^{x \ln a}$, ha $x \in \mathbb{R}$ definíciót sugallják.

**4.5.21. Tétel.** *Legyen* $a \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) *Ha* $a \neq 1$*, akkor az* $x \mapsto a^x$ *leképezés szigorúan monoton és folytonos leképezése* $\mathbb{R}$*-nek* $\mathbb{R}^+$*-ra;*

(2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = 1/a^x$*;*

(3) $a^0 = 1$, $a^1 = a$ *és* $1^x = 1$.

**Bizonyítás.** Következik a definícióból. □

**4.5.22. Logaritmus.** Ha $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, akkor az $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ függvény inverzét $a$ alapú *logaritmus függvény*nek nevezzük és $\log_a$-val jelöljük.

**4.5.23. Tétel.** *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1 \neq b$ *és* $x, y \in \mathbb{R}$.

(1) $x \mapsto \log_a x$ *szigorúan monoton és folytonos leképezése* $\mathbb{R}^+$*-nak* $\mathbb{R}$*-re;*

(2) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a (a^x) = x$, *és ha* $x > 0$, *akkor* $\log_e x = \ln x$, $a^{\log_a x} = x$.

(3) *ha* $x, y > 0$, *akkor* $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$*;*

(4) *ha* $x > 0$, *akkor* $\log_a x = \log_b x / \log_b a$*;*

(5) *ha* $x > 0$, *akkor* $\log_a (x^y) = y \log_a x$.

**Bizonyítás.** Mivel

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln a \frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln x} = x,$$

$\log_a x = (\ln x)/(\ln a)$. Ebből, és ln tulajdonságaiból minden összefüggés következik. □

**4.5.24. Komplex logaritmus és hatványozás.** Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, legyen $\arg(z)$ az a $t$ valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és $\exp(it) = \operatorname{sgn}(z)$. Vegyük észre, hogy $z = |z| \exp(it) = |z|(\cos t + i \sin t)$ (ha $z = 0$, tetszőleges $t$ választható), ez a *komplex szám trigonometrikus alakja*, amit már tanultunk, de az exp, sin, cos függvény pontos definíciójával értelmezése csak most lett teljes. Emlékeztetünk rá, hogy a trigonometrikus alakból leolvasható a komplex számok szorzásának geometriai jelentése: az abszolút értékek összeszorzódnak, az argumentumok pedig összeadódnak, mod $2\pi$,komplex .

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen $\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$, azaz az exp függvény

$$\{z \colon -\pi < \Im z \leq \pi\}$$

halmazra való megszorításának inverze. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$ és $w \in \mathbb{C}$, akkor legyen

$$z^w \colon= \exp(w \ln(z)).$$

adw dw $z^w$,komplex

Megjegyezzük, hogy a logaritmus és a hatványozás definíciója összhangban van az eddigi definíciókkal.

**4.5.25. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát:

(1) $\sum n^c x^n$, $\sum x^n/(a^n + b^n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + (-2)^n)(x-1)^n/n$; $\sum n! x^n$, $\sum (n^n/n!) x^n$;

(2) $\sum 2^{-n^2} x^n$, $\sum n! x^{n^2}$, $\sum \binom{2n}{n}^{-1} x^n$, $\sum 2^{-n^n} x^{n!}$.

**4.5.26. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1)
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x) \cos 2x}{1 - \cos x};$$

(2)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

**4.5.27. Feladat [7].** Legyen

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x + x^2 \exp(nx)}{1 + \exp(nx)}.$$

Folytonos-e $f$?

# 5

# Differenciálszámítás

## 5.1 Derivált

**5.1.1. Derivált.** Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ és $x$ belső pontja az $f$ értelmezési tartományának. Ha létezik a

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \in \mathbb{K}_2$$

határérték, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *differenciálható* az $x$ pontban, és $f'(x)$ az $f$ *differenciálhányados*a vagy *derivált*ja $x$-ben. Ha a határérték végtelen, akkor az a derivált $x$-ben, de ekkor nem mondjuk, hogy a függvény differenciálható $x$-ben. A „létezik a derivált” és a „differenciálható” kifejezések között tehát ugyanaz a különbség, mint a „létezik a határérték” és a „konvergens” kifejezések között. A lim jel mögött álló hányados $f$ *differenciahányados*a $x$-ben. (A $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$ feltevéssel azért zártuk ki a $\mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ esetet, mert ebben az esetben a differenciahányadosok komplexek.) A $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ esetet fogjuk a leggyakrabban használni, ekkor a derivált jelentése a függvény grafikonja $(x, f(x))$-pontbeli érintőjének meredeksége. Az $f' \colon x \mapsto f'(x)$ leképezést, ami persze csak ott van értelmezve, ahol a függvény differenciálható, az $f$ *deriváltfüggvény*ének vagy röviden csak $f$ *derivált*jának nevezzük; a $df/dx$ jelölés is szokásos.

A differenciálhatóság nyilván lokális tulajdonság: ha két függvény megegyezik az $x$ pont valamely környezetében, akkor egyszerre differenciálhatóak és deriváltjuk megegyezik.

Ha $\mathbb{K}_1 = \mathbb{R}$, és van olyan $\delta > 0$, amelyre $[x, x + \delta[$ részhalmaza $f$ értelmezési tartományának, akkor az

$$f'(x+) := \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{K}_2$$

jobb oldali határértéket az $f$ függvény $x$-beli *jobb oldali derivált*jának nevezzük. Teljesen hasonlóan értelmezhető az $f'(x-)$ *bal oldali derivált.* Ha $f$ egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon van értelmezve, akkor az alatt, hogy $f$ *differenciálható* $[a, b]$-n, azt fogjuk érteni, hogy differenciálható az intervallum belső pontjaiban, valamint a végpontokban léteznek a jobb, illetve bal oldali deriváltak. A deriváltakra vonatkozó állítások általában értelemszerűen átvihetők jobb és bal oldali deriváltakra is; ezzel a kérdéssel részletesen nem foglalkozunk.

**5.1.2. Magasabb deriváltak.** Az előző pont jelöléseivel, ha az $f$ függvény deriváltfüggvénye, $f'$ differenciálható $x$-ben (ehhez persze kell, hogy $f'$ értelmezve legyen $x$ egy környezetében), akkor deriváltját $x$-ben $f''(x)$-szel jelöljük és az $f$ függvény $x$-beli *második derivált*jának nevezzük; az $f'' \colon x \mapsto f''(x)$ leképezés az $f$ *második deriváltfüggvény*e. (A $d^2 f/dx^2$ jelölés is használatos.) Indukcióval folytatva, az $f, f', f'', f''' = f^{(3)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$ függvényeket kapjuk.

**5.1.3. Állítás.** *Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ és tegyük fel, hogy $f$ differenciálható $x$-ben. Ekkor $f$ folytonos $x$-ben.*

A megfordítás nem igaz, például az $x \mapsto |x|$ függvény folytonos, de nem differenciálható 0-ban (bár a bal és jobb oldali deriváltak léteznek, de nem egyeznek meg). Olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény is létezik, amely sehol sem differenciálható, de mindenütt folytonos.

**Bizonyítás.** Ha $y \to x$, akkor

$$f(y) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(y - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0. \ \square$$

**5.1.4. Tétel.** *Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f, g \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ és tegyük fel, hogy $f$ és $g$ differenciálhatóak $x$-ben. Ekkor*

(1) *$f + g$ differenciálható $x$-ben és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;*

(2) *$fg$ differenciálható $x$-ben és $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$;*

(3) *ha $g(x) \neq 0$, akkor $1/g$ differenciálható $x$-ben és $(1/g)'(x) = -g'(x)/g^2(x)$.*

**Bizonyítás.** (1) nyilvánvaló, mert

$$\frac{(f + g)(y) - (f + g)(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} + \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \to f'(x) + g'(x).$$

Mivel

$$\frac{(fg)(y) - (fg)(x)}{y - x} = g(y)\frac{f(y) - f(x)}{y - x} + f(x)\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \to g(x)f'(x) + f(x)g'(x),$$

adódik (2). Végül (3)-hoz vegyük észre, hogy

$$\frac{(1/g)(y) - (1/g)(x)}{y - x} = -\frac{1}{g(y)g(x)}\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \to -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \ \square$$

**5.1.5. Példák.** A definíció alapján konstans függvény deriválható és a deriváltja nulla, valamint $(cf)' = cf'$. Az $f(x) = x - c$, $x \in \mathbb{K}$ függvény a definíció alapján deriválható, és deriváltja 1. Innen az $f(x) = (x - c)^n$, $x \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{Z}$ függvény minden pontban, ahol értelmezve van, differenciálható és a deriváltja $f'(x) = n(x - c)^{n-1}$; ez $n \in \mathbb{N}$ esetén a szorzat differenciálási szabályát felhasználva indukcióval adódik, egyébként pedig a reciprok differenciálási szabályából kapjuk. Innen az is következik, hogy minden polinom, sőt, minden racionális törtfüggvény (minden olyan pontban, amelyben értelmezve van), differenciálható.

A szorzat differenciálási szabályából az is következik, hogy ha $f$ egy polinom, $n \in \mathbb{N}^+$ és $c \in \mathbb{K}$ az $f$ egy $n$-szeres gyöke, akkor $c$ az $f'$-nek $(n - 1)$-szeres gyöke: Ha

$$f(x) = (x - c)^n g(x),$$

akkor $f'(x) = (x - c)^{n-1}\big((x - c)g'(x) + ng(x)\big)$. Mivel a zárójelben álló kifejezés értéke a $c$ helyen $ng(c)$, ami nem nulla, $c$ pontosan $(n - 1)$-szeres gyöke $f'$-nek.

**5.1.6. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy az $x^2\xi_Q(x)$ függvény a nullában differenciálható, de máshol még csak nem is folytonos. $\square$

**5.1.7. Feladat [4].** Hol differenciálható az $x \mapsto (x \bmod 1 - 1/2)^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény?

**5.1.8. Feladat [4].** Legyen $f(x) = x^2$, ha $x \leq 1$ és $f(x) = ax + b$ egyébként. Az $a$ és $b$ mely értékeire lesz $f$ mindenütt differenciálható?

**5.1.9. Feladat [3].** Legyen $f(2^{-n}) = 3^{-n}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$ és nulla egyébként. Hol differenciálható $f$?

**5.1.10. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $0 < c < 1$, akkor $x^c$ jobb oldali deriváltja a nullában végtelen!

**5.1.11. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $n$ páratlan természetes szám, akkor $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ deriváltja a nullában $+\infty$.

A következő tétel úgy tekinthető, mint a polinomok differenciálására vonatkozó szabály kiterjesztése.

**5.1.12. Tétel.** *Hatványsor összegfüggvénye tagonként differenciálható a konvergenciatartomány pontjaiban, azaz ha*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

*akkor a konvergenciatartomány bármely $x$ pontjában*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}.$$

*A két hatványsor konvergenciasugara megegyezik.*

$\star$ **Bizonyítás.** Mivel $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^n$ hatványsorok konvergenciasugara megegyezik. Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^n = (x-c) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1},$$

bármely $x$-re a két sor egyszerre konvergens. A hatványsorok átrendezésére vonatkozó tétel szerint a konvergenciatartomány bármely $d$ pontjára $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-d)^m$, ha $|x-d| < r = R - |d-c|$, ahol

$$b_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n (d-c)^{n-m}.$$

Innen

$$\frac{f(x)-f(d)}{x-d} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x-d)^{m-1},$$

ha $0 < |x-d| < r$. Mivel a jobb oldal hatványsor összegfüggvénye, folytonos, ezért $f'(d)$ létezik és

$$f'(d) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (d-c)^{n-1},$$

ami a bizonyítandó állítás. $\square$

**5.1.13. Következmény: Taylor-tétel.** *Az előző tétel feltételei mellett, $f$ akárhányszor differenciálható a konvergenciatartományban és ha a konvergenciatartomány nem üres, akkor*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

A tétel úgy is fogalmazható, hogy hatványsor összegfüggvénye meghatározza az együtthatóit.

**Bizonyítás.** Az, hogy $a_0 = f(c)$, triviális, és teljes indukcióval kapjuk, hogy $f$ akárhányszor differenciálható és $a_n = f^{(n)}(c)/n!$. □

**5.1.14. Következmény.** *A valós és a komplex számok halmazán is* $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\operatorname{sh}' = \chi$, $\chi' = \operatorname{sh}$. *A valós és a komplex számok halmazán is, ahol* tg, ctg, th *illetve* cth *értelmezve van, ott*

$$\operatorname{tg}' = 1/\cos^2 = 1 + \operatorname{tg}^2, \quad \operatorname{ctg}' = -1/\sin^2 = -1 - \operatorname{ctg}^2,$$

$$\operatorname{th}' = 1/\chi^2 = 1 - \operatorname{th}^2, \quad \operatorname{cth}' = 1/\operatorname{sh}^2 = \operatorname{cth}^2 - 1.$$

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló számolás. □

°⋆ **5.1.15. Megjegyzés.** Ha egy függvény akárhányszor differenciálható a $c$ pontban, akkor mindig felírhatjuk a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

hatványsort, a *Taylor-sor*t (ha $c = 0$, akkor a sort *MacLaurin-sor*nak szokás nevezni). Az előző tétel szerint hatványsor összegfüggvényének Taylor-sora. Azonban tetszőleges valós változós, akárhányszor differenciálható függvény esetén nem biztos, hogy a Taylor-sor konvergál a függvényhez. Például az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

összefüggéssel definiált függvény tetszőleges sokszor differenciálható és MacLaurin-sorának együtthatói nullák, így a sor nem konvergál a függvényhez: Teljes indukcióval megmutathatjuk, hogy $f^{(n)}(x) = 0$, ha $x < 0$ és $f^{(n)}(x) = p_n(1/x)e^{-1/x}$ valamely $p_n$ polinommal, ha $x > 0$. Csak azt kell megmutatni teljes indukcióval, hogy $f^{(n)}(0) = 0$, azaz hogy

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{p_n(1/x)}{x \exp(1/x)} = 0.$$

Ez könnyen következik, ha exp helyére beírjuk a hatványsorának egy (elég magas indexű) részletösszegét.

Komplex változós függvényeknél egészen más a helyzet, mint látni fogjuk: ha a függvény egyszer differenciálható, akkor analitikus is; ezzel a kérdéskörrel a komplex függvénytanban foglalkozunk.

**5.1.16. Segédtétel.** *Ha $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$, és $x$ belső pontja $f$ értelmezési tartományának, akkor $f$ pontosan akkor differenciálható $x$-ben, ha van olyan $A \in \mathbb{K}_2$ szám és $\varepsilon \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény, hogy $\varepsilon(x) = 0$, az $\varepsilon$ folytonos $x$-ben, és*

$$f(y) - f(x) = A(y - x) + \varepsilon(y)(y - x) \quad \textit{minden } y \in \operatorname{dmn}(f)\textit{-re.}$$

*Az $A$ szám egyértelműen meghatározott, $A = f'(x)$.*

A jobb oldalon szereplő $y \mapsto A(y - x) = f'(x)(y - x)$ lineáris függvényt szokás az $f$ függvény $x$-beli *differenciál*jának nevezni. A tétel azt mondja, hogy differenciálható függvény egy lineáris leképezés és egy eltolás összetételével, azaz egy affin leképezéssel (legfeljebb elsőfokú polinommal) közelíthető.

**Bizonyítás.** Ha $f$ differenciálható, akkor legyen $A = f'(x)$,

$$\varepsilon(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - A,$$

ha $y \neq x$, és $\varepsilon(x) = 0$. A megfordításhoz az

$$f(y) - f(x) = A(y - x) + \varepsilon(y)(y - x)$$

összefüggésben $y - x$-szel osztva, majd határértéket véve, kapjuk, hogy $f'(x)$ létezik, és $A$. □

**5.1.17. Láncszabály.** *Legyen $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$, $f \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$, $g \in \mathbb{K}_2 \to \mathbb{K}_3$. Ha $f$ differenciálható az $x$ pontban, $g$ pedig differenciálható az $f(x)$ pontban, akkor $g \circ f$ differenciálható az $x$ pontban és*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

**Bizonyítás.** Az előző segédtétel alapján az $f$ függvény $x$-beli differenciálhatósága azt jelenti, hogy az $f$ függvény $f(t) - f(x)$ megváltozása felírható

$$f(t) - f(x) = f'(x)(t - x) + \varepsilon(t)(t - x)$$

alakban, ahol $\varepsilon(x) = 0$, és $\varepsilon$ folytonos $x$-ben. Hasonlóan, a $g$ függvény $y = f(x)$-beli differenciálhatósága azt jelenti, hogy a $g$ függvény $g(s) - g(y)$ megváltozása felírható

$$g(s) - g(y) = g'(y)(s - y) + \delta(s)(s - y)$$

alakban, ahol $\delta(y) = 0$ és $\delta$ folytonos $y$-ban. Ha most $s = f(t)$, akkor

$$\begin{aligned} g\big(f(t)\big) - g\big(f(x)\big) &= \big(f(t) - f(x)\big)\big(g'(y) + \delta(s)\big) \\ &= (t - x)\big(f'(x) + \varepsilon(t)\big)\big(g'(y) + \delta(s)\big) \\ &= (t - x)\big(f'(x)g'(y) + \eta(t)\big), \end{aligned}$$

ahol $\eta(t) = f'(x)\delta(s) + g'(y)\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\delta(s)$ Mivel $s = f(t) \to f(x) = y$, ha $t \to x$, kapjuk, hogy $\delta(s) \to 0$, és így $\eta(t) \to 0$, ha $t \to x$. □

**5.1.18. Az inverz függvény differenciálási szabálya.** *Ha $[a, b] \subset \mathbb{R}$, az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton és folytonos $[a, b]$-n, az $x \in [a, b]$ pontban differenciálható és $f'(x) \neq 0$, akkor $f^{-1}$ differenciálható az $y = f(x)$ pontban, és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $y = f(x)$ és $\varepsilon$ ugyanaz, mint az előző bizonyításban, továbbá tegyük fel, hogy $f$ monoton növekedő (a másik eset hasonlóan kezelhető). Ha $c = f(a)$, $d = f(b)$, akkor Bolzano tétele szerint $f$ az $[a, b]$-t $[c, d]$-re képezi le, továbbá $f^{-1}$ folytonos $[c, d]$-n. Ha most $s \in [c, d]$, akkor pontosan egy olyan $t \in [a, b]$ létezik, amelyre $s = f(t)$, továbbá

$$f(t) - f(x) = \big(f'(x) + \varepsilon(t)\big)(t - x).$$

Ha $s \neq y$, akkor $t \neq x$ és

$$f^{-1}(s) - f^{-1}(y) = t - x = \frac{f(t) - f(x)}{f'(x) + \varepsilon(t)} = \frac{s - y}{f'(x) + \varepsilon\big(f^{-1}(s)\big)}.$$

Ebből

$$\frac{f^{-1}(s) - f^{-1}(y)}{s - y} \to \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{ha} \quad s \to y. \ \square$$

Hasonló állítás igaz $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$-beli függvényekre is: itt csak megfogalmazzuk, egy később bizonyítandó általános tételből következik.

**5.1.19. Az inverz függvény differenciálási szabálya komplexben.** *Ha $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, $f'(c) \neq 0$, akkor van olyan a $c$ pontot tartalmazó $U$ nyílt halmazt, amelyet $f$ egy $V$ nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le és $V$-n az $f$ inverze is differenciálható. Ha $z \in U$, $w = f(z)$, akkor*

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(w)\right)}.$$

Az állítás az $n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ speciális esete a $\mathbb{K}^n$-beli inverz függvény tételnek. $\square$

**5.1.20. Következmény.** *Ha $z \in \mathbb{C} \setminus \left]-\infty, 0\right]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$, akkor $\ln' z = 1/z$ és $z \mapsto z^\alpha$ deriváltja $z \mapsto \alpha z^{\alpha-1}$.*

**Bizonyítás.**

$$\ln'(z) = \frac{1}{\exp'(\ln z)} = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}$$

és

$$(z^\alpha)' = \big(\exp(\alpha \ln z)\big)' = \exp(\alpha \ln z)\frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}. \ \square$$

**5.1.21. Feladat [4].** Hol vízszintes a $2x^3 - 3x^2 + 8$ függvény grafikonja?

**5.1.22. Feladat [4].** Mikor érinti $x^3 + px + q$ az $x$ tengelyt?

**5.1.23. Feladat [3].** Milyen szögben metszi $x^2$ a $2x$ egyenest?

**5.1.24. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy $x \mapsto \sqrt{x}$ differenciálható, ha $x > 0$ és deriváltja $1/(2\sqrt{x})$.

**5.1.25. Feladat [4].** Legyen $f(x) = |x|^3$, ha $x \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki $f'(x)$-t és $f''(x)$-et és mutassuk meg, hogy $f^{(3)}(0)$ nem létezik!

**5.1.26. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy az $x^2 - y^2 = a$ és $xy = b$ görbék merőlegesen metszik egymást!

**5.1.27. Feladat [5].** Differenciáljuk az alábbi függvényeket:

(1) $2x^{1/2} - 3x^{2/3}$, $x > 0$; $x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $(x^3 + 1)\cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

(2) $\sin(x)/x$, $x$; $x \mapsto (\sin(x)^{20} + 1)^{20}$, $x \in \mathbb{R}$; $f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$;

(3) $x^x$, $x > 0$; $x^{e^{x^e}}$, $x > 0$; $\log_x 3$, $x > 0$, $x \neq 1$; $\ln\big(\ln^2(\ln^3 x)\big)$;

(4) $x\sqrt{1-x^2}/(1+x^2) - (3/\sqrt{2})\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}/\sqrt{1-x^2})$; $(\arcsin x)^x$, $0 < x < \pi/2$;

(5) $x^{\operatorname{arctg} x}$, $x > 0$; $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{\operatorname{tg}(1/x^2)}$, $x > \sqrt{2/\pi}$; $\operatorname{arctg} e^x - \ln\sqrt{e^{2x}/(e^{2x}+1)}$.

**5.1.28. Feladat [5].** Az alábbi függvények szigorúan monotonok a megadott intervallumon. Mennyi az inverzük deriváltja a megadott pontban?

(1) $x^5 + x^2 + 1$, ha $x \geq 0$ inverzének a 3 pontban;

(2) $x + \sin x$, ha $x \in \mathbb{R}$ inverzének az $1 + \pi/2$ pontban;

(3) $x^x$, ha $x \geq 1$ inverzének a 27 pontban.

**5.1.29. Feladat [9].** Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $f(x) = |x|^\alpha \sin(|x|^{-\beta})$, ha $0 \neq x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $[-1, 1]$-en

(1) $f$ pontosan akkor folytonos, ha $\alpha > 0$;

(2) $f'(0)$ pontosan akkor létezik, ha $\alpha > 1$;

(3) $f'$ pontosan akkor korlátos, ha $\alpha \geq 1 + \beta$;

(4) $f'$ pontosan akkor folytonos, ha $\alpha > 1 + \beta$;

(5) $f''(0)$ pontosan akkor létezik, ha $\alpha > 2 + \beta$;

(6) $f''$ pontosan akkor korlátos, ha $\alpha \geq 2 + 2\beta$;

(7) $f''$ pontosan akkor folytonos, ha $\alpha > 2 + 2\beta$.

$\to$ **5.1.30. Feladat [5].** Legyen $f, g \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $f$ és $g$ is $n$-szer differenciálható $x$-ben, akkor $fg$ is, és

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

## 5.2 Függvényvizsgálat

Ebben az alfejezetben elsősorban valós változós valós értékű függvények vizsgálatával fogunk foglalkozni.

**5.2.1. Tétel.** *Tegyük fel, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az értelmezési tartomány valamely $x$ belső pontjában lokális maximuma vagy lokális minimuma van, azaz $x$-nek van olyan környezete, hogy az ott felvett értékei között $f(x)$ maximális, illetve minimális. Ha $f$ differenciálható $x$-ben, akkor $f'(x) = 0$.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $f$-nek lokális maximuma van $x$-ben. Válasszunk olyan $\delta > 0$-t, amelyre $|y - x| < \delta$ esetén $y$ az értelmezési tartományban van, és $f(y) \leq f(x)$. Ekkor $x - \delta < y < x$ esetén $\big(f(y) - f(x)\big)/(y - x) \geq 0$, így $f'(x) \geq 0$, ha viszont $x < y < x + \delta$, akkor $\big(f(y) - f(x)\big)/(y - x) \leq 0$, így $f'(x) \leq 0$. A lokális minimum esetén az egyenlőtlenségek megfordulnak. □

**5.2.2. Rolle tétele.** *Ha* $-\infty < a < b < \infty$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n,* $f(a) = f(b)$*, és* $f$ *differenciálható* $]a, b[$*-n , akkor van olyan* $\xi \in\, ]a, b[$*, amelyre* $f'(\xi) = 0$.

**Bizonyítás.** Ha $f$ konstans, akkor bármely $\xi \in\, ]a, b[$ megfelel. Ha van olyan $y \in\, ]a, b[$, amelyre $f(y) > f(a) = f(b)$, akkor $f$ maximumhelyére, egyébként pedig $f$ minimumhelyére alkalmazva az előző tételt, kapjuk az állítást. □

**5.2.3. Cauchy középérték-tétele.** *Ha* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *az* $[a, b]$*-n folytonos függvények, amelyek* $]a, b[$*-n differenciálhatóak, akkor van olyan* $\xi \in\, ]a, b[$*, amelyre*

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(\xi) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(\xi).$$

**Bizonyítás.** A bizonyítás abban áll, hogy észrevesszük, a

$$h(x) = \big(f(b) - f(a)\big)g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)f(x)$$

függvény az $a$ és $b$ pontokban ugyanazt az értéket veszi fel, és így alkalmazható rá Rolle tétele, azaz van olyan $\xi \in\, ]a, b[$ pont, ahol $h'(\xi) = 0$. □

**5.2.4. Következmény: Lagrange középérték-tétele.** *Ha* $-\infty < a < b < \infty$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos* $[a, b]$*-n és differenciálható* $]a, b[$*-n , akkor van olyan* $\xi \in\, ]a, b[$*, amelyre*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk az előző tételt $g(x) = x$-szel. □

**5.2.5. Megjegyzés.** A középérték-tételek nem maradnak érvényben már valós változós, komplex értékű függvényekre sem, például az $x \mapsto \exp(ix)$ függvényre $[0, 2\pi]$-n nem teljesül a Rolle-tétel állítása. Általánosabb esetben egy egyenlőtlenség veszi át a középérték-tételek szerepét.

**5.2.6. Tétel.** *Ha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallum,* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *differenciálható az intervallum belső pontjaiban és folytonos az esetleges végpontokban, akkor*

(1) *$f$ akkor és csak akkor monoton növekedő, ha $f'(x) \geq 0$ az $I$ minden belső pontjában;*

(2) *$f$ akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \leq 0$ az $I$ minden belső pontjában;*

(3) *$f$ akkor és csak akkor konstans, ha $f'(x) = 0$ az $I$ minden belső pontjában.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ monoton növekedő, akkor minden belső pontban minden differenciahányados nemnegatív, így $f'(x) \geq 0$. Megfordítva, mivel bármely $I$-beli $a < b$ párhoz van olyan $a < x < b$, amelyre $f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \geq 0$, kapjuk a monoton növekedést. (2) hasonlóan adódik, (3) pedig (1) és (2) következménye. □

**5.2.7. Megjegyzés.** Ugyanez a bizonyítás mutatja, hogy az előző tételben, ha $f'(x) > 0$ az $I$ minden $x$ belső pontjára, akkor $f$ szigorúan monoton növekedő, ha pedig $f'(x) < 0$ minden $I$ minden $x$ belső pontjára, akkor $f$ szigorúan monoton csökkenő. Itt azonban nem igaz a megfordítás, mint az $x \mapsto x^3$ függvény példája mutatja. A következő tétel szükséges és elégséges feltételt ad, amely erre a függvényre is alkalmazható.

**5.2.8. Tétel.** *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható az intervallum belső pontjaiban és folytonos az esetleges végpontokban, akkor*

(1) *$f$ akkor és csak akkor szigorúan monoton növekedő, ha $f'(x) \geq 0$ az $I$ minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma $I$-nek, amelyen $f'$ azonosan nulla;*

(2) *$f$ akkor és csak akkor monoton csökkenő, ha $f'(x) \leq 0$ az $I$ minden belső pontjában és nincs olyan nem üres nyílt részintervalluma $I$-nek, amelyen $f'$ azonosan nulla.*

**Bizonyítás.** Könnyen látható, hogy $f$ akkor és csak akkor szigorúan monoton, ha monoton és nincs olyan nem üres, nyílt részintervallum, amelyen konstans, így a tétel következik az előző tételből. □

**5.2.9. Példák.** Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x \sin(1/x)$ egyébként, akkor $f$ nem differenciálható a nullában, bár folytonos. Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ egyébként, akkor $f$ differenciálható a nullában, de a deriváltja nem folytonos, bár lokálisan korlátos a nullában. Ha $f(0) = 0$ és $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ egyébként, akkor $f$ differenciálható a nullában, de a deriváltja nem folytonos, és nem is lokálisan korlátos a nullában.

**5.2.10. A trigonometrikus és hiperbolikus függvények inverzei.** Az eddig tanult tételek alapján

(1) a sin függvény $[-\pi/2, \pi/2]$-re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az arcsin függvény;

(2) a cos függvény $[0, \pi]$-re való megszorítása szigorúan monoton csökkenő, inverze az arccos függvény;

(3) a tg függvény $]-\pi/2, \pi/2[$-re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az arctg függvény;

(4) a ctg függvény $]0, \pi[$-re való megszorítása szigorúan monoton csökkenö, inverze az arcctg függvény;

(5) a sec függvény $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$-re való megszorítása kölcsönösen egyértelmű, inverze az arcsec függvény;

(6) a cosec függvény $[-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2]$-re való megszorítása kölcsönösen egyértelmű, inverze az arccosec függvény;

(7) a sh függvény $]-\infty, \infty[$-en szigorúan monoton növekedő, inverze az arsh függvény;

(8) a $\chi$ függvény $[0, \infty[$-re való megszorítása szigorúan monoton növekedő, inverze az arch függvény;

(9) a th függvény $]-\infty, \infty[$-en szigorúan monoton növekedő, inverze az arth függvény;

(10) a cth függvény $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, \infty[$-en szigorúan monoton csökkenő, inverze az arcth függvény;

(11) a sech függvény $[0, \infty[$-en szigorúan monoton csökkenő, inverze az arsech függvény;

(12) a cosech függvény $]-\infty, 0[\, \cup\, ]0, \infty[$-en szigorúan monoton csökkenő, inverze az arcosech függvény.

A trigonometrikus függvények inverzeinek neve az *arcus* (ív) szóból ered, mivel ezek értékei egy szöget, azaz ívhosszat adnak meg. A hiperbolikus függvények inverzeinek neve az *area* (terület) szóból ered, mivel megmutatható, hogy az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola $(x, y)$ és $(x, -y)$ pontjai közötti ív, valamint az ezen pontokat az origóval összekötő szakaszok által határolt síkrész területe $\operatorname{arch} x$.

### 5.2.11. Összefüggések a trigonometrikus és a hiperbolikus függvények inverzei között.

Ha $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, akkor $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, ahonnan $y = \sin x$ jelöléssel $x = \arcsin y$ és $\pi/2 - x = \arccos y$, így $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$, ha $y \in [-1, 1]$. Hasonlóan $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arcctg} y = \pi/2$, ha $y \in \mathbb{R}$.

Ha $-\pi/2 < x < \pi/2$, akkor

$$\sin x = \frac{\sin x}{\cos x} |\cos x| = \operatorname{tg} x \sqrt{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Innen $t = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x$ jelöléssel $y = t/\sqrt{1+t^2}$ és

$$\arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = x = \operatorname{arctg} t,$$

ha $t \in \mathbb{R}$, valamint

$$\arcsin y = x = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

ha $-1 < y < 1$.

Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, ahonnan $y = \operatorname{sh} x$, $t = e^x$ jelöléssel

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{t - 1/t}{2} = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Az egyenletet megoldva $t$-re $t = y + \sqrt{y^2+1}$; a pozitív előjelet azért kell választanunk, mert $t$ pozitív kell legyen. Innen $\operatorname{arsh} y = x = \ln t = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, ha $y \in \mathbb{R}$. Hasonlóan adódik, hogy $\operatorname{arch} y = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$, ha $y \ge 1$; itt a négyzetgyökvonásnál azért kell a pozitív előjelet választani, mert $y - \sqrt{y^2-1} = 1/(y + \sqrt{y^2-1}) \le 1/2$, ha $y \ge 1$, de $t = e^x \ge 1$, ha $x \ge 0$. Végül hasonlóan $t = e^x$, $y = \operatorname{th} x$ jelöléssel

$$y = \operatorname{th} x = \frac{t - 1/t}{t + 1/t} = \frac{t^2-1}{t^2+1},$$

és az egyenletet megoldva $t = \sqrt{(1+y)/(1-y)}$, ahonnan

$$\operatorname{arth} y = x = \ln t = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y},$$

ha $-1 < y < 1$.

Természetesen számos további összefüggés is levezethető.

⋆ **5.2.12. Darboux közbenső érték tétele.** *Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor a derivált minden $f'(a)$ és $f'(b)$ közötti értéket felvesz.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $f'(a) < f'(b)$, legyen $f'(a) < \lambda < f'(b)$ tetszőleges, és legyen $g(x) = f(x) - \lambda x$. Ekkor $g'(a) < 0$, így valamely $x_1 \in ]a,b[$-re $g(x_1) < g(a)$, és hasonlóan $g(x_2) < 0$ valamely $x_2 \in ]a,b[$-re. Innen $g$ felveszi a minimumát valamely $x \in ]a,b[$ pontban. Itt $g'(x) = 0$, tehát $f'(x) = \lambda$. Az $f'(a) > f'(b)$ eset hasonlóan kezelhető. □

**5.2.13. L'Hospital-szabály.** *Tegyük fel, hogy $-\infty \le a < b \le +\infty$, hogy $f, g\colon ]a,b[ \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, $g'(x) \neq 0$, ha $x \in ]a,b[$, és hogy*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

*Ha $x \to a$ esetén $f(x) \to 0$ és $g(x) \to 0$, vagy ha $x \to a$ esetén $g(x) \to +\infty$, akkor*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

*Természetesen $x \to a$ helyett $x \to b$ és $+\infty$ helyett $-\infty$ is szerepelhet.*

⋆ **Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $-\infty \le A < \infty$. Válasszunk egy olyan $q$ valós számot, amelyre $A < q$, és aztán egy olyan $r$ számot, amelyre $A < r < q$. Ekkor (1) szerint van olyan $c \in ]a,b[$ pont, hogy $a < x < c$ esetén $f'(x)/g'(x) < r$. Ha most $a < x < y < c$, akkor Cauchy középérték tétele szerint van olyan $t \in ]x,y[$ pont, hogy

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{1}$$

Ha $\lim_{x\downarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x\downarrow a} g(x)$, akkor ezt felhasználva az előző összefüggésből

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le r < q, \quad \text{ha} \quad a < y < c.$$

Ha $\lim_{x\downarrow a} g(x) = +\infty$, akkor (1)-ben $y$-t rögzítve, választhatunk olyan $c_1 \in ]a,y[$ számot, hogy ha $a < x < c_1$, akkor $g(x) > g(y)$ és $g(x) > 0$. Végigszorozva (1)-et a

$$\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}$$

kifejezéssel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}, \tag{2}$$

ha $a < x < c_1$. Ha most $x \to a$, akkor van olyan $c_2 \in ]a,c_1[$ szám, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q, \quad \text{ha} \quad a < x < c_2.$$

Összegezve, mindkét esetben ez az állítás teljesül. Hasonlóan mutatható meg, hogy $-\infty < p < A \le +\infty$ esetén van olyan $c_3$, hogy ha $a < x < c_3$, akkor $p < f(x)/g(x)$. Ezekből az állításokból következik a tétel. □

**5.2.14. Megjegyzés.** A L'Hospital-szabály nem mindig alkalmazható, akkor sem, ha a határérték létezik és 0/0 alakú. Például ha $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ és $g(x) = x$, akkor $\lim_{x\downarrow 0} f(x)/g(x) = 0$, de $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)/g'(x)$ nem létezik.

**5.2.15. Példák.** (1) A $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)/x$ határérték 0/0 alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

(2) A $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+x)/x$ határérték $\infty/\infty$ alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 0.$$

(3) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ és $b \neq 0$. A $\lim_{x\to+\infty}(1+a/x)^{bx}$ határérték $1^\infty$ alakú. $\ln\big((1+a/x)^{bx}\big) = bx\ln(1+a/x)$, ha $x$ elég nagy, és a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{bx}}$$

határérték 0/0 alakú. A L'Hospital-szabály alkalmazásával

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{bx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{a}{x^2(1+a/x)}}{-\frac{1}{bx^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ab}{1+\frac{a}{x}} = ab.$$

Innen $\lim_{x\to+\infty}(1+a/x)^{bx} = e^{ab}$.

(4) Az $x^{1/x}$ függvény logaritmusát véve az $\ln x/x$, $\infty/\infty$ alakú, ha $x \to \infty$. A L'Hospital szabály alkalmazásával a határérték 0, így az eredeti függvény határértéke 1.

(5) Az előző példából adódik, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Más sorozat határértékek meghatározására is használható a L'Hospital szabály, például a „nevezetes sorozatok határértéke” című tétel (1)–(4) és (6) határértékeit mind könnyen megkapjuk.

**5.2.16. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0}(b^x-1)/x$, $b>0$; $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x$; $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}(1+b/n)^n$; $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n^2}e^{-n}$.

**5.2.17. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)/x$; $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin x}$; $\lim_{x\to 0}\big((1+e^x)/2\big)^{1/\operatorname{sh} x}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\operatorname{sh}^2 x/\ln\cos 3x$; $\lim_{x\to 1}(2-x)^{1/\cos(\pi/(2x))}$; $\lim_{x\to\infty}(x^{1/x}-1)x/\ln x$.

**5.2.18. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0}(e-(1+x)^{1/x})/x$; $\lim_{n\to\infty} n(n^{1/n}-1)/\ln n$; $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x)/(x(1-\cos x))$;

(2) $\lim_{x\to 0}(x-\sin x)/(\operatorname{tg} x - x)$; $\lim_{x\uparrow -1}(1+1/x)^x$; $\lim_{x\downarrow 0}(1+1/x)^x$; $\lim_{x\downarrow 0} x^x$;

(3) $\lim_{x\downarrow 0} x^{1/x}$; $\lim_{x\downarrow 0} x^c \ln x$, $c>0$; $\lim_{x\to\infty 0} x^{-c}\ln x$, $c>0$.

**5.2.19. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0}\sin 3x/\operatorname{tg} 5x$; $\lim_{x\to 0}\ln(\cos ax)/\ln(\cos bx)$; $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x} - 2x)/(x - \sin x)$;

(2) $\lim_{x\to 0} x^{-2} - \sin(x)^{-2}$; $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x)/(x - \sin x)$; $\lim_{x\to 0}(x \operatorname{ctg} x - 1)/x^2$;

(3) $\lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x - 1/x)$; $\lim_{x\to 0}(\sin x/x)^{-x^2}$; $\lim_{x\to 0}\big((1+e^x)/2\big)^{\operatorname{ctg} x}$;

(4) $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}(\pi x/2)$; $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$; $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

**5.2.20. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}/x^{100}$; $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-0,1x}$; $\lim_{x\to 0}((1+x^{1/x}) - e)/x$;

(2) $\lim_{x\to 0}(chx - cosx)/x^2$; $\lim_{x\to 0}(x \operatorname{tg} x - 1)/x^2$; $\lim_{x\to 0}(1 - cosx^2)/(x^2 \sin x^2)$;

(3) $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$; $\lim_{x\to 0}(a^x - a^{\sin x})/x^3$, $a > 0$; $\lim_{x\to 1}(x^x - x)/(\ln x - x + 1)$;

(4) $\lim_{x\to 0}(\sin x/x)^{1/x^2}$; $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x/x)^{1/x^2}$; $\lim_{x\to\infty} x^{\lg x}/(\ln x)^x$, $\lim_{x\downarrow\emptyset}\ln(1/x)^x$;

(5) $\lim_{x\uparrow 1}(\ln x)ln(1-x)$; $\lim_{x\to\infty}\ln x/x^a$, $a > 0$; $\lim_{x\to\infty} x^n/e^{ax}$, $a > 0$, $n > 0$.

**5.2.21. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy valós változós komplex értékű függvényekre is ha $f'(x)$ és $g'(x) \neq 0$ létezik és $f(x) = g(x) = 0$, akkor

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**5.2.22. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia sugarát:

(1) $\sum(1+1/n)^{n^2}x^n$;

(2) $\sum((\ln n)^{\ln n}/2^n)x^n$.

**5.2.23. Feladat [7].** Legyen $]0,1[$-en $f(x) = x$ és $g(x) = x - x^2 e^{i/x^2}$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{x\downarrow 0} f(x)/g(x) = 1$, és bár $0/0$ alakú, de $\lim_{x\downarrow 0} f'(x)/g'(x) = 0$.

**5.2.24. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy ha $f, g\colon ]0,1[ \to \mathbb{C}$ differenciálhatóak, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$, $f'(x) \to A \in \mathbb{C}$ és $g'(x) \to B \in \mathbb{C}$, ha $x \downarrow 0$, $B \neq 0$, akkor $\lim_{x\downarrow 0} f(x)/g(x) = A/B$.

**5.2.25. Konvex és konkáv függvények, inflexiós hely.** Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt *konvex*nek nevezzük, ha $x, y \in I$, $x < y$, $0 < \lambda < 1$ esetén

(1) $$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Ha (1) a $\leq$ helyett $\geq$-vel teljesül, akkor $f$-et *konkáv*nak nevezzük, ha pedig (1) a $\leq$ helyett $<$-bel illetve $>$-bal, akkor *szigorúan konvex*nek illetve *szigorúan konkáv*nak.

Ha az $f$ függvénynek az $I$ egy $x$ belső pontban van deriváltja (esetleg végtelen) és van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $]x-\varepsilon, x[$ intervallumon a függvény konvex, az $]x, x+\varepsilon[$ intervallumon pedig konkáv, vagy fordítva, az $]x-\varepsilon, x[$ intervallumon a függvény konkáv, az $]x, x+\varepsilon[$ intervallumon pedig konvex, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *inflexiós hely*e az $x$.

⋆ **5.2.26. Segédtétel.** *Ha $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely $I$-beli $x < t < y$ pontok esetén*

(1) $$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

*Hasonlóan $f$ pontosan akkor konkáv, szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv, ha (1) teljesül $\leq$ helyett $\geq$, $<$, illetve $>$-bal.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ konvex, akkor a definícióban $\lambda$ helyére $(y-t)/(y-x)$-et írva, azt kapjuk, hogy $1-\lambda=(t-x)/(y-x)$, és

$$f(t)\leq\frac{(y-t)f(x)+(t-x)f(y)}{y-x}.$$

Ezt átrendezve, kapjuk (1)-et. Megfordítva, ha (1) teljesül, akkor átrendezéssel

$$(y-x)f(t)\leq(y-t)f(x)+(t-x)f(y).$$

A $t$ helyére $\lambda x+(1-\lambda)y$-t írva,

$$(y-x)f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda(y-x)f(x)+(1-\lambda)(y-x)f(y),$$

amiből kapjuk a definíciót. A többi eset bizonyítása hasonló. □

**5.2.27. Tétel.** *Ha $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, az $f\colon I\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, konkáv, szigorúan konvex, illetve szigorúan konkáv, ha $f'$ monoton növekedő, monoton csökkenő, szigorúan monoton növekedő, illetve szigorúan monoton csökkenő.*

⋆ **Bizonyítás.** Ha $f$ konvex és $I$-beli pontokra $x<t<r<y$, akkor kétszer alkalmazva az előző segédtételt,

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leq\frac{f(r)-f(t)}{r-t}\leq\frac{f(y)-f(r)}{y-r},$$

ahonnan $t\downarrow x$, $r\uparrow y$ határátmenettel $f'(x)\leq f'(y)$. Megfordítva, ha $f'$ monoton növekedő, akkor $I$-beli $x<t<y$ pontokhoz Lagrange középérték tétele szerint létezik $x<\xi<t<\eta<y$, hogy

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(\xi)\leq f'(\eta)=\frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

A többi eset bizonyítása hasonló, de a szigorú eseteknél háromszor kell alkalmazni az előző segédtételt. □

**5.2.28. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $a>0$, $a\neq 1$, akkor $x\mapsto a^x$ szigorúan konvex!

**5.2.29. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $b<0$ vagy $b>1$, akkor $x\mapsto x^b$ szigorúan konvex!

**5.2.30. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy $x\mapsto x\ln x$ szigorúan konvex!

**5.2.31. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ha $0<b<1$, akkor $x\mapsto x^b$ szigorúan konkáv!

**5.2.32. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy ln szigorúan konkáv!

**5.2.33. Feladat [3].** Mutassuk meg, hogy az $x\mapsto x^3$ és $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ függvényeknek a nullában inflexiós helye van!

**5.2.34. Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség.** *Ha* $n \in \mathbb{N}^+$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, *akkor* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

$\star$ **Bizonyítás.** Ha valamelyik $a_j$ nulla, akkor az állítás triviális. Az $n = 1$ eset is triviális. Teljes indukcióval, ha $n-1$-re teljesül az állítás, akkor az ln függvény szigorúan konkáv voltából $a = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$ jelöléssel

$$\frac{n-1}{n}\ln(a) + \frac{1}{n}\ln(a_n) \leq \ln\left(\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}a_n\right),$$

ahonnan

$$\sqrt[n]{a^{n-1}a_n} \leq \frac{1}{n}a_n + \frac{n-1}{n}a \leq \frac{1}{n}a_n + \frac{n-1}{n}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, ami a bizonyítandó állítás. $\square$

**5.2.35. Feladat: Harmonikus és mértani közép közötti egyenlőtlenség [5].** Mutassuk meg, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, akkor

$$\frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**5.2.36. Feladat [6].** Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(1)

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x, y > 0,\ x \neq y,\ n > 1;$$

(2)

$$\exp\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\exp x + \exp y}{2} \quad x \neq y;$$

(3)

$$(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x\ln x + y\ln y, \quad x, y > 0,\ x \neq y;$$

(4)

$$x^{\lambda_1}y^{\lambda_2} \leq \lambda_1 x + \lambda_2 y \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, x, y > 0.$$

**5.2.37. Taylor-polinom.** Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $x \in [a,b]$ pontban $n$-szer differenciálható, akkor a

$$h \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k, \quad h \in \mathbb{R}$$

polinomot az $f$ függvény $x$-beli $n$-edfokú *Taylor-polinom*jának nevezzük.

**5.2.38. Taylor-formula maradéktag nélkül.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény az $x \in [a,b]$ pontban $n$-szer differenciálható. Jelölje $T$ az $f$ függvény $x$-beli $n$-edfokú Taylor-polinomját. Ekkor*

$$\lim_{h\to 0, x+h\in[a,b]} \frac{f(x+h)-T(h)}{h^n} = 0.$$

**Bizonyítás.** Teljes indukcióval: $n = 1$-re a derivált definíciójából következik. Ha $n > 1$, akkor vegyük észre, hogy $T'$ az $f'$-höz tartozó $n-1$-edfokú Taylor-polinom, és $T(0) = f(x)$, így a középérték-tétel szerint

$$\frac{f(x+h)-T(h)}{h^n} = \frac{f(x+h)-T(h)-\big(f(x)-T(0)\big)}{h^n} = \frac{f'(x+\tau h)-T'(\tau h)}{h^{n-1}} \to 0,$$

ha $h \to 0$. □

**5.2.39. Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal.** *Legyen $n \in \mathbb{N}$,*

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad x, x+h \in [a,b],$$

*és tegyük fel, hogy $f$ folytonos a $\{x+th\colon 0 \le t \le 1\}$ zárt intervallumon, $n$-szer folytonosan differenciálható a $\{x+th\colon 0 \le t < 1\}$ félig zárt intervallumon, és $(n+1)$-szer differenciálható a $\{x+th\colon 0 < t < 1\}$ nyílt intervallumon. Jelölje $T$ az $f$ függvény $x$-beli $n$-edfokú Taylor-polinomját. Ekkor van olyan $0 < \tau < 1$, hogy*

$$f(x+h) = T(h) + \frac{f^{(n+1)}(x+\tau h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $M = f(x+h) - T(h)$, és legyen

$$g(t) = f(x+th) - T(th) - Mt^{n+1}, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 1.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $(n+1)!M = f^{(n+1)}(x+\tau h)h^{n+1}$ valamely $0 < \tau < 1$-re. Ez viszont

$$g^{(n+1)}(t) = h^{n+1}f^{(n+1)}(x+th) - (n+1)!M$$

miatt azzal ekvivalens, hogy $g^{(n+1)}(\tau) = 0$ valamely $0 < \tau < 1$-re. Mivel $k = 0, 1, \dots, n$-re $T^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)$, azt kapjuk, hogy $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0$. Az $M$ választásából következik, hogy $g(1) = 0$. Rolle tétele szerint $g'(\tau_1) = 0$ valamely $0 < \tau_1 < 1$-re. Mivel $g'(0) = 0$, hasonlóan következik, hogy $g''(\tau_2) = 0$ valamely $0 < \tau_2 < \tau_1$-re; $n+1$ lépés után kapjuk a tételt. □

**5.2.40. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$, $n > 1$, az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $n$-szer differenciálható $x$-ben, $f^{(n)}(x) \ne 0$, de $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$. Ekkor*

(1) *ha $f^{(n)}(x) > 0$ és $n$ páros, akkor $f$-nek lokális minimuma van $x$-ben;*

(2) *ha $f^{(n)}(x) < 0$ és $n$ páros, akkor $f$-nek lokális maximuma van $x$-ben;*

(3) *ha $n$ páratlan, akkor $f$-nek nincs lokális szélsőértéke $x$-ben.*

**Bizonyítás.** A maradéktag nélküli Taylor-formula szerint

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h^n} \to \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \quad \text{ha} \quad h \to 0,$$

így ha (1) fennáll, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x+h) > f(x)$, ha $0 < h < \delta$ és $f(x+h) < f(x)$, ha $-\delta < h < 0$. Hasonlóan adódik (2) és (3). $\square$

**5.2.41. Aszimptóták.** Szemléletesen, ezek olyan $ax + by = c$, $|a| + |b| \neq 0$ egyenletű egyenesek, amelyek a valós változós valós értékű $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjának „végtelen távoli érintői”. Pontosabban, ha $b \neq 0$, akkor az $x \mapsto g(x) = c/b - (a/b)x$ egyenes az $f$ *aszimptótá*ja, ha $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$, vagy ha $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$. Ha $b = 0$, akkor az $ax = c$ egyenletű egyenes akkor aszimptótája $f$-nek, ha az $f$ jobb vagy bal oldali határértéke a $c/a$ helyen $+\infty$ vagy $-\infty$. $\square$

**5.2.42. Függvényvizsgálat.** Ez alatt azt értjük, hogy meghatározzuk a függvény (féloldali), határértékeit, hogy hol monoton növő illetve csökkenő, lokális és abszolút szélsőértékeit és azok helyét, hol konvez illetve konkáv, az inflexiós pontokat és az asszimptótákat.

Példaként tekintsük az $x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény, az úgynevezett *haranggörbe* vizsgálatát. A deriváltja $-2xe^{-x^2}$, tehát $x < 0$ esetén szigorúan monoton növő, $x > 0$ esetén szigorúan monoton csökkenő, a nullában (abszolút) maximuma van, amelynek értéke 1. A második derivált $e^{-x^2}(4x^2 - 2)$, így $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ esetén a függvény szigorúan konkáv, az intervallum végpontjai inflexiós pontok, az $|x| \geq 1/\sqrt{2}$ intervallumokon a függvény szigorúan konvex. Az $x$ tengely asszimptóta. $\square$

**5.2.43. Feladat [4].** Taylor-sor segítségével írjuk fel az $1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ függvényt $1 + x$ polinomjaként!

**5.2.44. Feladat [7].** Írjuk fel az alábbi függvények adott $c$ helyhez tartozó $n$-ed fokú Taylor-polinomját:

(1) $(1 + x + x^2)/(1 - x + x^2), \quad c = 0,\ n = 3;$

(2) $\sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}, \quad c = 0,\ n = 3;$

(3) $e^{2x-x^2}, \quad c = 0,\ n = 5;$

(4) $\sin(\sin x), \quad c = 0,\ n = 3;$

(5) $\ln(\sin x/x), \quad c = 0,\ n = 6;$

(6) $\sqrt{x}, \quad c = 1,\ n = 3;$

(7) $x^x - 1, \quad c = 1,\ n = 3.$

**5.2.45. Feladat [8].** Milyen pontossággal teljesülnek az alábbi becslések az adott intervallumban:

(1) $\sin x \approx x - x^3/6$, $|x| \leq 0{,}5$;

(2) $\operatorname{tg} x \approx x + x^3/3$, $|x| \leq 0{,}1$;

(3) $e^x \approx 1 + x - x^2/2$, $|x| \leq 0{,}2$;

(4) $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2 - x^2/8$, $0 \leq x \leq 1$;

(5) $\cos x \approx 1 - x^2/2$, $|x| \leq 0{,}2$;

(6) $x/(e^x - 1) \approx 1 - x/2 + x^2/12$, $|x| \leq 0{,}1$;

(7) $\operatorname{arctg} x \approx x - x^3/3$, $|x| \leq 0{,}1$;

(8) $\arcsin x \approx x$, $|x| \leq 0{,}1$.

**5.2.46. Feladat [8].** Igazoljuk, hogy

$$\left| \sqrt[n]{a^n + x} - a - \frac{x}{na^{n-1}} \right| \leq \frac{n-1}{2n^2} \frac{x^2}{a^{2n-1}},$$

ha $n \geq 2$, $a > 0$, $x > 0$.

**5.2.47. Feladat [9].** A Taylor-formula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi számokat adott pontossággal:

(1) $e$, $10^{-9}$;

(2) $\sin 1^\circ$, $10^{-8}$;

(3) $\cos 9^\circ$, $10^{-5}$;

(4) $\sqrt{5}$, $10^{-5}$;

(5) $\lg 11$, $10^{-5}$;

(6) $\ln 1{,}2$, $10^{-3}$.

**5.2.48. Feladat [6].** Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

(1)

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad x > 0;$$

(2)

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad a, b, c \in \mathbb{R};$$

(3)

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n}}, \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R};$$

(4)

$$e^x > 1 + x, \quad x \neq 0;$$

(5)

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x, \quad x > 0;$$

(6)

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}, x \neq 0.$$

**5.2.49. Feladat [9].** Sorfejtés segítségével határozzuk meg az alábbi határértékeket:

(1) $\lim_{x\to 0}(\cos x - e^{-x^2/2})/x^4$;

(2) $\lim_{x\to 0}(e^x \sin x - x(x+1))/x^3$;

(3) $\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$;

(4) $\lim_{x\to\infty}((x^3 - x^2 + x/2)e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1})$;

(5) $\lim_{x\to 0}(a^x + a^{-x} - 2)/x^2$, $a > 0$;

(6) $\lim_{x\to\infty}(x + x^2 \ln(1 + 1/x))$;

(7) $\lim_{x\to 0}(1/x - 1/\sin x)$;

(8) $\lim_{x\to 0}(1 - (\cos x)^{\sin x})/x^2$.

**5.2.50. Feladat [7].** Határozzuk meg az alábbi képlettel megadott függvények lokális szélsőértékhelyeit:

(1) $x^3 - 3x^2 + 3x + 2;\quad 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5;\quad x^2(x-12)^2;$

(2) $2\cos(x/2) + 3\cos(x/3);\quad x - \ln(1+x);\quad x\ln^2 x;$

(3) $xe^{-x};\quad (x-2)(8-x)/x^2;\quad e^x \sin x;$

(4) $x\sqrt[3]{x-1}.$

**5.2.51. Feladat [5].** Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú henger?

**5.2.52. Feladat [5].** Melyik a gömbbe írható maximális térfogatú egyenes körkúp?

**5.2.53. Feladat [5].** Melyik a gömbbe írható maximális felszínű egyenes körkúp?

**5.2.54. Feladat [5].** Határozzuk meg a maximális területű derékszögű háromszög befogóit, ha összegük $a$, az átfogó $c$.

**5.2.55. Feladat [5].** Adott alkotójú kúpok közül határozzuk meg a maximális térfogatút!

**5.2.56. Feladat [5].** Milyen szög alatt elhajítva jut a $v$ kezdősebességű test vízszintes terepen a legmesszebbre?

**5.2.57. Feladat [5].** Vízszintes síkon álló függőleges falú tartályba hol üssünk lyukat, hogy a folyadéksugár a legmesszebbre jusson?

**5.2.58. Feladat [5].** Három darab $s$ szélességű deszkából vályút készítünk. Mikor lesz a keresztmetszert maximális területű?

**5.2.59. Feladat [5].** Mekkora $R$ külső ellenálláson keresztül zárjuk rövidre az $r$ belső ellenállású elemet, hogy a külső ellenálláson a teljesítmény maximális legyen?

**5.2.60. Feladat [9].** Határozzuk meg a képlettel megadott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények abszolút szélsőértékeit a megadott intervallumban!

(1) $x^2 - x^4,\ [-2,2];\quad x - \operatorname{arctg} x,\ [-1,1];\quad x + e^{-x},\ [-1,1];$

(2) $x + x^{-2},\ [1/10, 10];\quad \operatorname{arctg}(1/x),\ [1/10, 10];\quad \cos x^2,\ [0,\pi];$

(3) $\sin(\sin x),\ [-\pi/2, \pi/2];\quad xe^x,\ [-2,2];\quad x^n e^{-x},\ [-2n, 2n];$

(4) $x\ln x,\ [1/2, 2];\quad 1/(1+\sin^2 x),\ ]0, 2\pi[;\quad \sqrt{1-e^{-x^2}},\ [-2,2];$

(5) $x\sin(\ln x),\ [1, 100];\quad x^x,\ ]0, +\infty[;\quad x^{1/x},\ ]0, +\infty[;$

(6) $(\ln x)/x,\ ]0, +\infty[;\quad x\ln x,\ ]0, +\infty[;\quad x^x(1-x)^{1-x},\ ]0, 1[;$

(7) $x/(1+x^2),\ ]-\infty, +\infty[;\quad x^3,\ [-1, 3];\quad \sin^4 x + \cos^4 x,\ ]-infty, +\infty[;$

(8) $22x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ [-1, 5]$ illetve $[-10, 12]$.

**5.2.61. Feladat [6].** Végezzük el az $x \mapsto x^{2n}e^{-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát!

**5.2.62. Feladat [11].** Végezzük el a teljes függvényvizsgálatot az alábbi képlettel megadott függvényekre:

(1) $x^3 - 3x;\quad x^2 - x^4;\quad x - \operatorname{arctg} x;$

(2) $(2-x^2)/(1+x^4);\quad (x+1)(x-2)^2;\quad x/((1+x)(1-x)^2]bigr);$

(3) $\sin^4 x + \cos^4 x;\quad \sin x + \cos^2 x;\quad \sin x/(2+\cos x);$

(4) $x + e^{-x}$; $x + x^{-2}$; $\operatorname{arctg}(1/x)$;

(5) $e^{2x-x^2}$; $(x^2-1)/(x^2-5x+6)$; $(1+x^2)e^{-x^2}$;

(6) $\cos x^2$; $\sin(\sin x)$; $\sin(1/x)$;

(7) $xe^{-x}$; $x^n e^{-x}$; $x \ln x$;

(8) $1/(1+\sin^2 x)$; $(1+1/x)^x$; $(1+1/x)^{x+1}$;

(9) $\sqrt{1-e^{-x^2}}$ $x\sin(\ln x)$; $x^x$;

(10) $x^{1/x}$; $(\ln x)/x$; $x \ln x$;

(11) $x^x(1-x)^{1-x}$; $\operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2)/2$; $\operatorname{arctg} x - x/(1+x)$;

(12) $x^4/(1+x)^3$; $e^x/(1+x)$; $e^x/\operatorname{sh} x$;

(13) $x^{1/\ln x}$; $e^{-x}((1-x^2)\sin x - (1+x)^2\cos x)/2$; $x^{2n+1}e^{-x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

⋆ **5.2.63. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az $x \mapsto e^{-1/|x|}$ függvénynek minimuma van a nullában, bár minden deriváltja nulla. Van-e hasonló példa maximumra, illetve inflexiós pontra?

**5.2.64. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy ha $0 < x < \pi/2$, akkor

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

**5.2.65. Feladat [7].** Valaki egy gyalogút egy pontjából egy ettől $c$, a gyalogúttól $b$ távolságra levő pontba tart. Hol térjen le a gyalogútról, ha a terepen másfélszer lassabban halad, és a leggyorsabban akar odaérni?

**5.2.66. Feladat [9].** Vezessük le a fénytörés törvényét a Fermat-elvből: a fény a legrövidebb idő alatt teszi meg az utat az egyik pontból a másikba.

# 6
# Integrálszámítás

## 6.1 Primitív függvények

A primitív függvény keresés igazi haszna a határozott integrálok kiszámításánál és a differenciálegyenletek megoldásánál, a következő két alfejezetben fog jelentkezni.

**6.1.1. Primitív függvény.** Legyen $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$. Az $f\colon D \to \mathbb{K}_2$ függvény *primitív függvény*én vagy *határozatlan integrál*ján egy olyan $F\colon D \to \mathbb{K}_2$ függvényt értünk, amelynek deriváltja az $f$. A primitív függvény nem egyértelmű, hiszen ha $F$ az $f$ egy primitív függvénye, akkor akármilyen $c \in \mathbb{K}_2$ konstansra $F + c$ is. Az $f$ összes primitív függvényeinek halmazát $\int f$ vagy $\int f(x)\,dx$ fogja jelölni. Az $x$ *integrációs változó* helyett más betű is állhat.

**6.1.2. Tagonkénti integrálás határozatlan integrálokra.** *Ha $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, $c \in \mathbb{K}_2$, és az $f, g\colon D \to \mathbb{K}_2$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor az $f + cg$ függvénynek is és*

$$\int (f + cg) = \int f + c \int g.$$

**Bizonyítás.** Legyen $F$ az $f$ függvény, $G$ pedig a $g$ függvény primitív függvénye. Ekkor $(F + cG)' = f + cg$, így $F + cG$ az $f + cg$ primitív függvénye. Megfordítva, legyen $H$ az $f + cg$ egy primitív függvénye. Meg kell mutatnunk, hogy előáll $F + cG$ alakban, ahol $F$ az $f$ függvény, $G$ pedig a $g$ függvény primitív függvénye. Legyen $G$ a $g$ tetszőleges primitív függvénye, és legyen $F := H - cG$. Nyilván $F' = f + cg - cg = f$. $\square$

**6.1.3. Parciális integrálás határozatlan integrálokra.** *Legyen $D \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$, és tegyük fel, hogy az $f, g\colon D \to \mathbb{K}_2$ függvények differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Ha az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye, akkor a $g'f$ függvénynek is és*

$$\int g'f = fg - \int f'g.$$

**Bizonyítás.** Legyen $H$ az $f'g$ tetszőleges primitív függvénye. Ekkor

$$(fg - H)' = f'g + g'f - f'g = g'f,$$

így $g'f$-nek a jobb oldal minden eleme primitív függvénye. Felcserélve $f$ és $g$ szerepét, kapjuk a másik irányú tartalmazást. $\square$

**6.1.4. Helyettesítéses integrálás határozatlan integrálokra.** *Tegyük fel, hogy $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$, a $g \in \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ függvény differenciálható értelmezési tartományán, az $f \in \mathbb{K}_2 \to \mathbb{K}_3$ függvénynek pedig létezik primitív függvénye, $\operatorname{rng}(g) \subset \operatorname{dmn}(f)$, továbbá $g$ kölcsönösen egyértelmű és $g^{-1}$ is differenciálható az értelmezési tartományán. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is létezik primitív függvénye és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f\right) \circ g.$$

A tétel állítása érvényben marad akkor is, ha nem tesszük fel, hogy $g$ kölcsönösen egyértelmű és $g^{-1}$ is differenciálható az értelmezési tartományán, de ekkor a bizonyítás bonyolultabb. Ennek az általánosabb változatnak az a speciális esete, amikor $\mathrm{dmn}(g) \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, megkapható a következő tételből.

**Bizonyítás.** Legyen $F$ az $f$ egy primitív függvénye. A $g$ értelmezési tartományán mindenütt $(F \circ g) = (f \circ g) \cdot g'$, így $(f \circ g) \cdot g'$-nek van primitív függvénye, és a jobb oldal minden eleme eleme a bal oldalnak is. Vegyük észre, hogy eddig még nem használtuk ki, hogy $g$ kölcsönösen egyértelmű és $g^{-1}$ is differenciálható az értelmezési tartományán.

Most legyen $H$ egy primitív függvénye az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek. Ekkor

$$(H \circ g^{-1})' = (f \circ g \circ g^{-1}) \cdot (g' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})'.$$

Mivel $g \circ g^{-1}$ az identikus leképezés, differenciálással $(g' \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})' \equiv 1$, így $H \circ g^{-1}$ deriváltja $f$, azaz $H \circ g^{-1}$ az $f$ primitív függvénye. Innen következik az állítás. □

**6.1.5. Megjegyzés.** Az $F$ függvény valamely $x_0$ helyen vett $F(x_0)$ *helyettesítési érték*ét szokás az $F(x)|_{x=x_0}$ szimbólummal is jelölni. Ezt a jelölést felhasználva az előbb igazolt tétel állítása

$$\int f(x)\,dx|_{x=g(t)} = \int f(g(t))g'(t)\,dt, \quad \text{ha} \quad t \in \mathrm{dmn}(g)$$

alakba írható. Ez a képlet úgy jegyezhető meg, hogy az $x = g(t)$ helyettesítést alkalmazva $x$ helyébe $g(t)$-t, a $dx$ helyébe pedig a $dx/dt = g'(t)$ összefüggésből „átrendezéssel” adódó $dx = g'(t)\,dt$ kifejezést kell írni. A fenti összefüggés $t = g^{-1}(x)$ helyettesítéssel

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt|_{t=g^{-1}(x)}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathrm{rng}(g)$$

alakba írható.

**6.1.6. Tétel.** *Ha $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, és $F, F_1$ az $f\colon I \to \mathbb{K}$ függvény két primitív függvénye, akkor $F_1 - F$ konstans $I$-n. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$, $0 < r \le +\infty$, $K = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$, és $F, F_1$ az $f\colon K \to \mathbb{K}$ függvény két primitív függvénye, akkor $F_1 - F$ konstans $K$-n. Intervallumon illetve körlapon tehát $\int f = F + c$, $c \in \mathbb{K}$.*

A határozott integrál felhasználásával meg fogjuk mutatni, hogy intervallumon minden folytonos függvénynek van primitív függvénye.

**Bizonyítás.** A valós változós esetben $F_1 - F$ deriváltja nulla $I$-n, így ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $F_1 - F$ konstans. A $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben intervallumon ugyanezt kapjuk $F_1 - F$ valós és képzetes részére. A komplex változós esetben legyen $z \in K$ és tekintsük a $t \mapsto f\big(c + t(z - c)\big)$ valós változós függvényt. Ennek deriváltja $t \mapsto f'\big(c + t(z - c)\big)(z - c) = 0$, így a valós és a képzetes része is konstans, tehát $f(z) = f(c)$ minden $z \in K$-ra. □

**6.1.7. Következmény: alapintegrálok.** *A számegyenesen az alábbi valós értékű függvényekre*

(1) *ha $n \in \mathbb{N}$, akkor* $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + c$,

(2) $\int 1/(1 + x^2)\,dx = \mathrm{arctg}(x) + c$,

(3) $\int e^x \, dx = e^x + c$,

(4) $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c$,

(5) $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c$,

(6) $\int \mathrm{sh}(x) \, dx = \chi(x) + c$,

(7) $\int \chi(x) \, dx = \mathrm{sh}(x) + c$,

(8) $\int 1/\chi^2(x) \, dx = \mathrm{th}(x) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. *A* $]-\infty, 0[$ *vagy* $]0, +\infty[$ *intervallumokon*

(9) *ha* $n = -2, -3, \ldots$ *akkor* $\int x^n \, dx = x^{n+1}/(n+1) + c$,

(10) $\int 1/x \, dx = \ln(|x|) + c$,

(11) $\int 1/\mathrm{sh}^2(x) \, dx = \mathrm{cth}(x) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. *A* $]0, +\infty[$ *intervallumon*

(12) *ha* $-1 \neq \mu \in \mathbb{R}$ *akkor* $\int x^\mu \, dx = x^{\mu+1}/(\mu+1) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. *A* $]-1, +1[$ *intervallumon*

(13) $\int 1/\sqrt{1-x^2} \, dx = \arcsin(x) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. *A* $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ *intervallumok bármelyikén*

(14) $\int 1/\sin^2(x) \, dx = -\mathrm{ctg}(x) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. *A* $](k-1/2)\pi, (k+1/2)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ *intervallumok bármelyikén*

(15) $\int 1/\cos^2(x) \, dx = \mathrm{tg}(x) + c$,

*ahol* $c \in \mathbb{R}$. $\square$

**6.1.8. Megjegyzés.** Nem intervallumon értelmezett függvényre az előző tétel nem marad igaz. Például az $x \mapsto 1/x$ függvénynek minden $a, b \in \mathbb{R}$-re az $f_{a,b}(x) = a + \ln|x|$, ha $x > 0$, $f_{a,b}(x) = b + \ln|x|$, ha $x < 0$ összefüggéssel értelmezett függvény primitív függvénye.

**6.1.9. Példák.** (1) Helyettesítéses integrálással kaphatjuk, vagy közvetlenül észrevesszük, hogy $x \mapsto g'(x)g(x)^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ egy primitív függvénye $x \mapsto g(x)^{\mu+1}/(\mu+1)$, ha $\mu \neq -1$ és $x \mapsto \ln\big|g(x)\big|$, ha $\mu = -1$.

(2) Hasonlóan $x \mapsto g'(x)e^{g(x)}$ egy primitív függvénye $x \mapsto e^{g(x)}$.

(3) Az $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$, $\alpha \neq 0$ függvényt $x \mapsto (1/\alpha)f(\alpha x + \beta)\alpha$ alakba írva látjuk, hogy $x \mapsto F(\alpha x + \beta)/\alpha$ egy primitív függvénye, ahol $F$ az $f$ primitív függvénye.

(4) Az $\int x^n e^x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^+$ integrálban $f(x) = x^n$, $g'(x) = e^x$ választással, parciális integrálással $n$-et csökkenthetjük.

(5) Az $\int x^m \ln^n(x) \, dx$, $n \in \mathbb{N}^+$ integrálban, $f'(x) = x^m$, $g(x) = \ln^n(x)$ választással, parciális integrálással $n$-et csökkenthetjük.

(6) Az $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) \, dx$, $\int e^{\alpha x} \sin(\beta x) \, dx$ integrálok kiszámolhatók az $f'(x) = e^{\alpha x}$ választással végzett parciális integrálások után kapott egyenletrendszert megoldva az ismeretlen integrálokra. Még egyszerűbb az $\int e^{(\alpha + i\beta)x} \, dx$ integrál valós és képzetes részét kiszámítani.

(7) Az $\int \mathrm{arctg}(x) \, dx$ integrált $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$, $g'(x) \equiv 1$ választással, parciális integrálással számíthatjuk ki. Ugyanígy kezelhető az $\int \arcsin(x) \, dx$ integrál.

**6.1.10. Tétel.** *Hatványsor összegfüggvényének a konvergenciatartományon létezik primitív függvénye.*

A következmény felhasználható integrálok közelítésére.

**Bizonyítás.** A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, $x, c, a_n \in \mathbb{K}$ hatványsor összegfüggvényének tetszőleges $a_{-1} \in \mathbb{K}$-ra

$$a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

egy primitív függvénye a konvergenciatartományon: Mivel a tagonkénti differenciálás nem változtatja a konvergenciasugarat, a tagonkénti integrálás sem változtathatja. □

**6.1.11. A logaritmus függvény hatványsorai.** A végtelen mértani sor integrálásával és a $z = 0$ helyen vett függvényértékeket összehasonlítva az előző tétel alapján azt kapjuk, hogy

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

ha $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Szorozva $-1$-gyel és $z$ helyére $-z$-t írva,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \mp \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k},$$

ha $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Számolásra alkalmasabb a fenti két összefüggés számtani közepeként kapott

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

ha $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ összefüggés. Például $z = 1/3$ választással, 42-ig összegezve, és az elhagyott tagok összegét mértani sorral becsülve,

$$\ln 2 = 0{,}693147180559945309417232121458176568075 5\ldots.$$

Egyébként $\ln(1+x)$ hatványsorából Abel tételét felhasználva $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \ldots = \ln(2)$.

**6.1.12. Newton binomiális sora.** *Ha* $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ *rögzített, akkor*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

*ha* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, *ahol*

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

⋆ **Bizonyítás.** A jobb oldali sor $n+1$-edik és $n$-edik tagja abszolút értékének hányadosa $|n-\alpha||z|/(n+1) \to |z|$, tehát $|z| < 1$ esetén a sor abszolút konvergens, $|z| > 1$ esetén divergens, azaz a konvergenciasugár 1. Legyen a sor összege $f(z)$. Mivel $f(z)/(1+z)^\alpha$ deriváltja

$$\frac{(1+z)^\alpha \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n z^{n-1} - \alpha(1+z)^{\alpha-1}\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} z^n}{(1+z)^{2\alpha}},$$

és a számláló $(1+z)^{\alpha-1}$-szer

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n(1+z)z^{n-1} - \sum_{n=0}^\infty \alpha\binom{\alpha}{n} z^n\\ &= -\alpha + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n}(n-\alpha)z^n + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n z^{n-1}\\ &= -\alpha + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n}(n-\alpha)z^n + \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n+1}(n+1)z^n\\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\binom{\alpha}{n}(n-\alpha) + \binom{\alpha}{n+1}(n+1)\right) z^n = 0,\end{aligned}$$

mert a nagy zárójelben álló kifejezés nulla. Így a két oldal hányadosa konstans, és mivel a $z=0$ helyen mindkettő 1, a két oldal megegyezik, ha $|z|<1$. □

**6.1.13. Az** arctg **függvény hatványsora.** Tudjuk, hogy az arctg függvény differenciálható és deriváltja

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

A végtelen mértani sorban $-x^2$-et helyettesítve, majd a kapott sort tagonként integrálva, végül az $x=0$ helyen vett helyettesítési értékeket összehasonlítva,

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \dots = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$.

**6.1.14. A $\pi$ kiszámítása.** Ha $\operatorname{tg} z_1$, $\operatorname{tg} z_2$, $\operatorname{tg}(z_1+z_2)$ értelmezve vannak, akkor

$$\operatorname{tg}(z_1+z_2) = \frac{\sin(z_1)\cos(z_2)+\cos(z_1)\sin(z_2)}{\cos(z_1)\cos(z_2)-\sin(z_1)\sin(z_2)} = \frac{\operatorname{tg}(z_1)+\operatorname{tg}(z_2)}{1-\operatorname{tg}(z_1)\operatorname{tg}(z_2)},$$

ez a tg függvény *addíciós képlete*. Innen $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(1/5)) = (2/5)/(1-1/25) = 5/12$ és $\operatorname{tg}(4\operatorname{arctg}(1/5)) = (10/12)/(1-25/144) = 120/119$. Ugyanígy

$$\operatorname{tg}(4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1)) = (120/119-1)/(1+120/119) = 1/239,$$

vagyis $\pi/4 = \operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}(1/5) - \operatorname{arctg}(1/239)$. Az $x=1/5$ esetben arctg sorát $n=27$-ig, az $x=1/239$ esetben $n=7$-ig összeadva, mindkét esetben a hibát az első elhagyott taggal becsülve, azt kapjuk, hogy

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71\dots.$$

**6.1.15. Az** arcsin **függvény hatványsora.** Tudjuk, hogy az arcsin függvény differenciálható $]-1,1[$-en és deriváltja

$$\arcsin'(x) = 1/\cos(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Az $(1+y)^{-1/2}$ függvény sorában $y$ helyére $-x^2$-et helyettesítve, majd a kapott sort tagonként integrálva, végül az $x=0$ helyen vett helyettesítési értékeket összehasonlítva,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-1/2}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

ha $x \in \,]-1,1[$.

**6.1.16. Elemien integrálható függvények.** A (valós változós, valós értékű) konstans függvények, az identikus leképezés, valamint az exp, ln, sin és arcsin függvényekből véges sok összeadás, kivonás, szorzás, osztás, függvényösszetétel és nyílt halmazra való leszűkítés alkalmazásával kapható függvényeket szokás *elemi függvény*eknek nevezni. Például a cos, tg, ctg, sec, cosec, sh, $\chi$, th, cth, sech, cosh, arccos, arctg, arcctg, arcsec, arccosec, arsh, arch, arth, arcth, arsech, arcosech függvények és ha $\mu \in \mathbb{R}$, akkor az $x \mapsto x^\mu$, $x \in \,]0,+\infty[$ leképezés elemi függvények.

Míg a differenciálási szabályok szerint elemi függvények deriváltja is elemi függvény, vannak olyan elemi függvények, amelyeknek primitív függvényei nem elemi függvények. Megmutatható például, hogy az $\mathbb{R}$-en értelmezett $x \mapsto \exp(x^2)$, $x \mapsto \cos(x^2)$, $x \mapsto \sin(x^2)$, a $]0,+\infty[$-en értelmezett $x \mapsto \sin(x)/x$, $x \mapsto \cos(x)/x$, $x \mapsto \exp(x)/x$, $x \mapsto \sqrt{x^3+1}$, és az $]1,+\infty[$-en értelmezett $x \mapsto 1/\ln(x)$ függvények primitív függvényei nem elemi függvények. (Bár primitív függvényeik analitikusak, és a hatványsoruk is könnyen felírható!) Azokat a függvényeket, amelyeknek van olyan primitív függvénye, amely elemi függvény, *elemien integrálható* függvényeknek nevezzük. Be fogjuk látni, hogy a racionális törtfüggvények elemien integrálhatóak.

$\star$ **6.1.17. Segédtétel.** *Ha $f$, $g$ és $r$ is $\mathbb{K}$ feletti nem nulla polinomok, az $f$-nek és $g$-nek nincs közös gyöke, akkor egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$ feletti $u$ és $v$ polinomok, amelyekre $fu+gv \equiv r$ és $\deg(u) < \deg(g)$. Ha még $\deg(r) < \deg(f)+\deg(g)$ is teljesül, akkor $\deg(v) < \deg(f)$.*

**Bizonyítás.** Először a fokszámkorlát nélkül az $r \equiv 1$ esetben mutatjuk meg $u$ és $v$ létezését. Tekintsük az összes $fu+gv$ alakú polinomok halmazát, és legyen $d$ ennek nem nulla polinomjai közül egy minimális fokszámú, $d = fu+gv$. Feltehetjük, hogy $d$ főegyütthatója 1, mert egyébként végigszorzunk a reciprokával. Osszuk el maradékosan az $f$ polinomot $d$-vel: $f = qd+c$, ahol $\deg(c) < \deg(d)$. Ha $c \not\equiv 0$, akkor visszahelyettesítve $f = q(fu+gv)+c$, ahonnan kifejezve $c$-t, $c = f(1-qu)+g(qv)$, ami ellentmond $d$ választásának. Így $c \equiv 0$. Mivel $f = qd$, a $d$ minden gyöke gyöke $f$-nek is. Hasonlóan kapjuk, hogy $d$ minden gyöke gyöke $g$-nek is. Mivel $f$-nek és $g$-nek nincs közös gyöke, $d \equiv 1$.

Az általános esetben mindkét oldalt szorozva $r$-rel, adódik tetszőleges $r$-re valamilyen $u$ és $v$ létezése, amellyel $r = fu+gv$. Osszuk el $u$-t maradékosan $g$-vel: $u = gq+u_0$.

Legyen $v_0 = v + qf$. Nyilván $\deg(u_0) < \deg(g)$ és $fu_0 + gv_0 = f(u - gq) + g(v + qf) = r$. Ha $r = fu_1 + gv_1$ egy másik előállítás, amelyre $\deg(u_1) < \deg(g)$, akkor a két előállítást kivonva egymásból, $f(u_1 - u_0) = g(v_0 - v_1)$. Mivel $g$ minden gyöke (multiplicitással) gyöke $u_1 - u_0$-nak, de annak foka kisebb mint $g$ foka, $u_1 - u_0 \equiv 0$, ahonnan a bal oldal nulla, és így $v_0 - v_1 \equiv 0$, amivel beláttuk az egyértelműséget. Végül $r = fu + gv$, $\deg(u) < \deg(g)$ esetén $\deg(fu) < \deg(f) + \deg(g)$, így $\deg(v) \geq \deg(f)$ esetén a jobb oldal foka, tehát $r$ foka is legalább $\deg(f) + \deg(g)$. □

**6.1.18. A parciális törtekre bontás tétele.** *Legyen $h = f/g$ racionális törtfüggvény, ahol $f$ és $g$ is $\mathbb{K}$-beli együtthatós polinomok, $g$ nem nulla. Legyen*

$$g = v_1^{n_1} \cdots v_m^{n_m}$$

*a $g$ polinom páronként közös komplex gyök nélküli $v_1, \ldots, v_m$ tényezőkre való felbontása. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $u_{j,k}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n_j$ polinomok és olyan $q$ polinom, amelyekre*

$$h = \frac{f}{g} = q + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{u_{j,k}}{v_j^k}$$

*és $\deg(u_{j,k}) < \deg(v_j)$.*

A $q$ és $u_{j,k}$ polinomokat úgy számíthatjuk ki, hogy közös nevezőre hozás után összehasonlítjuk az együtthatókat.

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $g_j = v_j^{n_j}$, ha $j = 1, 2, \ldots, m$. Először megmutatjuk, hogy egyértelműen léteznek olyan $\mathbb{K}$-beli együtthatós $q$ és $f_1, f_2, \ldots, f_m$ polinomok, amelyekkel

$$h = \frac{f}{g} = q + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_m}{g_m} \tag{1}$$

és $\deg(f_i) < \deg(g_i)$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m = 1$, az állítás maradékos osztással nyilvánvaló, $f_1 = r$, a $g$-vel való osztás maradéka. Az általános eset úgy következik, hogy a $g_1, g_2, \ldots, g_{m-2}, g_{m-1}g_m$ polinomokra alkalmazva az indukciós feltevést, kapunk egy

$$h = \frac{f}{g} = q + \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_{m-2}}{g_{m-2}} + \frac{f^*}{g_{m-1}g_m}$$

előállítást, majd az előző lemmát alkalmazva, kapunk olyan $f_{m-1}, f_m$ polinomokat, amelyekre $f_{m-1}g_m + f_m g_{m-1} \equiv f^*$, amit $g_{m-1}g_m$-mel osztva kapjuk az indukciós lépést.

Végül vegyük észre, hogy a jobb oldalon szereplő törtek $u/v^n$ alakúak, továbbá $\deg(u) < \deg(v^n)$. Ezek a törtek egyértelműen felírhatók

$$\frac{u}{v^n} = \frac{u_n}{v^n} + \frac{u_{n-1}}{v^{n-1}} + \cdots + \frac{u_1}{v}$$

alakban, ahol minden $u_i$ fokszáma kisebb, mint $v$ fokszáma. Ez $n = 1$ esetén nyilvánvaló, egyébként pedig indukcióval következik, ha $u$-t maradékosan osztjuk $v^{n-1}$-nel. □

**6.1.19. Racionális törtfüggvények integrálása.** *A valós racionális törtfüggvények elemien integrálhatók.*

A bizonyítás konstruktív, módszert ad az integrálásra.

**Bizonyítás.** Az előző tétel alapján, mivel az abban szereplő $q$ polinom nyilván elemien integrálható, csak azt kell megmutatni, hogy az $u/v^n$ alakú törtek elemien integrálhatók, ahol $v$ elsőfokú főpolinom vagy valós gyök nélküli másodfokú főpolinom és $\deg(u) < \deg(v)$.

Ha $v$ elsőfokú, akkor $u$ konstans, így $n = 1$ esetén $u/v$ egy primitív függvénye $u \ln |v|$, az $n > 1$ esetben pedig $u/v^n$ egy primitív függvénye $uv^{1-n}/(1-n)$.

Ha $v$ másodfokú, akkor $u$ legfeljebb elsőfokú, így az $n = 1$ esetben alkalmas $b, c \in \mathbb{R}$ valós számokkal $u = bv' + c$, azaz $u/v = bv'/v + c/v$. A $v'/v$ egy primitív függvénye $\ln v$. Az $1/v(x) = 1/(x^2 + \alpha x + \beta)$ függvény primitív függvényét úgy kapjuk, hogy teljes négyzetté alakítunk, $v(x) = (x + \alpha/2)^2 + \gamma^2$, ahol $\gamma^2 = \beta - \alpha^2/4 > 0$, majd $t = (x + \alpha/2)/\gamma$ helyettesítést alkalmazunk. Így azt kapjuk, hogy $1/v$ egy primitív függvénye $x \mapsto \operatorname{arctg}((x + \alpha/2)/\gamma)/\gamma$.

Ha $v$ másodfokú és $n > 1$, akkor észrevesszük, hogy

$$\frac{\gamma x + \delta}{(x^2 + \alpha x + \beta)^n} = \frac{d}{dx} \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}} + \frac{\varepsilon_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{n-1}},$$

ahol

$$\gamma_1 = \frac{1}{n-1} \frac{\alpha\gamma - 2\delta}{\alpha^2 - 4\beta}, \quad \delta_1 = \frac{1}{n-1} \frac{2\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha^2 - 4\beta}, \quad \varepsilon_1 = (2n-3)\gamma_1.$$

Ennek az észrevételnek az alapján $n$ eggyel csökkenthető. □

**6.1.20. Racionális törtfüggvény integrálására visszavezethető integrálok.**

Az $\int r(e^x)\,dx$ integrál kiszámítása, ahol $r$ valós racionális törtfüggvény, $x = \ln t$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza.

Az $\int r(\sin x, \cos x)\,dx$ integrál kiszámítása, ahol $r$ két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $t = \operatorname{tg}(x/2)$ helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza, mert

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Bebizonyítható, hogy ha $r(-u,-v) = r(u,v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$-re, akkor a $t = \operatorname{tg} x$, ha $r(u,-v) = -r(u,v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$-re, akkor a $t = \sin x$, ha pedig $r(-u,v) = -r(u,v)$ minden $u, v \in \mathbb{R}$-re, akkor a $t = \cos x$ helyettesítés is célhoz vezet.

Az $\int r(x, \sqrt[n]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)})\,dx$ integrál kiszámítása, ahol $r$ két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, a

$$t = \sqrt[n]{(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)}$$

helyettesítéssel racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza, mert

$$\begin{aligned} t^n &= \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}, \\ x &= \frac{\delta t^n-\beta}{\alpha-\gamma t^n}, \\ \frac{dx}{dt} &= nt^{n-1}\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha-\gamma t^n)^2}. \end{aligned}$$

Az $\int r(x, \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma})\,dx$ integrál kiszámítása, ahol $r$ két valós változós, valós értékű racionális törtfüggvény, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, racionális törtfüggvény integrálására vezethető vissza. Az egyik megoldás az ilyen integrálok kezelésére lineáris helyettesítéssel elérni, hogy hogy a négyzetgyök alatt $x^2+1$, $x^2-1$, illetve $1-x^2$ legyen, majd az $x = \operatorname{sh} t$, $x = \chi t$, illetve $x = \sin t$ helyettesítést alkalmazni. Egy másik megoldás, amely közvetlenül célhoz vezet, az úgynevezett *Euler-féle helyettesítés*ek alkalmazása. Ha $\alpha > 0$, akkor a $t = \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} - \sqrt{\alpha}x$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor ugyanis

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = (\sqrt{\alpha}x+t)^2 = \alpha x^2+2\sqrt{\alpha}tx+x^2,$$

ahonnan $x = (t^2-\gamma)/(\beta-2\sqrt{\alpha}t)$. Ha $\gamma > 0$, akkor a $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = xt+\sqrt{\gamma}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma = x^2t^2+2\sqrt{\gamma}xt+\gamma,$$

ahonnan $x = (2t\sqrt{\gamma}-\beta)/(\alpha-t^2)$. Végül, ha $\alpha < 0$, és $\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ egynél több pontban értelmezve van, akkor az $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ polinomnak két különböző valós gyöke van, mondjuk $x_1$ és $x_2$. Nyilván $\alpha x^2+\beta x+\gamma = \alpha(x-x_1)(x-x_2)$. Alkalmazzuk a $\sqrt{\alpha(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$ helyettesítést. Ekkor $\alpha(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$, ahonnan $x = (\alpha x_2-t^2x_1)/(\alpha-t^2)$.

**6.1.21. Feladat [10].** Határozzuk meg azon függvények primitív függvényét, amelynek értéke az $x \in \mathbb{R}$ helyen

(1) $\cos^2 x$; $\sin x$; $\cos 3x \cdot \cos 4x$; $1/\sqrt{x+2}$; $x^2+e^x-2$; $3^x$; $4^{5x+6}$; $1/\sqrt[3]{x}$;

(2) $(2^x+3^x)^2$; $\left((1-x)/x^2\right)^2$; $(1+x)\sqrt{x}$; $(1-x)^3/(x^3\sqrt{x})$; $x^3/(1+x)$; $1/\sqrt{1-2x}$;

(3) $x^2(5-x)^2$; $(e^{3x}+1)/(e^x+1)$; $\operatorname{tg}^2 x$; $\operatorname{ctg}^2 x$; $1/(x+5)$; $x/(1-x^2)$; $(x^2+3)/(1-x^2)$; $1/(5x-2)^{5/2}$; $\sqrt[5]{1-2x+x^2}/(1-x)$;

(4) $1/(2x+3x^2)$; $e^{-x}+e^{-2x}$; $|x^2-5x+6|$; $xe^{x^2}$; $x/(1+x^2)^{3/2}$; $(1-x^2)^9$;

(5) $x/\sqrt{x+1}$; $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2$; $(\sin x+\cos x)^2$; $\sin x/\sqrt{\cos^3 x}$; $x^2/\sqrt{1+x^3}$;

(6) $\sin x/\sqrt{\cos 2x}$; $x/(x^4+1)$; $x/\sqrt{x^2+1}$; $(5x+6)/(2x^2+3)$; $e^x/(e^x+2)$;

(7) $x^2(4x^3+3)^7$; $x^3(4x^2-1)^{10}$; $1/(x\ln x)$; $(\ln x)/x$;

(8) $(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$; $(\sin\sqrt{x})/\sqrt{x}$; $(1+x)^2/(1+x^2)$; $x/(1+x^2)^2$; $x\sqrt{1+x}$;

(9) $(x^4+1)/(x^3-x^2+x-1)$; $x^4/(x^2+3)^3$; $1/((x-1)^2(x+1)bigr)$; $(x+1)/(x^3-1)$.

**6.1.22. Feladat [10].** Határozzuk meg azon függvények primitív függvényét, amelynek értéke az $x \in \mathbb{R}$ helyen

(1) $x\cos x$; $x\sin 2x$; $x^3\cos 2x$; $x3^x$; $xe^{-x}$;

(2) $x^2e^{-2x}$; $e^{-x}x\sin x$; $e^{ax}\cos bx$; $e^{ax}\sin bx$;

(3) $\arcsin x$; $(\arcsin x)^2$; $\arccos(1/x)$; $\operatorname{arctg}(x/3)$;

(4) $x\operatorname{arctg} x$; $\ln x$; $\ln^3 x$; $\ln(x^2+1)$; $\ln x/x^3$; $x\ln^2(x)$;

(5) $\ln\cos x/\cos^2 x$; $x\operatorname{sh} x$; $x^3\cosh 3x$; $\cosh x\cos 5x$; $x\arcsin x$.

**6.1.23. Feladat [10].** Határozzuk meg azon függvények primitív függvényét, amelyek értéke az $x \in \mathbb{R}$ helyen

(1) $\sqrt{1-x^2}$; $\sqrt{a^2-x^2}$; $x\sqrt{c+x}$; $1/(x\sqrt{c+x})$; $1/\sqrt{(1-x^2)^3}$;

(2) $\sqrt{1+x^2}$; $\sqrt{x/(x-1)}$; $\sqrt{x^2+2x+2}$; $1/((a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2})$; $1/(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})$;

(3) $1/(1+\sin x)$; $1/\cos x$; $1/(1-\sin^4 x)$; $(2x^2-1)/(x^2+1)^3$; $\ln\ln x/x$;

(4) $1/\sqrt{1-\sin^4 x}$; $\sqrt{e^x-1}$; $e^{2x}/(e^x+1)$; $1/\operatorname{sh} x$ $1/(a+b\cos x)$;

(5) $|x|$; $x|x|$; $e^{-|x|}$; $\max\{1,x^2\}$; $\arcsin x/x^2$;

(6) $x^3/(x^4-x^2+2)$; $x\ln(1+x^4)$; $1/\cos^3 x$; $\operatorname{tg}^2 x$; $x(\operatorname{arctg} x)^2$;

(7) $\sin\ln x$; $1/(a+b\operatorname{sh} x)$; $(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})/\sqrt{x^4-1}$;

(8) $\operatorname{ctg}^2 x\sin x$; $(x+2)/\sqrt{x+1}$; $x/\sqrt{x-1}$; $\operatorname{tg}^2 x\cos x$.

**6.1.24. Feladat [5].** Van-e primitív függvénye a valós változós sgn függvénynek? És az $x \mapsto \lfloor x\rfloor$ függvénynek?

**6.1.25. Feladat [5].** Lehet-e deriváltnak megszüntethető szakadási helye?

**6.1.26. Feladat [10].** Adjunk meg olyan hatványsorokat, amelyek előállítják az $x$ helyen megadott értékükkel adott valós változós függvényeket a megadott hely egy környezetében:

(1) $1/x^2$, $a=3$; $(2x-5)/(x^2-5x+6)$, $a=0$; $3^x$, $a=0$;

(2) $3^x$, $a=2$; $\ln x$, $a=10$; $e^{x^3}$, $a=0$;

(3) $\ln(1+x^2)$, $a=0$; $\ln(1+x+x^2)$, $a=0$; $\sin x^2$, $a=0$;

(4) $\operatorname{sh}(1+x^3)$, $a=0$; $\chi\sqrt{x}$, ha $x\ge 0$, $\cos\sqrt{-x}$, ha $x<0$, $a=0$;

(5) $1/(1+x^2)^2$, $a=0$; $x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$, $a=0$;

(6) $x/(1+x-2x^2)$, $a=0$, $1/\sqrt{x}$, $a=2$; $\sin x/x$, $a=0$.

**6.1.27. Feladat [7].** Mennyi $\operatorname{arctg} x$ 357-edik deriváltja 0-ban? Mennyi $e^{x^2}$ 42-edik deriváltja 0-ban? Mennyi $\ln(1+x+x^2)$ 7-edik deriváltja 0-ban? Mennyi $(\operatorname{arctg} x)^2$ 10-edik deriváltja 0-ban?

**6.1.28. Feladat [6].** Határozzuk meg a $\sum x^n/(n(n+1))$ hatványsor összegét!

**6.1.29. Feladat [9].** Határozzuk a következő sorok összegét:

(1) $\sum n/3^n$; $\sum 1/(n2^n)$; $\sum n^2/5^n$; $\sum 1/(2n+1)!$;

(2) $\sum 4^n/(2n)!$; $\sum 1/((2n+1)2^n)$; $\sum(1-\sqrt{e})^n/n$.

**6.1.30. Feladat [8].** Abel folytonossági tételét felhasználva határozzuk meg a $\sum(1/(3n+1)-1/(3n+2))$ sor összegét!

## 6.2 Határozott integrál

**6.2.1. Definíció.** Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztásán* egy olyan véges $x_0, x_1, \dots, x_n$ sorozatot értünk, amelyre

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Az $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontok a felosztás *osztópont*jai, az $[x_{j-1}, x_j]$ intervallumok pedig az $[a, b]$-nek $P$-hez tartozó *részintervallum*ai. Egy $P$ *pontozott felosztás* alatt egy felosztást értünk, amelynek minden $[x_{j-1}, x_j]$ részintervallumához meg van adva egy $x_{j-1} \le t_j \le x_j$ pont. Legyen $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy a $\big([x_{j-1}, x_j], t_j\big)$ pontozott részintervallum *$\delta$-finom*, ha $[x_{j-1}, x_j] \subset \mathbb{U}_{\delta(t_j)}(t_j)$; a $P$ pontozott felosztás *$\delta$-finom*, ha minden pontozott részintervalluma $\delta$-finom. Legyen $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ egy függvény. Az $[a, b]$ intervallum $P$ pontozott felosztásához hozzárendeljük az

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

*Riemann-összeg*et. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *integrálható* $[a, b]$-n, és *integrál*ja $S$, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz van olyan $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$, hogy minden $\delta$-finom $P$ pontozott felosztásra $\big|S - s(f, P)\big| < \varepsilon$.

Az így kapott integrálfogalom jóval általánosabb, mint a szokásos Riemann-integrál, amit akkor kapunk, ha $\delta$ nem függvény, hanem konstans.

**6.2.2. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Minden $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvényhez van olyan $P$ pontozott beosztása $[a, b]$-nek, amely $\delta$-finom.*

**Bizonyítás.** Tekintsük azon $a \le x \le b$ számok $X$ halmazát, amelyekhez $[a, x]$-nek van olyan pontozott beosztása, amely $\delta$-finom. Mivel $\delta(a) > 0$, $X$ tartalmazza $a$ egy környezetét, így nem üres. Legyen $c = \sup X$. Ha $c < b$ lenne, akkor $\delta(c) > 0$ miatt ellentmondást kapnánk. □

**6.2.3. Tétel: az integrál egyértelműsége.** *Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Ha $S'$ és $S''$ is az $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvény integrálja, akkor $S' = S''$.*

A továbbiakban az integrált $\int_a^b f$ jelöli.

**Bizonyítás.** Az $\varepsilon = |S' - S''|/2$-höz léteznek megfelelő $\delta', \delta''\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvények. Legyen $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Választva egy $\delta$-finom pontozott beosztást, ellentmondást kapunk. □

**6.2.4. Tétel: komplex értékű függvények integrálja.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Egy $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ integrálhatóak, és ekkor

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathfrak{R}(f) + i \int_a^b \mathfrak{I}(f).$$

**Bizonyítás.** Ha $f$ integrálható és integrálja $S$, akkor $\big|S - s(f, P)\big| < \varepsilon$ esetén $\Big|\mathfrak{R}(S) - s(\mathfrak{R}(f), P)\Big| < \varepsilon$ és $\Big|\mathfrak{I}(S) - s(\mathfrak{I}(f), P)\Big| < \varepsilon$, így $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ is integrálhatóak és integráljuk

$\mathfrak{R}(S)$ illetve $\mathfrak{I}(S)$. Megfordítva, ha $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ integrálhatóak, integráljuk $S'$ illetve $S''$, akkor az $\varepsilon > 0$-hoz tartozó $\delta'$ illetve $\delta''$ függvények $\delta$ minimumát véve, $\delta$-nál finomabb $P$-re $\left|S' - s(\mathfrak{R}(f), P)\right| < \varepsilon$ és $\left|S'' - s(\mathfrak{I}(f), P)\right| < \varepsilon$, ahonnan $S = S' + iS''$ jelöléssel $\left|S - s(f, P)\right| < 2\varepsilon$, tehát $f$ integrálható. □

**6.2.5. Tétel: az integrál linearitása.** *Ha $-\infty < a < b < +\infty$, $c \in \mathbb{K}$ és az $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvények integrálhatók $[a, b]$-n, akkor az $f+g$ és $cf$ függvények is integrálhatók $[a, b]$-n és*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b (cf) = c\int_a^b f.$$

**Bizonyítás.** Legyen $S'$ illetve $S''$ az $f$ illetve a $g$ integrálja, $S = S' + S''$, és $\delta'$, $\delta''$ az adott $\varepsilon > 0$-hoz tartozó függvények. Ha $P$ finomabb a $\delta'$ és $\delta''$ minimumánál, akkor $\left|S - s(f+g, P)\right| < 2\varepsilon$. A második állítás következik abból, hogy $s(cf, P) = cs(f, P)$. □

**6.2.6. Tétel: az integrál nemnegativitása.** *Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és az $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény integrálható, akkor $\int_a^b f \geq 0$.*

**Bizonyítás.** Következik abból, hogy minden Riemann-összeg nemnegatív. □

**6.2.7. Következmény: az integrál monotonitása.** *Ha $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható függvények és $f \leq g$, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

**Bizonyítás.** Következik abból, hogy $g - f$ nemnegatív. □

⋆ **6.2.8. Tétel: Cauchy-kritérium.** *Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Egy $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvény pontosan akkor integrálható, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz van olyan $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, hogy bármely $\delta$-finom $P', P''$ pontozott beosztásokra $\left|s(f, P') - s(f, P'')\right| < \varepsilon$.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ integrálható, akkor $\varepsilon$-hoz a definíció szerint $\delta$ függvényt választva, azt kapjuk, hogy $\left|s(f, P') - s(f, P'')\right| < 2\varepsilon$. A megfordítást az előző tétel szerint elég valós értékű függvényre bizonyítani. Adott $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvényre legyen $M(\delta)$ az összes $\delta$-nál finomabb $P$ pontozott beosztásra vett $s(f, P)$ Riemann-összegek szuprémuma, és legyen $S$ az összes $M(\delta)$ bővített valós számok infimuma. Választva adott $\varepsilon > 0$-hoz egy, a feltételnek eleget tévő $\delta$ függvényt, és egy $\delta$-nál finomabb $P$ pontozott felosztást, a feltételből $M(\delta) \leq s(f, P) + \varepsilon$, így $S \leq s(f, P) + \varepsilon$. Ha $S < s(f, P) - \varepsilon$ lenne, akkor létezne olyan $\delta'\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelyre $M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$. Ha $\delta''$ a $\delta$ és a $\delta'$ minimuma, akkor egy $\delta''$-nél finomabb $P''$ pontozott beosztásra $s(f, P'') \leq M(\delta') < s(f, P) - \varepsilon$, ami ellentmondás, mert $P$ és $P''$ is $\delta$-finomak. Így $\left|S - s(f, P)\right| \leq \varepsilon$ bármely $\delta$-finom $P$-re. □

⋆ **6.2.9. Segédtétel.** *Legyen $-\infty < a < b < \infty$. Ha egy $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvényre adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-re és $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvényre tetszőleges $\delta$-finom $P_1, P_2$ pontozott beosztásaira $[a, b]$-nek $\left|s(f, P_1) - s(f, P_2)\right| \leq \varepsilon$, akkor $a \leq a' < b' \leq b$ esetén is tetszőleges $\delta$-finom $P_1', P_2'$ pontozott beosztásaira $[a', b']$-nek $\left|s(f, P_1') - s(f, P_2')\right| \leq \varepsilon$.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $a < a'$ és $b' < b$. Válasszunk egy $\delta$-nál finomabb $P_3$ pontozott felosztását $[a, a']$-nek és egy $\delta$-nál finomabb $P_4$ pontozott felosztását $[b', b]$-nek, és legyen $P_1$ a $P_3$, a $P_1'$ és a $P_4$ egyesítése, $P_2$ pedig a $P_3$, a $P_2'$ és a $P_4$ egyesítése. Nyilván $s(f, P_1) - s(f, P_2) = s(f, P_1') - s(f, P_2')$. A többi eset bizonyítása hasonló. □

**6.2.10. Tétel: az integrál intervallum-additivitása.** *Ha $a < c < b$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, az $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvény integrálható $[a, b]$-n, akkor integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n is és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$\star$ **Bizonyítás.** Az előző segédtétel szerint, ha adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ olyan függvény, hogy bármely két $\delta$-finom $P_1$ és $P_2$ felosztásra $\left|s(f, P_1) - s(f, P_2)\right| \le \varepsilon$, akkor ugyanez $[a, c]$ és $[c, b]$ $\delta$-finom pontozott felosztásaira is teljesül. Innen $f$ integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n is. Legyen $P'$ egy $\delta$-finom pontozott felosztása $[a, c]$-nek, $P''$ pedig $[c, b]$-nek. Ekkor $P = P' \cup P''$ egy $\delta$-finom pontozott felosztása $[a, b]$-nek, és $s(f, P) = s(f, P') + s(f, P'')$, továbbá mivel az integrálközelítő összeg tetszőlegesen közel lehet az integrálhoz, $\left|s(f, P) - \int_a^b f\right| \le \varepsilon$, $\left|s(f, P') - \int_a^c f\right| \le \varepsilon$ és $\left|s(f, P'') - \int_c^b f\right| \le \varepsilon$. Innen

$$\left|\int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f\right| \le 3\varepsilon. \ \square$$

**6.2.11. Tétel.** *Ha $-\infty < a < c < b < +\infty$, és az $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ függvény integrálható $[a, c]$-n és $[c, b]$-n, akkor integrálható $[a, b]$-n is.*

$\star$ **Bizonyítás.** Legyen $f$ integrálható, integrálja $[a, c]$-n illetve $[c, b]$-n $S'$ illetve $S''$; adott $\varepsilon > 0$-ra legyenek $\delta'$ és $\delta''$ az $\varepsilon/2$-höz megfelelő függvények $[a, c]$-n illetve $[c, b]$-n. Legyen $\delta(t) = \min\{\delta'(t), c - t\}$, ha $a \le t < c$, $\delta(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}$, ha $t = c$ és $\delta(t) = \min\{\delta''(t), t - c\}$, ha $c < t \le b$. Ha $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ egy tetszőleges $\delta$-finom pontozott beosztás osztópontjai, akkor valamilyen $k$-ra $c \in \,]x_{k-1}, x_k]$. A $\delta$ konstrukciója miatt $t_k = c$ kell legyen, és $x_{k-1} < c < x_k$ esetén kettévágva az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumot a $c$ ponttal, és mindkét részintervallumban $c$-t választva kijelölt pontnak, a Riemann-összeg nem változik. A kapott Riemann-összeg $2\varepsilon$-nál kevesebbet tér el $S' + S''$-től, így $f$ integrálható $[a, b]$-n és integrálja $S' + S''$. $\square$

**6.2.12. Definíció.** Ha $-\infty < b < a < +\infty$, legyen $\int_a^a f = 0$ és ha a jobb oldal értelmezve van legyen $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Ha $-\infty < u < v < +\infty$ és az $f\colon [u, v] \to \mathbb{K}$ függvény integrálható, akkor esetszétválasztással azonnal adódik, hogy $a, b, c \in [u, v]$ esetén $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. Az is teljesül, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$-re az $\int_a^b f(x)\,dx$ és $\int_{a+c}^{b+c} f(x + c)\,dx$, illetve az $\int_a^b cf(cx)\,dx$ és $\int_{ac}^{bc} f(x)\,dx$ integrálok egyszerre léteznek és egyenlőek, mert az integrálközelítő összegek egyenlőek.

**6.2.13. Nullahalmazok.** Jelölje $\mathbb{R}$ egy korlátos $I$ intervallumának a *hosszát* $|I|$. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan korlátos intervallumokból álló megszámlálható $I_j$ intervallumrendszer, amely lefedi $H$-t, és amelyre $\sum_j |I_j| < \varepsilon$. Ha valamilyen feltétel egy nullahalmaz kivételével teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* teljesül.

Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz. Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz, hiszen az elsőt lefedve egy $\varepsilon/2$-nél kisebb összhosszúságú megszámlálható intervallumrendszerrel, a másodikat lefedve egy $\varepsilon/4$-nél kisebb összhosszúságú intervallumrendszerrel stb., az intervallumrendszerek egyesítése olyan megszámlálható intervallumrendszer, amelynek összhossza kisebb, mint $\varepsilon$. Speciálisan, megszámlálható halmaz nullahalmaz.

**6.2.14. Lebesgue-feltétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ egy korlátos függvény. Ha $f$ majdnem mindenütt folytonos, akkor integrálható.*

⋆ **Bizonyítás.** A Cauchy-kritériumot fogjuk használni. Tegyük fel, hogy $|f| \le K$. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $f$ szakadási pontjainak halmaza nullahalmaz, lefedhető egy $I_m$, $m = 1, 2, \ldots$ megszámlálható nyílt intervallumrendszerrel, amelynek összhossza kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$. Legyen $t \in [a,b]$. Ha $t \in \cup_{m=1}^{\infty} I_m$, akkor legyen $\delta(t)$ olyan kicsi, hogy $\mathbb{U}_{\delta(t)}(t)$ teljesen benne legyen valamelyik $I_m$-ben. Egyébként $f$ folytonos $t$-ben: válasszuk $\delta(t)$-t úgy, hogy $|x - t| < 2\delta(t)$, $x \in [a,b]$ esetén $\bigl|f(x) - f(t)\bigr| < \varepsilon/(2b - 2a)$ teljesüljön.

Legyenek $P'$ és $P''$ pontozott $\delta$-finom beosztásai $[a,b]$-nek. Ha $P'$ osztópontjai $a = x'_0 < x'_1 < \ldots, x'_{n'} = b$, a $P''$ osztópontjai pedig $a = x''_0 < x''_1 < \ldots, x''_{n''} = b$, vegyük az osztópontok unióját és legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ az így kapott új beosztás. Minden $k$-ra $[x_{k-1}, x_k]$ részhalmaza pontosan egy $[x'_{i-1}, x'_i]$ és pontosan egy $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallumnak; legyen $\tau'_k = t'_i$ és $\tau''_k = t''_j$. Nyilván $s(f, P') = \sum_{k=1}^{n} f(\tau'_k)(x_k - x_{k-1})$ és $s(f, P'') = \sum_{k=1}^{n} f(\tau''_k)(x_k - x_{k-1})$, így a két Riemann-összeg különbségének becsléséhez a

$$\sum_{k=1}^{n} \bigl(f(\tau'_k) - f(\tau''_k)\bigr)(x_k - x_{k-1})$$

összeg abszolút értékét kell megbecsülnünk.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre $f$ folytonos a $\tau'_k$ és a $\tau''_k$ pontban is, tekintsük az $[x'_{i-1}, x'_i]$ intervallumot, ha ez hosszabb, mint az $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallum. Mivel $\tau'_k = t'_i$ és $\tau''_k = t''_j$ távolsága kisebb, mint $2\delta(t'_i)$, egy ilyen tag kisebb, mint $\varepsilon(x_k - x_{k-1})/(2b - 2a)$. Ha az $[x'_{i-1}, x'_i]$ intervallum nem hosszabb, mint az $[x''_{j-1}, x''_j]$ intervallum, akkor az utóbbit tekintve kapjuk ugyanezt. Így az összes ilyen típusú tag összege kisebb, mint $\varepsilon/2$.

Azon tagok összegének becsléséhez, amelyekre $f$ nem folytonos a $\tau'_k$ vagy a $\tau''_k$ pontban, vegyük észre, hogy az egész $[x_{k-1}, x_k]$ intervallum benne van valamely $I_m$-ben. Minden ilyen intervallumhoz válasszunk egy $I_m$-et. Egy adott $I_m$-hez tartozó részintervallumok összhossza nyilván legfeljebb $I_m$ hossza, így az összes ilyen intervallumok összhossza kisebb, mint $\varepsilon/(4K)$, tehát a megfelelő tagok abszolút értékeinek összege legfeljebb $\varepsilon/2$. □

**6.2.15. Következmény.** *Ha $f$ folytonos, akkor integrálható. Ha $f$ monoton, akkor integrálható.* □

**6.2.16. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ függvények. Ha $f$ és $g$ majdnem mindenütt megegyeznek, és $f$ integrálható, akkor $g$ is és $\int_a^b g = \int_a^b f$.*

A tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóság és az integrál szempontjából a nullahalmazok „elhanyagolhatóak”. Így olyan függvények integráljáról is beszélhetünk, amelyek csak majdnem mindenütt vannak értelmezve.

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk olyan $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvényt, hogy minden $\delta$-nál finomabb pontozott beosztásra az $f$-hez tartozó Riemann-összeg $\varepsilon/2$-nél kevesebbet térjen el a $S$ integráltól. Legyen $N_k$ azon pontok halmaza, amelyekben $f$ és $g$ különbségének abszolút értéke nagyobb, mint $k - 1$, de nem nagyobb, mint $k$, ahol $k = 1, 2, \ldots$. Mivel $N_k$ nullahalmaz, választhatunk olyan $I_{k,m}$, $k = 1, 2, \ldots$ nyílt intervallumokat, amelyek lefedik $N_k$-t, és összhosszuk kisebb, mint $\varepsilon/(k2^{k+2})$. Ha $t \in [a,b]$

benne van valamelyik $I_{k,m}$ intervallumban, legyen $0 < \delta'(t) \le \delta(t)$ olyan kicsi, hogy a $t$ pont $\delta'(t)$ sugarú környezete benne legyen egy $I_{k,m}$ intervallumban, egyébként legyen $\delta'(t) = \delta(t)$. Legyen $P$ egy $\delta'$-nél finomabb pontozott beosztása $[a, b]$-nek. Azokra a $t_i$-kre, amelyekre $f(t_i)$ és $g(t_i)$ megegyeznek, a megfelelő tag $f$ és $g$ Riemann-összegében megegyezik. Minden más $t_i$ benne van valamely $I_{k,m}$-ben. Minden $t_i$-hez rögzítve egy ilyen $k, m$ indexpárt, az adott indexpárhoz tartozó intervallumok összhossza kisebb, mint $I_{k,m}$ hossza, a függvényértékek különbsége pedig legfeljebb $k$. Összegezve $m$-re, majd $k$-ra, azt kapjuk, hogy $f$ és $g$ integrálközelítő összege kevesebbet tér el $S$-től, mint $\varepsilon$. □

**6.2.17. Megjegyzés.** A $[0, 1]$ intervallumon a Dirichlet-függvénye sehol sem folytonos, mégis integrálható, mert majdnem mindenütt nulla. (Ez a függvény nem Riemann-integrálható.)

**6.2.18. Az integrálfüggvény.** Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ integrálható, $c \in [a, b]$. Legyen

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad \text{ha} \quad a \le x \le b.$$

A $F$ a $f$ ($c$-hez tartozó) *integrálfüggvénye*. Nyilván a különböző $c$-hez tartozó integrálfüggvények csak konstansban különböznek.

**6.2.19. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel $F$ folytonos $[a, b]$-n, továbbá ha $f$ folytonos az $[a, b]$ egy $x$ pontjában, akkor $F$ differenciálható $x$-ben és $F'(x) = f(x)$.*

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $a \le x < b$ és $x < y < b$. Válasszunk $[a, b]$-n adott $\varepsilon > 0$-hoz $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$-et. Az 6.2.9 segédtétel szerint ha $P$ és $P'$ is $\delta$-nál finomabb pontozott beosztásai $[x, y]$-nak, akkor a megfelelő Riemann-összegek különbsége nem nagyobb, mint $\varepsilon$. Legyen $y - x < \delta(x)$, és $P'$ álljon az $[x, y]$ intervallumból, a $t = x$ közbenső ponttal. A $P'$-höz tartozó Riemann-összeg $f(x)(y - x)$. Mivel a $P$-hez tartozó Riemann-összeg tetszőlegesen közel lehet $\int_x^y f$-hez, azt kapjuk, hogy $\left|\int_x^y f - f(x)(y - x)\right| \le \varepsilon$. Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, $\lim_{y\downarrow x} \int_x^y f = \lim_{y\downarrow x}(F(y) - F(x)) = 0$, azaz $F$ jobbról folytonos $x$-ben. Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $F$ balról folytonos $x$-ben, ha $a < x \le b$.

Most tegyük fel, hogy $f$ folytonos $x$-ben. Adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszunk olyan $\delta > 0$-t, hogy $\left|f(t) - f(x)\right| < \varepsilon$ teljesüljön, ha $|t - x| < \delta$ és $a \le t \le b$. Ha most

$$x - \delta < s \le x \le t < x + \delta$$

és $a \le s < t \le b$, akkor

$$\left|\frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x)\right| = \left|\frac{1}{t - s}\int_s^t (f(u) - f(x))\,du\right| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy $F'(x) = f(x)$. □

**6.2.20. Következmény.** *Az $\mathbb{R}$ valamely $I$ intervallumán értelmezett $f\colon I \to \mathbb{K}$ folytonos függvénynek létezik primitív függvénye.*

**Bizonyítás.** Legyen $c \in I$ tetszőleges és $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, ha $x \in I$. □

**6.2.21. Newton–Leibniz-formula.** *Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ differenciálható, akkor*
$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

A tételre mint az *integrálszámítás alaptételé*re is szokás hivatkozni.

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Rögzített $t \in [a,b]$-hez van olyan $\delta(t) > 0$, hogy $t \neq x \in [a,b]$ esetén
$$\left|\frac{f(x)-f(t)}{x-t} - f'(t)\right| < \varepsilon.$$
Vegyük észre, hogy ha $t - \delta(t) < x \le t \le y < t + \delta(t)$, akkor
$$\begin{aligned}\big|f(y) - f(x) - (y-x)f'(t)\big| &\le \big|f(y) - f(t) - (y-t)f'(t)\big| + \big|f(t) - f(x) - (t-x)f'(t)\big|\\ &\le \eta(y-t) + \eta(t-x) = \varepsilon(y-x).\end{aligned}$$
Legyen $a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le \ldots \le t_n \le x_n = b$ egy $\delta$-nál finomabb pontozott beosztása $[a,b]$-nek. Ekkor a fenti becslés szerint $f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$ legfeljebb $\varepsilon(x_k - x_{k-1})$ távolságra van $f(x_k) - f(x_{k-1})$-től, így a Riemann-összeg meg legfeljebb $\varepsilon(b-a)$ távolságra van $f(b) - f(a)$-tól. □

**6.2.22. Parciális integrálás határozott integrálokra.** *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ differenciálható függvények. Ha az alábbi két integrálból az egyik létezik, akkor a másik is, és*
$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk a Newton–Leibniz-formulát $fg$-re. □

**6.2.23. Helyettesítéses integrálás határozott integrálokra.** *Legyen $a < b$, $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to [c,d]$, és tegyük fel, hogy $g$ differenciálható $[a,b]$-n. Ha az $f\colon [c,d] \to \mathbb{K}$ függvénynek van primitív függvénye, akkor*
$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy.$$

**Bizonyítás.** Legyen $F$ az $f$ egy primitív függvénye. Az $F \circ g$ függvény differenciálható $[a,b]$-n és a deriváltja $(f \circ g) \cdot g'$, így a Newton–Leibniz-formula szerint
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy. \ \square$$

**6.2.24. Tétel: improprius integrálás.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ egy függvény.*

(1) *Ha $f$ minden $[c,b]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és $S = \lim_{c\downarrow a} \int_c^b f$, akkor $f$ integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f = S$.*

(2) *Ha $f$ minden $[a,c]$, $a < c < b$ intervallumon integrálható, és $S = \lim_{c\uparrow b} \int_a^c f$, akkor $f$ integrálható $[a,b]$-n és $\int_a^b f = S$.*

A tétel gyakran hasznos, amikor nem tudjuk közvetlenül az $[a,b]$ intervallumra alkalmazni a Newton–Leibniz-formulát.

$\star$ **Bizonyítás.** Csak (1)-et bizonyítjuk, (2) bizonyítása teljesen hasonló. Válasszunk adott $\varepsilon>0$-hoz olyan $\eta>0$ számot, hogy $a<x<b$, $x-a<\eta$ esetén

$$\left|\int_x^b f - f(a)(x-a) - S\right| < \varepsilon/2$$

teljesüljön. Legyen $c_j = a + (b-a)/2^j$, ha $j=0,1,\ldots$. Ha $j=1,2,\ldots$, akkor van olyan $\delta_j\colon [c_{j+1},c_{j-1}] \to \mathbb{R}^+$, hogy bármely két $\delta_j$-nél finomabb Riemann-összeg különbsége legfeljebb $\varepsilon/2^{j+2}$. Legyen $0<\delta(t)\le\delta_j(t)$ és $\delta(t)<(b-a)/2^{j+1}$, ha $t\in[c_{j+1},c_{j-1}]$ és legyen $\delta(a)=\eta$. Az $[a,b]$ egy tetszőleges $\delta$-nál finomabb

$$a = x_0 \le t_1 \le x_1 \le \ldots \le t_n \le x_n = b$$

pontozott felosztására gyűjtsük össze egy $I_j$ halmazba azokat a $i$-ket, amelyekre

$$c_j < t_i \le c_{j-1}, \quad j = 1,2,\ldots.$$

Mivel minden ilyen $i$-re $\delta(t_i)<(b-a)/2^{j+1}$, azt kapjuk, hogy $[x_{i-1},x_i]\subset[c_{j+1},c_{j-1}]$. Így ha $I_j\ne\emptyset$ akkor az $[x_{i-1},x_i]$, $i\in I_j$ intervallumok $[a_j,b_j]$ egyesítésére két tetszőleges Riemann-összeg eltérése legfeljebb $\varepsilon/2^{j+2}$. Innen

$$\left|\int_{a_j}^{b_j} f - \sum_{i\in I_j} f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}.$$

Vegyük észre, hogy minden $i>1$ benne van valamelyik $I_j$-ben, viszont $i=1$ egyikben sem. Innen $t_1=a$, $x_1<a+\eta$, és $c=x_1$ választással

$$\left|\int_c^b f - \sum_{i=2}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \le \sum_{j=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| < \varepsilon. \ \square$$

**6.2.25. Példák.** (1) A Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$\lim_{a\downarrow 0}\int_a^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\alpha}, & \text{ha } -1<\alpha<0;\\ +\infty, & \text{ha } \alpha\le -1.\end{cases}$$

Így $x^\alpha$ pontosan akkor integrálható $[0,1]$-en, ha $\alpha>-1$, és ekkor

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

(2) Bár
$$\lim_{a\downarrow 0}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{dx}{x}+\int_a^1\frac{dx}{x}\right)=0,$$
az $x\mapsto 1/x$ függvény nem integrálható $[-1,1]$-en, és például
$$\lim_{a\uparrow 0}\lim_{b\downarrow 0}\left(\int_{-1}^{a}\frac{dx}{x}+\int_b^1\frac{dx}{x}\right)=+\infty,$$
$$\lim_{b\downarrow 0}\lim_{a\uparrow 0}\left(\int_{-1}^{a}\frac{dx}{x}+\int_b^1\frac{dx}{x}\,dx\right)=-\infty.$$

**6.2.26. Tétel: összehasonlító teszt.** *Legyen* $-\infty<a<b<+\infty$ *és*
$$f,g\colon [a,b]\to [0,+\infty[$$
*függvények, amelyekre* $f\le g$.

(1) *Ha* $f$ *és* $g$ *minden* $[c,b]$, $a<c<b$ *intervallumon integrálható, akkor*
$$\lim_{c\downarrow a}\int_c^b f\le \lim_{c\downarrow a}\int_c^b g,$$
*így ha* $g$ *integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $f$ *is, és ha* $f$ *nem integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $g$ *sem.*

(2) *Ha* $f$ *és* $g$ *minden* $[a,c]$, $a<c<b$ *intervallumon integrálható, akkor*
$$\lim_{c\uparrow b}\int_a^c f\le \lim_{c\uparrow b}\int_a^c g,$$
*így ha* $g$ *integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $f$ *is, és ha* $f$ *nem integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $g$ *sem.*

**Bizonyítás.** Mivel a $c\mapsto\int_c^b f$ illetve $c\mapsto\int_a^c f$ leképezések monotonak, a nemnegatív bővített valós határértékek léteznek, így a határértékek összehasonlítására vonatkozó tételből következik az állítás. □

**6.2.27. Következmény: határérték teszt.** *Legyen* $-\infty<a<b<+\infty$ *és legyenek* $f,g\colon [a,b]\to[0,+\infty[$ *függvények.*

(1) *Ha* $f$ *és* $g$ *minden* $[c,b]$, $a<c<b$ *intervallumon integrálható, és*
$$C=\lim_{x\downarrow a}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R},$$
*akkor* $C>0$ *esetén* $f$ *és* $g$ *egyszerre integrálhatóak* $[a,b]$-*n,* $C=0$ *esetén pedig ha* $g$ *integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $f$ *is.*

(2) *Ha* $f$ *és* $g$ *minden* $[a,c]$, $a<c<b$ *intervallumon integrálható, és*
$$C=\lim_{x\uparrow b}\frac{f(x)}{g(x)}\in\mathbb{R},$$
*akkor* $C>0$ *esetén* $f$ *és* $g$ *egyszerre integrálhatóak* $[a,b]$-*n,* $C=0$ *esetén pedig ha* $g$ *integrálható* $[a,b]$-*n, akkor* $f$ *is.*

**Bizonyítás.** Csak (1)-et bizonyítjuk, (2) bizonyítása hasonló. Ha $C > 0$, akkor van olyan $a < c < b$, hogy $a < x \le c$ esetén $C/2 \le f(x)/g(x) \le 2C$, így az $[a, c]$ intervallumon alkalmazható az összehasonlító kritérium. Ha $C = 0$, akkor van olyan $a < c < b$, hogy $a < x \le c$ esetén $0 \le f(x)/g(x) \le 1$, így az $[a, c]$ intervallumon alkalmazható az összehasonlító kritérium. □

**6.2.28. Megjegyzés.** Megmutatható, hogy ha egy integrálható függvényt szorzunk egy Lipschitz-függvénnyel, a szorzat is integrálható lesz.

**6.2.29. Abszolút integrálható függvények.** Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény, amelyre $|f|$ is integrálható, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *abszolút integrálható* $[a, b]$-n. Ez azzal ekvivalens, hogy az

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{és} \quad f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$$

függvények, az $f$ pozitív része és negatív része integrálhatóak. Komplex értékű függvényt akkor nevezünk *abszolút integrálható*nak, ha a valós és a képzetes része is abszolút integrálható. Megmutatható, hogy az abszolút integrálható függvények az úgynevezett *Lebesgue-integrálható* függvényekkel egyeznek meg. A bizonyítás megtalálható a [22] könyvben. Ennek segítségével könnyen következik, hogy ha $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ abszolút integrálhatóak, akkor $|f|$ is integrálható, és ha $g$ korlátos, akkor $fg$ is abszolút integrálható, ha pedig valamely $c > 0$-ra $|g| \ge c$ az $[a, b]$-n, akkor $f/g$ is abszolút integrálható. A következő tétel is bizonyítható a Lebesgue-integrál elméletében, lásd például a [21] könyvben.

**6.2.30. Tétel.** *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ abszolút integrálható, $F$ az $f$ integrálfüggvénye. Ekkor $F$ majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt megegyezik $f$-fel.* □

**6.2.31. Tétel: parciális integrálás integrálfüggvényekre.** *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ abszolút integrálhatóak, $F$ és $G$ az integrálfüggvényük. Ekkor az alábbi integrálok léteznek és*

$$\int_a^b fG + \int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

**Bizonyítás.** Az abszolút integrálható függvényekről eddig mondottak alapján el tudjuk végezni a bizonyítást. Mivel $fG$ és $Fg$ is abszolút integrálhatóak, az integrálfüggvényük differenciálható majdnem mindenütt. De $FG$ is majdnem mindenütt differenciálható és deriváltja majdnem mindenütt $fG + Fg$, így $FG$ az $fG$ és a $Fg$ integrálfüggvényének összege. Így az előző tételből következik az állítás. □

**6.2.32. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ egy abszolút integrálható függvény. Ekkor*

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|.$$

**Bizonyítás.** Legyen $c = \int_a^b f$. Ekkor

$$|c|^2 = \overline{c}c = \overline{c} \int_a^b f = \int_a^b \overline{c} f.$$

Mivel a bal oldal nemnegatív valós szám, a jobb oldal képzetes része nulla kell legyen. Mivel $\Re(\bar{c}f(x)) \leq |c|\big|f(x)\big|$ minden $x \in [a,b]$-re, $|c|^2 \leq |c| \int_a^b |f|$, ahonnan következik az állítás. □

**6.2.33. Példa.** Ha az $\int_0^\pi 1/(1+\sin x)\,dx$ integrált $t = \mathrm{tg}(x/2)$ helyettesítéssel próbáljuk kiszámítani, az $\int_0^\infty 2/(1+t^2)^2\,dt$ integrálhoz jutunk. Mit kell ezen érteni?

**6.2.34. Improprius integrál.** Legyen $f\colon [a,+\infty[ \to \mathbb{K}$ egy függvény ($a \in \mathbb{R}$), és tegyük fel, hogy a függvény minden $[a,b]$, $a < b < +\infty$ intervallumon integrálható. Ha létezik a $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f \in \overline{\mathbb{K}}$ határérték, akkor azt az $f$ függvény $[a,+\infty[$-en vett *improprius integrál*jának nevezzük és $\int_a^{+\infty} f$ vagy $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$-szel jelöljük. Ha a határérték $\mathbb{K}$-beli, akkor az improprius integrált *konvergens*nek nevezzük; ha az $f$ függvény minden $[a,b]$, $a < b < +\infty$ intervallumon abszolút integrálható és a $\int_a^{+\infty} |f|$ improprius integrál konvergens, akkor *abszolút konvergens improprius integrál*ról beszélünk. Hasonlóan, egy $f\colon ]-\infty,b] \to \mathbb{K}$ függvény $]-\infty,b]$-n vett *improprius integrál*ját a $\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f$ határértékként értelmezzük. Az improprius integrálra vonatkozó tételekben az első változatra szorítkozunk, bár azok nyilván értelemszerűen átvihetők a második változatra is. Megjegyezzük, hogy akkor is szokás improprius integrálról beszélni, ha véges intervallumon az integrálandó függvény nem korlátos, és a 6.2.24 tételt alkalmazzuk az integrál kiszámítására.

**6.2.35. Példák.** A Newton–Leibniz-formula felhasználásával

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha+1}, & \text{ha } \alpha < -1; \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \geq -1; \end{cases}$$
$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}, & \text{ha } \alpha < 0; \\ +\infty, & \text{ha } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

**6.2.36. További improprius integrálok.** Szokás például $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ típusú és más improprius integrálokat is használni. Ha azonban például $f(x) = 1/x$, ha $|x| > 1$ és $f(x) = 0$ egyébként, akkor

$$\lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = +\infty,$$
$$\lim_{b\to+\infty} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f = -\infty,$$
$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^a f = 0.$$

Legegyszerűbb ilyen esetekben kiírni, hogy milyen határértéket tekintünk.

**6.2.37. Tétel.** *Legyen $f\colon [a,+\infty[ \to \mathbb{K}$ egy függvény ($a \in \mathbb{R}$). Ha $f$ improprius integrálja abszolút konvergens, akkor az improprius integrál is konvergens.*

**Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $f$ valós értékű. Legyen $A = \int_a^{+\infty} |f|$ és $\varepsilon > 0$. Van olyan $K_1$, hogy ha $b > K_1$, akkor $\int_a^b |f| > A - \varepsilon$. Innen ha $b, c > K_1$, $b < c$, akkor

$|\int_b^c f| < \varepsilon$; ez abból következik, hogy $|\int_b^c f| \le \int_b^c |f| = \int_a^c |f| - \int_a^b |f|$, és a jobb oldalon álló számok nagyobbak, mint $A-\varepsilon$, de nem nagyobbak, mint $A$.

Mivel $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f| \le A$, az $\int_a^b f$ számok halmaza korlátos. Legyen

$$I = \lim_{d\to+\infty} \sup_{c>d} \int_a^c f.$$

A határérték létezik, mivel a $d \mapsto \sup_{c>d} \int_a^c f$ függvény monoton csökkenő és korlátos. Van olyan $K_2$, hogy ha $d > K_2$, akkor $I+\varepsilon > \sup_{c>d} \int_a^c f \ge I$. Legyen $K = \max\{K_1, K_2\}$, és $b > K$. Válasszunk olyan $c > b$ számot, amelyre $I+\varepsilon > \int_a^c f > I-\varepsilon$. Mivel $\int_a^c f - \int_a^b f = \int_b^c f$, kapjuk, hogy $I + 2\varepsilon > \int_a^b f > I - 2\varepsilon$, ha $b > K$.

A komplex esetben ugyanígy adódik, hogy $\mathfrak{R}(f)$ és $\mathfrak{I}(f)$ improprius integrálja konvergens. □

**6.2.38. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ egy függvény.*

(1) *Ha $f$ minden $[c,b]$, $a < c < b$ intervallumon abszolút integrálható, és $\lim_{c\downarrow a} \int_c^b |f|$ véges, akkor $f$ abszolút integrálható $[a,b]$-n.*

(2) *Ha $f$ minden $[a,c]$, $a < c < b$ intervallumon abszolút integrálható, és $\lim_{c\uparrow b} \int_a^c |f|$ véges, akkor $f$ abszolút integrálható $[a,b]$-n.*

**Bizonyítás.** Az előző tételhez hasonlóan bizonyítható. □

**6.2.39. Feladat [5].** Adjuk meg az adott függvénynek az adott intervallumon a primitív függvényeit, integrálfüggvényeit és határozott integrálját:

(1) $|x|$, $[-2,3]$;

(2) $\operatorname{sgn}(x)$, $[-2,3]$;

(3) $1+x^2$, ha $x \ge 0$, $1-x^2$, ha $x > 0$, $[-2,3]$;

**6.2.40. Feladat [5].** Van-e olyan függvény, aminek az adott függvény az integrálfüggvénye az adott intervallumon:

(1) $|x|-2$, $[-2,1]$;

(2) $\lfloor x \rfloor$, $[-2,1]$;

(3) $\sqrt{x}$, $[0,1]$.

**6.2.41. Feladat [4].** Lehetséges-e, hogy egy integrálható függvény integrálfüggvénye mindenütt differenciálható, de a deriváltja valahol nem egyezik meg a függvénnyel?

**6.2.42. Feladat [9].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_0^1 \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx, \quad \int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx;$$

(2) $$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx, \quad \int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx, \quad \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx;$$

(3) $$\int_0^1 \sqrt{x^3+x^2}\,dx, \quad \int_0^1 e^{ax}\cos bx\,dx, \quad \int_0^1 e^{ax}\sin bx\,dx.$$

**6.2.43. Feladat [11].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{(x+2)^4}}; \quad \int_0^2 \sqrt[3]{2}x^{-1/3}\,dx;$$

(2) $$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx; \quad \int_{-1}^1 x^{-2/3}\,dx; \quad \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2\,dx}{\sqrt[7]{(x^3-1)^2}}; \quad \int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}};$$

(3) $$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx; \quad \int_{-2}^0 \frac{dx}{x+2}; \quad \int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx; \quad \int_0^1 \ln^2 x\,dx;$$

(4) $$\int_0^\infty e^{-x}\,dx; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{3+4x^2}; \quad \int_0^\infty 1/(1+x^3)\,dx;$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}; \quad \int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx; \quad \int_0^\infty xe^{-x}\,dx;$$

(6) $$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}; \quad \int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}; \quad \int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx;$$

(7) $$\int_1^\infty (\ln x/x)^2\,dx; \quad \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx; \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$$

(8) $$\int_0^2 16x - x4^x\,dx; \quad \int_0^\pi \cos^2 x\,dx; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2+3x^2};$$

(9) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}; \quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3}}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$$

(10) $$\int_{-1/2}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}; \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}; \quad \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2||x-3|}};$$

(11) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x}; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+x+1}; \quad \int_1^4 \frac{dx}{1+x^4};$$

(12) $$\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3+x}\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx; \quad \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}};$$

(13) $$\int_1^\infty \frac{dx}{2^x-1}; \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx; \quad \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx;$$

(14) $$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx; \quad \int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx; \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^4 x}.$$

**6.2.44. Feladat [11].** Konvergensek-e az alábbi integrálok:

(1) $$\int_0^\infty \frac{\lfloor x\rfloor!}{2^x+3^x}\,dx; \quad \int_{10}^\infty \frac{dx}{x\ln\ln x}; \quad \int_0^1 \ln|\ln x|\,dx;$$

(2) $$\int_0^1 |\ln x|^{|\ln x|}\,dx; \quad \int_0^1 x^{\ln x}\,dx; \quad \int_0^\infty (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\,dx;$$

(3) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sin(\sin(\sin x))}; \quad \int_2^\infty \frac{x+1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{x^x}{\lfloor x\rfloor!}\,dx;$$

(4) $$\int_5^\infty \frac{\sqrt[x]{2^x+3^x}}{(x-\ln x)\sqrt{x}}\,dx; \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx; \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{(\pi/2-\arcsin x)^{3/2}};$$

(5) $$\int_0^1 \frac{e^x}{\sin x}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{xe^x}{\sin^2 x}\,dx.$$

**6.2.45. Feladat [9].** Milyen $c$-re konvergensek az alábbi integrálok:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^c x}, \quad \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^c}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^c}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^c-1}.$$

**6.2.46. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi integrálokat sorfejtéssel numerikusan nyolc értékes jegyre:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx; \quad \int_{-1}^1 (\sin x/x)\,dx; \quad \int_0^1 \cos(x^2)\,dx.$$

**6.2.47. Feladat [9].** Fejezzük ki az $I_k = \int_0^\pi \sin^k t\,dt$ integrálokat $I_{k-2}$-vel, és ily módon számítsuk ki!

**6.2.48. Feladat [9].** Számítsuk ki az $I_n = \int_0^1 (1-x^2)\,dx$ integrálokat!

**6.2.49. Feladat [9].** Számítsuk ki az $S_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \sin x\,dx$ integrálokat!

**6.2.50. Feladat [6].** Határozzuk meg

$$G(x) = \int_0^{x^4} e^{t^3} \sin t\,dt$$

deriváltját!

**6.2.51. Feladat [4].** Határozzuk meg

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$$

deriváltját! Mi az eredmény geometriai jelentése?

**6.2.52. Feladat [5].** Milyen helyen maximális

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt?$$

**6.2.53. Feladat [9].** A parciális integrálás néha improprius integrálokra is érvényes. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2}\,dx,$$

bár az egyik impropriusz integrál abszolút konvergens, a másik nem!

## 6.3 Alkalmazások

**6.3.1. Végtelen kicsinyek.** Az analízis hőskorában a differenciálhányadost a következőképpen vezették be: Tekintsük az $x \mapsto y(x)$ függvényt, és változtassuk meg $x$ értékét a végtelen kis $dx$ értékkel (differenciális változás). Ekkor — ha a függvény folytonos — a függvényérték is végtelen kicsit, $y(x+dx)$-re változik. Legyen a függvényérték változása a végtelen kicsiny (differenciális) $dy = y(x+dx) - y(x)$ érték. A differenciálhányados $dy/dx$.

Hasonló gondolatmenetet alkalmaztak az integrál bevezetésére: az $x \mapsto y(x)$ görbe alatti terület $x$ és $x + dx$ között $y(x)dx$, így a teljes terület $\sum_a^b y(x)dx$, ahol az összegzés az $[a, b]$ intervallum végtelen kicsinyekre való felosztására értendő. Az integrál jelölése is innen ered: az összegzést $S$-sel jelölték, az integrál jele egy elnyújtott $S$ betű.

Ezzel a gondolatmenettel könnyen adódik a Newton–Leibniz-formula: Jelölje $Y(x)$ az $x \mapsto y(x)$ görbe alatti, $a$ és $x$ közötti szakaszon vett területet. Az $x$-et $dx$-szel megváltoztatva, a terület $y(x)dx$-szel változik, ahonnan a $dY = Y(x+dx) - Y(x)$ differenciális változás $y(x)dx$, tehát $dY/dx = y(x)$.

A végtelen kicsinyek használata nagyon sok buktatót tartalmaz. Például egyszerű gondolatmenetünkből nem világos, hogy miért nem differenciálható minden folytonos függvény. Még fontosabb ellenvetés, hogy a valós számok között nincsenek végtelen kicsinyek: az arkhimédészi tulajdonság szerint bármely nem nulla valós számhoz van olyan $n$, hogy a számot $n$-szer összeadva saját magával, az összeg abszolút értéke nagyobb lesz 1-nél, így a szám abszolút értéke nagyobb, mint $1/n$. Bár a gondolatmenetek finomíthatók, és a valós számok halmazának bővítésével a végtelen kicsinyek is „megmenthetők”, ma véges $dx$, $dy$, stb., változásokkal dolgozunk, majd határátmenetet veszünk. Semmi sem gátolja azonban, hogy heurisztikus gondolatmenetben végtelen kicsinyeket használjunk, csak az így megsejtett összefüggéseket be is kell bizonyítani.

Az alábbiakban néhány ilyen heurisztikus gondolatmenettel kapható eredményt is bemutatunk.

**6.3.2. Görbe hossza, heurisztikusan.** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $t \mapsto z(t)$ egy, az $[a, b]$ intervallumot $\mathbb{C}$-be képező folytonosan differenciálható függvény. Ezen függvény tekinthető egy pont mozgásának. A $dt$ időre eső elmozdulás $dz$, ennek hossza $|dz|$, így a teljes hossz

$$\int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt = \int_a^b \left|z'(t)\right| dt.$$

A görbe hosszát később pontosan definiáljuk, és az összefüggést (nem csak síkgörbékre) bebizonyítjuk.

Legyen $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ egy sima (azaz folytonosan differenciálható) síkgörbe. Ha deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |z'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye $t$-nek. A $w(s) = z(\varphi^{-1}(s))$ összefüggéssel definiált függvény egy, a $z$-vel ekvivalens síkgörbe. Erre

$$\left|\frac{dw}{ds}\right| = \left|\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|z'\left(\varphi^{-1}(s)\right)\right| \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(s)\right)} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Ilyen paraméterezéseket a síkgörbe *természetes paraméterezés*ének fogunk nevezni. (Például a $t \mapsto \exp(it) = \cos t + i \sin t$ görbe természetes paraméterezésben van adva.) A természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűsíti a számolásokat.

Legyen $z\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ egy síkgörbe természetes paraméterezéssel. Ha $z$ folytonosan differenciálható, akkor bármely $s \in [a, b]$ pontra az $e(s) = z'(s)$ vektort a $z$ görbe $s$ pontbeli *érintő egységvektor*ának nevezzük. (Tetszőleges paraméterezésben adott síkgörbe deriváltját is érintővektornak nevezzük, ez nem feltétlenül egységvektor.) Ha $z$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $e(s)\overline{e(s)} = 1$ differenciálásával kapjuk, hogy $\mathfrak{R}(e'(s)\overline{e(s)}) = 0$, tehát $e'(s)/e(s)$ tiszta képzetes, azaz $e'(s)$ merőleges $e(s)$-re. A $\kappa(s) = \left|e'(s)\right|$ számot az $s$-beli *görbület*nek nevezzük. Ha $\kappa \equiv 0$, akkor $e$ konstans, és $r$ egyenes, $r(s) = r(s_0) + (s - s_0)e$. Ha $\kappa(s) \neq 0$, akkor az $n(s) = e'(s)/\kappa(s)$ vektort az $s$-beli *főnormális*nak nevezzük.

Legyenek most az $s_0$ és $\kappa_0 > 0$ valós számok, a $\mathbb{C}$-beli $e_0$ és $n_0$ egymásra merőleges egységvektorok, valamint az $z_0 \in \mathbb{C}$ vektor adottak. Legyen $R = 1/\kappa_0$. Tekintsük az

$$\begin{aligned} &z(s) = (z_0 + Rn_0) - R\cos((s - s_0)/R)n_0 + R\sin((s - s_0)/R)e_0, \\ &\qquad s_0 - \pi R \le s \le s_0 + \pi R \end{aligned}$$

kört. Mivel $\left|z'(s)\right| = \left|-\sin((s-s_0)/R)n_0+\cos((s-s_0)/R)e_0\right| = 1$, a paraméter természetes paraméter. Továbbá $z(s_0) = r_0$, $e(s_0) = e_0$, $\kappa(s_0) = \kappa_0$ és $n(s_0) = n_0$, így

$$z(s) = z_0 + (s - s_0)e_0 + \frac{\kappa_0}{2}(s - s_0)^2 n_0 + \omega(s - s_0),$$

ahol $\omega(s - s_0)$ még $(s - s_0)^2$-tel osztva is nullához tart. Ha most $\tilde{z}$ tetszőleges kétszer folytonosan differenciálható görbe természetes paraméterezéssel, amelynek az $s_0$ pontban az értéke $z_0$, érintője $e_0$, görbülete $\kappa_0$ és főnormálisa $n_0$, akkor $\tilde{z}(s) - z(s)$ tart nullához még $(s - s_0)^2$-tel osztva is. Ezért szokás a fenti kört a görbe $s_0$ ponthoz tartozó *simulókörének* nevezni. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett a simulókör lényegében egyértelmű.

**6.3.3. Feladat [6].** Határozzuk meg egy parabolaív ívhosszát!

**6.3.4. Feladat [7].** Határozzuk meg egy egyenesen gördülő kör egy határpontja által leírt ív (ciklois) ívhosszát!

**6.3.5. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi görbék ívhosszát:

(1) $f(x) = x^{3/2}$, $x \in [0, 4]$;

(2) $f(x) = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq a < 1$;

(3) $f(x) = \ln \cos x$, $x \in [0, a]$;

(4) $f(x) = \ln((e^x + 1)/(e^x - 1))$, $x \in [a, b]$;

(5) $f(x) = \chi(bx)/b$, $x \in [0, d]$.

**6.3.6. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi görbék ívhosszát:

(1) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ (asztroid);

(2) $x = a \cos^4 t$, $y = a \sin^4 t$, $t \in [0, \pi/2]$;

(3) $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $t \in [0, a]$;

(4) $x = t - \operatorname{th} t$, $y = 1/\chi t$, $t \in [0, 1]$;

(5) $x = \operatorname{ctg} t$, $y = 1/(2 \sin^2 t)$, $t \in [\pi/4, \pi/2]$;

(6) $x = at \cos t$, $y = at \sin t$, $t \in [0, b]$ (archimédészi spirális).

**6.3.7. Feladat [8].** Adjuk meg az alábbi görbék egy paraméteres előállítását:

(1) $y^2 = 2px$;

(2) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$;

(3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

(4) $x^3 + y^3 = 3axy$.

**6.3.8. Feladat [8].** Írjuk fel az adott görbe érintőjét a $t_0$ pontban:

(1) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$;

(2) $x = a(t - \cos t)$, $y = a(1 - \sin t)$;

(3) $x = a \cos t + t \sin t$, $y = a \sin t - t \cos t$.

**6.3.9. Polárkoordinátákkal adott szektor területe, heurisztikusan.** Legyen $-\pi < \alpha < \beta \le +\pi$ és $\varphi \mapsto r(\varphi)$ egy $[\alpha, \beta]$-t $\mathbb{R}^+$-ba képező folytonos függvény. A

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \le r(\varphi) \text{ és } \alpha \le \varphi \le \beta, \text{ ahol } \varphi = \arg(z)\}$$

szektorszerű síkidomra, a $\varphi$ és $\varphi + d\varphi$ között szögekhez tartozó rész közelítőleg háromszög, amelynek területe

$$\frac{r(\varphi)^2}{2}\, d\varphi,$$

így a teljes terület

$$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\varphi)^2\, d\varphi.$$

A területet később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

**6.3.10. Feladat [5].** Határozzuk meg a polárkoordinátás alakban megadott $r^2 = 2a^2\cos(2\varphi)$, $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$ lemniszkáta által határolt területet!

**6.3.11. Feladat [6].** Írjuk fel az alábbi görbéket polárkoordinátás alakban és határozzuk meg a határolt alakzat területét:

(1) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$;

(2) $x^4 + y^4 = ax^2y$.

**6.3.12. Munka kiszámítása.** Tegyük fel, hogy egy pontszerűnek gondolt test mozog egy erőtérben. A pont mozgását az $[a, b]$ időintervallumban egy $g: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ görbe írja le, és a $t$ időpontban $F(g(t))$ erő hat rá. Ha az $[x_{j-1}, x_j]$ időintervallumban az elmozdulás $g(x_j) - g(x_{j-1})$, akkor az erő által végzett munkát az

$$F(g(t_j)) \cdot (g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

belső szorzattal közelíthetjük, ahol $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$; a belső szorzatot — mint a fizikában gyakran — ponttal jelöltük. Látjuk, hogy a teljes munka definiálásához valamilyen

$$\int_g F(g(t)) \cdot dg$$

görbe menti integrálra van szükség. Végtelen kicsinyekkel az integrál kiszámításához is eljuthatunk: a (koordinátánként értett) $dg/dt$ differenciálhányados a sebesség, az $F(g(t)) \cdot g'(t)$ belső szorzat a teljesítmény, így a teljes munka

$$\int_a^b F(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

**6.3.13. Forgástest térfogata, heurisztikusan.** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f: [a, b] \to \mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f(x)^2\}$$

forgástest azon része, amelynek első koordinátája $x$ és $x+dx$ közé esik, közelítőleg henger, amelynek magassága $dx$, alapterülete pedig $\pi f(x)^2$, tehát térfogata

$$\pi f(x)^2\,dx,$$

így a teljes térfogat

$$\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

A térfogatot később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

**6.3.14. Példa.** Kiszámítjuk az $R>0$ sugarú gömb térfogatát! Mivel $y=\sqrt{R^2-x^2}$, a térfogat

$$\pi\int_{-R}^{R} R^2-x^2\,dx = 4R^3\pi/3.$$

**6.3.15. Feladat [8].** Számítsuk ki az alábbi függvények grafikonjának $x$ tengely körüli megforgatásával keletkezett forgástest térfogatát:

(1) $\arcsin x$, $x\in[0,1]$;

(2) $e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $x\in[0,\pi]$;

(3) $\chi x$, $x\in[-a,a]$.

**6.3.16. Feladat [7].** Számítsuk ki az $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ ellipszis $x$ tengely körüli megforgatásával kapott ellipszoid térfogatát!

**6.3.17. Forgásfelület felszíne, heurisztikusan.** Legyen $-\infty<a<b<+\infty$ és $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}^+$ egy folytonos függvény. A függvény grafikonjának megforgatásával kapott

$$F := \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b,\ y^2+z^2=f(x)^2\right\}$$

forgásfelület azon része, amelynek első koordinátája $x$ és $x+dx$ közé esik, közelítőleg csonkakúp-palást, amelynek kerülete $2\pi f(x)$, magassága $dx$, így alkotójának hossza

$$\sqrt{dx^2+df^2}=\sqrt{dx^2+f'(x)^2\,dx^2}=\,dx\sqrt{1+f'(x)^2},$$

tehát felszíne közelítőleg

$$2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

így a teljes felület

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

A felszínt később pontosan definiáljuk, és tanulunk olyan tételeket, amelyek segítségével az összefüggés könnyen következik.

**6.3.18. Példa.** Kiszámítjuk az $R>0$ sugarú gömb felszínét! Mivel $y=\sqrt{R^2-x^2}$ deriváltja $-x/\sqrt{R^2-x^2}$, a felszín

$$2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+x^2/(R^2-x^2)}\,dx = 2\pi\int_{-R}^{R} R\,dx = 4R^2\pi.$$

**6.3.19. Feladat [4].** Határozzuk meg az egyenes csonkakúp palástjának területét!

**6.3.20. Feladat [6].** Határozzuk meg az adott függvény adott intervallum feletti részének $x$ tengely körüli forgatásával kapott forgástest felszínét:

(1) $e^x$, $x \in [a, b]$;

(2) $\sqrt{x}$, $x \in [a, b]$;

(3) $\sin x$, $x \in [0, \pi]$;

(4) $\chi x$, $x \in [-a, a]$;

(5) $\operatorname{tg} x$, $x \in [0, \pi/4]$;

(6) $x^2$, $x \in [-1, 1]$.

**6.3.21. Tömeg, tömegközéppont, tehetetlenségi nyomaték.** Tekintsünk egy $T$ testet, amelynek sűrűsége az $x, y, z$ koordinátákkal megadott pontban $\varrho(x, y, z)$. A testen kívül a sűrűséget tekintsük nullának. Tegyük fel, hogy a test minden pontjának első, második, illetve harmadik koordinátája rendre $x_0$ és $x_1$, $y_0$ és $y_1$, illetve $z_0$ és $z_1$ közé esik. Mivel a test azon részének tömege, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre $x$ és $x + dx$, $y$ és $y + dy$, illetve $z$ és $z + dz$ közé esik, $\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, a test tömege

$$M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ha a sűrűség a test pontjaiban 1, a térfogatot kapjuk.

Ha a gravitációs gyorsulás $g$, a test súlya $Mg$. Feltéve, hogy a gravitációs gyorsulás párhuzamos a $z$ tengellyel, számítsuk ki az $y$ tengelyre vonatkozó forgatónyomatékot. Mivel a test azon részétől származó forgatónyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre $x$ és $x + dx$, $y$ és $y + dy$, illetve $z$ és $z + dz$ közé esik, $x\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, a teljes forgatónyomaték

$$g \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Ez meg kell egyezzen azzal a forgatónyomatékkal, amelyet akkor kapnánk, ha a test teljes $M$ tömege az $S = (x_S, y_S, z_S)$ súlypontban (tömegközéppontban) lenne. Innen

$$x_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} x\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$y_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} y\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

és

$$z_S = \frac{1}{M} \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} z\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Végül határozzuk meg $z$ tengelyre vonatkozó $\Theta_{zz}$ tehetetlenségi nyomatékot. Mivel a test azon részétől származó tehetetlenségi nyomaték, amelynek első, második, illetve harmadik koordinátája rendre $x$ és $x + dx$, $y$ és $y + dy$, illetve $z$ és $z + dz$ közé esik, $(x^2 + y^2)\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, a teljes tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_{zz} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2)\varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Hasonlóan adódik két integrálással egy lemez tömege, területe, súlypontjának koordinátái és tehetetlenségi nyomatéka. □

**6.3.22. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott síkidomok területét:

(1) $2 - x \le y \le 2x - x^2$;

(2) $2^x \le y \le x + 1$;

(3) $y^2 \le x^2(a^2 - x^2)$, $a > 0$.

**6.3.23. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott test térfogatát:

(1) $0 \le x \le y \le 1$, $0 \le z \le 2x + 3y + 4$;

(2) $x^2 \le y \le 1$, $0 \le z \le x^2 + y^2$;

(3) $x^4 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$;

(4) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1$;

(5) $|x| + |y| + |z| \le 1$;

(6) $x, y, z \ge 0$, $(x + y)^2 + z^2 \le 1$.

**6.3.24. Feladat [10].** Határozzuk meg két egymást metsző és merőleges tengelyű $R$ sugarú egyenes körhenger közös részének térfogatát!

**6.3.25. Közelítő számítások.** Az alapgondolat egy függvény értékét, integrálját, deriválját, zérushelyét stb. úgy közelíteni, hogy vesszük a függvény egy közelítését (például egy Lagrange-interpolációval kapható polinomközelítést), és ennek vesszük az értékét, integrálját, deriváltját, zérushelyét stb. Itt egy $[a, b]$ korlátos valós intervallumon értelmezett, valós értékű függvény *közelítő integrálás*át fogjuk vizsgálni. Az így adódó legegyszerűbb formulák az

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

*érintőformula*, az

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b - a}{2}(f(a) + f(b))$$

*trapézformula*, és az

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b - a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)\right)$$

*Simpson-formula.* Az érintőformula neve onnan ered, hogy ha a függvényt az intervallum középpontjában vett érintővel közelítjük, akkor ezt a formulát kapjuk. A jobb oldalon szereplő közelítés felfogható, mint az érintő alatti terület, de megegyezik az $f((a+b)/2)$ magasságú téglalap területének is. Lineáris interpolációnak felel meg a trapézformula is: az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő egyenes alatti trapéz területe. A Simpson-formula parabolikus interpolációnak felel meg: a $c = (a+b)/2$ jelöléssel az $(a, f(a))$, $(c, f(c))$ és $(b, f(b))$ pontokhoz tartozó Lagrange interpolációs polinom alatti területet kiszámolva kapjuk. Megmutatható, hogy ha egy test térfogatát a Simpson-formulával úgy közelítjük, hogy

$$V \approx \frac{m}{6}(T_a + 4T_k + T_f),$$

ahol $T_a, T_k, T_f$ rendre az alaplap, a középmetszet, illetve a fedőlap területei, és $m$ a magasság, akkor henger, hasáb, kúp, gúla, gömb, csonka kúp és csonka gúla esetén pontos értéket kapunk. Hogy ez miért van így, az megérthetjük, ha megvizsgáljuk a formulák hibáját.

Kezdjük az érintőformulával. Ennek hibája

$$r = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(c).$$

Tegyük fel, hogy $f$ kétszer differenciálható $]a, b[$-n, $k \le f''(x) \le K$, ha $a < x < b$. Legyen $p$ a $(c, f(c))$ ponton átmenő, $f'(c)$ meredekségű elsőfokú polinom, és legyen

$$\varrho(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(y) - p(y)}{(y-c)^2}(x-c)^2,$$

ahol $y$ az $]a, b[$ intervallum egy $c$-től különböző pontja. Nyilván $\varrho(c) = 0$, $\varrho(y) = 0$, így Rolle tétele szerint van olyan $\xi$ pont, amelyre $\varrho'(\xi) = 0$. Mégegyszer alkalmazva Rolle tételét, van olyan $\eta$ pont $c$ és $\xi$ között, amelyre $\varrho''(\eta) = 0$. Innen

$$0 = \varrho''(\eta) = f''(\eta) - 2\frac{f(y) - p(y)}{(y-c)^2},$$

tehát

$$f(y) - p(y) = f''(\eta(y))\frac{(y-c)^2}{2}.$$

A jobb oldal integrálható függvénye $y$-nak, így a bal oldal is. Mindkét oldalt integrálva,

$$r = \int_a^b f(y)\,dy - (b-a)f(c) = \int_a^b f''(\eta(y))\frac{(y-c)^2}{2}\,dy.$$

Mivel

$$\int_a^b \frac{(y-c)^2}{2}\,dy = \Big[\frac{(y-c)^3}{6}\Big]_a^b = \frac{(b-a)^3}{24},$$

azt kapjuk, hogy

$$k\frac{(b-a)^3}{24} \le r \le K\frac{(b-a)^3}{24}.$$

A trapézformula

$$r = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

hibájára, ha $f$ folytonos $[a,b]$-n és kétszer differenciálható $]a,b[$-n, $k \le f''(x) \le K$, ha $a < x < b$, az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokon átmenő elsőfokú $p$ polinomot és a

$$\varrho(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(y)-p(y)}{(y-a)(y-b)}(x-a)(x-b),$$

függvényt használva, amire $\varrho(a) = \varrho(b) = \varrho(y) = 0$ teljesen hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$-K\frac{(b-a)^3}{12} \le r \le -k\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Végül a Simpson-formula

$$r = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{(b-a)}{6}(f(a)+4f(c)+f(b))$$

hibájának vizsgálatához tegyük fel, hogy $f$ folytonos $[a,b]$-n és négyszer differenciálható $]a,b[$-n, $k \le f^{(4)}(x) \le K$, ha $a < x < b$. Legyen

$$g(x) = \frac{f(c+x)+f(c-x)}{2} \quad \text{és} \quad d = \frac{b-a}{2}.$$

Vegyük észre, hogy $k$ illetve $K$ a $g^{(4)}(x)$-nek is alsó illetve felső korlátja $]-d,d[$-n, továbbá $g$ páros függvény. Legyen $p(x) = g(0) + g(d)x^2/d^2$, $0 < |y| < d$, és

$$\varrho(x) = g(x) - p(x) - \frac{g(y)-p(y)}{y^2(y^2-d^2)}x^2(x^2-d^2).$$

Ekkor $\varrho(d) = \varrho(-d) = \varrho(0) = 0$ és $\varrho(y) = \varrho(-y) = 0$, így Rolle tételének ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$0 = \varrho^{(4)}(\eta) = g^{(4)}(\eta) - 24\frac{g(y)-p(y)}{y^2(y^2-d^2)}$$

valamely $\eta \in ]-d,d[$-re. Innen

$$g(y) - p(y) = -g^{(4)}(\eta(y))\frac{y^2(d^2-y^2)}{24},$$

amiből mindkét oldalt integrálva

$$\int_{-d}^{d} g(y)\,dy - 2dg(0) - \frac{2d}{3}g(d) = \int_{-d}^{d} -g^{(4)}(\eta(y))\frac{y^2(d^2-y^2)}{24}.$$

A jobb oldal $r$. Mivel

$$\int_{-d}^{d} \frac{y^2(d^2-y^2)}{24} = \frac{d^5}{90},$$

azt kapjuk, hogy $-K(b-a)^5/2880 \le r \le -k(b-a)^5/2880$. Az eredmény mutatja, hogy a Simpson-formula legfeljebb harmadfokú polinomokra pontos. Ez magyarázza, hogy olyan sok térfogatnál pontos.

Gyakran ezekkel az egyszerű formulákkal nem érünk célt. Ekkor az értelmezési tartományt kisebb részekre osztjuk, minden kis részen egy közelítést választunk, ennek az integrálját számítjuk ki, és a kis részeken vett integrálokat összeadjuk. Például ha egy $[a,b]$ intervallumon egy függvény integrálját akarjuk közelíteni, az intervallumot $h=(b-a)/n$ hosszúságú egyenlő részekre osztva az $x_k = a+kh$ beosztást kapjuk, és az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

*összetett trapézformula*, illetve az

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0)+4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+2f(x_1)+4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+2f(x_2)+\cdots+4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)+f(x_n)\right).$$

*összetett Simpson-formula* adódik. A pontosság az osztópontok számának növelésével növelhető.

**6.3.26. Feladat [6].** Határozzuk meg az $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ integrált $10^{-8}$ pontossággal a tanult módszerekkel! Végezzünk hibabecslést!

**6.3.27. Egyenletmegoldás iterációval.** Bolzano tételénél említettünk egy lehetőséget. Gyakran jobban használható egy $f(x)=0$ egyenlet egy $\xi$ gyökének a meghatározására, hogy „erőszakkal” $x=T(x)$ alakra hozzuk az egyenletet, majd valamilyen — lehetőleg a gyökhöz közeli — $x_0$-ból indulva úgynevezett *iterációval* képezzük az $x_{n+1}=T(x_n)$ sorozatot, amely gyakran a gyökhöz konvergál.

Nézzünk egy példát: Tegyük fel, hogy a pozitív $\eta$ szám négyzetgyökét akarjuk meghatározni. Az $\eta - x^2 = 0$ egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk $x$-et: $\eta - x^2 + x = x$. Fejezzük ki az $x^2$-ben szereplő egyik $x$-et:

$$x = \frac{\eta + x}{1+x}, \quad \text{azaz} \quad T(x) = \frac{\eta+x}{1+x}.$$

Iterációval kapunk egy, a gyökhöz konvergáló sorozatot. Miért működik ez a módszer? A középérték-tétel szerint $T(x)-T(\xi) = T'(\vartheta)(x-\xi)$, ahol $\vartheta$ az $x$ és a $\xi$ között van. Számoljuk ki $T$ deriváltját:

$$T'(x) = \frac{(1+x)-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

aminek abszolút értéke mindenütt kisebb mint 1, így $T(x)$ közelebb van a gyökhöz, mint $x$.

Nem mindegy, hogy az $\eta - x^2 + x = x$ egyenletből melyik $x$-et fejezzük ki. Ha a jobb oldalit, akkor $T'(x) = -2x + 1$, aminek abszolút értéke csak 0 és 1 között kisebb, mint 1. Ha a bal oldalit, akkor $T'(x) = 1 + 2x$, ami mindenütt nagyobb, mint 1 ha $x$ pozitív. A módszerre később majd visszatérünk.

**6.3.28. A Newton-módszer.** Egy $f(x) = 0$ *egyenlet gyök*ének meghatározására természetes módon adódik egy közelítő módszer, ha egy adott $x_n$ érték közelében $f$-et a lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

így a következő közelítésre

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens, ekkor viszont igen gyorsan konvergál: az értékes jegyek száma általában minden lépésben megduplázódik. A konvergencia biztosabbá tehető, ha kezdetben *relaxáció*t alkalmazunk:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban keressük a következő közelítést, ahol az $0 < \alpha_n \le 1$ *relaxációs paraméter*t úgy választjuk, hogy $\left|f(x_{n+1})\right| < \left|f(x_n)\right|$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha $f(x_n) \ne 0$ és $f'(x_n) \ne 0$: Nézzük meg, milyen irányú $h$-t kell választanunk, hogy az abszolút érték a lehető legjobban csökkenjen. A $h$ adott (kis) hossza mellett $f(x) + f'(x)h$ abszolút értéke akkor lesz a legkisebb, ha egyenesen a nulla felé mozdulunk el, tehát ha $f'(x)h$ az $f(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa, vagyis ha $h$ az $f(x)/f'(x)$ ellentettjének egy pozitív konstansszorosa. Mivel $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h)$, azt kapjuk, hogy elég kis $|h|$ esetén

$$\left|f(x+h)\right| - \left|f(x)\right| \le -\left|hf'(x)\right| + \left|r(h)\right|.$$

Az $x = x_n$, $\Delta x_n = -f(x_n)/f'(x_n)$, $h = \alpha \Delta x_n$ jelöléssel

$$\frac{\left|f(x_n + \alpha\Delta x_n)\right| - \left|f(x_n)\right|}{\alpha\left|f(x_n)\right|} \le -1 + \frac{\left|r(\alpha\Delta x_n)\right|}{\alpha\left|f(x_n)\right|} \to -1,$$

ha $\alpha \to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1 - \sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \le \sigma \le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük $\alpha_n$-et, rendszerint szorozzuk $\varrho$-val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0{,}3 \le \varrho \le 0{,}8$.

Polinomokra alkalmazva ezt az eljárást, meghatározhatjuk a polinom gyökeit. Még ha a polinom valós együtthatós, akkor is ajánlatos egy véletlen komplex kezdőértékből indítani az iterációt, mert így nagyon kicsi a valószínűsége, hogy megszakad, és újra kell indítani. Ezzel az eljárással megkaphatjuk a polinom egy zérushelyét. A polinomot elosztva a gyöktényezővel, eggyel alacsonyabb fokú polinomot kapunk, amit ugyanúgy kezelhetünk. A számítási hibák felhalmozódása miatt a talált közelítő értékek pontosságát érdemes az eredeti polinom felhasználásával végzett iterációval növelni.

**6.3.29. Feladat [3].** Milyen iterációt kapunk, ha a Newton-módszert alkalmazzuk négyzetgyökvonásra?

**6.3.30. Feladat [4].** Milyen iterációt kapunk, ha a Newton-módszert alkalmazzuk $k$-adik gyök meghatározására?

**6.3.31. Feladat [7].** Határozzuk meg az $x^5 - 4x + 2 = 0$ egyenlet összes gyökét numerikusan!

**6.3.32. Differenciálegyenletek.** A természettudományokban az ismeretlen gyakran egy $x \mapsto y(x)$ függvény, amelyet egy rá vonatkozó

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

alakú egyenletből, úgynevezett *differenciálegyenlet*ből kell meghatároznunk, amelyben $f$ és $g$ adott függvények. A differenciálegyenletekkel részletesen később foglalkozunk, itt csak néhány nagyon speciális esetet tekintünk.

**6.3.33. Elsőrendű szeparábilis differenciálegyenletek megoldása.** *Legyenek $I$ és $J$ az $\mathbb{R}$ nyílt intervallumai, $f\colon I \to \mathbb{K}$ és $g\colon J \to \mathbb{K}$ függvények, amelyeknek $F$, illetve $G$ primitív függvényei. Egy $I_0 \subset I$-n értelmezett, $J$-be képező $x \mapsto y(x)$ függvény akkor és csak akkor megoldása a*

$$g(y)y' = f(x) \tag{1}$$

*differenciálegyenletnek, ha valamely $c \in \mathbb{K}$ konstanssal*

$$G(y) = F(x) + c. \tag{2}$$

A szeparábilis elnevezés onnan ered, hogy az egyenlet formálisan $g(y)\,dy = f(x)\,dx$ alakban írható, azaz az $y$ és $x$ változókat a két oldalra szétválaszthatjuk.

**Bizonyítás.** Ha (2) fennáll, akkor mindkét oldalt differenciálva $x$ szerint,

$$g(y)y' = f(x).$$

Ha (1) teljesül, akkor

$$\big(G(y) - F(x)\big)' = g(y)y' - f(x) = 0,$$

így $G(y) - F(x)$ konstans $I_0$-on. □

**6.3.34. Megjegyzés.** Az $(x_0, y_0)$ ponton áthaladó megoldás gyakran felírható

$$\int_{y_0}^{y} g(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

alakban. Valóban, az egyenlet egy megoldást ad, amelyre az $x = x_0$ helyen lehet $y = y_0$, és ez az egyetlen lehetőség, ha például $g$ nem vált előjelet.

**6.3.35. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek megoldása.** *Legyen $I$ az $\mathbb{R}$ nyílt intervalluma, $f, g\colon I \to \mathbb{K}$ és $F$ az $f$ egy rögzített primitív függvénye. Egy $I$-n értelmezett $x \mapsto y(x)$ függvény akkor és csak akkor megoldása az*

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{1}$$

*differenciálegyenletnek, ha*

$$y \in e^F \int g(x)e^{-F(x)}dx. \tag{2}$$

**Bizonyítás.** Ha (1) fennáll, akkor

$$(ye^{-F})' = (fy + g)e^{-F} + ye^{-F}(-f) = ge^{-F},$$

tehát

$$ye^{-F} \in \int g(x)e^{-F(x)}dx,$$

ahonnan következik (2). Másrészt ha $y = e^F H$, ahol $H \in \int g(x)e^{-F(x)}dx$, akkor

$$y' = (e^F H)' = fe^F H + e^F ge^{-F} = fy + g. \ \square$$

**6.3.36. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g, h\colon I \to \mathbb{K}$, $F$ a $f$ egy rögzített primitív függvénye. Az

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

differenciálegyenletet *másodrendű lineáris differenciálegyenlet*nek nevezzük,

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

a megfelelő *homogén egyenlet.* A homogén egyenlet $y_1, y_2\colon I \to \mathbb{K}$ megoldásait *alaprendszer*nek nevezzük, ha $y_1'y_2 - y_2'y_1$ sehol sem nulla $I$-n.

**6.3.37. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha $y_1, y_2$ egy alaprendszer, akkor a $c_1y_1 + c_2y_2$ függvények és csak ezek megoldásai a megfelelő homogén egyenletnek.*

**Bizonyítás.** Behelyettesítéssel adódik, hogy ezek a függvények megoldások. A másik irányhoz vegyük észre, hogy bármely két megoldásra

$$(y_1'y_2 - y_2'y_1)e^F \tag{1}$$

konstans $I$-n: valóban, differenciálva, a derivált nulla. Innen a zárójelben álló kifejezés vagy mindenütt nulla, vagy sehol sem nulla. Ha $y_1, y_2$ nem alaprendszer, akkor az (1) konstans nulla, egyébként viszont nem nulla. Legyen most $y$ tetszőleges megoldás. Tudjuk, hogy

$$(y_2y' - yy_2')e^F = c_1, \qquad (y_1y' - yy_1')e^F = c_2$$

is konstansok. Vonjuk ki az első egyenlőség $y_1$-szereséből a második egyenlőség $y_2$-szeresét. Azt kapjuk, hogy

$$y(y_1'y_2 - y_2'y_1)e^F = c_1y_1 - c_2y_2.$$

Figyelembe véve, hogy (1) nem nulla konstans $c$, azt kapjuk, hogy $y = (c_1y_1 - c_2y_2)/c$. $\square$

**6.3.38. Állítás.** *Az előző definíció jelöléseivel, az inhomogén egyenlet $y$, $y_0$ megoldásainak különbsége a homogén egyenlet megoldása. Megfordítva, ha az inhomogén egyenlet egy adott $y_0$ megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet megoldásait, az inhomogén egyenlet összes $y$ megoldását megkapjuk.* □

**6.3.39. A próbafüggvények módszere.** Az előző definíció jelöléseivel, hogyan kaphatjuk meg a homogén vagy az inhomogén egyenlet egy megoldását? Kereshetjük például $e^{\lambda x}$ vagy $p(x)e^{\lambda x}$ alakban, ahol $p$ polinom ismeretlen együtthatókkal, ilyen típusú tagok összegeként, stb. A legegyszerűbb konstans együtthatós homogén $y'' + ay' + by = 0$ egyenlet egy megoldását például $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ egyenlethez jutunk. Ha két különböző gyök van, meg is kaptunk egy alaprendszert. (Ellenőrizzük!) Ha a gyökök komplexek, valós rendszert ad az egyik függvény valós és képzetes része. Általában, ha találtunk egy $y_1$ megoldását a homogén egyenletnek, $y = y_1 \int z$ alakban érdemes keresni a másikat, ahol $z$ ismeretlen függvény. Itt is ha csak egy gyök van, $y_1(x) = e^{\lambda x}$ jelöléssel visszahelyettesítve

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)y_1 \int z + 2\lambda y_1' z + a y_1' z + y_1 z' = (2\lambda + a)y_1' z + y_1 z' = 0.$$

Mivel $\lambda$ a másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke, $a = -2\lambda$, így azt kapjuk, hogy $z' = 0$, azaz $z$ konstans, például lehet 1. Innen $y = y_1 \int 1$, azaz például $y(x) = xe^{\lambda x}$. A próbafüggvények módszerével esetleg a függvényegyütthatós esetben is találhatunk megoldást és alaprendszert.

Egy $y_1, y_2$ alaprendszer birtokában az inhomogén egyenlet egy $y_0$ megoldását

$$y_0 = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

alakban érdemes keresni, ahol a $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ és $c_1'y_1' + c_2'y_2' = h$ egyenletek teljesülnek. Részletesebben lásd a differenciálegyenleteknél. □

**6.3.40. Hatványsorok alkalmazása differenciálegyenletek megoldására.** Az $f(2x) = f^2(x)$ függvényegyenlet megoldását hatványsor alakban kerestük. Ehhez hasonlóan más függvényegyenletek, például differenciálegyenletek megoldását is kereshetjük hatványsor alakban. Példaként keressük az

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

*Bessel-féle differenciálegyenlet* megoldását $n \in \mathbb{Z}$ esetén $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ alakban. Az egyenletből

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} n^2 a_k x^k \\
&= a_1 x - n^2 a_0 - n^2 a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k^2 - n^2)a_k + a_{k-2})x^k,
\end{aligned}$$

így azt kapjuk, hogy $(k^2-n^2)a_k+a_{k-2}=0$, ha $k=0,1,\dots$, ahol $a_{-1}=a_{-2}=0$. Innen $m=|n|$ jelöléssel $a_0=a_1=\dots=a_{m-1}=0=a_{m+1}=a_{m+3}=\cdots$, és $c=a_m$ jelöléssel

$$a_{m+2j}=\frac{(-1)^j c}{2^{2j}\cdot j!\cdot(m+1)\cdots(m+j)}.$$

Így a hatványsor alakú megoldások a $c=1$ választással kapott úgynevezett *elsőfajú Bessel-függvény*ek, illetve konstansszorosaik:

$$J_m(x)=x^m\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\cdot(m+1)\cdots(m+j)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}.$$

A $j+1$-edik és a $j$-edik tag abszolút értékének hányadosa $|x|^2/(4(j+1)(m+j+1))\to 0$, ha $j\to\infty$, így a hatványsor mindenütt konvergens.

Az $n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ eset hasonlóan kezelhető, ha a megoldást $y(x)=x^\varrho\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ alakban keressük ($\varrho$ behelyettesítés után $n$ függvényében meghatározható); az így kapott függvényeket is *elsőfajú Bessel-függvény*eknek hívjuk.

**6.3.41. Feladat [9].** Oldjuk meg az $y'+2xy=0$, $y'-2y\operatorname{ctg}x=0$, $y'-xy=x^3$, $y'+y=e^{-x}$, $y'-y/x=x^2+3x-2$, $y'\cos x+y\sin x=1$ differenciálegyenleteket!

**6.3.42. Feladat [10].** Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

(1) $y'=y^2$; $xy'=y\ln y$; $y'=e^{y-x}$; $xy'+y^2=-1$; $y'-y^2-3y+4=0$;

(2) $y'=y^2+1$; $y'-e^{x-y}-e^x=0$; $y'=e^x/(y(e^x+1))$; $y'y\sqrt{1-x^2}=-x\sqrt{1-y^2}$.

**6.3.43. Feladat [10].** Az $ax+by$ vagy az $y/x$ helyett új ismeretlent bevezetve oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket: $y'=(y-x)^2$; $y'=\sqrt{y-2x}$; $xy'=y-x\cos^2(y/x)$; $x\sin(y/x)-y\cos(y/x)+xy'\cos(y/x)=0$.

**6.3.44. Feladat [11].** Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

(1) $y''+y=0$; $y''-5y'+6y=0$; $y''-y-6y=0$; $4y''+4y'+37y=0$;

(2) $y'\cos x+y\sin x=1$; $y''+2y'+y=\sin x$; $y''-y=e^x(2x+3)$; $y''-3y'+2y=3e^{2x}$.

**6.3.45. Feladat [3].** Oldjuk meg az $y''=(1-x^2)^{-1/2}$ és $2xy''-y'=0$ differenciálegyenleteket!

**6.3.46. Feladat [5].** Egy motorcsónak motorját leállítjuk. Meddig jut el, ha a közegellenállás a sebesség négyzetével, illetve a sebességgel arányos?

**6.3.47. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az $y'=2y/x$ egyenlettel megadott görbesereg $x_0$ helyen vett érintői egy pontban metszik egymást. Milyen görbét ír le a közös metszéspont, ha $x_0$ változik?

**6.3.48. Feladat [10].** Legyen az $x'+a(t)x=f(t)$ differenciálegyenletben $a(t)\ge c>0$ és tegyük fel, hogy $f(t)\to 0$, ha $t\to+\infty$. Bizonyítsuk be, hogy $t\to+\infty$ esetén az egyenlet minden megoldása nullához tart!

⋆ **6.3.49. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy az

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}$$

egyenlet minden integrálgörbéje két vízszintes asszimptotával rendelkezik!

⋆ **6.3.50. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy az $xy' - (2x^2+1)y = x^2$ differenciálegyenletnek egyetlen partikuláris megoldása tart véges határértékhez, ha $x \to +\infty$. Mennyi a határérték?

**6.3.51. Feladat [10].** Határozzuk meg az $y' = y\cos^2 x + \sin x$ egyenletnek egy periódikus megoldását!

**6.3.52. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy egy lineáris egyenlet együtthatói periódikusak $p$ periódussal, akkor van periódikus megoldása!

° **6.3.53. Differenciálegyenletek közelítő megoldása.** Az

$$x' = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi$$

probléma közelítő megoldásával fogunk foglalkozni. A módszerek akkor is alkalmazhatók, ha $x$ vektor értékű függvény. Magasabb rendű egyenletekre vagy egyenletrendszerekre is alkalmazhatók a módszerek: ha második derivált is előfordul, tekintsük az első deriváltat ismeretlen függvénynek. Egy új ismeretlent és egy új egyenletet kapunk. Részletesebben lásd a differenciálegyenleteknél.

Egy kis $h$ lépésközt választva, a $t_k = \tau + kh$ pontokban kívánjuk közelíteni az ismeretlen függvényt. A *közelítő érték*ek legyenek $\xi = x_0, x_1, x_2, \ldots$. Meg kell különböztetnünk az $E_k = x(t_k) - x_k$ *halmozott hibá*t a *k-dik lépés* $e_k$ *hibájá*tól, amely a $(t_{k-1}, x_{k-1})$ ponton áthaladó pontos megoldás $t_k$ helyen felvett értékének és $x_k$-nak a különbsége. Használni fogjuk az $f_k = f(t_k, x_k)$ jelölést.

A legegyszerűbb közelítő módszer az *Euler-módszer*: $x_{k+1} = x_k + hf_k$. A középérték tétel felhasználásával kapjuk, hogy egy lépés hibája $h^2$ nagyságrendű. A gyakorlatban nem használatos, mert nagyon durva közelítést ad.

Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, x(t))\, dt.$$

Az Euler-módszer úgy tekinthető, mintha ebben az integrálegyenletben az integrandust konstanssal helyettesítettük volna. Pontosabb közelítést kapunk, ha az összefüggésben az integrált a trapézszabállyal közelítjük:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2}\big(f(t_k, x_k) + f(t_{k+1}, x_{k+1})\big).$$

Az így kapott *trapéz módszer*nél az integrálás trapéz módszerére kapott hibabecslés szerint egy lépés hibája $h^3$ nagyságrendű. A módszer hátránya, hogy implicit: mindkét oldalon szerepel $x_{k+1}$, így minden lépésben egy egyenletet kell megoldanunk. Ha $f$ az $x$-ben másodfokú, akkor ez nem nehéz. Egyébként például iterációt használhatunk: A jobb oldalra beírva $x_{k+1}$ egy közelítését, az egyenlet egy jobb közelítést ad. Ha $h$ nem elég kicsi, akkor előfordulhat, hogy az iteráció nem konvergens.

Egy lehetőség, amellyel a trapéz módszerből explicit módszert kaphatunk, az, hogy a trapéz módszerben a jobb oldalon $x_{k+1}$ helyére az Euler-módszerrel kapott közelítést írjuk, és a két közelítést átlagoljuk. Így kapjuk a *javított Euler-módszer*t vagy *Heun módszeré*t. Ez a módszer így is írható:

$$x_{k+1} = x_k + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2}\right),$$

ahol

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, x_k), \\ k_2 &= f(t_{k+1}, x_k + hk_1). \end{aligned}$$

Explicit módszert úgy is kaphatunk, hogy a $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ intervallumon alkalmazzuk az érintő formulát:

$$x_{k+1} = x_{k-1} + 2hf_k.$$

Az így kapott *középpont módszer* kiválóan alkalmas arra, hogy az implicit trapéz módszer kezdőértékét szolgáltassa. Ennek hibája is $h^3$ nagyságrendű. Hátránya, hogy két kezdőérték szükséges. Így egy úgynevezett prediktor-korrektor módszert kapunk. Az implicit módszerek pontosabbak, és jobb a stabilitásuk. Egy explicit formulát jósló (prediktor) formulának használva, majd az így kapott $\overline{x}_{k+1}$ közelítést a javító (korrektor) formula segítségével iterációval javítva, kapjuk a következő pontban az $x_{k+1}$ közelítést. A prediktor formula segítségével kapott kezdeti közelítést érdemes a hibabecslések alapján kapható módosító formulával javítani. A prediktor és a korrektor által adott közelítés alapján becsülhető az adott lépésben elkövetett hiba.

Ha a középpont módszert használjuk prediktornak, a trapéz módszert pedig korrektornak, akkor az érintő módszer, illetve a trapézszabály hibájának finomabb vizsgálatával megmutattuk, hogy ha $x'''$ folytonos, így a minimuma és a maximuma között minden közbülső értéket felvesz, akkor a korrektor hibája $-h^3x'''(\tau_k)/12$, a prediktor hibája pedig $(2h)^3x'''(\overline{\tau}_k)/24 = h^3x'''(\overline{\tau}_k)/3$ alakba írható. Ebből, ha a harmadik derivált nem változik túl gyorsan, akkor $x_k - \overline{x}_k \approx 5h^3x'''(\tau_k)/12$, azaz $x'''(\tau_k) \approx 12(x_k - \overline{x}_k)/(5h^3)$. Az $x'''(\tau_{k+1}) \approx x'''(\tau_k)$ feltételezéssel a hibabecslés $e_{k+1} \approx (x_{k+1} - \overline{x}_{k+1})/5$. A pontos érték becslése $\overline{x}_{k+1} + 4(x_k - \overline{x}_k)/5$, ezen „módosító" által adott kezdőértékkel érdemes indítani az iterációt. Így az alábbi módszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \text{prediktor: } & \overline{x}_{k+1}\bar{t}x_{k-1} + 2hf_k \\ \text{módosító: } & x_{k+1}\bar{t}\overline{x}_{k+1} + \frac{4}{5}(x_k - \overline{x}_k) \\ \text{korrektor: } & x_{k+1}\bar{t}x_k + \frac{h}{2}(f(t_{k+1}, x_{k+1}) + f_k) \\ \text{hibabecslés: } & e_{k+1} \approx \frac{1}{5}(x_{k+1} - \overline{x}_{k+1}) \end{aligned}$$

Az iterációt akkor állítjuk le, ha az egymás utáni iteráltak eltérése kicsi. Ez gyakran már az első iterációnál teljesül. A prediktor-korrektor módszerek előnye a lépéshiba könnyű becsülhetősége, és az, hogy általában — vektor értékű $x$ esetén is — csak két függvényértéket kell kiszámolni minden lépésben.

Induláskor nem használható ez a prediktor; az Euler-módszert használhatjuk az első lépésben, módosítónak pedig a javított Euler-módszert. A gyakorlatban a megoldás pontosságát úgy szokás ellenőrizni, hogy fele akkora lépésközzel is megismételjük az egész számítást. Ha nincs lényeges eltérés, akkor a közelítés jónak tekinthető. A halmozott hiba $h^2$-tel arányos.

A fenti módszerrel automatikus programok állíthatók össze differenciálegyenletrendszer numerikus megoldására. Minden lépésben megvizsgáljuk adott lépés hibáját. Ha ez egy megadott határnál nagyobb, vagy az iteráció konvergenciája lassú, akkor a lépésközt csökkentjük, ha pedig a hiba túl kicsi, akkor növeljük, például felezzük illetve duplázzuk. Nem érdemes a lépésenkénti hibát a kerekítési hibák nagyságrendjéig csökkenteni, mert a stabilitást veszélyeztetjük.

**6.3.54. Feladat [10].** A matematikai inga mozgásegyenlete

$$\varphi'' = \sqrt{\ell/g}\sin\varphi,$$

ahol $\ell$ a fonál hossza, $g$ a gravitációs állandó, $\varphi$ a kitérés. Határozzuk meg 1 m fonálhossznál numerikusan a fél lengésidőt minden tanult módszerrel!

⋆ **6.3.55. Generátorfüggvények.** Sokszor célszerű egy számsorozatot egy analitikus függvénybe, úgynevezett *generátorfüggvény*be összefogni. A $g_0, g_1, g_2, \ldots$ komplex számsorozat *generátorfüggvény*én a

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük, ha a hatványsor konvergens a nulla egy környezetében. Ha az $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sorozat generátorfüggvénye $F$, akkor a hatványsorok ismert tulajdonságaiból adódnak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned}
\alpha F(z) + \beta G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha f_n + \beta g_n) z^n;\\
z^m G(z) &= \sum_{n\ge m} g_{n-m} z^n;\\
\frac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} &= \sum_{n=0} g_{n+m} z^n;\\
G(cz) &= \sum_{n=0}^{\infty} c^n g_n z^n;\\
G'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) g_{n+1} z^n;\\
F(z)G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\Big) z^n.
\end{aligned}$$

A fenti összefüggések kombinálásával könnyen kaphatunk újabb összefüggéseket, például

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n g_n z^n, \quad z^2 G''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) g_n z^n,$$

és így
$$z^2G''(z) + zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 g_n z^n,$$
vagy hogy ha $F$ a $G$ azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$, akkor
$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{n-1}}{n} z^n.$$

A fenti összefüggések generátorfüggvények lineáris kombinálására, szorzására, differenciálására és integrálására, új változó bevezetésére és a sorozat eltolására vonatkoznak. Ha ismert hatványsorokat is felhasználunk (Newton binomiális sora, az exponenciális függvény sora, $1/(1-z)$ sora, stb.) újabb összefüggéseket kaphatunk, például
$$\frac{G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{0 \le k \le n} g_k \Big) z^n.$$
Mindezek nagyon hasznosak például a valószínűségszámításban, mi is fel fogjuk használni őket.

Néhány trükk az alkalmazásokhoz: Ha $g_n$ legfeljebb $d$-ed fokú polinomja $n$-nek, akkor $G(z)$ racionális törtfüggvény, amelynek nevezője $(1-z)^{d+1}$. Ha ez az $n$ mod $m$ maradéktól függően más-más polinommal teljesül, akkor véges sok $(1-z^j)^{d_j}$ alakú tényező szorzata a nevező. Ha $g_n$ rekurzív, $g_n = c_1 g_{n-1} + c_2 g_{n-2} + \cdots + c_d g_{n-d}$, ha $n \ge d$, akkor $G$ racionális törtfüggvény, amelynek nevezője $d$-ed fokú polinom. Ha a $c_j$ együtthatók nem konstansok, hanem polinomjai $n$-nek, akkor $G$ egy polinomegyütthatós lineáris differenciálegyenletnek tesz eleget. Például az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n > 1$ Fibonacci-számokra
$$\begin{aligned} F(z) &= f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + f_3 z^3 + f_4 z^4 + \dots, \\ zF(z) &= f_0 z + f_1 z^2 + f_2 z^3 + f_3 z^4 + \dots, \\ z^2 F(z) &= f_0 z^2 + f_1 z^3 + f_2 z^4 + \dots, \end{aligned}$$
amiből kivonással $(1 - z - z^2)F(z) = z$. Ebből parciális törtekre bontással
$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big( \frac{1}{1 - \phi_1 z} - \frac{1}{1 - \phi_2 z} \Big),$$
ahol $\phi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\phi_2 = 1 - \phi_1 = (1 - \sqrt{5})/2$. Innen
$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi_1^n - \phi_2^n) z^n,$$
azaz $f_n = (\phi_1^n - \phi_2^n)/\sqrt{5}$. A levezetés nem precíz, mert a hatványsorok konvergenciáját nem vizsgáltuk, de pontossá tehető.

Néha más módon rendelünk egy sorozathoz egy függvényt. Például ha $g_n$ valamely permutációk száma, vagy egyszerűen csak a generátorfüggvényt definiáló hatványsor nem konvergál a nulla egy környezetében, akkor használhatjuk a $g_n/n!$ sorozat generátorfüggvényét, ez a $g_n$ sorozat *exponenciális generátorfüggvény*e. A számelméletben gyakran használják a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^z}$$
*Dirichlet-féle generátorfüggvény*t; az $1, 1, 1, \dots$ sorozathoz tartozó Dirichlet-féle generátorfüggvény a nevezetes $\zeta$ *függvény.*

$\star$ **6.3.56. Variációszámítás.** A fizikában valamely probléma megoldását, vagy az azt leíró differenciálegyenletet gyakran egy minimumfeladatból kapjuk az úgynevezett *variációszámítás* segítségével. Erre mutatunk egy matematikai jellegű példát.

Határozzuk meg egy minimális felszínű forgásfelület alakját, amelyet az $x \mapsto y(x)$ függvény $x$ tengely körüli forgatásával kapunk. Feltesszük, hogy $y$ átmegy az $(x_0, y_0)$ és $(x_1, y_1)$ pontokon. A forgásfelület felszíne

$$S(y) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx.$$

A minimumot adó $x \mapsto y(x)$ függvényt „variáljuk” $\varepsilon v(x)$ hozzáadásával, ahol $v$ egyszer folytonosan differenciálható függvény, amelyről feltesszük, hogy $x_0$ illetve $x_1$ egy környezetében nulla, egyébként egyelőre tetszőleges, $\varepsilon$ pedig valós szám. Az

$$\varepsilon \mapsto f(\varepsilon) = S(y + \varepsilon v) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} (y(x) + \varepsilon v(x))\sqrt{1 + \big(y'(x) + \varepsilon v'(x)\big)^2}\, dx$$

függvénynek minimuma van a 0 pontban, így ott $\varepsilon$ szerinti deriváltja nulla. Mint később megmutatjuk, a differenciálás felcserélhető az integrálással, így azt kapjuk, hogy

$$f'(\varepsilon) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x)\sqrt{1 + \big(y'(x) + \varepsilon v'(x)\big)^2} + (y(x) + \varepsilon v(x)) \frac{(y'(x) + \varepsilon v'(x))v'(x)}{\sqrt{1 + \big(y'(x) + \varepsilon v'(x)\big)^2}}\, dx,$$

tehát

$$0 = f'(0) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} + \frac{y(x)y'(x)v'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}\, dx.$$

Tegyük fel, hogy $y$ kétszer folytonosan differenciálható. (Ez a feltétel kiküszöbölhető, csak az egyszerűbb levezetés kedvéért élünk vele.) Ekkor a fenti integrált parciális integrálással átalakítva azt kapjuk, hogy

$$0 = f'(0) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} v(x) \left( \sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) dx.$$

Megmutatjuk, hogy az integrál csak úgy lehet minden $v$ függvényre nulla, ha a zárójelben álló kifejezés nulla az $]x_0, x_1[$ intervallum minden pontjában. Valóban, ha ez nem állna fenn, akkor választhatnánk olyan $x$ pontot, amelynek valamely $\delta > 0$ sugarú környezete része $]x_0, x_1[$-nek, és a környezetben a zárójelben álló kifejezés nem vált előjelet. De akkor egy alkalmas $v$ függvény választva, amely mindenütt pozitív ebben a környezetben, azon kívül azonban nulla (például a

$$v(t) = \begin{cases} (1 - t)^2(1 + t)^2, & \text{ha } |t| < 1, \\ 0, & \text{ha } |t| \geq 1 \end{cases}$$

függvény egy alkalmas lineáris transzformáltját), ellentmondást kapnánk.

Így azt kaptuk, hogy a megoldás eleget tesz a

$$\sqrt{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

differenciálegyenletnek. Szorozzuk végig az egyenletet $y'$-vel, és vegyük észre, hogy az így kapott jobb oldal megegyezik

$$y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$$

deriváltjával. Innen valamely $\alpha$ valós konstanssal $y = \alpha\sqrt{1+y'^2}$. Ez a differenciálegyenlet szeparábilis, általános megoldása

$$y(x) = \alpha\chi\frac{x-\beta}{\alpha}.$$

Az $\alpha$, $\beta$ konstansok meghatározhatók abból, hogy az $x \mapsto y(x)$ függvény átmegy az $(x_0, y_0)$ és $(x_1, y_1)$ pontokon.

**6.3.57. Integrálkritérium.** Nemnegatív tagú sorok konvergenciájának vizsgálatánál gyakran hasznos a sor összegét egy olyan függvény integráljának felfogni, amely két szomszédos természetes szám között konstans, és az integrált összehasonlítani egy másik, sima függvény integráljával.

Például vizsgáljuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ sor konvergenciáját. Ha $\alpha \le 0$, az általános tag nem tart nullához, így a sor divergens. Most tegyük fel, hogy $0 < \alpha \le 1$. Az $f(x) = n^{-\alpha}$, ha $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényre $f(x) \ge x^{-\alpha}$, ha $x \ge 1$. Innen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^{-\alpha} &= \int_1^{N+1} f(x)\,dx \ge \int_1^{N+1} x^{-\alpha}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \to +\infty,\end{aligned}$$

így a sor divergens. Végül tegyük fel, hogy $\alpha > 11$. Az $f(x) = (n+1)^{-\alpha}$, ha $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{N}^+$ függvényre $f(x) \le x^{-\alpha}$, ha $x \ge 1$. Innen

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N+1} n^{-\alpha} &= \sum_{n=1}^{N}(n+1)^{-\alpha} = \int_1^{N+1} f(x)\,dx \le \int_1^{N+1} x^{-\alpha}\,dx \\ &= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \to \frac{-1}{1-\alpha},\end{aligned}$$

így a sor konvergens, sőt, ha $\alpha$ komplex, $\Re(\alpha) > 1$, akkor is abszolút konvergens. Ennek ellenére a sor összegét — a $\zeta$ függvény értékeit — nem ismerjük, csak páros természetes számokra. Ez is mutatja, hogy milyen ritka, hogy egy konvergens sor összegét is ismerjük.

A módszer felhasználható többek között a

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\ln n)^{\alpha}/n$$

és

$$\sum_{n=3}^{\infty}(\ln\ln n)^{\alpha}/(n\ln n),$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, stb., sorok konvergenciájának eldöntésére is.

**6.3.58. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

határérték létezik és véges! Ez az *Euler-féle $\gamma$ konstans.* Numerikus értéke $0{,}5772\ldots$. Nem ismeretes, hogy racionális-e vagy sem.

**6.3.59. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy

(1) $1/(1-x) \le e^{2x}$, ha $0 \le x \le 1/2$;

(2) ha $p_1, \ldots p_k$ a prímszámok $n$-ig, akkor

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \le \prod_{j=1}^{k} \Big(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots\Big) = \prod_{j=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big)^{-1} \le \exp\Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{2}{p_j}\Big);$$

(3) a prímszámok reciprokainak összege végtelen, így „elég sokan vannak”.

# 7

# Lineáris algebra

Ebben a részben márixokkal, vektorokkal és lineáris operátorokkal fogunk foglalkozni. Felhasználjuk az algebrai struktrúrákról, elsősorban a testekről és a gyűrűkről tanultakat.

## 7.1 Mátrixok és vektorok

**7.1.1. Jelölés.** Bár a kódoláselméletben véges testek is szerepet játszanak, és a lineáris algebrát akár ferdetestekre is lehetne tárgyalni, számunkra a legfontosabb az $\mathbb{R}$ valós és a $\mathbb{C}$ komplex számtest lesz; szokás szerint jelölje $\mathbb{K}$ ezen testek valamelyikét. A 7.1 és 7.2 pontban a legtöbb definíciót és tételt csak a $\mathbb{K}$ testre fogjuk megfogalmazni, de mind átvihető tetszőleges $K$ testre is.

**7.1.2. Mátrixok.** Ha $X$ egy halmaz, egy $x\colon (i,j) \mapsto x_{i,j} \in X$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$ leképezést $m \times n$-es $X$-beli elemű (vagy $X$ feletti) $(x_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ *mátrix*nak nevezünk; az $x_{i,j}$-k a mátrix *elem*ei. A mátrixokat

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,j} & \ldots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i,1} & x_{i,2} & \ldots & x_{i,j} & \ldots & x_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m,1} & x_{m,2} & \ldots & x_{m,j} & \ldots & x_{m,n} \end{pmatrix}$$

téglalap alakú táblázatként ábrázoljuk; $x_{i,j}$ az $i$-edik sor $j$-edik eleme, tehát az első index a *sorindex*, a második az *oszlopindex*, $m$ a sorok száma és $n$ az oszlopok száma. Szinte mindig skalárelemű mátrixokkal lesz dolgunk. A fenti mátrix $x'$ *transzponált*ján azt az $n \times m$-es $(x'_{j,i})_{j=1}^{n}{}_{i=1}^{m}$ mátrixot értjük, amelyre $x'_{j,i} = x_{i,j}$, ha $i = 1,2,\ldots,m$ és $j = 1,2,\ldots,n$; ennek sorai tehát az előző mátrix oszlopai. Nyilván $(x')' = x$. Ha $n = m$, akkor *négyzetes* (vagy *kvadratikus*) mátrixról beszélünk. Ha $x' = x$, akkor az $x$ mátrixot *szimmetrikus*nak nevezzük. Természetesen csak négyzetes mátrix lehet szimmetrikus. Egy $x$ mátrix *főátló*ját vagy röviden *átló*ját, idegen szóval *diagonális*át az $x_{i,i}$ elemek alkotják. Néha a *mellékátló* fogalma is hasznos lesz: ezt az $x_{i,n+1-i}$ elemek alkotják, ahol $n$ az oszlopok száma. Ha egy mátrixnak csak egy sora van, azaz $m = 1$, akkor *sormátrix*ról, ha pedig csak egy oszlopa van, azaz $n = 1$, akkor *oszlopmátrix*ról beszélünk. Sormátrix transzponáltja nyilván oszlopmátrix, oszlopmátrix transzponáltja pedig sormátrix.

**7.1.3. Műveletek mátrixokkal.** Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$ és

$$a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, \quad b = (b_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$$

$\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrixok. Legyen

$$\overline{a} = (\overline{a_{i,j}})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}, \quad \gamma a = (\gamma a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n} \quad \text{és} \quad a + b = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}.$$

Vegyük észre, hogy a konjugálás, a $\mathbb{K}$-beli elemekkel való szorzás és az összeadás megfelel a függvények szokásos konjugálásának, konstanssal való szorzásának és összeadásának. Nyilván $(\overline{a})' = \overline{a'}$, $(\gamma a)' = \gamma a'$ és $(a+b)' = a' + b'$.

A $\mathbb{K}^m$ két elemének, azaz egy $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ és egy $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ skalár $m$-esnek a *kompozíció*ján az azonos helyen álló elemek szorzatának összegét, azaz a

$$\sum_{j=1}^{m} x_j y_j$$

összeget értjük. Legyen most $b = (b_{i,j})_{i=1}^{\ell}{}_{j=1}^{m}$ egy $\ell \times m$-es $\mathbb{K}$-beli elemű mátrix. A $b$ és $a$ mátrixok szorzatát sor-oszlop kompozícióval definiáljuk: a $b$ és az $a$ mátrix $c = ba$ *szorzat*án az $\ell \times n$-es $c = (c_{i,k})_{i=1}^{\ell}{}_{k=1}^{n}$ mátrixot értjük, ahol

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} b_{i,j} a_{j,k}, \quad \text{ha } i = 1, 2, \ldots, \ell,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

azaz a szorzatmátrix $i$-edik sorának $k$-adik elemét úgy kapjuk, hogy vesszük a $b$ mátrix $i$-edik sorának és az $a$ mátrix $k$-adik oszlopának a kompozícióját.

Természetesen a mátrixműveleteket nem véletlenül definiáljuk így: a cél az, hogy megfeleljenek a lineáris leképezések közötti műveleteknek. Így a lineáris leképezések közötti műveletekre bizonyítandó tulajdonságok érvényesek mátrixok közötti műveletekre is. A lineáris leképezéseket később tárgyaljuk. Többek között be fogjuk bizonyítani, hogy a szorzás asszociatív, mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve, de általában még a négyzetes mátrixok szorzása sem kommutatív, azaz a tényezők nem *felcserélhető*ek. Például

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

míg

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**7.1.4. Állítás.** *Ha $c$ a $\mathbb{K}$-beli elemű $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ és $b = (b_{i,j})_{i=1}^{\ell}{}_{j=1}^{m}$ mátrixok $ba$ szorzata, akkor $c' = a'b'$, ahol $a'$, $b'$ $c'$ az $a$, $b$, illetve $c$ transzponáltja.*

**Bizonyítás.** Mivel $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} b_{i,j} a_{j,k}$, kapjuk, hogy

$$c'_{k,i} = c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} b_{i,j} a_{j,k} = \sum_{j=1}^{m} a'_{k,j} b'_{j,i} \;\square.$$

**7.1.5. Nullmátrix, egységmátrix, inverz mátrix.** Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot $\mathbb{K}$-beli elemekkel *nullmátrix*nak nevezzük, ha minden eleme nulla. Ha adott $k \in \mathbb{N}$-re $i - j > k$ esetén $a_{i,j} = 0$, akkor *alsó $k$-sávmátrix*ról vagy *bal $k$-sávmátrix*ról beszélünk. Hasonlóan, ha adott $k \in \mathbb{N}$-re $j - i > k$ esetén $a_{i,j} = 0$, akkor *felső $k$-sávmátrix*ról vagy *jobb $k$-sávmátrix*ról beszélünk. A $k = 1$ esetben *alsó Hessenberg-mátrix*ról, illetve *felső Hessenberg-mátrix*ról, a $k = 0$ esetben pedig, ha a főátló feletti elemek mind nullák, *alsó trapéz mátrix*ról ($m \le n$ esetén *alsó háromszög mátrix*ról), illetve ha a főátló alatti elemek mind nullák, akkor *felső trapéz mátrix*ról ($m \ge n$ esetén *felső háromszög mátrix*ról) beszélünk. Ha még az is teljesül, hogy a főátlóban csupa egyes van, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *alsó trapéz egységmátrix*, *alsó háromszög egységmátrix*, *felső trapéz egységmátrix*, illetve *felső háromszög egységmátrix*. Ha a főátlón kívüli elemek mind nullák, akkor a mátrixot *átlós mátrix*nak vagy *diagonális mátrix*nak nevezzük. Ha a mátrix egyszerre 1-felső és 1-alsó sávmátrix, azaz csak a főátlóban, valamint közvetlenül felette és alatta lehetnek nem nulla elemek, akkor *tridiagonális mátrix*ról beszélünk. Ha csak a főátlóban és közvetlenül alatta lehetnek nem nulla elemek, azaz 0-felső 1-alsó sávmátrix esetén mátrix *alsó bidiagonális mátrix*ról, ha pedig csak a főátlóban és közvetlenül felette lehetnek nem nulla elemek, azaz 1-felső 0-alsó sávmátrix esetén mátrix *felső bidiagonális mátrix*ról beszélünk. Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrix *felső lépcsős mátrix*, ha léteznek olyan $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ indexek, hogy $a_{i,j_i} \neq 0$, de $1 \leq j \leq n$, $j_i \geq j < j_{i+1}$, $j_i < \ell \leq m$ esetén $a_{\ell,j} = 0$ (itt $j_0 = 0$ és $j_{k+1} = n + 1$ értendő).

A $\mathbb{K}$-beli elemű $\delta\colon (i,j) \mapsto \delta_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$ négyzetes mátrixot, ahol $\delta_{i,j} = 1$, ha $i = j$, és nulla egyébként, $n \times n$-es *egységmátrix*nak nevezzük. (Ez azt jelenti, hogy diagonális mátrix, és a főátlóban egyesek állnak). Az egységmátrix elnevezést az indokolja, hogy akár balról, akár jobbról szorozva egy mátrixot a megfelelő méretű egységmátrixszal, visszakapjuk az adott mátrixot. A $\mathbb{K}$-beli elemű $n \times n$-es $a = (a_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ mátrix *inverz*én egy olyan $\mathbb{K}$-beli elemű $n \times n$-es $b = (b_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot értünk, amelyre $ab$ az egységmátrix. Később megmutatjuk, hogy ilyenkor $ba$ is az egységmátrix és az inverz egyértelmű.

**7.1.6. Feladat [4].** Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix};$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(6)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

**7.1.7. Feladat [5].** Legyen

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mi lesz

(1) $a^2$ második sora;

(2) $ab$ első oszlopa;

(3) $ba$ harmadik sorának második eleme;

(4) $ba$ második sora.

**7.1.8. Feladat [4].** Legyenek $a$, $b$, $c$, $d$ és $e$ rendre $4 \times 5$, $5 \times 4$, $5 \times 2$, $4 \times 2$ és $4 \times 5$ típusú mátrixok. Értelmezve vannak-e az alábbi kifejezések, és mi az eredmény típusa: $ae$, $bd - c$, $abe + dc'$, $(b' + a)c + d$.

**7.1.9. Feladat [4].** Mi egy diagonális mátrix $n$-edik hatványa?

**7.1.10. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix},$$

ahol $F_n$ az $n$-edik Fibonacci-szám!

**7.1.11. Elemi sor- és oszlopműveletek.** Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$, és $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ egy $\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrix. *Elemi sorművelet*ek alatt két sor felcserélését, illetve egy sor tagonként vett $\gamma$-szorosának tagonkénti hozzáadását értjük egy másik sorhoz. *Elemi oszlopművelet*ek alatt két oszlop felcserélését, illetve egy oszlop tagonként vett $\gamma$-szorosának tagonkénti hozzáadását értjük egy másik oszlophoz.

**7.1.12. Gauss-féle kiküszöbölés.** Az $m$ egyenletből álló, $n$ ismeretlenes

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & +\cdots+ & a_{1,j}x_j & +\cdots+ & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & +\cdots+ & a_{i,j}x_j & +\cdots+ & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & +\cdots+ & a_{m,j}x_j & +\cdots+ & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

$(a_{i,j}, b_j, x_i \in \mathbb{K}$, ha $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots m)$ egyenletrendszer mátrixa a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mátrix. Az egyenletrendszer megoldása elemi sorműveletek sorozatával történik, amelyekkel a mátrixot felső lépcsős alakra hozzuk. Az eljárás neve *Gauss-féle kiküszöbölés*vagy *elimináció*. Az első fázis a következő: A nulladik lépésben a mátrixot bővítjük a jobb oldalon álló $b$-k oszlopmátrixával:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} & b_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

(Ez a lépés elhagyható, ha az egyenletrendszer *homogén*, azaz ha minden $b_i$ nulla; ekkor az utolsó oszlop az egész eljárás alatt úgyis csupa nulla marad.) Legyen $j_0 = 0$. A $k$-adik lépésben megkeressük az első $j_{k-1}$-nél nagyobb, de $n$-nél nem nagyobb indexű oszlopot, amelynek $k$-nál nem kisebb sorindexű elemei között van nem nulla elem. Ennek az oszlopnak az indexe lesz $j_k$. Ha nincs ilyen oszlop (ez a helyzet akkor is, ha $k > m$), akkor az első fázis véget ért, és a második fázisra térünk át.

Ha szükséges, egy nála nagyobb indexű sorral felcserélve a $k$-adik sort, nem nulla elemet viszünk a $j_k$-adik oszlop $k$-adik sorába, ez a nem nulla elem lesz a $k$-adik lépésben a *főelem*. Ezután minden $k$-nál nagyobb indexű sorhoz hozzáadjuk a $k$-adik sor alkalmas többszörösét úgy, hogy a $j_k$-adik oszlop minden $k$-nál nagyobb sorindexű eleme nulla legyen, majd a $k+1$-edik lépésre térünk át.

Világos, hogy az első fázis mindegyik lépése során az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, azaz olyan egyenletrendszert, amelynek ugyanazok a megoldásai, mint az eredetinek.

A második fázis során kiszámítjuk a megoldásokat: ha az első fázisból a $k+1$-edik lépésben léptünk ki, és az utolsó oszlopban a $k$-nál nagyobb indexű helyek valamelyikén nem nulla áll, akkor nyilván nincs megoldás. Egyébként van megoldás, a $j_1, j_2, \ldots, j_k$ indexű ismeretlenek kivételével a többi értékét tetszőlegesen választhatjuk, és minden ilyen választáshoz pontosan egy megoldás tartozik, amelyet visszafelé a $k$-adik, $k-1$-edik stb. sorok felhasználásával meghatározhatunk.

**7.1.13. Példák.** (1) Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 1x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 1 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= \tfrac{7}{12} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= \tfrac{13}{30} \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. Az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

mátrix, és ez a harmadik lépés és egyben az első fázis eredménye is. Innen $x_3 = 3$, $x_2 = 12(1/12 - 3/12) = -2$, $x_1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

(2) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. Sorcserével a második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

mátrix. Ez a harmadik lépés, és egyben az első fázis eredménye is. Az eredmény $x_3 = 1/2$, $x_2 = 2/3$ és $x_1 = 1 - 1/3 - 1/6 = 1/2$.

(3) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

mátrix, ami egyben az első fázis eredménye is, és nincs megoldás.

(4) Ha az

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

mátrixszal indulunk, akkor az első lépés után a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A második lépés eredménye a

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix, ami egyben az első fázis eredménye is, és az általános megoldás az, hogy $x_3$ tetszőleges, $x_2 = 1 - x_3$, $x_1 = 1 - x_3/3 - 1/2 + x_3/2 = 1/2 - x_3/6$.

**7.1.14. Módosított Gauss-féle kiküszöbölés.** A $k$-adik lépésben a főelem meghatározása után úgy is eljárhatunk, hogy a $k$-adik sort osztjuk a főelemmel (ez nyilván nem változtatja meg a megoldásokat), és ennek az új $k$-adik sornak a többszöröseit vonjuk le a $k$-nál nagyobb indexű sorokból. Ekkor a főelem helyére 1 kerül és a második fázisban elmaradnak az osztások.

**7.1.15. Mátrixinverzió Gauss-féle kiküszöböléssel.** Ha egy lineáris egyenletrendszert több különböző jobb oldallal kívánunk megoldani, akkor az összes jobb oldalt hozzáírhatjuk az eredeti mátrixhoz. Mivel egy $n \times n$-es mátrix inverzének meghatározása azt jelenti, hogy olyan négyzetes mátrixot keresünk, amelynek $j$-edik oszlopát mint oszlopmátrixot szorozva az adott mátrixszal, a $(\delta_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ egységmátrixot kapjuk, a mátrixinverzió megoldható Gauss-féle kiküszöböléssel: az eredeti mátrixhoz egy egységmátrixot kell hozzáírnunk.

**7.1.16. Gauss–Jordan-kiküszöbölés.** Célszerűnek tűnhet a Gauss-féle kiküszöbölésnél, illetve a módosított változatánál a $k$-adik lépésben nemcsak a $k$-nál nagyobb indexű sorokból, hanem a $k$-nál kisebb indexű sorokból is kivonni a $k$-adik sor alkalmas többszörösét. Ez a változat, a Gauss–Jordan-kiküszöbölés, nagyon leegyszerűsíti a második fázist. Például mátrixinverziónál a módosított változat esetén teljesen el is marad a második fázis, mert ha van inverz, akkor az eredménymátrix első fele egységmátrix lesz, így az inverz mátrix egyszerűen az eredménymátrix második fele. Hátránya, hogy a műveletigény megnő.

⋆ **7.1.17. A műveletigények összehasonlítása.** A műveletigényt csak a legfontosabb esetben számítjuk ki, amikor a kiindulási mátrix $n\times n$-es, $n$ lépést teszünk az első fázisban, így $j_k = k$ minden $k$-ra, sorcserékre pedig nincs szükség. Feltesszük, hogy $m$ különböző jobb oldallal akarjuk megoldani az egyenletrendszert. A számításhoz felhasználjuk a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

összefüggést, amely teljes indukcióval könnyen igazolható.

A Gauss-féle kiküszöbölésesetén a $k$-adik lépésben a $k$-adik oszlop minden elemének kiküszöböléséhez 1 osztásra és $n-k+m$ szorzásra és kivonásra van szükség, így összesen $n-k$ osztásra és $(n-k+m)(n-k)$ szorzásra és kivonásra van szükség a $k$-adik lépésben. Minden jobb oldal esetén az $x_k$ meghatározásánál $n-k$ szorzásra és kivonásra és egy osztásra van szükség. Így az $m$ jobb oldal miatt az összes $x_k$ meghatározására összesen $m$ osztás és $m(n-k)$ szorzás és kivonás szükséges. Az osztások teljes száma tehát

$$\sum_{k=1}^{n} m(n-k) = mn(n-1)/2.$$

A szorzások és kivonások teljes száma

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k)(n-k+2m) = n(n-1)(m+(2n-1)/6).$$

A módosított változatnál a $k$-adik lépésben $n-k+m$ osztásra és a $k$-adik oszlop minden elemének kiküszöböléséhez $n-k+m$ szorzásra és kivonásra van szükség, így összesen $n-k-m$ osztásra és $(n-k+m)(n-k)$ szorzásra és kivonásra van szükség a $k$-adik lépésben. Minden jobb oldal esetén az $x_k$ meghatározásánál $n-k$ szorzásra és kivonásra van szükség. Így az $m$ jobb oldal miatt az összes $x_k$ meghatározására összesen $m(n-k)$ szorzás és kivonás szükséges. A műveletigény tehát ugyanannyi.

Gauss–Jordan-kiküszöbölésesetén a $k$-adik lépésben összesen $n-1$ osztásra és $(n-k+m)(n-1)$ szorzásra és kivonásra van szükség. Az $x_k$ meghatározásához viszont minden jobb oldal esetén csak egy osztásra van szükség. Kedvezőbb a helyzet a módosított valtozatnál, ahol a szorzások és kivonások száma ugyanannyi, és ugyan a $k$-adik lépésben $n-k+m$ osztásra van szükség, az $x_k$ számolásánál viszont nincs szükség osztásra sem. Ez utóbbi esetben ugyanannyi osztásra van szükség, mint a Gauss-féle kiküszöbölésnél, viszont a szorzások és kivonások teljes száma

$$\sum_{k=1}^{n}(n-1)(n-k+m) = n(n-1)(m+(n-1)/2).$$

Ez egyenletrendszer megoldása, azaz $m=1$ esetén nagy $n$-re kb. 3/2-szerese, mátrixinverzió, azaz $m=n$ esetén nagy $n$-re kb. 9/8-szorosa a Gauss-féle kiküszöbölésműveletigényének.

⋆ **7.1.18. A háromszögmátrixok módszere.** A Gauss-féle kiküszöbölésúgy is végezhető, hogy oszlopcserével a főelemet a $k$-adik oszlopba hozzuk. (Az oszlopcseréket nyilván kell tartani.) Ekkor az eljárás eredménye egy felső háromszög mátrix lesz. Nyilván nem érdemes az eljárás során az információt nem hordozó nullákat visszaírni a mátrixba. (A módosított változatnál a főelem helyére sem írunk 1-et, hanem otthagyjuk a főelemet.) Az otthagyott elemek egy alsó háromszög mátrixot alkotnak. A $k$-adik lépésben otthagyott elemek teljesen meghatározzák az adott lépésben a $b$-ken végrehajtandó műveleteket. Így az elimináció két lépésre osztható: először csak az $a$ mátrixszal dolgozunk, előállítva a háromszög mátrixokat, majd egyenként foglalkozunk a jobb oldalakkal. A sorcseréket is nyilván kell tartani, mert a $b$-k között ugyanilyen cseréket kell végezni.

⋆ **7.1.19. Numerikus megjegyzések.** A Gauss-féle kiküszöbölésgépi megvalósításánál legtöbbször a háromszögmátrixok módszerével történik. Fizikailag nem cseréljük meg a sorokat, illetve az oszlopokat, csak a rájuk mutató pointereket. A főelemmel való osztások helyett célszerű a főelem reciprokát kiszámítani és ezzel szorozni, mivel a szorzás általában sokkal gyorsabb, mint az osztás. A főelem reciproka tárolható a főelem helyén, mivel a továbbiakban csak a reciprokra van szükség. Valós vagy komplex elemű mátrixszal dolgozva, a $k$-adik lépés során érdemes az adott oszlopból a legnagyobb abszolút értékű elemet választani főelemnek (*részleges főelem-kiválasztás*), mert általában ez a választás nagyobb numerikus pontosságot ad. Szintén javítja a pontosságot, ha az eljárás megkezdése előtt a sorokat végigszorozzuk egy alkalmas konstanssal úgy, hogy minden sorban a legnagyobb abszolút értékű elem nagyságrendje ugyanannyi legyen (*sorskálázás*). További pontosságnövekedés érhető el, ha a $k$-adik lépésben a $k$-nál nem kisebb sorindexű és $j_k$-nál nem kisebb oszlopindexű elemek közül sor- és oszlopcserével a maximális abszolút értékű elemet választjuk ki főelemnek, azaz sor- és oszlopcserével ezt hozzuk a $k$-adik sor $k$-adik oszlopába. Mivel ez a *teljes főelem-kiválasztás* több munkát igényel, általában megelégszünk a sorskálázással és a részleges főelem-kiválasztással.

A háromszögmátrixok módszerével dolgozva egy számolási hibákkal terhelt közelítő megoldás javítható: ha a megoldást és a jobb oldalt egy-egy $x$, illetve $b$ oszlopmátrix alakjában írjuk fel, akkor az egyenletrendszer $ax=b$ alakba írható. Egy $\tilde{x}$ közelítő megoldás segítségével — célszerűen megnövelt pontossággal — kiszámítjuk a $\tilde{b} = a\tilde{x}$ oszlopmátrixot. A megoldást pontosabbá tehetjük, ha meghatározzuk az $a(x - \tilde{x}) = b - \tilde{b}$ lineáris egyenletrendszer egy $\tilde{\tilde{x}}$ közelítő megoldását, mert $\tilde{x} + \tilde{\tilde{x}}$ jobb közelítése $x$-nek, mint $\tilde{x}$.

**7.1.20. Feladat [6].** Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} bx_1 - ax_2 &= -2ab \\ -2cx_2 + 3bx_3 &= bc \\ cx_1 + ax_3 &= 0, \quad abc \neq 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_3 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 + 2i \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 + 4i \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 7 + 6i \\ x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 11 + 8i; \end{aligned} \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + ix_2 - x_3 &= -i \\
ix_1 - x_2 - ix_3 &= 1 \\
-x_1 - ix_2 + x_3 &= i \\
-ix_1 + x_2 + ix_3 &= -1 \\
x_1 + ix_2 + x_3 &= i.
\end{aligned} \tag{8}
$$

**7.1.21. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

(1) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix};$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

(3) $$\begin{pmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \\ 9 & 10 & 14 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.1.22. Vektortér.** Legyen $K$ egy test. A $V$ halmazt $K$ feletti *vektortér*nek vagy *lineáris tér*nek nevezzük, a $V$ elemeit *vektor*oknak, $K$ elemeit pedig *skalár*oknak, ha $V$-n értelmezve van egy összeadás, amellyel Abel-csoport, valamint egy $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ leképezése $K \times V$-nek $V$-be, amelyet *skalárral való szorzás*nak nevezünk, úgy, hogy

(S1) minden $\alpha, \beta \in K$-ra és $x \in V$-re $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (a skalárral való szorzás *disztributív* a skalárösszeadásra nézve);

(S2) minden $\alpha \in K$-ra és $x, y \in V$-re $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (a skalárral való szorzás *disztributív* a vektorösszeadásra nézve);

(S3) minden $\alpha, \beta \in K$-ra és $x \in V$-re $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (*asszociativitás*);

(S4) minden $x \in V$-re $1x = x$.

Ugyanúgy, mint a testeknél, kapjuk, hogy az összeadásoknál és a szorzásoknál felesleges kitenni a zárójelet és a sorrend sem számít (néha a skalárral való szorzásnál a skalárt a jobb oldalra írjuk), a 0 vektor és az $x$ vektor $-x$ additív inverze (az $x$ *ellentett*je) egyértelműen meghatározott. Innen a 0 vektort bármely $\alpha$ skalárral szorozva a 0 vektort kapjuk, mert $\alpha 0 = \alpha(0 + 0) = \alpha 0 + \alpha 0$. Hasonlóan, bármely $x$ vektort a nulla skalárral szorozva, a nulla vektort kapjuk, mert $0x = (0+0)x = 0x+0x$. Az $x$ vektor $-x$ ellentettje $(-1)x$, mert $0 = (1 - 1)x = x + (-1)x$.

Megjegyezzük, hogy a vektorokat szokás jelölésben megkülönböztetni a skalároktól, például $x$ helyett $\mathbf{x}$-et, $\vec{x}$-et, $\underline{x}$-et írni. Mi nem fogjuk használni ezen jelöléseket. Ennek hátránya, hogy a nullvektor és a nulla skalár jelölése is 0, de ez a gyakorlatban nem okoz problémát.

Számunkra legfontosabbak az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti, azaz a $\mathbb{K}$ feletti vektorterek.

**7.1.23. Példák.** Egyenes, sík és tér kötött és szabad vektorai, erők, elmozdulások, sebességek, gyorsulások stb. vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. A $\mathbb{K}$ test vektortér saját maga felett. A szám $n$-esek $\mathbb{K}^n$ tere a koordinátánként történő összeadással és skalárral történő szorzással vektortér $\mathbb{K}$ felett. A $\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrixok a mátrixok összeadásával és skalárral történő szorzásával vektorteret alkotnak $\mathbb{K}$ felett. Általánosabban, bármely $X$ halmazra az $X$-en értelmezett $\mathbb{K}$-beli értékű függvények vektorteret alkotnak $\mathbb{K}$ felett. Hasonlóan bármely $K$ testre és $X$ halmazra az $X$-et $K$-ba képező függvények vektorteret alkotnak $K$ felett.

**7.1.24. Altér.** Egy $\mathbb{K}$ feletti $V$ vektortér egy $U$ részhalmazát *altér*nek nevezzük, ha maga is vektortér ugyanazzal az összeadással és skalárral való szorzással. Ehhez nyilván csak az kell, hogy az összeadás és a skalárral való szorzás ne vezessen ki $U$-ból, vagy másként, hogy $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in U$ esetén $\alpha x + \beta y \in U$ teljesüljön. Nyilván $V$ maga egy altér; a $V$-től különböző altereket *valódi alter*eknek nevezzük. Nyilván $\{0\}$ is mindig altér; $V$ és $\{0\}$ a *triviális alter*ek.

Alterek bármely családjának a metszete is altér. Egy $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer (speciálisan egy $X \subset V$ részhalmaz) által *generált altér*en (vagy a vektorrendszer *lineáris burkán*) az összes, az $x_i$, $i \in I$ vektorokat tartalmazó alterek metszetét értjük.

**7.1.25. Példák.** Alterek: síkban és a térben az origón átmenő egyenesek és síkok; $\mathbb{C}$-ben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben $\mathbb{R}$ és $i\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-ben a korlátos sorozatok, a konvergens sorozatok, a nullsorozatok, azok a sorozatok, amelyeknek csak véges sok tagja nem nulla; $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$-ben a folytonos függvények, differenciálható függvények, egy adott pontban eltűnő függvények, a minden kompakt intervallumon integrálható függvények, a polinomok, az adott $k \in \mathbb{N}$-nél alacsonyabb fokú polinomok; $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$-ben az $n$-változós polinomok, az adott $k \in \mathbb{N}$-nél alacsonyabb fokú $n$-változós polinomok.

**7.1.26. Lineáris kombináció.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x \in V$ vektor az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorok *lineáris kombináció*ja, ha léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ skalárok, hogy $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. Megjegyezzük, hogy az üres összegen szokás szerint a nullát értjük, így a 0 vektor már az üres elemrendszernek is lineáris kombinációja.

Az $n$ szerinti teljes indukcióval adódik, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorok mind egy $U$ altérben vannak, akkor bármely lineáris kombinációjuk is $U$-ban van.

Egy vektorrendszerből bármely olyan vektort elhagyva, amely a többiek lineáris kombinációja, a generált altér nem változik, hiszen minden altér, amely tartalmazza a maradék vektorrendszert, tartalmazza az elhagyott vektort is.

**7.1.27. Megjegyzés.** A $\mathbb{K}^m$ térben Gauss-féle kiküszöböléssel könnyen eldönthető, hogy egy $x$ vektor lineáris kombinációja-e az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektoroknak. Ez ugyanis azt jelenti, hogy annak a lineáris egyenletrendszernek, amely mátrixának $j$-edik oszlopa $x_j$, a jobb oldalán pedig $x$ áll, van egy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ megoldása. Így a kombináló együtthatókat is megkapjuk.

**7.1.28. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett és $x_i$, $i \in I$ egy vektorrendszer. Az $x_i$, $i \in I$ által generált altér az $x_i$ elemek összes lineáris kombinációinak halmaza.*

**Bizonyítás.** Az $x_i$ elemek bármely lineáris kombinációja benne van az $x_i$-k által generált altérben. Másrészt az $x_i$-k két lineáris kombinációjának az összege, és az $x_i$-k egy lineáris kombinációjának a skalárszorosa is az $x_i$-k egy lineáris kombinációja, így az $x_i$-k lineáris kombinációi alteret alkotnak. □

⋆ **7.1.29. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett és*

$$U_1, U_2, \ldots, U_m$$

*alterei $V$-nek. Az $U_i$ alterek egyesítése által generált altér az alterek* összege*:*

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_m := \{u_1 + u_2 + \cdots + u_m : u_i \in U_i,\ ha\ i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

**Bizonyítás.** Az előző tétel szerint az alterek összege benne van a generált altérben. Másrészt, a generált altér minden $u$ eleme az $U_i$ alterek egyesítéséből vett elemek lineáris kombinációja. Adjuk össze a lineáris kombináció azon tagjait, amelyek vektorai $U_1$-beliek, és legyen ezek összege $u_1$. (Lehet, hogy nincs ilyen tag, ekkor az összeg nulla.) Most adjuk össze azokat a tagokat, amelyek vektorai $U_2$-beliek és eddig még nem használtuk fel őket, és legyen ezek összege $u_2$. Hasonlóan folytatva, a kapott $u_i \in U_i$ vektorok összege $u$. □

**7.1.30. Generátorrendszer, dimenzió.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer a $V$ *generátorrendszer*e, ha az $x_i$, $i \in I$ által generált altér $V$. Ez azzal ekvivalens, hogy az $x_i$, $i \in I$ vektorok lineáris kombinációjaként $V$ minden vektora előáll. Ha $V$-nek van véges generátorrendszere, akkor azt a legkisebb $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre van $n$ elemű generátorrendszere, a $V$ *dimenzió*jának nevezzük és $\dim(V)$-vel jelöljük; ha nincs véges generátorrendszer, akkor azt mondjuk, hogy $V$ *végtelen dimenziós* és azt írjuk, hogy $\dim(V) = \infty$.

Főleg véges dimenziós terekkel fogunk foglalkozni.

**7.1.31. Lineáris függetlenség és függőség.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer *lineárisan függő*, ha vannak a vektorrendszernek olyan vektorai, amelyeknek nem csupa nulla együtthatókkal vett lineáris kombinációjaként előáll a nulla vektor. Ha a vektorrendszer nem lineárisan függő, akkor *lineárisan független*nek nevezzük.

Ha például a vektorrendszer egy $x_1$ vektora nulla, akkor a vektorrendszer lineárisan függő, mert $1x_1 = 0$. Ha a vektorrendszer két vektora megegyezik, mondjuk $x_1 = x_2$, akkor is függő a vektorrendszer, mert $1x_1 + (-1)x_2 = 0$. Ha a vektorrendszer valamely vektora más vektorainak lineáris kombinációja, mondjuk $x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1}$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő, mert $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1} + (-1)x_k = 0$. Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor nyilván minden, őt részrendszerként tartalmazó vektorrendszer is lineárisan függő. Másrészt, a definíció szerint, ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor van olyan véges részrendszere, amely lineárisan függő. Ennek megfelelően egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden véges részrendszere lineárisan független. Elég tehát véges vektorrendszerek lineáris függőségével foglalkozni.

**7.1.32. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha valamely $x_k$, $1 \le k \le n$ vektor az $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ vektorok lineáris kombinációja.*

Emlékeztetünk rá, hogy a nulla vektor már az üres rendszernek is lineáris kombinációja; a $k = 1$ esetben ezen múlik az állítás.

**Bizonyítás.** Az egyik irányt már láttuk. Ha valamely $x_j$ vektorokból nem csupa nulla együtthatókkal előáll a nulla vektor, akkor a többi vektorok együtthatóit nullának választva, vannak olyan nem csupa nulla együtthatók, hogy $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$. Legyen $k$ a legkisebb olyan index, amelyre ez teljesül. Biztos, hogy $\alpha_k \neq 0$, ellenkező esetben $k$ nem lenne minimális. Így

$$x_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} x_1 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_k} x_2 + \cdots + \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1}. \ \square$$

**7.1.33. Bázis.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Azt mondjuk, hogy az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer a $V$ *bázis*a, vagy *koordináta-rendszer*e, ha lineáris független generátorrendszere $V$-nek. A koordináta-rendszer elnevezést 7.1.47 magyarázza.

Például legyen a $\mathbb{K}^n$ térben az $j$-edik *egységvektor* az a szám $n$-es, amelyben a $j$-edik szám 1, az összes többi 0, azaz legyen $e_j = (\delta_{i,j})_{i=1}^n$. Az $e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ vektorok bázis alkotnak: A $\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ lineáris kombináció $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Innen egyrészt látjuk, hogy $\mathbb{K}^n$ minden eleme előáll lineáris kombinációként, tehát az $e_j$ vektorok generátorrendszert alkotnak. Másrészt ez a lineáris kombináió csak akkor lehet nulla, ha minden $\alpha_j$ nulla, így az $e_j$ vektorok lineárisan függetlenek. Az $e_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ bázis $\mathbb{K}^n$ *szokásos bázis*a.

**7.1.34. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \ldots x_m \in V$ egy lineárisan független vektorrendszer, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in V$ pedig egy generátorrendszer. Ekkor $m \leq n$ és léteznek olyan $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ indexek, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_k}$ bázis.*

**Bizonyítás.** Tegyük az $x_m$-et az $y_j$ vektorok elé:

$$x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Mivel $y_1, y_2, \ldots, y_n$ generátorrendszer, az $x_m$ az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vektorok lineáris kombinációja, ezért ez a rendszer nem lineárisan független. Így valamely vektora az előtte állók lineáris kombinációja. Ez nem lehet az $x_m$, mert az ellentmondana az $x$-ek lineáris függetlenségének. Hagyjuk el ezt az $y$ vektort. A kapott rendszer generátorrendszer marad. Most a kapott rendszer elé írva $x_{m-1}$-et, a kapott rendszer újra lineárisan függő, de az első olyan vektor, amely lineárisan kombinálható az előtte állókból, az $y$-ok közül kell kikerüljön; ezt hagyjuk el. Indukcióval végül egy olyan generátorrendszert kapunk, amely az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ vektorokkal kezdődik, és esetleg még néhány $y$-ból áll. Mivel minden lépésben egy $x$ vektort vettünk a rendszerhez, és egy $y$-t hagytunk el, következik, hogy $m \leq n$.

Ha a kapott vektorrendszer lineárisan függő, folytassuk az eljárást az első olyan vektor elhagyásával, amely lineárisan kombinálható az előzőekből. Ez továbbra is csak az $y$-ok közül kerülhet ki. Végül, amikor már egyik vektor sem kombinálható az előzőekből, olyan generátorrendszert kapunk, amely lineárisan független, tehát bázis. $\square$

**7.1.35. Következmény.** *Véges dimenziós vektortérnek van bázisa.*

**Bizonyítás.** Legyen $m = 0$ és $y_1, \ldots, y_n$ egy generátorrendszer, és alkalmazzuk a tételt. $\square$

**7.1.36. Következmény.** *Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa vektorainak száma megegyezik.*

**Bizonyítás.** Ha $x_1, \ldots, x_m$ és $y_1, \ldots, y_n$ is bázisok, akkor $n \leq m$ és $m \leq n$ és így $n = m$. □

**7.1.37. Következmény.** *Véges dimenziós vektortérben bármely minimális elemszámú generátorrendszer bázis.*

**Bizonyítás.** Egy minimális elemszámú generátorrendszer nem lehet lineárisan függő, mert akkor valamelyik vektora kombinálható lenne az előtte állókból, és azt elhagyva, egy kisebb elemszámú generátorrendszert kapnánk. □

**7.1.38. Következmény.** *Véges dimenziós vektortér bázisa annyi vektort tartalmaz, amennyi a tér dimenziója.*

**Bizonyítás.** Az előző következményből adódik. □

**7.1.39. Következmény.** *Egy $n$ dimenziós térben bármely $n+1$ vektor lineárisan függő.*

**Bizonyítás.** Egyébként egy generátorrendszer tagjaival kiegészíthetnénk egy legalább $n + 1$ tagú bázissá. □

**7.1.40. Következmény.** *Egy $n$ dimenziós térben egy $n$ vektorból álló rendszer pontosan akkor bázis, ha lineárisan független.*

**Bizonyítás.** Utána írva bármely vektort az előző következmény szerint az kombinálható az előtte állókból. □

**7.1.41. Következmény.** *Egy $n$ dimenziós térben egy $n$ vektorból álló rendszer pontosan akkor bázis, ha generátorrendszer.*

**Bizonyítás.** Ha generátorrendszer, de nem lenne lineárisan független, akkor valamelyik kombinálható lenne az előtte állókból. Ezt elhagyva, $n$-nél kevesebb vektorból álló generátorrendszert kapnánk, de akkor a tér dimenziója nem lehetne $n$. □

**7.1.42. Rang.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_i \in V$, $i \in I$ vektorrendszer *rang*ja a vektorrendszer által generált altér dimenziója. Egy véges vektorrendszer rangja nyilván véges. Egy $\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrix *oszloprang*ja a mátrix oszlopai, mint $\mathbb{K}^m$ vektorai által alkotott vektorrendszer rangja; a mátrix *sorrang*ja a vektor sorai, mint $\mathbb{K}^n$ vektorai által alkotott vektorrendszer rangja. A mátrix sorrangja nyilván a transzponált mátrix oszloprangja, oszloprangja pedig a transzponált mátrix sorrangja. Később, az 7.2.76 tételben meg fogjuk mutatni, hogy a sorrang és az oszloprang megegyezik.

**7.1.43. Megjegyzés.** Egy $\mathbb{K}$-beli elemű mátrix oszloprangját könnyen meghatározhatjuk Gauss-féle kiküszöböléssel. A 7.1.27 megjegyzés szerint, ha az eljárást a mátrixra alkalmazva a $k$-adik lépésben a $j_k$-adik oszlopot választjuk, akkor az eredeti mátrix $j_{k-1} < j < j_k$ indexű oszlopai a $j_1, \ldots, j_{k-1}$ indexű oszlopok lineáris kombinációi, a $j_k$ indexű oszlop viszont nem. Így ha az eljárás első fázisa a $k+1$-edik lépésben fejeződik be, akkor az eredeti mátrix minden oszlopa a $j_1, \ldots, j_k$ indexű oszlopok lineáris kombinációja, ezek viszont lineárisan függetlenek.

**7.1.44. Tétel.** *Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $U$ egy altere $V$-nek, és tegyük fel, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ lineárisan független vektorrendszer $U$-ban. Ekkor léteznek olyan $x_{k+1}, \ldots, x_n$ vektorok és $k \leq m \leq n$, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_m$ bázisa $U$-nak, míg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bázisa $V$-nek.*

**Bizonyítás.** Az $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektorrendszer által generált altér része $U$-nak. Indukcióval, $j = k$-val kezdve, ha az $x_1, x_2, \dots, x_j$ vektorrendszer által generált altér része $U$-nak, de nem egyenlő $U$-val, válasszuk $x_{j+1}$-et tetszőleges olyan vektornak, amely nincs benne a generált altérben, de eleme $U$-nak. Valamely $j \le n$-re a generált altér meg kell egyezzen $U$-val, mert egyébként $n$-nél több lineárisan független vektort találnánk $V$-ben. Ez a $j$ lesz $m$. Innen kezdve, ha a generált altér nem egyezik meg $V$-vel, válasszuk $x_{j+1}$-et tetszőleges olyan $V$-beli vektornak, amely nincs benne a generált altérben. Ha $j = n$, akkor a generált altér meg kell egyezzen $V$-vel, mert egyébként $n$-nél több lineárisan független vektort találnánk $V$-ben. □

**7.1.45. Következmény.** *Az $U$ is véges dimenziós, és dimenziója legfeljebb $n$.* □

**7.1.46. Tétel.** *Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \dots x_n \in V$ egy vektorrendszer. A vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha minden $x \in V$ vektor egyértelműen állítható elő $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$ alakban.*

**Bizonyítás.** Ha minden $x \in V$ előáll ilyen alakban, akkor $x_1, x_2, \dots x_n$ generátorrendszer. Ha nem lenne lineárisan független, akkor nem csupa nulla együtthatókkal $\eta_1 x_1 + \cdots + \eta_n x_n = 0$ teljesülne, ahonnan azt kapnánk, hogy

$$(\xi_1 + \eta_1)x_1 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)x_n = x,$$

azaz az előállítás nem lenne egyértelmű.

Megfordítva, ha $x_1, \dots x_n$ bázis, akkor minden $x \in V$ előáll $x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n$ alakban. Ha az előállítás nem lenne egyértelmű, mondjuk $x = \eta_1 x_1 + \cdots + \eta_n x_n$ is teljesülne, akkor a két előállítást kivonva egymásból, azt kapnánk, hogy

$$(\xi_1 - \eta_1)x_1 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)x_n = 0,$$

ahol nem minden együttható nulla, így $x_1, \dots x_n$ nem lenne lineárisan független. □

**7.1.47. Koordináták.** Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett,

$$e_1, e_2, \dots e_n \in V$$

pedig egy bázis. Az előző tétel szerint bármely $x \in V$-hez egyértelműen létező

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$$

számokat, amelyekkel $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$, az $x$ vektor $e_1, e_2, \dots e_n$ *bázisra vonatkozó koordinátái*nak nevezzük.

**7.1.48. Izomorfia.** Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Egy kölcsönösen egyértelmű $\varphi\colon U \to V$ leképezését $U$-nak $V$-re *izomorfizmus*nak nevezzük, ha $\varphi$ megőrzi a műveleteket, azaz bármely $x, y \in U$ és $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ és $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$. A két tulajdonság nyilván ekvivalens azzal, hogy bármely $x, y \in U$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Egy izomorfizmus inverze is nyilván izomorfizmus. Ha $U$ és $V$ között létezik izomorfizmus, akkor azt mondjuk, hogy $U$ és $V$ *izomorf*ak. Adott test feletti vektorterek izomorfiája nyilván reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Egy nyilvánvaló példa izomorfiára: a $\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrixok a $\mathbb{K}^{mn}$ térrel izomorf teret alkotnak.

Mivel izomorfizmus nyilván megőrzi a lineáris kombinációkat, azaz egy lineáris kombináció képe a vektorok képeinek ugyanazon együtthatókkal vett lineáris kombinációja, a lineáris kombinációk segítségével definiált fogalmak és tulajdonságok (altér, generátorrendszer, dimenzió, lineáris függetlenség, bázis stb.) izomorfizmusnál megőrződnek, például egy véges dimenziós térrel izomorf tér is véges dimenziós, és ugyanannyi a dimenziója. Megmutatjuk, hogy megfordítva, ha két véges dimenziós tér dimenziója megegyezik, akkor izomorfak. Ehhez elég bebizonyítani, hogy ha $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor izomorf $\mathbb{K}^n$-nel. Ennek alapján elég lenne véges dimenziós terek helyett csak a $\mathbb{K}^n$ terekkel foglalkozni. Ez azonban sok szempontból nem célszerű.

**7.1.49. Tétel.** *Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor $V$ izomorf $\mathbb{K}^n$-nel. Pontosabban, ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egy tetszőleges bázis $V$-ben, és $\varphi$ az a leképezés, amely $V$ egy $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ eleméhez $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$-et rendeli, akkor $\varphi$ izomorfizmus, amely az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázist $\mathbb{K}^n$ szokásos bázisába viszi.*

A tétel jelentősége, hogy ha valamely $V$-beli bázisra nézve ismerjük egy $x_i$, $i \in I$ vektorrendszer vektorainak koordinátáit, akkor minden, a vektorrendszerre vonatkozó lineáris algebrai problémát $\mathbb{K}^n$-beli vektorokra vonatkozó problémára vezethetünk vissza.

**Bizonyítás.** Nyilván $\varphi$ a $V$-t $\mathbb{K}^n$-re képezi, kölcsönösen egyértelmű és művelettartó. $\square$

⋆ **7.1.50. Vektorterek direkt összege.** Legyenek

$$V_1, V_2, \ldots, V_m$$

vektorterek $\mathbb{K}$ felett. A vektorterek *direkt összeg*e (vagy *külső direkt összeg*e) a rendezett $m$-esek

$$V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m := \{(v_1, v_2, \ldots, v_m) : v_i \in V_i, \text{ ha } i = 1, 2, \ldots, m\}$$

halmaza, amelyen a műveleteket koordinátánként értelmezzük: ha

$$v, v' \in V, \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_m), \quad v' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_m)$$

és $\alpha \in K$, akkor legyen

$$v + v' := (v_1 + v'_1, v_2 + v'_2, \ldots, v_m + v'_m),$$

és

$$\alpha v := (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_m).$$

Könnyű látni, hogy így értelmezve a műveleteket $V$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett.

⋆ **7.1.51. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha adott $V_i$ egy $e_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$ bázisa, akkor*

$$(0, \ldots, 0, e_{i,j}, 0, \ldots, 0), \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n_i$$

*a $V$ egy bázisa.*

**Bizonyítás.** Az $e_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n_i$ vektorrendszer $\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$ lineáris kombinációjaként egyértelműen állítható elő minden $v_i \in V_i$ vektor. Az

$$e'_{i,j} = (0, \ldots, 0, e_{i,j}, 0, \ldots, 0)$$

jelöléssel

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_{i,j} e'_{i,j},$$

és az előállítás triviálisan egyértelmű, mert koordinátánként az. □

⋆ **7.1.52. Következmény.** *Véges dimenziós vektorterek direkt összege is véges dimenziós, és dimenziója a tagok dimenzióinak összege.* □

⋆ **7.1.53. Példa.** A $\mathbb{K}^m$ és $\mathbb{K}^n$ terek direkt összege $m + n$ dimenziós. A $\mathbb{K}^n$ tér $n$ darab egydimenziós tér direkt összege. □

**7.1.54. Feladat [5].** Minden halmazról döntsük el, hogy altér-e:

(1) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon \deg(p) = 100 \text{ vagy } \deg(p) = -\infty\}$;
(2) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon \deg(p) \leq 100\}$;
(3) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon \deg(p) \geq 100 \text{ vagy } \deg(p) = -\infty\}$;
(4) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon x^3 + 1$ maradék nélkül osztja $p$-t$\}$;
(5) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon x^3 + 1$-gyel osztva a maradék konstans$\}$;
(6) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p(5) = 0\}$;
(7) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p(5) = 1\}$;
(8) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon$ az együtthatók összege $0\}$;
(9) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p_0 + p_2 = 0\}$;
(10) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p_0$ plusz a főegyüttható $0\}$;
(11) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p$-nek van valós gyöke$\}$;
(12) $\{p \in \mathbb{K}[x] \colon p$ minden együtthatója racionális$\}$.

**7.1.55. Feladat [5].** Minden adott részhalmazáról $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$-nek döntsük el, hogy altér-e:

(1) $\{a \colon a_0 = 2a_3 + a_5\}$;
(2) $\{a \colon a_0 = 2a_3 a_5\}$;
(3) $\{a \colon a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 1, 2, \ldots\}$;
(4) $\{a \colon a$ korlátos$\}$;
(5) $\{a \colon a$ korvergens$\}$;
(6) $\{a \colon \lim_{n\to\infty} a_n = 999\}$;
(7) $\{a \colon a$ monoton növő$\}$;
(8) $\{a \colon a$ monoton$\}$;
(9) $\{a \colon a_n = 0$ végtelen sok $n$-re$\}$;
(10) $\{a \colon a_n = 0$ véges sok $n$ kivételével$\}$;
(11) $\{a \colon a_n = 0$ legfeljebb 100 $n$ kivételével$\}$;

(12) $\{a\colon a_n = 0$ legfeljebb az első 100 $n$ kivételével$\}$;

(13) $\{a\colon a$ számtani sorozat$\}$;

(14) $\{a\colon a$ mértani sorozat$\}$;

(15) $\{a\colon a$ periodikus sorozat$\}$.

**7.1.56. Feladat [5].** Minden adott részhalmazáról $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$-nek döntsük el, hogy altér-e:

(1) a folytonos függvények;

(2) a legfeljebb véges sok pontban szakadó függvények;

(3) a legfeljebb 5 pontban szakadó függvények;

(4) amelyeknek van zérushelye;

(5) amelyeknek legfeljebb véges sok zérushelye van;

(6) a páros függvények;

(7) a páratlan függvények;

(8) a polinomfüggvények;

(9) a periodikus függvények;

(10) a felülről korlátos függvények;

(11) $\{f\colon f(5) \geq 0\}$;

(12) $\{f\colon f(5) = f(8)\}$;

(13) $\{f\colon$ van olyan $a \neq b$, hogy $f(a) = f(b)\}$;

(14) $\{f\colon f(\pi)$ egész szám$\}$.

**7.1.57. Feladat [5].** Az „altér-e” típusú feladatoknál az alterekről döntsük el, hogy véges dimenziós-e? Ha igen, adjunk meg egy bázisát!

**7.1.58. Feladat [5].** Az „altér-e” típusú feladatoknál talált alterek között keressünk egy olyat, amelynek van megszámláltató végtelen bázisa, és adjunk meg egy bázisát!

**7.1.59. Feladat [5].** Döntsük el az alábbi $\mathbb{R}^4$-beli vektorokról, hogy lineárisan függőek-e? Ha igen, fejezzük ki valamelyiket az előtte állók lineáris kombinációjaként!

(1) $(1,2,3,4)$, $(-2,5,0,1)$, $(-1,4,1,2)$;

(2) $(1,2,3,4)$, $(-2,5,1,1)$, $(-1,4,1,2)$;

(3) $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$;

(4) $(1,1,1,0)$, $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$;

(5) $(1,1,1,0)$, $(0,1,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(1,0,1,1)$, $(0,1,0,0)$.

**7.1.60. Feladat [5].** Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

**7.1.61. Feladat [5].** Döntsük el, hogy a megadott polinom benne van-e a megadott polinomhalmaz által generált altérben:

(1) $x^3+7x^2+5x$, $\{x^3+2x, 3x^3+4x, 5x^2+6x\}$;

(2) $x^3+7x^2+5$, $\{x^3+2x, 3x^3+4x, 5x^2+6x\}$;

(3) $x-1$, $\{x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2-3x+1\}$;

(4) $x+1$, $\{x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2-3x+1\}$;

(5) $x+1$, $\{x^3-x, x^3-x^2, x^3-1, 2x^2+3x+1\}$.

**7.1.62. Affin sokaságok.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorok egy *affin kombináció*ján egy olyan $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$ lineáris kombinációt értünk, amelyre az együtthatók összege egy, azaz $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$. A $V$ egy *affin sokaság*án egy olyan $\emptyset \neq A \subset V$ részhalmazt értünk, amelyből nem vezet ki az affin kombinációk képzése, azaz elemeinek bármely affin kombinációját tartalmazza. Nyilván $V$ egyelemű részhalmazai, azaz pontjai affin sokaságok, és maga $V$ is affin sokaság, ezek a *triviális affin sokaság*ok. A következő tétel leírja az affin sokaságok szerkezetét.

**7.1.63. Tétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett és $A \subset V$ egy affin sokaság. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $U$ altere $V$-nek, amellyel $A = U + x$, ahol $x$ az $A$ tetszőleges elemének választható. Megfordítva, ha $U$ egy altere $V$-nek, akkor bármely $x \in V$-re $A = U + x$ egy, az $x$-et tartalmazó affin sokaság.*

**Bizonyítás.** A megfordítás nyilvánvaló: mivel $0 \in U$, az $A$ tartalmazza $x$-et, és ha $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$, $x_j=u_j+x$, ahol $u_j \in U$, ha $j=1,2,\ldots,n$, akkor

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n = (\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n)+x \in U+x.$$

Az első állításhoz vegyük észre, hogy $U = A - x$ csak akkor lehet altér, ha $x \in A$, mert egyébként nem tartalmazza a nullvektort. Ha $u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor $x \in A$, $u+x, v+x \in A$, így $\alpha(u+x)+\beta(v+x)+(1-\alpha-\beta)x \in A$, tehát $\alpha u+\beta v \in U$, vagyis $U$ altér. Ha $x, y \in A$ és $u = z - x \in A - x$, akkor $w = 1 \cdot z + (-1) \cdot x + 1 \cdot y \in A$, így $u = w - y \in A - y$, azaz $A - x \subset A - y$. Az $x$ és $y$ szerepét megcserélve kapjuk, hogy $A - x = A - y$. □

**7.1.64. Következmény.** *Egy affin sokaság pontosan akkor altér, ha tartalmazza a 0 vektort.* □

**7.1.65. Következmény.** *Ha $V$ véges dimenziós, akkor választva $U$-ban egy*

$$e_1, e_2, \ldots, e_m$$

*bázist és egy tetszőleges $x \in A$ vektort, az $A$ minden $y$ eleme egyértelműen állítható elő*

$$y = x + \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \cdots + \alpha_me_m$$

*alakban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.* □

**7.1.66. Affin sokaság dimenziója.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ha a $V$ két affin sokaságához az előző tétel szerint tartozó alterek megegyeznek, akkor a két affin sokaságot *párhuzamos*nak nevezzük. A $V$ egy affin sokaságának *dimenzió*ján az előző tétel szerint hozzá egyértelműen tartozó altér dimenzióját értjük. A nulldimenziós affin sokaságokat *pont*oknak, az egydimenziósokat *egyenes*eknek, a kétdimenziósokat *sík*oknak nevezzük. Ha $V$ véges dimenziós, $\dim(V) = n$, akkor a $V$ tér $n-1$ dimenziós affin sokaságait *hipersík*oknak nevezzük.

**7.1.67. Feladat [3].** Mik a 0, 1, 2 és 3 dimenziós affin sokaságok a síkvektorok illetve a térvektorok terében?

**7.1.68. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy párhuzamos affin sokaságok vagy diszjunktak, vagy egybeesnek!

**7.1.69. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér egy nem üres $A$ részhalmaza pontosan akkor affin sokaság, ha $a, b, c \in A$, $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $a + \lambda(b - c) \in A$.

**7.1.70. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy affin sokaságok metszete, ha nem üres, akkor affin sokaság!

**7.1.71. Feladat [5].** Az „altér-e” típusú feladatoknál a megadott halmazok némelyike nem altér, de affin sokaság. Keressük meg ezeket!

⋆ **7.1.72. A lineáris programozás alapfeladata.** Lineáris algebrai ismereteinket felhasználhatjuk optimalizálási feladatok megoldására: lineáris célfüggvény maximumának megkeresésére $\mathbb{R}^n$ véges sok lineáris feltétellel megadott részhalmazán, egy *konvex poliéder*en. Az alapfeladat a következő: maximalizálandó a $d + \sum_{j \in C} c_j x_j$, $x_j \in \mathbb{R}$ célfüggvény, ahol $C$ egy véges indexhalmaz, a

$$\sum_{j \in C} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad (i \in B), \qquad x_j \geq 0 \quad (j \in C)$$

feltételek mellett, ahol $B$ is egy véges indexhalmaz, és az $a_{i,j}, b_i, c_j, d$ konstansok mind valósak. Nyilvánvaló, hogy a maximumok helye nem függ $d$-től, csak az értéke. Az alapfeladatot tömören az $ax \leq b$, $x \geq 0$, $d + c'x \to$ max alakba is írhatjuk, ahol az egyenlőtlenségek koordinátánként értendők; $a$ matrix, $x$ és $c$ oszlopmátrixok, $c'$ a $c$ transzponáltja. Geometriailag az egyenlőtlenség-rendszer által megadott halmaz egy zárt, konvex poliéder, azaz véges sok zárt féltér metszete.

⋆ **7.1.73. Feladat [7].** Az előző pont jelöléseivel adjunk példát a kétdimenziós esetben (azaz amikor $C$ kételemű) arra, hogy

(1) az egyenlőtlenség-rendszernek egyáltalán nincs megoldása;

(2) az origó nem megoldása az egyenlőtlenség-rendszernek, de van megoldása;

(3) pontosan egy maximumhely van;

(4) végtelen sok maximumhely van;

(5) az egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmaza nem korlátos, mégis pontosan egy maximumhely van;

(6) az egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmaza nem korlátos, mégis végtelen sok maximumhely van;

(7) a célfüggvény nem korlátos.

⋆ **7.1.74. Lineáris programozási feladatok visszavezetése az alapfeladatra.** Az alapfeladat jelöléseivel, ha minimalizálni kell, vegyük a célfüggvény ellentettjét. Ha valamelyik egyenlőtlenség $\geq$ alakú, vegyük mindkét oldal ellentettjét. Ha egy feltétel egyenlőség, írjunk helyette egy $\leq$ és egy $\geq$ feltételt. Ha az $x_j$ változóra nincs nemnegativitási feltétel, írjuk $x_j = x_j' - x_j''$, $x_j', x_j'' \geq 0$ alakba.

⋆ **7.1.75. Feladat.** Az alábbi lineáris programozási feladatokat vezessük vissza alapfeladatra:

(1)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ -x_1 - x_2 + x_3 &\geq 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 &\to \min; \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 &\geq -66 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_4 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &\to \max\,. \end{aligned}$$

⋆ **7.1.76. Feladat.** Oldjuk meg grafikusan az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

(1)

$$\begin{aligned} x_1 - 1 &\geq 0 \\ x_2 - 1 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 - 3 &\geq 0 \\ -6x_1 - 7x_2 + 42 &\geq 0; \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 &\leq 0 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\leq 2 \\ 3x_1 - x_2 &\geq -4; \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1 &\leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

⋆ **7.1.77. Feladat.** Elhagyható-e valamelyik egyenlőtlenség az alábbi egyenlőtlenségrendszerből úgy, hogy a megoldáshalmaz nem változik:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ -2x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

⋆ **7.1.78. Feladat [7].** Oldjuk meg grafikusan az alábbi lineáris programozási feladatokat a megadott célfüggvényekkel:

(1)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_1 + x_2 &\ge 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_1 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ 7x_1 + 8x_2 &\to \max \\ 8x_1 + 7x_2 &\to \max \\ 8x_1 + 8x_2 &\to \max; \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 3 \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ 7x_1 + 5x_2 &\to \min \\ 2x_1 + 5x_2 &\to \max \\ -7x_1 - 5x_2 &\to \max\,. \end{aligned}$$

⋆ **7.1.79. Lineáris programozási feladat egyenletrendszer alakja.** A lineáris programozás alapfeladata az ottani jelölésekkel, bevezetve az $y$ segédvektort, a következő ekvivalens alakba is írható:

$$y = b - ax, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad d + c'x \to \max\,.$$

Az egyenletrendszer, részletesen kiírva

$$y_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B$$

alakú. Az egyenletrendszer jobb oldalán álló változókat *bázisváltozó*knak nevezzük. Az egyenletrendszer megoldásaira egyszerűen, mint *megoldás*okra fogunk hivatkozni. Vegyük észre, hogy megoldás mindig van, hiszen minden nem bázis változó, azaz minden $x_j$ helyére nullát helyettesítve, egy megoldást kapunk; ezt *bázismegoldás*nak nevezzük, erre a célfüggvény értéke $d$. A bázismegoldásra $y_i = b_i$, ha $i \in B$. Ha egy megoldás kielégíti az egyenlőtlenségeket is, akkor *megengedett megoldás*nak nevezzük (ilyen már nem mindig van). A bázismegoldás pontosan akkor megengedett megoldás, ha $b_i \geq 0$ minden $i \in B$-re. Ha egy megengedett megoldásra a célfüggvény értéke maximális, akkor *optimális megoldás*nak nevezzük (ilyen lehet hogy nincs, de végtelen sok is lehet). Megmutatható, hogy ha van megengedett megoldás, akkor vagy nem korlátos felülről a célfüggvény, vagy van optimális megoldás. A célunk annak eldöntése, hogy van-e megengedett megoldás, ha van, annak eldöntése, hogy korlátos-e a célfüggvény, és ha korlátos, akkor egy optimális megoldás meghatározása.

Az alapgondolat, hogy egy megengedett bázismegoldás változtatásával egy olyan megengedett bázismegoldásra térünk át, amelyre a célfüggvény értéke nagyobb, de legalábbis nem kisebb. Nyilván egy olyan $x_j$ változót kell választanunk, amelyre a megfelelő $c_j$ pozitív, mivel $x_j$ értékét csak növelni tudjuk. A növelésnél az

$$y_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B$$

értékeknek nemnegatívaknak kell maradniuk. Ez biztosan teljesül $y_i$-re, ha $a_{i,j} \leq 0$; ha minden $i \in B$-re ez a helyzet, akkor az $x_j$ értékét akármeddig növelhetjük, és a célfüggvény értéke tetszőlegesen nagy lehet. Ha viszont $a_{i,j} > 0$, akkor $x_j$ legfeljebb $b_i/a_{i,j}$-ig növelhető. Nyilván akkor érjük el a célfüggvény maximális növekedését úgy, hogy még megengedett megoldást kapunk, ha $x_j$-t a $b_i/a_{i,j}$ értékek minimumáig növeljük, ahol a minimum az összes olyan indexre értendő, amelyre $a_{i,j} > 0$. Vegyük észre, hogy ekkor $y_i$ új értéke nullává válik, tehát $y_i$-t kiléptethetjük a bázisból, és helyette $x_j$-t kell beléptetnünk. Ezt könnyen meg is tehetjük, ha $x_j$-t kifejezzük az

$$y_i = b_i - \sum_{j \in A} a_{i,j} x_j$$

egyenletből (az egyenletet ezzel az új alakkal helyettesítjük), majd behelyettesítjük a többi egyenletbe és a célfüggvénybe is. Ez a helyettesítés nyilván egy ekvivalens, új egyenletrendszer alakot eredményez, amelynek a bázismegoldása azonban más, arra a célfüggvény értéke nagyobb — de legalábbis nem kisebb — és a célfüggvényt is csak más alakban írtuk fel. Ezután az $y_k$, $k \in B$, $k \neq i$ és $x_j$ változók lesznek a bázisváltozók.

Vegyük észre, hogy eddigi jelöléseink csak zavarnak a fent vázolt bázisváltozócserénél: sokkal egyszerűbb, ha $y_i$ helyett az $x_i$ jelölést használjuk a bázisváltozókra is; persze, ezt csak akkor tehetjük meg, ha a $B$ és $C$ indexhalmazok diszjunktak. Nyilván az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, és a továbbiakban fel is tesszük, hogy $B \cup C = \{1, 2, \ldots, m+n\}$, ha $B$-nek $m$, a $C$-nek pedig $n$ eleme van. Így az egyenletrendszer alak végső formája

$$x_i = b_i - \sum_{j \in C} a_{i,j} x_j, \quad i \in B, \quad x_k \geq 0, \text{ ha } k \in B \cup C = \{1, 2, \ldots, m+n\}$$

és

$$d+\sum_{j\in C}c_jx_j\to\max.$$

⋆ **7.1.80. A bázisváltozók cseréje.** Az előző pontban vázolt bázisváltozó-csere az ottani (végső) jelölésekkel részletezve a következőképpen történik: Adott az

$$x_i=b_i-\sum_{j\in C}a_{i,j}x_j,\quad i\in B$$

egyenletrendszer és a

$$d+\sum_{j\in C}c_jx_j$$

célfüggvény, valamint egy $i\in B$ és egy $j\in C$ index, úgy, hogy $a_{i,j}\neq 0$. Az

$$x_i=b_i-\sum_{j\in C}a_{i,j}x_j$$

egyenletből kifejezzük $x_j$-t:

$$x_j=\frac{b_i}{a_{i,j}}-\frac{1}{a_{i,j}}x_i-\sum_{j\neq\ell\in C}\frac{a_{i,\ell}}{a_{i,j}}x_k,$$

majd $x_j$-t behelyettesítjük az összes többi egyenletbe, és a célfüggvénybe. Az egyenletrendszer új alakja

$$x_k=b'_k-\sum_{\ell\in C'}a'_{k,\ell}x_\ell,\quad k\in B',$$

ahol $B'=\{j\}\cup(B\setminus\{i\})$, $C'=\{i\}\cup(C\setminus\{j\})$, $a'_{j,i}=1/a_{i,j}$, $b'_j=b_ia'_{j,i}$, $a'_{j,\ell}=a_{i,\ell}a'_{j,i}$, ha $\ell\in C'$, $\ell\neq i$, továbbá ha $k\in B'$, $k\neq j$, akkor $b'_k=b_k-a_{k,j}a'_{j,i}$, $a'_{k,i}=-a_{k,j}a'_{j,i}$, valamint $a'_{k,l}=a_{k,l}-a_{k,i}a'_{j,i}$, ha $\ell\in C'$, $\ell\neq i$. A célfüggvény új alakja

$$d'+\sum_{\ell\in C'}c'_\ell x_\ell,$$

ahol $d'=d+c_jb'_\ell$, $c'_i=-c_ja'_{j,i}$, és $c'_\ell=c_\ell-c_ja_{j,i}$, ha $\ell\in C'$, $\ell\neq i$.

⋆ **7.1.81. A szimplex módszer.** Tegyük fel, hogy az alapproblémával ekvivalens valamelyik egyenletrendszer alak bázismegoldása egy megengedett megoldás. Ekkor az alábbi algoritmusról megmutatható, hogy véges sok lépésben megáll, és vagy megmutatja, hogy a célfüggvény nem korlátos, vagy megtalál egy optimális megoldást:

(1) Válasszunk egy $j\in C$ indexet, amire $c_j>0$. Ha nincs ilyen, álljunk meg, a bázismegoldás optimális. Ha több is van, válasszuk a legkisebb indexet.

(2) Válasszunk egy $i\in B$ indexet, amelyre $a_{i,j}>0$. Ha nincs ilyen, álljunk meg, a célfüggvény nem korlátos a megengedett megoldások halmazán. Ha több is van, egy olyat válasszunk, amire $b_i/a_{i,j}$ minimális. Ha több indexre is minimális, a legkisebbet válasszuk.

(3) Hajtsunk végre bázisváltozó-cserét: a $j$ indexű változó bekerül a bázisváltozók közé, az $i$ indexű pedig kikerül közülük; menjünk (1)-re.

⋆ **7.1.82. Megengedett bázismegoldás keresése.** Hátra van még annak eldöntése, hogy az eredeti

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i \quad (i = n+1, \dots, n+m), \qquad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

egyenlőtlenség-rendszernek van-e megengedett megoldása, és ha van, egy megengedett bázismegoldás megkeresése. A célfüggvény nyilván egyik kérdésnél sem játszik szerepet. Ha $b_i \geq 0$, $i = n+1, \dots, n+m$, akkor a bázismegoldás megengedett, és alkalmazhatjuk a szimplex módszert. Egyébként válasszunk ki egy $i$ indexet, amelyre $b_i$ minimális. Helyettesítsük az eredeti egyenlőtlenség-rendszert a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - x_0 \leq b_i \quad (i = n+1, \dots, n+m), \qquad x_j \geq 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

egyenlőtlenség-rendszerrel és tekintsük a $-x_0 \to \max$ feladatot. Ez a célfüggvény nyilván felülről korlátos, mert megengedett megoldásra nem lehet pozitív. Az új problémának megengedett megoldása is van, hiszen $x_j = 0$ ($j = 1, \dots, n$) választással, elég nagy $x_0$ értéket választva, megengedett megoldást kapunk. Ez majdnem bázismegoldása is az új problémának, hiszen csak $x_0$ értéke nem nulla. Léptessük ki $x_i$-t a bázisváltozók közül, és helyette léptessük be $x_0$-at a bázisváltozók közé: ezzel a bázisvektor-cserével az új bázismegoldás megengedett lesz, persze, az új problémára. Most alkalmazzuk a szimplex módszert az új problémára. A kapott optimális megoldásra ha az optimum nulla, azaz $x_0 = 0$, akkor a kapott bázismegoldás bázismegoldása az eredeti problémának is, hiszen $x_0 = 0$ helyettesítéssel az új egyenlőtlenség-rendszer a régibe megy át. Megfordítva, ha a régi egyenlőtlenség-rendszer kielégíthető, akkor $x_0 = 0$ választással az új is, így az új problémának az optimális megoldása $x_0 = 0$. Ha tehát ez nem teljesül, akkor az eredeti problémának nincs megengedett megoldása.

## 7.2 Lineáris leképezések

**7.2.1. Lineáris leképezések.** Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az $U$ egy $U'$ alterének $V$-be való $A$ leképezését *lineáris leképezés*nek nevezzük, ha

(1) minden $x, y \in U'$ esetén $A(x+y) = A(x) + A(y)$ (a leképezés *additív*);

(2) minden $x \in U'$, $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ (a leképezés *homogén*).

A két tulajdonság azt jelenti, hogy $A$ művelettartó az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve. Nyilván $A(0) = A(0x) = 0A(x) = 0$. A lineáris leképezéseknél általában nem szokás kiírni a zárójelet, hanem $A(x)$ helyett gyakran $Ax$-et írunk.

A fenti két tulajdonság azzal ekvivalens, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in U'$ esetén $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$; valóban ha (1) és (2) teljesül, akkor

$$A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x) + A(\beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

míg ebből a tulajdonságból $\beta = 0$ helyettesítéssel kapjuk a homogenitást és $\alpha = \beta = 1$ helyettesítéssel az additivitást.

Ha $V'$ egy altere $V$-nek, akkor $A^{-1}(V')$ altere $U$-nak: ha

$$x, y \in A^{-1}(V'), \quad Ax = u \in V', \quad Ay = v \in V',$$

és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor $A(\alpha x + \beta y) = \alpha u + \beta v \in V'$, így $\alpha x + \beta y \in A^{-1}(V')$. Speciálisan, $\ker(A) := A^{-1}(0)$, az $A$ *mag*ja altere $U$-nak.

Az $A$ lineáris leképezés $V' = \operatorname{rng}(A)$ értékkészlete altere $V$-nek: ha $u, v \in \operatorname{rng}(A)$, $u = Ax$, $v = Ay$, akkor $\alpha u + \beta v = A(\alpha x + \beta y) \in V'$ minden $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén. Az értékkészlet dimenzióját a lineáris leképezés *rang*jának nevezzük és $\operatorname{rg}(A)$-val jelöljük.

Az $A$ pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha $\ker(A) = \{0\}$; ha ez nem teljesül, akkor van két különböző vektor, amelynek a képe nulla. Ha ez teljesül, akkor $x, y \in U'$, $x \neq y$ esetén $0 \neq A(x - y) = Ax - Ay$.

Ha az $A$ lineáris leképezés kölcsönösen egyértelmű, akkor a (létező) inverze is lineáris leképezés: ha $u, v \in V'$, $u = Ax$, $v = Ay$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$A^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha x + \beta y = \alpha A^{-1}u + \beta A^{-1}v.$$

Már találkoztunk bizonyos lineáris leképezésekkel: egy $U$ és $V$ közötti izomorfizmus olyan lineáris leképezés, amely $U$-t $V$-re kölcsönösen egyértelműen képezi le.

Mivel az $A$ lineáris leképezés vizsgálatánál $U$-nak $U'$-n kívüli része nem játszik szerepet, a továbbiakban általában feltesszük, hogy egy lineáris leképezés az egész vektortéren van értelmezve. Az összes $U$-t $V$-be képező lineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U; V)$-vel fogjuk jelölni. Azokat a lineáris leképezéseket, amelyek $U$-t saját magába képezik, *lineáris transzformáció*knak nevezzük.

**7.2.2. Példák lineáris leképezésekre.** Lineáris leképezések: azonosan nulla leképezés, a $\mathbb{K}^n$ elemeihez $j$-edik koordinátájukat rendelő $j$-edik projekció, polinomokhoz adott helyen vett helyettesítési értékük hozzárendelése, polinomhoz adott $n$-nél alacsonyabb fokú tagjai összegének hozzárendelése, konvergens valós sorozatokhoz a határérték hozzárendelése, nyílt intervallumon differenciálható függvények körében a differenciálás, polinomok adott nem nulla polinommal való osztásánál a maradék képzése, adott zárt intervallumon integrálható függvényekre az integrál képzése, valós változós függvények megszorítása $\mathbb{R}$ egy részhalmazára.

Lineáris transzformációk: azonosan nulla transzformáció, az identikus transzformáció, tér vetítése síkra, egyenesre, a tér forgatása, komplex számok körében, mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a konjugálás, a valós rész, illetve a képzetes rész képzése, a valós polinomok terén a differenciálás.

**7.2.3. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett és $A \in \mathcal{L}(U; V)$. Ekkor*

(1) *ha $e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$ és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, akkor*

$$A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A e_1 + \alpha_2 A e_2 + \cdots + \alpha_n A e_n;$$

(2) *ha $U$ egy generátorrendszere vektorainak ismerjük az $A$ általi képeit, akkor $A$ egyértelműen adott;*

(3) *ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ az $U$ egy bázisa, és $f_1, f_2, \ldots, f_n \in V$ tetszőleges vektorok, akkor egy és csak egy olyan $A: U \to V$ lineáris leképezés létezik, amelyre $Ae_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \ldots, n$.*

**Bizonyítás.** (1) teljes indukcióval adódik. (2) következik (1)-ből. (3)-ban $A$ egyértelműsége következik (2)-ből. Ha $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, akkor legyen $Ax := \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$. Erre a leképezésre $Ae_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \dots, n$, és lineáris, mert ha $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}\alpha Ax + \beta Ay &= \alpha(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n) + \beta(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n)\\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) f_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2) f_2 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n) f_n\\ &= A(\alpha x + \beta y). \ \square\end{aligned}$$

**7.2.4. Lineáris leképezések összege és skalárszorosa.** Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U;V)$ halmaz elemeire, mint $V$-beli értékű függvényekre, értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás: ha $\gamma \in \mathbb{K}$ és $A, B \in \mathcal{L}(U;V)$, akkor $(\gamma A)(x) := \gamma A(x)$ és $(A+B)(x) := A(x) + B(x)$ minden $x \in U$-ra. Mivel $x, y \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ esetén

$$(\gamma A)(\alpha x + \beta y) = \gamma(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha(\gamma A)(x) + \beta(\gamma A)(y)$$

és

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y)\\ &= (\alpha Ax + \beta Ay) + (\alpha Bx + \beta By) = \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y),\end{aligned}$$

tehát lineáris leképezések skalárszorosa és összege is lineáris leképezés.

**7.2.5. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U;V)$ halmaz lineáris tér $\mathbb{K}$ felett.*

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló, hogy lineáris leképezések összeadása asszociatív és kommutatív, az azonosan nulla leképezés nullelem, és az $A$ lineáris leképezésnek a $(-1)A$ leképezés additív inverze. Az is nyilvánvaló, hogy $1A = A$, valamint a skalárral való szorzás asszociatív és disztributív a skalárok összeadására és a lineáris leképezések összeadására nézve, így $\mathcal{L}(U;V)$ lineáris tér. $\square$

**7.2.6. Lineáris leképezések szorzata.** Legyenek $U$, $V$ és $W$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ha $A \in \mathcal{L}(U;V)$ és $B \in \mathcal{L}(V;W)$, akkor $BA$ *szorzat*ukat, mint a $B \circ A$ összetett leképezést értelmezzük. Megmutatjuk, hogy $BA \in \mathcal{L}(U;W)$. Ha $x, y \in U$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, akkor

$$\begin{aligned}(BA)(\alpha x + \beta y) &= B\big(A(\alpha x + \beta y)\big) = B(\alpha Ax + \beta Ay) = \alpha B(Ax) + \beta B(Ay)\\ &= \alpha(BA)(x) + \beta(BA)(y).\end{aligned}$$

Lineáris leképezések szorzása (mivel leképezések összetétele) asszociatív, de általában nem kommutatív, például $\mathbb{C}$-ben mint $\mathbb{R}$ feletti vektortérben a valós rész képzése és az $i$-vel való szorzás nem felcserélhető lineáris transzformációk.

**7.2.7. Tétel.** *Legyenek $U$, $V$ és $W$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ha $A, B \in \mathcal{L}(U;V)$, $C, D \in \mathcal{L}(V;W)$, $\gamma \in \mathbb{K}$, akkor*

(1) $C(A+B) = CA + CB$ *(bal oldali disztributivitás);*

(2) $(C+D)A = CA + DA$ *(jobb oldali disztributivitás);*

(3) $\gamma(CA) = (\gamma C)A = C(\gamma A)$.

**Bizonyítás.** Minden $x \in U$-ra

$$(C(A+B))(x) = C(Ax+Bx) = (CA)(x) + (CB)(x) = (CA+CB)(x),$$

$$((C+D)A)(x) = (C+D)(Ax) = (CA)(x) + (DA)(x) = (CA+DA)(x),$$

$$(\gamma(CA))(x) = \gamma(C(Ax)) = (\gamma C)Ax = C(\gamma Ax) = C(\gamma A)(x). \ \square$$

**7.2.8. Következmény.** *Egy $V$ vektortér lineáris transzformációinak $\mathcal{L}(V;V)$ halmaza gyűrű.* $\square$

**7.2.9. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett, és tegyük fel, hogy $U$ véges dimenziós. Legyen $A\colon U \to V$ egy lineáris leképezés. Ekkor*

$$\mathrm{rg}(A) + \dim\ker(A) = \dim\mathrm{rng}(A) + \dim\ker(A) = \dim(U).$$

**Bizonyítás.** Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy olyan bázisa $U$-nak, amelyre $e_1, e_2, \dots, e_m$ bázisa $\ker(A)$-nak. Mivel $Ae_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ generátorrendszere $\mathrm{rng}(A)$-nak, de $Ae_j = 0$, ha $j = 1, 2, \dots, m$, csak azt kell megmutatnunk, hogy $Ae_{m+1}, \dots, Ae_n$ lineárisan függetlenek. Ha $\alpha_{m+1}Ae_{m+1} + \dots + \alpha_n Ae_n = 0$, akkor $\alpha_{m+1}e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n \in \ker(A)$, azaz $\alpha_{m+1}e_{m+1} + \dots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m$, és így

$$\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_m e_m - \alpha_{m+1}e_{m+1} - \dots - \alpha_n e_n = 0.$$

Ha nem lenne minden $\alpha_j$, $j = m+1, \dots, n$ nulla, $e_1, \dots, e_n$ nem lenne lineárisan független. $\square$

**7.2.10. Következmény.** *Mindig fennáll* $\mathrm{rg}(A) \leq \dim(V)$ *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A$ a $V$-re képez. Mindig fennáll* $\mathrm{rg}(A) \leq \dim(U)$ *és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A$ kölcsönösen egyértelmű.* $\square$

**7.2.11. Következmény.** *Ha $U = V$, azaz $A$ egy lineáris transzformáció, akkor az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *létezik az $A^{-1}$ lineáris transzformáció és $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}_V$;*

(2) *$A$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $V$-nek önmagára;*

(3) *$A$ kölcsönösen egyértelmű;*

(4) *$A$ a $V$-re képez;*

(5) $\mathrm{rg}(A) = \dim(V)$.

**Bizonyítás.** (1) és (2) nyilván ekvivalensek. Az előző következmény alapján (2), (3), (4) és (5) ekvivalensek. $\square$

**7.2.12. Feladat [5].** Melyik leképezés lineáris, és melyik lineáris transzformáció, mennyi a rangjuk:

(1) $f(x,y) = (2x - y, -2x)$;

(2) $f(x,y) = (x^2 + y^2, 0)$;

(3) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$;

(4) $f(x,y,z) = (0,0,0)$;

(5) $f(x, y) = (y, x)$;

(6) $f(x, y, z) = (x + y, y + z)$;

(7) $f(x, y) = (2x - y, x - 3y)$;

(8) $f(x, y) = (2x - y - 1, x - 3y + 1)$;

(9) $f(x, y) = (1, 1)$.

**7.2.13. Feladat [6].** Mi a rangja:

(1) $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$;

(2) $f(x, y, z) = (x - y, 2x + z, 2y + z)$;

(3) $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$;

(4) $f(x, y, z) = (x + 2y - 3z, 2x - y + z, -5y + 7z)$;

(5) $f(x, y, z) = (x - 2y, -x + 2y, 2x - 4y)$;

(6) $f(x, y, z) = (\pi y, y/\pi, y)$.

**7.2.14. Feladat [5].** A térvektorok terén melyik transzformáció lineáris, és ha igen, mennyi a rangja:

(1) merőleges vetítés egy origón átmenő egyenesre;

(2) merőleges vetítés egy origón átmenő síkra;

(3) tükrözés egy origón átmenő síkra;

(4) tükrözés egy origón átmenő egyenesre;

(5) ugyanezek, de az egyenes illetve a sík nem megy át az origón;

(6) eltolás egy nem nulla vektorral;

(7) az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ differenciálható függvényein a differenciálás;

(8) az $\mathbb{R}^{[a,b]}$ integrálható függvényein az integrálás.

**7.2.15. Vektorrendszer és lineáris leképezés mátrixa.** Legyen $V$ egy véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ pedig egy vektorrendszer. A vektorrendszernek a $V$ egy adott $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázisára vonatkozó $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *mátrix*án az $m \times n$-es $(\xi_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot értjük, ahol $x_j = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,j} f_i$, azaz a $j$-edik oszlopban $x_j$-nek az adott bázisra vonatkozó koordinátái állnak. Egy egytagú $x \in V$ vektorrendszer mátrixa az $m \times 1$-es $[x]$ oszlopmátrix.

Legyen most $U$ is egy véges dimenziós vektortér,

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

pedig az $U$ egy adott bázisa. Egy $A \in \mathcal{L}(U; V)$ lineáris leképezésnek a két adott bázishoz tartozó *mátrix*án az

$$Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$$

vektorrendszernek az $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázisra vonatkozó mátrixát fogjuk érteni, amit $[A]$-val jelölünk. Adott bázisok esetén $A \mapsto [A]$ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{L}(U; V)$-nek az összes $\mathbb{K}$-beli elemekből képzett $m \times n$-es mátrixok halmazára. Természetesen ha más bázisokat választunk, akkor a lineáris leképezés mátrixa általában megváltozik. Egy adott mátrix más bázisok választása esetén általában másik lineáris leképezésnek a mátrixa. Szokás a lineáris leképezés mátrixát ugyanazzal a betűvel jelölni, mint a lineáris leképezést; mi ezt általában nem tesszük.

Egy lineáris leképezés mátrixának ismeretében a leképezés rangja meghatározható: megegyezik mátrixának oszloprangjával.

Ha $A$ lineáris transzformáció, azaz $U = V$, akkor $[A]$ négyzetes; ilyenkor, ha mást nem mondunk, feltesszük, hogy a két bázis ugyanaz.

**7.2.16. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett*

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \quad \textit{illetve} \quad f_1, f_2, \ldots, f_m$$

*rögzített bázisokkal. Ekkor az $A \mapsto [A]$ leképezése $\mathcal{L}(U;V)$-nek az összes $\mathbb{K}$-beli elemekből képzett $m \times n$-es mátrixok halmazára additív és homogén, sőt izomorfizmus. Ha $x \in U$ egy vektor, ennek mint egytagú vektorrendszernek az*

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

*bázisra vonatkozó mátrixa az $n \times 1$-es $[x]$ oszlopmátrix, és ha $y = Ax$, akkor $[y] = [A][x]$, ahol $[y]$ az $y \in V$ vektor $f_1, f_2, \ldots, f_m$ bázisra vonatkozó $m \times 1$-es oszlopmátrixa.*

**Bizonyítás.** Ha $\gamma \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{L}(U;V)$ és $[A] = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$, $[B] = (b_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$, akkor $(\gamma A)(e_j) = \gamma A e_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma a_{i,j} f_i$ és $(A+B)e_j = Ae_j + Be_j = \sum_{i=1}^{m}(a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$, ha $j = 1, 2, \ldots, n$, így $[\gamma A] = \gamma[A]$ és $[A+B] = [A] + [B]$. A másik állítás bizonyítása: ha $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$, akkor

$$\begin{aligned} y = Ax &= \xi_1 A e_1 + \xi_2 A e_2 + \cdots + \xi_n A e_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{m} \Big( \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \xi_j \Big) f_i, \end{aligned}$$

ahonnan $[y] = [A][x]$. $\square$

**7.2.17. Következmény.** *Az $\mathcal{L}(U;V)$ lineáris tér izomorf $\mathbb{K}^{mn}$-nel.* $\square$

**7.2.18. Tétel.** *Legyenek $U$, $V$ és $W$ véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_m$, illetve $g_1, \ldots, g_\ell$ bázisokkal. Ha $A \in \mathcal{L}(U;V)$ és $B \in \mathcal{L}(V;W)$, akkor $[BA] = [B][A]$. Így $C = BA$ pontosan akkor teljesül, ha valamely bázisokban (és ekkor akármilyen bázisokban is) $[C] = [B][A]$.*

Ez a tétel indokolja a mátrixszorzás definícióját.

**Bizonyítás.** Mivel

$$\begin{aligned} (BA)e_k &= B\Big( \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} f_j \Big) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} B(f_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} \sum_{i=1}^{\ell} b_{i,j} g_i = \sum_{i=1}^{\ell} \Big( \sum_{j=1}^{m} b_{i,j} a_{j,k} \Big) g_i, \end{aligned}$$

kapjuk, hogy $[BA] = [B][A]$. $\square$

**7.2.19. Áttérésmátrix.** Az kívánjuk vizsgálni, hogyan változnak vektorok koordinátái, illetve lineáris leképezések mátrixa, ha más bázisra térünk át. Legyen $V$ véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett $e_1, e_2, \dots, e_n$, illetve $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisokkal. Az első bázisról a másodikra való áttérés *kísérő transzformáció*ja a $Te_j = f_j$, ha $j = 1, 2, \dots, m$ összefüggéssel definiált transzformációja $V$-nek önmagába. Mivel $T$ értékkészlete tartalmazza az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázist, az valójában az egész $V$, így $T$ reguláris kell legyen. Megfordítva, bármely reguláris transzformációja $V$-nek valamely báziscsere kísérő transzformációja, hiszen ha $e_1, e_2, \dots, e_n$ tetszőleges bázis, akkor a $Te_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ vektorok nem lehetnek lineárisan függőek, mert abból $\ker(T) \neq \{0\}$ következne, így bázist alkotnak. A második bázisról az elsőre való áttérés kísérő transzformációja nyilván $T^{-1}$.

Ha $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$, akkor nyilván $y = Tx$ koordinátái a másik bázisban ugyanezek, mert $y = Tx = T(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n) = \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \dots + \xi_n f_n$.

A kísérő transzformáció mátrixát *áttérésmátrix*nak nevezzük; látszólag meg kellene mondani, hogy az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vagy az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisban értjük a mátrixot, de kiderül, hogy mindegy: ha $f_j = Te_j = \sum_{i=1}^n t_{i,j} e_i$, akkor mindkét oldalra alkalmazva $T$-t, $Tf_j = \sum_{i=1}^n t_{i,j} f_i$. (Természetesen ugyanez igaz $T^{-1}$-re is.)

Ha egy $x \in V$ vektor koordinátáit az $f_j$ bázisban az $[x]$ oszlopvektor adja meg, akkor az $e_j$ bázisban a $[T][x]$ oszlopvektor; valóban, ha $x = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j = \sum_{j=1}^n \eta_j f_j$, akkor

$$x = \sum_{j=1}^n \eta_j f_j = \sum_{j=1}^n \eta_j \sum_{i=1}^n t_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n \Big( \sum_{j=1}^n t_{i,j} \eta_j \Big) e_i,$$

így $\xi_i = \sum_{j=1}^n t_{i,j} \eta_j$.

**7.2.20. Példák: egyszerű bázistranszformációk.** Az előző definíció jelöléseit fogjuk használni.

(1) Legyen $\gamma \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, és legyen $f_k = e_k$, ha $k \neq j$ és $f_j = e_j + \gamma e_i$. Ekkor $f_1, \dots, f_n$ is bázis, hiszen $n$ tagja van, valamint $e_k = f_k$, ha $k \neq j$ és $e_j = f_j - \gamma f_i$, így az $f$-ek által generált altér tartalmaz minden $e$-t, így az egész tér. A megfelelő áttérésmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } r = i,\ s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, annak $j$-edik oszlopához hozzáadódik az $i$-edik oszlop $\gamma$-szorosa, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, akkor a $j$-edik sorhoz adódik hozzá az $i$-edik sor $\gamma$-szorosa, mert $t'a = (a't)'$. Azt is észrevehetjük hogy az áttérésmátrix inverze hasonló, de benne $\gamma$ helyén $-\gamma$ áll.

(2) Legyen ismét $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, és legyen $f_k = e_k$, ha $k \neq i$, $k \neq j$ és $f_j = e_i$, $f_i = e_j$. A megfelelő áttérésmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} 1, & \text{ha } r = i,\ s = j \text{ vagy } r = j,\ s = i; \\ 0, & \text{ha } r = s = i \text{ vagy } r = s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, annak $i$-edik és $j$-edik oszlopa helyet cserél, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, ami ugyanaz, mint a mátrix, akkor az $i$-edik és a $j$-edik sor cserél helyet. Az áttérésmátrix inverze saját maga.

(3) Legyen $0 \neq \gamma \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq n$ és legyen $f_i = \gamma e_i$, ha $i \neq j$, és $f_j = \gamma e_j$. A megfelelő áttérésmátrix

$$t_{r,s} = \begin{cases} \gamma, & \text{ha } r = s = j; \\ \delta_{r,s} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Nem nehéz kiszámolni, hogy ezzel a mátrixszal szorozva jobbról egy mátrixot, a $j$-edik oszlop minden eleme szorzódik $\gamma$-val, a többi oszlop nem változik. Ha viszont egy mátrixot balról szorzunk ennek a mátrixnak a transzponáltjával, ami ugyanaz, mint a mátrix, akkor a $j$-edik sor szorzódik $\gamma$-val. Az áttérésmátrix inverzében $\gamma$ helyén $1/\gamma$ áll.

**7.2.21. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett*

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \ldots, e'_n,$$

*illetve*

$$f_1, f_2, \ldots, f_m \quad \text{és} \quad f'_1, f'_2, \ldots, f'_m$$

*bázisokkal, $A\colon U \to V$ egy lineáris leképezés. Ha $S$, illetve $T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az $U$, illetve a $V$ térben, $[A]$ pedig az $A$ mátrixa a vessző nélküli bázispárban, akkor az $A$ mátrixa a vesszős bázispárban $[T^{-1}][A][S]$.*

**Bizonyítás.** Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérésmátrixokat. Ha $Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j} f_i$ és $Ae'_j = \sum_{i=1}^m b_{i,j} f'_i$, akkor egyrészt

$$Ae'_j = ASe_j = A\Big(\sum_{k=1}^n s_{k,j} e_k\Big) = \sum_{k=1}^n s_{k,j} Ae_k = \sum_{k=1}^n s_{k,j} \sum_{i=1}^m a_{i,k} f_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,j}\Big) f_i,$$

másrészt

$$Ae'_j = \sum_{k=1}^m b_{k,j} f'_k = \sum_{k=1}^m b_{k,j} T f_k = \sum_{k=1}^m b_{k,j} \sum_{i=1}^m t_{i,k} f_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{k=1}^m t_{i,k} b_{k,j}\Big) f_i.$$

Innen azt kapjuk, hogy $\sum_{k=1}^n a_{i,k} s_{k,j} = \sum_{k=1}^m t_{i,k} b_{k,j}$. Ha $b$ jelöli az $A$ mátrixát a vesszős bázisokban, akkor ez azt jelenti, hogy $[A][S] = [T]b$, ahonnan következik az állítás. $\square$

**7.2.22. Következmény.** *Az az $U$-t $V$-be képező lineáris leképezés, amelynek mátrixa $[A]$ a vesszős bázisokban, a $B = TAS^{-1}$ lineáris leképezés.*

**Bizonyítás.** Valóban, a vesszős bázisokban az $A$ mátrixa $[T^{-1}][A][S]$, ezért a jobb oldal mátrixa

$$[T]\big([T^{-1}][A][S]\big)[S^{-1}] = [A]. \ \square$$

**7.2.23. Következmény.** *Ha*

$$U = V, \text{ emiatt } m = n, \text{ és } e_j = f_j,\ e'_j = f'_j, \text{ ha } j = 1, 2, \ldots, n,$$

*$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$-ben, akkor az $A$ lineáris transzformáció mátrixa $[T^{-1}][A][T]$ a vesszős bázisokban. Az a $B$ transzformáció, amelynek mátrixa $[A]$ a vesszős bázisokban, a $B = TAT^{-1}$ transzformáció.* $\square$

**7.2.24. Ekvivalens transzformációk, ekvivalens mátrixok.** A $\mathbb{K}$ feletti $V$ lineáris tér $A$ és $B$ lineáris transzformációit *ekvivalens*eknek nevezzük, ha van olyan $V$-t $V$-re képező $T$ kölcsönösen egyértelmű lineáris transzformáció, amellyel $B = TAT^{-1}$. A $\mathbb{K}$-beli elemű $n \times n$-es $a$ és $b$ mátrixokat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha van olyan $n \times n$-es invertálható $t$ mátrix, amellyel $b = t^{-1}at$.

**7.2.25. Feladat [5].** Adjuk meg a síkvektorok alábbi transzformációinak mátrixát a szokásos $1$, $i$ bázisban, és a $2+3i$ valamint az $1+2i$ vektorok képét:

(1) tükrözés az $x$ tengelyre;

(2) tükrözés az $y$ tengelyre;

(3) tükrözés az $y = x$ egyenesre;

(4) $x$ irányú nyírás, azaz az $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$ leképezés, $k \in \mathbb{R}$;

(5) $y$ irányú nyírás, azaz az $(x, y) \mapsto (x, y + kx)$ leképezés, $k \in \mathbb{R}$;

(6) $k \in \mathbb{R}$-szeres nyújtás;

(7) tükrözés az origóra;

(8) $\alpha$ szögű elforgatás;

(9) merőleges vetítés az $x$ tengelyre;

(10) merőleges vetítés az $y$ tengelyre.

**7.2.26. Feladat [5].** Adjuk meg a térvektorok alábbi transzformációinak mátrixát a szokásos $i$, $j$, $k$ bázisban, és az $i + j + k$ vektor képét:

(1) merőleges vetítés az $x$, az $y$ illetve a $z$ tengelyre;

(2) merőleges vetítés az $xy$, az $yz$ illetve a $zx$ síkra;

(3) tükrözés az $x$, az $y$ illetve a $z$ tengelyre;

(4) tükrözés az $xy$, az $yz$ illetve a $zx$ síkra;

(5) tükrözés az origóra;

(6) $\alpha$ szögű elforgatás az $x$, az $y$ illetve a $z$ tengely körül.

**7.2.27. Feladat [4].** Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát:

(1) $L(x, y) = (x, y, x + y)$;

(2) $L(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

**7.2.28. Feladat [5].** Adjuk meg az $A$ transzformáció mátrixát a szokásos bázisban, ha

(1) $A(3, 1) = (1, 0)$, $A(5, 2) = (0, 1)$;

(2) $A(1, 0) = (5, 1)$, $A(1, 1) = (-1, 2)$;

(3) $A(6, -3) = (1, 2)$, $A(-2, 1) = (2, 1)$;

(4) $A(1, 2, 3) = (4, 2, 4)$, $A(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$; $A(1, 3, 2) = (7, 0, -7)$;

(5) $A(1, 2, 3) = (1, 0, 0)$, $A(0, -1, 0) = (0, 0, 0)$; $A(1, 1, 3) = (1, 0, 0)$.

**7.2.29. Feladat [5].** Adjuk meg a megadott lineáris transzformáció mátrixát a megadott bázisban:

(1) tükrözés síkban az $y = x$ egyenesre, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (2, 2)$;

(2) $A(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$, $e_1 = (2, 3)$, $e_2 = (1, 2)$;

(3) tükrözés síkban az $x$ tengelyre, $e_1 = (2, 3)$, $e_2 = (1, 2)$;

(4) $A(x, y) = (4x - 2y, x + y)$, $e_1 = (2, 1)$, $e_2 = (1, 1)$;

(5) $A(x, y, z) = (2x - y, y, y - z)$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$.

**7.2.30. Lineáris formák.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ teret $V'$-vel is jelöljük, és $V$ *duális ter*ének nevezzük; elemei a *lineáris formá*k vagy *lineáris funkcionál*ok.

Ha $V$ véges dimenziós, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ egy bázisa, akkor az az $f_j$ lineáris leképezés, amely egy $x \in V$ vektorhoz a $j$-edik koordinátáját rendeli, egy lineáris forma. Ha a $\mathbb{K}$ (egydimenziós) térben az 1-et választjuk bázisnak, akkor $f_j$ mátrixa a $(\delta_{i,j})_{i=1}^n$ sormátrix; innen az $f_j \in V'$, $j = 1, 2, \ldots, n$ vektorok a duális térnek azt az egyetlen bázisát alkotják, amelyre $f_j(e_i) = \delta_{i,j}$, ha $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Ezt a bázist az $e_1, \ldots, e_n$ bázishoz tartozó *duális bázis*nak nevezzük. Létezése azt is mutatja, hogy $\dim(V') = \dim(V)$. A $V'$ duális terét *második duális tér*nek nevezzük és $V''$-vel jelöljük.

⋆ **7.2.31. Tétel.** *Ha $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $x \in V$-re a $z_x\colon y \mapsto y(x)$ leképezés $V''$ egy eleme. Az $x \mapsto z_x$ úgynevezett* természetes leképezés *$V$-t $V''$-be képezi le. Ha $V$ véges dimenziós, akkor a természetes leképezés izomorfizmusa $V$-nek $V''$-re.*

**Bizonyítás.** Mivel

$$z_x(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)(x) = y_1(x) + y_2(x) = z_x(y_1) + z_x(y_2)$$

és

$$z_x(\alpha y) = (\alpha y)(x) = \alpha y(x) = \alpha z_x(y),$$

a $z_x$ lineáris funkcionál $V'$-n, azaz $V''$ eleme. Megmutatjuk, hogy a természetes leképezés lineáris:

$$z_{x_1+x_2}(y) = (y)(x_1 + x_2) = y(x_1) + y(x_2) = z_{x_1}(y) + z_{x_2}(y)$$

és

$$z_{\alpha x}(y) = y(\alpha x) = \alpha y(x) = \alpha z_x(y) = (\alpha z_x)(y).$$

Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $V$ egy bázisa, és $f_1, f_2, \ldots, f_n$ a megfelelő duális bázis. Mivel $V''$ is $n$ dimenziós, elég belátni, hogy a természetes leképezés kölcsönösen egyértelmű. Ha $z_x$ azonosan nulla, akkor $z_x(f_j) = 0$ minden $j$-re, így $x$ minden koordinátája nulla, amiből $x = 0$. □

**7.2.32. Bilineáris leképezések.** Legyenek $U$, $V$, és $W$ lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $B\colon U \times V \to W$ leképezést *bilineáris*nak nevezünk, ha mindkét változójában lineáris, feltéve hogy a másik változót rögzítjük. Fontos példák $\mathbb{R}^3$-ban a skaláris szorzás és a vektoriális szorzás, ezeket később részletesebben megvizsgáljuk. Az összes, $U \times V$-t $W$-be képező bilineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U, V; W)$-vel jelöljük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{L}(U, V; W)$ a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Az $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$ elemeit *bilineáris formá*knak nevezzük.

Legyen $B \in \mathcal{L}(U, V; W)$. Teljes indukcióval, ha

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m \quad \text{és} \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n,$$

ahol

$$e_1, \ldots, e_m \in U \quad f_1, \ldots, f_n \in V$$

és

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K},$$

akkor

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j B(e_i, f_j). \tag{1}$$

Speciálisan, ha az $U$, illetve a $V$ egy-egy generátorrendszeréből alkotott párokon ismerjük $B$ értékét, akkor $B$ egyértelműen meghatározott. Ugyanúgy, mint a lineáris leképezéseknél belátható, hogy ha $e_1, \ldots, e_m$ az $U$, az $f_1, \ldots, f_n$ pedig a $V$ egy bázisa, akkor tetszőlegesen választva a $g_{i,j} \in W$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ vektorokat, egy és csak egy olyan bilineáris leképezése létezik $U \times V$-nek $W$-be, amelyre $B(e_i, f_j) = g_{i,j}$; nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban bilineáris. A $(g_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot a bilineáris leképezés *mátrix*ának nevezzük. Ennek elemei $W$-beliek; ha $W = \mathbb{K}$, tehát ha bilineáris formáról van szó, akkor skalárok.

**7.2.33. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{K}$ felett*

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \ldots, e'_m,$$

*illetve*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \quad \text{és} \quad f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$$

*bázisokkal, $B \colon U \times V \to \mathbb{K}$ egy bilineáris forma. Ha $S$, illetve $T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az $U$, illetve a $V$ térben, $[B]$ pedig a $B$ mátrixa a vessző nélküli bázisokban, akkor a $B$ mátrixa a vesszős bázisokban $[S]'[B][T]$.*

**Bizonyítás.** Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérésmátrixokat. Mivel

$$B(e'_r, f'_s) = \sum_{i=1}^{m} s_{i,r} \sum_{j=1}^{n} t_{j,s} B(e_i, f_j),$$

kapjuk az állítást. □

**7.2.34. Következmény.** *Ha*

$$U = V,\ \textit{emiatt}\ m = n\ \textit{és}\ e_j = f_j,\ e'_j = f'_j,\ \text{ha}\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

*$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$-ben, akkor a $B$ bilineáris forma mátrixa $[T]'[B][T]$ a vesszős bázisokban.* □

**7.2.35. Kvadratikus leképezések.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $U = V$, akkor egy $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezésből képezhetünk a $Q(x) := B(x, x)$ definícióval egy $Q\colon V \to W$ leképezést, a $B$ bilineáris leképezéshez tartozó úgynevezett *kvadratikus leképezés*t. Elsősorban a *kvadratikus formá*k érdekelnek bennünket, tehát a $W = \mathbb{K}$ eset, de az általános esetet is használjuk a későbbiekben. Több különböző bilineáris leképezéshez tartozhat ugyanaz a kvadratikus leképezés: ha ugyanis valamely $x, y \in V$-re $B(x, y) \neq B(y, x)$, akkor az $(x, y) \mapsto B(x, y)$ és az $(x, y) \mapsto B(y, x)$ bilineáris leképezések különböznek, de mindkettőhöz ugyanaz a kvadratikus leképezés tartozik. Azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket, amelyekre $B(x, y) = B(y, x)$ minden $x, y \in V$-re, *szimmetrikus bilineáris leképezés*eknek (a $W = \mathbb{K}$ esetben *szimmetrikus bilineáris formá*knak) nevezzük. Azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket, amelyekhez tartozó kvadratikus leképezés azonosan nulla, *alternáló bilineáris leképezés*eknek (a $W = \mathbb{K}$ esetben *alternáló bilineáris formá*knak) nevezzük, azokat a $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezéseket pedig, amelyekre $B(x, y) = -B(y, x)$ minden $x, y \in V$-re, *antiszimmetrikus bilineáris leképezés*eknek (a $W = \mathbb{K}$ esetben *antiszimmetrikus bilineáris formá*knak). Egy alternáló bilineáris leképezés antiszimmetrikus is, mert

$$0 = B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = B(x, y) + B(y, x).$$

A következő tétel lényegében tisztázza a három fogalom közötti kapcsolatot.

**7.2.36. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $V$ és $W$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden kvadratikus leképezés képezhető egy egyértelműen meghatározott szimmetrikus bilineáris leképezésből, minden antiszimmetrikus bilineáris leképezés alternáló és minden $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezés egyértelműen előáll egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus bilineáris leképezés összegeként.*

Az állítás tetszőleges $K$ test felett nem marad érvényben, csak ha $K$-ban $1 + 1 \neq 0$.

**Bizonyítás.** Ha $A$ antiszimmetrikus, akkor $A(x, x) = -A(x, x)$, ahonnan

$$2A(x, x) = 0,$$

$A(x, x) = 0$ minden $x \in V$-re. Ha $B \in \mathcal{L}(V, V; K)$, akkor

$$S_2\colon (x, y) \mapsto B(x, y) + B(y, x)$$

szimmetrikus,

$$A_2\colon (x, y) \mapsto B(x, y) - B(y, x)$$

pedig alternáló, és $2B = S_2 + A_2$, $B = S + A$, ahol

$$S = \frac{1}{2} S_2, \quad A = \frac{1}{2} A_2,$$

tehát az előállítás létezik. Ha $Q$ a $B$-hez tartozó kvadratikus leképezés, akkor

$$Q(x) = S(x, x),$$

tehát $Q$ megkapható $S$-ből. Mivel

$$\begin{aligned} Q(x + y) &= B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) \\ &= Q(x) + Q(y) + S(x, y) + A(x, y) + S(y, x) + A(y, x) \\ &= 2S(x, y) + Q(x) + Q(y), \end{aligned}$$

$Q$, és így a $B$ is egyértelműen meghatározza $S$-et, tehát $A$ is egyértelműen meghatározott. $\square$

**7.2.37. Példa: vektoriális szorzat.** Jelölje $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisát $i, j, k$. A vektoriális szorzás az egyetlen bilineáris és antiszimmetrikus $(x, y) \mapsto x \times y$ műveletet $\mathbb{R}^3$-ban, amelyre $i \times j = k$, $j \times k = i$ és $k \times i = j$.

**7.2.38. Tétel: szimmetrikus és alternáló bilineáris leképezések mátrixa.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett*

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

*bázissal, $W$ pedig egy másik vektortér $\mathbb{K}$ felett. A $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ bilineáris leképezés pontosan akkor szimmetrikus, ha $1 \le i < j \le n$ esetén $B(e_j, e_i) = B(e_i, e_j)$ $\big[$a $B(e_i, e_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ vektorok tetszőlegesek$\big]$, és pontosan akkor alternáló, ha $1 \le i < j \le n$ esetén $B(e_j, e_i) = -B(e_i, e_j)$ és $B(e_i, e_i) = 0$, ha $i = 1, 2, \dots, n$.*

**Bizonyítás.** A feltételek szükségessége nyilvánvaló. Másrészt, ha $x$ koordinátái $\xi_i$, az $y$ koordinátái pedig $\eta_i$, akkor az első esetben

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j B(e_j, e_i) = B(y, x),$$

a második esetben pedig

$$B(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \xi_j B(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i) B(e_i, e_j) = 0. \ \square$$

**7.2.39. Szimmetrikus bilineáris formák átlós alakra hozása.** Ebben a pontban megmutatjuk, hogy véges dimenziós esetben megfelelő bázist választva elérhető, hogy egy adott szimmetrikus bilineáris forma mátrixában minden főátlón kívüli elem nulla legyen. (Az eljárás nem működik bármely test esetén, csak ha $1 + 1 \ne 0$). Tegyük fel, hogy a mátrix $n \times n$-es. A $k$-adik lépésben ($k = 1, 2, \dots, n$) azt fogjuk elérni, hogy a $k$-adik sor és oszlop minden főátlón kívüli eleme nulla legyen. Ha a főátlóban álló elem nulla, de van olyan $k < j \le n$, amelyre a $j$-edik sor $j$-edik eleme nem nulla, akkor cseréljük meg a $k$-adik oszlopot a $j$-edik oszloppal és a $k$-adik sort a $j$-edik sorral: ezzel elérjük, hogy a főátlóban álló elem nem nulla. Ha $k \le j \le n$-re a $j$-edik sor $j$-edik eleme nulla, de van olyan $k < j \le n$, amelyre a $k$-adik sor $j$-edik eleme nem nulla, akkor adjuk hozzá a $j$-edik sort a $k$-adik sorhoz és a $j$-edik oszlopot a $k$-adik oszlophoz: ezzel elérjük, hogy a főátlóban álló elem nem nulla. Ezután a $k$-adik oszlop, illetve sor egy alkalmas többszörösét hozzáadva a $j$-edik oszlophoz, illetve sorhoz, elérhetjük, hogy a $k$-adik sor $j$-edik eleme és a $k$-adik oszlop $j$-edik eleme nulla legyen. Ezt mindegyik $k < j \le n$-re elvégezve, elérjük, hogy a $k$-adik sor és oszlop minden főátlón kívüli eleme nulla legyen. Ha szükséges, felírhatjuk az egyszerű bázistranszformációknak megfelelő egyes lépések áttérésmátrixát, és ezen mátrixok összeszorzásával megkaphatjuk a báziscsere áttérésmátrixát.

Az eljárást szokás kvadratikus forma négyzetösszeggé transzformálásának vagy *főtengely-transzformáció*jának is nevezni, mert az átlós alakú szimmetrikus bilineáris formához tartozó kvadratikus forma egy vektorhoz a koordinátái négyzeteinek lineáris kombinációját rendeli.

**7.2.40. Megjegyzés.** Az előző eljárásban a komplex esetben azt is elérhetjük, hogy a főátlóban csak 0 vagy 1 álljon. Ha ugyanis $\alpha \neq 0$ áll a főátlóban, akkor a megfelelő bázisvektort $1/\sqrt{\alpha}$-szorosra cserélve, $\alpha$ helyére 1 kerül. A valós esetben csak azt tudjuk elérni, hogy a főátlóban 0 és $\pm 1$ értékek álljanak, a megfelelő bázisvektort $1/\sqrt{|\alpha|}$-szeresére cserélve.

⋆ **7.2.41. Antiszimmetrikus bilineáris formák átlós alakra hozása.** Hasonlóan eljárva, mint a szimmetrikus bilineáris formák esetén, bármely antiszimmetrikus bilineáris formához találhatunk olyan bázist, amelyben a mellékátlón kívül minden elem nulla. Akár valós, akár komplex esetben, az előző megjegyzés szerint eljárva, elérhető, hogy a nem nulla elemek csak $\pm 1$-ek legyenek, és az is, hogy a főátló alatt legyenek a $+1$-ek, alatta pedig a $-1$-ek.

**7.2.42. Definit és indefinit kvadratikus formák.** Egy $Q$ kvadratikus formát az $\mathbb{R}$ feletti $V$ vektortéren *pozitív szemidefinit*nek, illetve *negatív szemidefinit*nek nevezünk ha $Q(x) \geq 0$, illetve $Q(x) \leq 0$ minden $x \in V$-re, egyébként a kvadratikus formát *indefinit*nek nevezzük. Ha minden $0 \neq x \in V$-re $Q(x) > 0$, illetve $Q(x) < 0$, akkor a kvadratikus formát *pozitív definit*nek, illetve *negatív definit*nek nevezzük. [Komplex vektortér esetén ezen fogalmaknak nincs értelme, hiszen $Q(ix) = -Q(x)$.]

Az, hogy $Q$ negatív szemidefinit, illetve negatív definit, nyilván azzal ekvivalens, hogy $-Q$ pozitív szemidefinit, illetve pozitív definit, így elég az egyik esettel foglalkozni. Definit kvadratikus forma nyilván szemidefinit is, mert $Q(0) = 0$.

A kvadratikus forma főtengely-transzformációja után könnyen eldönthető, hogy milyen jellegű: ha a diagonálisban csupa pozitív elem van, akkor pozitív definit, ha csupa nemnegatív elem van, akkor pozitív szemidefinit, ha viszont van negatív és pozitív elem is, akkor indefinit.

**7.2.43. Sylvester-féle tehetetlenségi tétel.** *Véges dimenziós vektortér egy $S$ szimmetrikus bilineáris formája esetén a főtengely-transzformáció után a mátrixában a főátlóban álló pozitív, negatív, illetve nulla elemek száma mindig ugyanannyi.*

⋆ **Bizonyítás.** Legyen két főtengely-transzormáció után a főátlóban álló pozitív, nulla, illetve negatív elemek száma rendre $p$, $z$ és $n$, illetve $p'$, $z'$ és $n'$. Legyenek a megfelelő bázisok vektorai $e_1, e_2, \ldots, e_m$, illetve $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$, úgy felsorolva, hogy előbb a pozitív, majd a nulla, végül a negatív főátlóbeli elemnek megfelelő bázisvektorok következzenek, és tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{p+z} e_{p+z} + \alpha'_1 e'_{m-n'+1} + \cdots + \alpha'_{n'} e'_m = 0,$$

azaz

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{p+z} e_{p+z} = -\alpha'_1 e'_{m-n'+1} - \cdots - \alpha'_{n'} e'_m.$$

Mivel a bal oldalon szereplő $x$ lineáris kombinációra $S(x, x) \geq 0$, ugyanez teljesül a jobb oldalon álló lineáris kombinációra is, ami csak úgy lehetséges, hogy a jobb oldalon minden együttható nulla, azaz $x = 0$. Innen az $e_1, \ldots, e_m$ vektorok lineáris függetlensége miatt a bal oldalon is minden együttható nulla, tehát $e_1, \ldots, e_{p+z}, e'_{m-n'+1}, \ldots, e'_m$ lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy $p + z + n' \leq m = p + z + n$, azaz $n' \leq n$. A vesszős és vessző nélküli betűk szerepét felcserélve, $n \leq n'$, ahonnan $n = n'$. Teljesen hasonlóan adódik, hogy $p = p'$. Végül a két egyenlőségből $z = z'$.

$\star$ **7.2.44. Konjugált bilineáris leképezések.** Komplex $U$, $V$, $W$ terek esetén a bilineáris leképezéseknél fontosabb szerepet játszanak a *konjugált bilineáris leképezés*ek. Ezek olyan $B: U \times V \to W$ leképezések, amelyek az első változóban lineárisak, ha a második változót rögzítjük, ha viszont az első változót rögzítjük, akkor a második változóban *konjugált lineáris*ak: additívak és *konjugált homogén*ek, azaz $B(x, \alpha y) = \overline{\alpha} B(x, y)$ minden $x \in X$, $y \in Y$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén. Ugyanúgy mint a bilineáris leképezéseknél kapjuk, hogy ha

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m \quad \text{és} \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n,$$

ahol

$$e_1, \ldots, e_m \in U, \quad f_1, \ldots, f_n \in V,$$

és

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C},$$

akkor

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j B(e_i, f_j). \tag{1}$$

Speciálisan, ha az $U$, illetve a $V$ egy-egy generátorrendszeréből alkotott párokon ismerjük $B$ értékét, akkor $B$ egyértelműen meghatározott. Ha $e_1, \ldots, e_m$ az $U$, az $f_1, \ldots, f_n$ pedig a $V$ egy bázisa, akkor tetszőlegesen választva a $g_{i,j} \in W$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ vektorokat, egy és csak egy olyan konjugált bilineáris leképezése létezik $U \times V$-nek $W$-be, amelyre $B(e_i, f_j) = g_{i,j}$; nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban konjugált bilineáris. A $(g_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot a konjugált bilineáris leképezés *mátrix*ának nevezzük. Ennek elemei $W$-beliek; ha $W = \mathbb{C}$, tehát ha konjugált bilineáris formáról van szó, akkor komplex számok.

$\star$ **7.2.45. Tétel.** *Legyenek $U$ és $V$ véges dimenziós lineáris terek $\mathbb{C}$ felett*

$$e_1, e_2, \ldots, e_m \quad \textit{és} \quad e'_1, e'_2, \ldots, e'_m,$$

*illetve*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \quad \textit{és} \quad f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$$

*bázisokkal, $B: U \times V \to \mathbb{C}$ egy konjugált bilineáris forma. Ha $S$, illetve $T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációi az $U$, illetve a $V$ térben, $[B]$ pedig a $B$ mátrixa a vessző nélküli bázisokban, akkor a $B$ mátrixa a vesszős bázisokban $[S]'[B]\overline{[T]}$.*

**Bizonyítás.** Jelölje $(s_{i,j})$, illetve $(t_{i,j})$ az áttérésmátrixokat. Mivel

$$B(e'_r, f'_s) = \sum_{i=1}^{m} s_{i,r} \sum_{j=1}^{n} \overline{t}_{j,s} B(e_i, f_j),$$

kapjuk az állítást. $\square$

⋆ **7.2.46. Következmény.** *Ha*

$$U = V, \text{ emiatt } m = n \text{ és } e_j = f_j,\ e'_j = f'_j, \text{ ha } j = 1, 2, \ldots, n,$$

*$S = T$ a vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja $U = V$-ben, akkor a $B$ bilineáris forma mátrixa $[T]'[B]\overline{[T]}$ a vesszős bázisokban.* □

⋆ **7.2.47. Hermite-formák.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $U = V$, akkor egy $B \in \mathcal{L}(V, V; W)$ konjugált bilineáris leképezésből képezhetünk a $Q(x) := B(x, x)$ definícióval egy $Q: V \to W$ leképezést. Egy tetszőleges konjugált bilineáris leképezés visszakapható az így képzett $Q$ leképezésből:

$$B(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} i^j Q(x + i^j y).$$

Egy $B: V \times V \to \mathbb{C}$ konjugált bilineáris formát *Hermite-szimmetrikus*nak, illetve *Hermite-antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$, illetve $B(x, y) = -\overline{B(y, x)}$ minden $x, y \in V$-re. Nyilván $B$ pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha $iB$ Hermite-antiszimmetrikus. Tetszőleges $B$ konjugált bilineáris forma egyértelműen írható fel $B = S + A$ alakban, ahol $S$ Hermite-szimmetrikus, $A$ pedig Hermite-antiszimmetrikus, ugyanis

$$S(x, y) = \frac{B(x, y) + \overline{B(y, x)}}{2} \quad \text{és} \quad A(x, y) = \frac{B(x, y) - \overline{B(y, x)}}{2}.$$

Ha $B$ Hermite-szimmetrikus, akkor a $Q(x) = B(x, x)$ függvény valós értékű, és megfordítva, ha $Q(x) = B(x, x)$ valós értékű, akkor

$$\overline{B(y, x)} = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} (-i)^j Q(y + i^j x) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{3} (-i)^j Q((-i)^j y + x) = B(x, y),$$

azaz $B$ Hermite-szimmetrikus. Ebben az esetben $Q$-t a $B$-hez tartozó *Hermite-formá*nak nevezzük. A Hermite-formák ugyanúgy transzformálhatók főtengelyre, mint a kvadratikus formák, és a *Sylvester-féle tehetetlenségi tétel* megfelelője is érvényben marad.

Ha $V$ véges dimenziós, akkor $B$ pontosan akkor Hermite-szimmetrikus, ha (akármilyen bázisban) a mátrixa megegyezik a konjugált transzponáltjával, és pontosan akkor Hermite-antiszimmetrikus, ha mátrixa a konjugált transzponáltjának az ellentettjével egyezik meg.

**7.2.48. Feladat [6].** A valós változós, $\mathbb{K}$-beli együtthatós legfeljebb harmadfokú polinomok terén az alábbi leképezések közül melyek bilineárisak? Ezeknek írjuk fel a mátrixát! Melyik szimmetrikus, melyik antiszimmetrikus?

(1) $(p, q) \mapsto p(1)q(1)$;

(2) $(p, q) \mapsto p(1) + q(1)$;

(3) $(p, q) \mapsto p(1)q(2)$;

(4) $(p, q) \mapsto p(1)q(1) + p(2)q(2)$;

(5) $(p, q) \mapsto p(1)q(2) + p(2)q(1)$;

(6) $(p,q) \mapsto p(1)q(2) - p(2)q(1)$;

(7) $(p,q) \mapsto p'(1)q(1)$;

(8) az $x^2$ együtthatója $p(x)q(x)$-ben;

(9) $(p,q) \mapsto p(x)q(y)$;

(10) $(p,q) \mapsto \int_0^1 p'(x)q(y)\,dy$.

**7.2.49. Feladat [5].** Az alábbi három mátrix valós bilineáris forma mátrixa. Írjuk fel a megfelelő szimmetrikus és antiszimmetrikus formák mátrixát! A szimmetrikus forma mátrixát hozzuk átlós alakra, és döntsük el, hogy definit, szemidefinit vagy indefinit-e?

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\star$ **7.2.50. Feladat [6].** Az előző feladatban kapott antiszimmetrikus formák mátrixát hozzuk átlós alakra!

$\star$ **7.2.51. Feladat [6].** A valós változós, $\mathbb{C}$-beli együtthatós legfeljebb harmadfokú polinomok terén az alábbi leképezések közül melyek konjugált bilineárisak? Ezeknek írjuk fel a mátrixát! Melyik Hermite-szimmetrikus, melyik Hermite-antiszimmetrikus?

(1) $(p,q) \mapsto p(1)q(1)$;

(2) $(p,q) \mapsto p(1)\overline{q}(1)$;

(3) $(p,q) \mapsto \overline{p}(1)q(1)$;

(4) $(p,q) \mapsto \overline{p}(1)\overline{q}(1)$;

(5) $(p,q) \mapsto p(1)\overline{q}(2)$;

(6) $(p,q) \mapsto p(1)\overline{q}(1) + p(2)\overline{q}(2)$;

(7) $(p,q) \mapsto p(1)\overline{q}(2) + p(2)\overline{q}(1)$;

(8) $(p,q) \mapsto p(1)\overline{q}(2) - p(2)\overline{q}(1)$;

(9) $(p,q) \mapsto p'(1)\overline{q}(1)$;

(10) az $x^2$ együtthatója $p(x)\overline{q}(x)$-ben;

(11) $(p,q) \mapsto p(x)\overline{q}(y)$;

(12) $(p,q) \mapsto \int_0^1 p'(x)\overline{q}(y)\,dy$.

$\star$ **7.2.52. Feladat [5].** Az alábbi mátrix komplex bilineáris forma mátrixa. Írjuk fel a megfelelő Hermite-szimmetrikus és Hermite-antiszimmetrikus forma mátrixát! A Hermite-szimmetrikus forma mátrixát hozzuk átlós alakra!

$$\begin{pmatrix} 4 & 2+2i & 4i \\ 6-2i & 4i & 6 \\ 2-2i & -2i-4 & 10 \end{pmatrix}$$

$\star$ **7.2.53. Feladat [6].** Az előző feladatban kapott Hermite-antiszimmetrikus formák mátrixát hozzuk átlós alakra!

⋆ **7.2.54. Multilineáris leképezések.** Legyenek

$$U_1, U_2, \dots, U_m$$

és $V$ lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $M: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \to V$ leképezést $m$-lineárisnak vagy *multilineáris*nak nevezünk, ha „minden változójában lineáris", azaz $i = 1, 2, \dots, m$-re tetszőlegesen választva az $x_j \in U_j$, $j \neq i$ vektorokat, az

$$x \mapsto M(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m), \quad x \in U_i$$

leképezés lineáris. Az összes, $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$-et $V$-be képező multilineáris leképezések halmazát $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$-vel jelöljük. Könnyű látni, hogy $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$ a függvények szokásos összeadásával és skalárral való szorzásával lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Teljes indukcióval ($m$ szerint), ha $x_i = \alpha_{i,1}e_{i,1} + \alpha_{i,2}e_{i,2} + \dots + \alpha_{i,n_i}e_{i,n_i}$, ahol $e_{i,1}, \dots, e_{i,n_i} \in U_i$ és $\alpha_{i,j} \in K$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n_i$, akkor

$$M(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n_m} \alpha_{1,j_1} \cdots \alpha_{m,j_m} M(e_{1,j_1}, \dots, e_{m,j_m}). \tag{1}$$

Speciálisan, ha az $U_i$ vektorterek egy-egy generátorrendszeréből alkotott $m$-eseken ismerjük $M$ értékét, akkor $M$ egyértelműen meghatározott. Ugyanúgy, mint a lineáris leképezéseknél belátható, hogy ha $e_{i,1}, \dots, e_{i,n_m}$ az $U_i$ bázisa, ha $i = 1, 2, \dots, m$, akkor tetszőlegesen választva a $f_{j_1,j_2,\dots,j_m} \in V$, $i = 1, \dots, m$, $j_i = 1, \dots, n_i$ vektorokat, egy és csak egy olyan $m$-lineáris leképezése létezik $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m$-nek $V$-be, amelyre

$$M(e_{1,j_1}, e_{2,j_2}, \dots, e_{m,j_m}) = f_{j_1,j_2,\dots,j_m} \in V, \quad i = 1, \dots, m,\ j_i = 1, \dots, n_i;$$

nem kell mást tennünk, mint (1) jobb oldalával definiálni a leképezést és kiszámolni, hogy valóban $m$-lineáris.

⋆ **7.2.55. Tétel.** *Legyenek $U_1, U_2, \dots, U_m$ és $V$ lineáris terek $\mathbb{K}$ felett. Ekkor a*

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m) := S(x_1)(x_2, x_3, \dots, x_m),$$

*ha $x_i \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ összefüggés egy $S \mapsto T$ természetes lineáris izomorfizmust definiált $\mathcal{L}(U_1; \mathcal{L}(U_2, U_3, \dots, U_m; V))$ és $\mathcal{L}(U_1, U_2, \dots, U_m; V)$ között.*

**Bizonyítás.** Egyszerű számolás. □

⋆ **7.2.56. Példa.** Ha $U$ és $V$ véges dimenziós vektorterek, akkor korábbról felhasználva, hogy létezik egy természetes izomorfizmus $V$ és $V'' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ között, egy természetes izomorfizmust kapunk $\mathcal{L}(U; V)$ és $\mathcal{L}(U; \mathcal{L}(V'; \mathbb{K}))$, és így az előző tételből $\mathcal{L}(U; V)$ és $\mathcal{L}(U, V'; \mathbb{K})$ között.

⋆ **7.2.57. Tenzorok, tenzorszorzat.** Az előző tétel és példa alapján, ha $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, számos tér [például $\mathcal{L}(V; V)$, $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; V))$ stb.] természetes módon izomorf az $\mathcal{L}(V, V, \dots, V, V', V', \dots, V'; \mathbb{K})$ terek valamelyikével. Ha itt $k \in \mathbb{N}$ számú $V$ és $\ell \in \mathbb{N}$ számú $V'$ szerepel, akkor ezt a teret, amelynek elemei $k + \ell$-lineáris formák, $\mathbb{T}_k^\ell(V)$-vel jelöljük, elemeit $k$-szor *kovariáns*, $\ell$-szer *kontravariáns tenzor*oknak nevezzük. Az 1-szer kovariáns, 0-szor kontravariáns tenzorok $V'$ elemei, a 0-szor kovariáns, 1-szer kontravariáns tenzorok pedig $V''$ elemei, így $V$ elemeivel azonosíthatók. A 0-szor kovariáns és 0-szor kontravariáns tenzorokat $\mathbb{K}$ elemeinek tekinthetjük. (A tenzor szó a fizikából ered: a szilárd testek deformációjánál fellépő feszültség idegen szóval ‘tenzió’ egy szimmetrikus bilineáris forma, és más hasonló mennyiségek is fellépnek.)

Ha

$$k_1, k_2, \dots, k_m, \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m \in \mathbb{N},$$

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_m, \quad \ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m,$$

és $T_j \in \mathbb{T}_{k_j}^{\ell_j}$, ha $j = 1, 2, \dots, m$, akkor a

$$\begin{aligned} &T(x_{1,1}, \dots, x_{1,k_1}, x_{2,1}, \dots, x_{m,k_m}, x'_{1,1}, \dots, x'_{m,\ell_m}) \\ &\quad = \prod_{j=1}^{m} T_j(x_{j,1}, \dots, x_{j,k_j}, x'_{j,1}, \dots, x'_{j,\ell_j}) \end{aligned}$$

($j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, k_j$ esetén $x_{j,i} \in V$ és $j = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, \ell_j$ esetén $x'_{j,i} \in V'$) összefüggéssel definiált $T \in \mathbb{T}_k^\ell$ tenzort a $T_j$ tenzorok *tenzorszorzat*ának nevezzük. Megjegyezzük, hogy $\mathbb{T}_k^\ell$ nem minden eleme áll elő ilyen alakban, már akkor sem, ha $m = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Például ha $\dim(V) = 2$ és $e_1, e_2$ egy bázis $V$-ben, akkor az a $T \in \mathbb{T}_2^0$ bilineáris forma, amelyre $T(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, nem áll elő $\mathbb{T}_1^0$-beli $T_1, T_2$ lineáris formák szorzataként, mert a $0 = T(e_1, e_2) = T_1(e_1)T_2(e_2)$ összefüggésből $T_1(e_1) = 0$ vagy $T_2(e_2) = 0$ következne, de az első eset $1 = T(e_1, e_1) \neq T_1(e_1)T_2(e_1) = 0$, a második pedig $1 = T(e_2, e_2) \neq T_1(e_2)T_2(e_2) = 0$ miatt vezet ellentmondásra.

Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázisa $V$-nek, $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ pedig a megfelelő duális bázisa $V'$-nek. Egy $T \in \mathbb{T}_k^\ell$ tenzort egyértelműen jellemezhetünk a

$$t_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{i'_1, i'_2, \dots, i'_\ell} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, e'_{i'_1}, e'_{i'_2}, \dots, e'_{i'_\ell})$$

*koordinátá*kkal; a $V'$-beli változókhoz tartozó, úgynevezett kontravariáns indexeket hagyományosan felső indexként írjuk.

A kovariáns és kontravariáns elnevezésekre a következő tétel ad magyarázatot. Bizonyításához szükségünk lesz egy segédtételre.

$\star$ **7.2.58. Segédtétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett,*

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad \textit{illetve} \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

*egy-egy bázisa $V$-nek,*

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \quad \textit{illetve} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

*a megfelelő duális bázisai $V'$-nek. Ha az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisról az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisra való áttérés kísérő transzformációjának mátrixa $a = (a_{i,j})$, akkor a duális bázisok közötti áttérés kísérő transzformációjának mátrixa $a = (a_{i,j})$ inverzének a transzponáltja, azaz $(a^{-1})'$.*

A segédtétel állítását úgy szokás kifejezni, hogy $V$ vektorai *kogrediens*, míg $V'$ vektorai *kontragrediens* módon változnak. Az elnevezés arra utal, hogy báziscserénél $V$ vektorainak új koordinátáit a kísérő transzformáció mátrixa, míg $V'$ vektorainak új koordinátáit az kísérő transzformáció mátrixának inverze segítségével számolhatjuk ki.

**Bizonyítás.** Jelölje $(b_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ a keresett mátrixot, amelyre tehát

$$f'_{j'} = \sum_{j=1}^{n} b_{j,j'} e'_j, \quad \text{ha} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ekkor

$$\delta_{j,j'} = f'_{j'}(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f'_{j'}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \sum_{j=1}^{n} b_{j,j'} e'_j(e_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j'} a_{i,j},$$

ahonnan $b$ transzponáltjának és $a$-nak a szorzata az egységmátrix, így következik az állítás. $\square$

⋆ **7.2.59. Tenzorok koordinátáinak transzformációja.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett,*

$$e_1, e_2, \dots, e_n, \quad \textit{illetve} \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

*egy-egy bázisa $V$-nek,*

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n, \quad \textit{illetve} \quad f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

*a megfelelő duális bázisai $V'$-nek. Ha az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázisról az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisra való áttérés mátrixa $(a^i_j)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$, ennek inverze pedig $(b^i_j)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$, ahol az oszlopindexet mindkét esetben felülre írtuk, és a $T \in \mathbb{T}^\ell_k$ tenzor koordinátái az első bázisban a $t^{i'_1,\dots,i'_\ell}_{i_1,\dots,i_k}$ számok, akkor a második bázisban a $T$ koordinátái az*

$$s^{j'_1,\dots,j'_\ell}_{j_1,\dots,j_k} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \sum_{i'_1=1}^{n} \cdots \sum_{i'_\ell=1}^{n} t^{i'_1,\dots,i'_\ell}_{i_1,\dots,i_k} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_k}_{j_k} b^{j'_1}_{i'_1} \cdots b^{j'_k}_{i'_k}, \tag{1}$$

*$1 \le j_1, j_2, \dots, j_k, j'_1, j'_2, \dots, j'_\ell \le n$ számok.*

Látható, hogy a formulában a kovariáns indexekhez az $a$ áttérésmátrix tartozik, míg a kontravariáns indexekhez annak $b$ inverze. Ez indokolja a kovariáns és kontravariáns elnevezéseket.

**Bizonyítás.** Mivel $f_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i$ és $f'_j = \sum_{i=1}^{n} b^j_i e'_i$ (sic!),

$$\begin{aligned} &T(f_{j_1}, \dots, f_{j_k}, f'_{j'_1}, \dots, f'_{j'_\ell}) \\ &\quad = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i'_\ell=1}^{n} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_k}_{j_k} b^{j'_1}_{i'_1} \cdots b^{j'_k}_{i'_k} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e'_{i'_1}, \dots, e'_{i'_\ell}). \ \square \end{aligned}$$

⋆ **7.2.60. Einstein-konvenció.** Mint látjuk, tenzorokkal való számolásnál sok szumma jel szerepel. Ezen segít az *Einstein-konvenció*: a szummákat nem írjuk ki, de minden kétszer előforduló indexre összegezni kell. Például az előző tétel (1) formulája ezzel a konvencióval így néz ki:

$$s^{j'_1,\ldots,j'_\ell}_{j_1,\ldots,j_k} = t^{i'_1,\ldots,i'_\ell}_{i_1,\ldots,i_k} a^{i_1}_{j_1} \cdots a^{i_k}_{j_k} b^{j'_1}_{i'_1} \cdots b^{j'_k}_{i'_k}.$$

**7.2.61. Permutációk.** Egy halmaz *permutáció*ján a halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezését értjük. Az $X$ halmaz összes permutációi között tekinthetjük a $\circ$ műveletet, azaz az összetett függvény képzést. Ez a művelet asszociatív, bármely permutációt az $\mathbb{1}_X$ identikus leképezéssel szorozva akár balról, akár jobbról, az adott permutációt kapjuk vissza, és bármely permutációt akár balról, akár jobbról szorozva a függvényként vett inverzével, az identikus leképezést kapjuk. Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát ezzel a művelettel $S_n$-nel fogjuk jelölni és $n$-edfokú *szimmetrikus csoport*nak nevezzük. Elemei olyan $\{1, 2, \ldots, n\}$-beli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sorozatok, amelyeknek minden tagja különböző. Az ilyen sorozatok száma nyilván $n!$.

Egy $p \in S_n$ permutációra, ha $k$ összes olyan $1 \le i < j \le n$ párok száma, amelyekre $p_i > p_j$, azaz az inverziók száma, akkor legyen $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^k$. A permutációt *páros*nak, illetve *páratlan*nak nevezzük aszerint, hogy $k$ páros vagy páratlan, azaz $\operatorname{sgn}(p) = 1$, illetve $\operatorname{sgn}(p) = -1$. Például az identikus permutáció páros.

Az identikus permutációtól eltekintve a legegyszerűbb permutációk azok, amelyek csak két elemet cserélnek meg, ezeket *transzpozíció*knak nevezzük. Az $S_n$ minden eleme felírható transzpozíciók szorzataként, sőt, olyan transzpozíciók szorzataként is, amelyek két szomszédos elemet cserélnek meg: vigyük a helyére $p_1$-et, majd $p_2$-t stb. Bár ez az előállítás nem egyértelmű, az alábbi állítás igaz:

**7.2.62. Tétel.** *Egy $p \in S_n$ permutáció pontosan akkor páros, ha előállítható páros sok transzpozíció szorzataként, és pontosan akkor páratlan, ha páratlan sok transzpozíció szorzataként állítható elő.*

**Bizonyítás.** Csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy permutációt balról szorzunk egy transzpozícióval, akkor megváltozik a permutáció paritása. Ha egy $p$ permutációt szorzunk az $i$-edik és $j$-edik elemeket megcserélő transzpozícióval balról, ahol $1 \le i < j \le n$, akkor az eredményben $k < i$ vagy $k > j$ esetén azon inverziók száma, amelyekben $p_k$ részt vesz, nem változik. Ugyanez a helyzet, ha $i < k < j$, de $p_k$ vagy nagyobb, mint $\max\{p_i, p_j\}$ vagy kisebb, mint $\min\{p_i, p_j\}$. Ha $i < k < j$ és $\min\{p_i, p_j\} < p_k < \max\{p_i, p_j\}$, akkor azon inverziók száma, amelyekben $p_k$ részt vesz, kettővel változik. Mivel $p_i > p_j$ esetén egy inverzió megszűnik, $p_i < p_j$ esetén pedig egy új keletkezik, az állítást beláttuk. $\square$

**7.2.63. Következmény.** *Az $S_n$ csoportban egy páros és egy páratlan permutáció szorzata páratlan. Két páros vagy két páratlan permutáció szorzata páros.* $\square$

**7.2.64. Terület, térfogat és determináns.** A síkban két vektor által kifeszített paralelogramma területe, illetve térben három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata három alapvető tulajdonsággal rendelkezik. Az első tulajdonság, hogy akkor biztosan nulla, ha a vektorok közül kettő megegyezik. A második tulajdonság, hogy bármelyik vektort egy nemnegatív valós számmal szorozva, a terület, illetve térfogat az adott számmal szorzódik. A harmadik, hogy az egyik vektort két, egymással „nem túl nagy” szöget bezáró vektor összegével helyettesítve, a területek, illetve térfogatok összeadódnak.

A második és harmadik feltételt a könnyebben kezelhető homogenitással, illetve additivitással helyettesíthetjük, ha „előjeles területet”, illetve „előjeles térfogatot” is megengedünk. Meg kell még mondanunk, hogy mely, például egy adott bázis által kifeszített paralelogramma, illetve paralelepipedon területét, illetve térfogatát választjuk egységnek. Ez a három tulajdonság és az egységnyi terület, illetve térfogat kijelölése jellemez is egy „előjeles területet”, illetve „előjeles térfogatot”.

Általánosabban, legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, és tekintsünk egy $n$-lineáris $D\colon V^n \to \mathbb{K}$ formát, amelyről feltesszük, hogy *alternáló*, azaz (definíció szerint) ha két változója megegyezik, akkor nulla. Ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $V$ egy bázisa, és $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$, akkor $D$-t az adott bázishoz tartozó *determináns*nak nevezzük, a $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ skalárt pedig az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorrendszer adott bázishoz tartozó *determinánsá*nak. A determináns geometriai jelentése $\mathbb{R}^n$-ben az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorok által kifeszített „paralelepipedon” előjeles „$n$ dimenziós térfogata”, ahol az $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis által kifeszített „paralelepipedon” előjeles „$n$ dimenziós térfogatát” választjuk egységnek.

**7.2.65. Tétel.** *Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $D\colon V^n \to \mathbb{K}$ egy $n$-lineáris alternáló forma. Ekkor bármely $p \in S_n$ permutációra és $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ vektorrendszerre*

$$D(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}) = \operatorname{sgn}(p) D(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

*Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor $D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $V$ egy bázisa, $x_j$ koordinátái a $\xi_{i,j}$ számok, akkor*

(1) $$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

*és bármely $D(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ skalárra (1) jobb oldala egy $n$-lineáris alternáló formát definiál.*

⋆ **Bizonyítás.** Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor valamelyik vektora előállítható az előtte lévők lineáris kombinációjaként. A $D$ multilinearitását felhasználva, $D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olyan tagok lineáris kombinációjaként állítható elő, amelyekben két változó megegyezik, tehát értéke nulla.

Mivel

$$\begin{aligned} 0 &= D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_j, \ldots, x_{j-1}, x_i + x_j, \ldots, x_n) \\ &= D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) + 0 \\ &\quad + 0 + D(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy $D$ értéke az ellentettjére változik, ha két változóját felcseréljük. Innen bármely $p \in S_n$ permutációra

$$D(x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}) = \operatorname{sgn}(p) D(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ha $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a $V$ egy bázisa, $x_j$ koordinátái a $\xi_{i,j}$ számok ($1 \le i, j \le n$), akkor a multilinearitást kihasználva,

$$\begin{aligned} D(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le p_1, p_2, \ldots, p_n \le n} \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_{p_1}, e_{p_2}, \ldots, e_{p_n}) \\ &= \sum_{p \in S_n} \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n} D(e_{p_1}, e_{p_2}, \ldots, e_{p_n}), \end{aligned}$$

mert $D(e_{p_1}, e_{p_2}, \ldots, e_{p_n}) = 0$, ha $p_i = p_j$ valamely $i \neq j$-re, így a többi tag nulla. Az előbb bizonyított állítást felhasználva kapjuk (1)-et.

Azt, hogy bármely $D(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ skalárra (1) jobb oldala egy $n$-lineáris alternáló formát definiál, hasonlóan láthatjuk be, mint a bilineáris alternáló formáknál tettük.

**7.2.66. Következmény.** *Bármely bázishoz létezik az adott bázishoz tartozó determináns.* □

⋆ **7.2.67. Következmény.** *Bármely alternáló $n$-lineáris forma egy tetszőleges rögzített bázishoz tartozó determináns konstansszorosa.* □

**7.2.68. Következmény.** *Egy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorrendszernek egy adott bázishoz tartozó determinánsa csak a vektorrendszer adott bázisban vett koordinátáitól függ, és értéke a koordinátákkal kifejezve*

$$\sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n}. \ \square$$

**7.2.69. Mátrix determinánsa.** Az előző következmény szerint, az ottani jelölésekkel, egy vektorrendszer adott bázisban vett determinánsa csak az adott bázisban vett (négyzetes) mátrixától függ, így beszélhetünk önmagában egy $(\xi_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ négyzetes mátrix

$$\det\left((\xi_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}\right) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \xi_{p_1,1} \xi_{p_2,2} \cdots \xi_{p_n,n}$$

determinánsáról is. (Szokás a mátrix determinánsát a fenti egyenlőség jobb oldalával is definiálni.) A $|\xi_{i,j}|_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ vagy

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \cdots & \xi_{1,j} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{i,1} & \cdots & \xi_{i,j} & \cdots & \xi_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \xi_{n,1} & \cdots & \xi_{n,j} & \cdots & \xi_{n,n} \end{vmatrix}$$

jelölés is szokásos.

Az egységmátrix determinánsa nyilván 1, a nulla mátrixé pedig 0.

**7.2.70. Tétel.** *Egy $\mathbb{K}$-beli elemű $1 \times 1$-es, $2 \times 2$-es, illetve $3 \times 3$-as négyzetes mátrixra*

$$|\xi_{1,1}| = \xi_{1,1}, \quad \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{vmatrix} = \xi_{1,1}\xi_{2,2} - \xi_{1,2}\xi_{2,1},$$

$$\begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \xi_{1,3} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} & \xi_{2,3} \\ \xi_{3,1} & \xi_{3,2} & \xi_{3,3} \end{vmatrix} = \xi_{1,1}\xi_{2,2}\xi_{3,3} + \xi_{2,1}\xi_{3,2}\xi_{1,3} + \xi_{3,1}\xi_{1,2}\xi_{2,3}$$
$$- \xi_{1,3}\xi_{2,2}\xi_{3,1} - \xi_{2,3}\xi_{3,2}\xi_{1,1} - \xi_{3,3}\xi_{1,2}\xi_{2,1}.$$

**Bizonyítás.** Azonnal következik a definícióból. □

**7.2.71. Tétel.** *Egy $\mathbb{K}$-beli elemű $(\xi_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ négyzetes mátrix determinánsa megegyezik a transzponáltjának a determinánsával.*

$\star$ **Bizonyítás.** Ha $p$ és $q$ is $S_n$-beli permutációk, akkor (mivel $p \circ q$ is permutáció), a

$$\xi_{p_1,1}\xi_{p_2,2}\cdots\xi_{p_n,n} \quad \text{és} \quad \xi_{p_{q_1},q_1}\xi_{p_{q_2},q_2}\cdots\xi_{p_{q_n},q_n}$$

szorzatok csak tényezőik sorrendjében különböznek. Ha minden $p \in S_n$-hez tekintjük $q = p^{-1}$-et, akkor $p_{q_i} = i$ minden $i$-re, így az előző definíció alapján azt kapjuk, hogy

$$\det\left((\xi_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}\right) = \sum_{q^{-1}\in S_n} \operatorname{sgn}(q^{-1})\xi_{1,q_1}\xi_{2,q_2}\cdots\xi_{n,q_n}.$$

Figyelembe véve, hogy $\operatorname{sgn}(q^{-1}) = \operatorname{sgn}(q)$, és hogy ha $q^{-1}$ befutja $S_n$-et, akkor $q$ befutja $S_n$-et,

$$\det\left((\xi_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}\right) = \sum_{q\in S_n} \operatorname{sgn}(q)\xi_{1,q_1}\xi_{2,q_2}\cdots\xi_{n,q_n}.$$

A jobb oldal viszont nem más, mint a $(\xi_{j,i})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ transzponált mátrix determinánsa. □

**7.2.72. Következmény.** *A mátrix bármely oszlopát, illetve sorát megszorozva egy konstanssal, a determinánsa az adott konstanssal szorzódik. Ha a mátrix bármely oszlopa vagy sora nulla, akkor a determinánsa nulla. A mátrix determinánsa bármely oszlopának, illetve sorának additív függvénye. A mátrix bármely oszlopához hozzáadva egy másik oszlop konstansszorosát, illetve bármely sorához hozzáadva egy másik sor konstansszorosát, a determináns értéke nem változik. A mátrix bármely két oszlopát, illetve bármely két sorát felcserélve, a determinánsa ellenkezőjére változik.*

**Bizonyítás.** Oszlopműveletekre következik a definícióból, a sorműveletek pedig megfelelnek a transzponált mátrixon végzett oszlopműveleteknek. □

**7.2.73. Részmátrix, aldetermináns.** Egy $m\times n$-es $x = (x_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrix $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ sorindexekhez és $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_\ell \leq n$ oszlopindexekhez tartozó *részmátrix*án vagy *minormátrix*án az $(x_{i_r,j_s})_{r=1}^{k}{}_{s=1}^{\ell}$ mátrixot értjük, vagyis csak azokat az elemeket tartjuk meg, amelyeknek sorindexe az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ indexek valamelyike, oszlopindexe pedig a $j_1, j_2, \ldots, j_\ell$ indexek valamelyike.

Ha a mátrix $\mathbb{K}$-beli elemű mátrix, akkor az $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ sorindexekhez és $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ oszlopindexekhez tartozó *aldetermináns*án vagy *minor*án a megfelelő négyzetes részmátrix determinánsát értjük. A mátrix *determinánsrang*ján azt a legnagyobb $k$-t értjük, amelyre van a mátrixnak nem nulla determinánsú $k \times k$-as részmátrixa. Ha a mátrix determinánsrangja $k$, akkor a nem nulla determinánsú $k \times k$-as részmátrixokat (hibás szóhasználattal) *rangmeghatározó aldetermináns*oknak nevezzük.

Ha $m = n$, akkor az ugyanazon sor- és oszlopindexek által meghatározott aldeterminánsokat *főminor*oknak, az $1, 2, \ldots, k$ $(1 \leq k \leq n)$ sor- és oszlopindexek által meghatározott főminorokat pedig *sarokminor*oknak nevezzük.

**7.2.74. Tétel.** *Egy $\mathbb{R}$ feletti $V$ véges dimenziós vektortéren egy szimmetrikus bilineáris formából képzett kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha a bilineáris forma (bármilyen bázisban vett) mátrixának sarokminorai mind pozitívak.*

A tétel gyakran használatos valós kvadratikus forma pozitív definit voltának eldöntésére, bár a főtengely-transzformáció kevesebb számolással jár.

$\star$ **Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy ha a $B$ szimmetrikus bilineáris forma mátrixának főtengely-transzformációja során soha nem fordul elő, hogy a főátlóban nulla áll, akkor a sarokminorok nem változnak, így a kvadratikus forma pontosan akkor pozitív definit, ha a kapott átlós alak főátlójában pozitív elemek állnak, azaz ha a sarokminorok mind pozitívak. Ha a főtengely-transzformáció során először a $k$-adik lépésben fordul elő, hogy a főátlóban nulla áll, akkor az első ilyen esetig a sarokminorok nem változtak, az éppen aktuális sarokminor nulla, és ha $e_k$ az aktuális bázis $k$-adik eleme, akkor $B(e_k, e_k) = 0$. □

**7.2.75. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a $\mathbb{K}$-beli elemű $x = (x_{j,i})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ négyzetes mátrix*

$$\begin{pmatrix} y & w \\ 0 & z \end{pmatrix} \quad \textit{vagy} \quad \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$$

*alakú, ahol $y$ egy $m \times m$-es, $z$ pedig egy $(n-m) \times (n-m)$-es négyzetes mátrix, $1 \leq m < n$, azaz $x_{i,j} = 0$, ha $i > m$ és $j \leq m$, vagy pedig $x_{i,j} = 0$, ha $i \leq m$ és $j > m$. Ekkor $\det(x) = \det(y)\det(z)$.*

$\star$ **Bizonyítás.** Elég az első esetet bizonyítani, a másik transzponálással következik. Ha $i > m$ és $j \leq m$ esetén $x_{i,j} = 0$, akkor a

$$\sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) x_{p_1,1} x_{p_2,2} \cdots x_{p_n,n}$$

összegben minden olyan tag nulla, amelyre $p_j > m$ valamely $1 \leq j \leq m$-re, hiszen ekkor a szorzat egy tényezője nulla. Azokra a $p \in S_n$ permutációkra, amelyekre $1 \leq j \leq m$ esetén $1 \leq p_j \leq m$, az is teljesül, hogy $p_j > m$, ha $j > m$, azaz $p$ az $\{1, 2, \ldots, m\}$, illetve $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$ halmazok elemeit csak egymás között permutálja. Az ilyen $p$ permutációkra legyen $q \in S_m$ az a permutáció, amelyre $q_j = p_j$, ha $1 \leq j \leq m$, és legyen $r \in S_{n-m}$ az a permutáció, amelyre $r_j = p_{j+m} - m$. Az így kapott $p \mapsto (q, r)$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű és $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(r)$, így

$$\begin{aligned} \det(x) &= \sum_{q \in S_m} \sum_{r \in S_{n-m}} \operatorname{sgn}(q)\operatorname{sgn}(r) x_{q_1,1} \cdots x_{q_m,m} x_{m+r_1,m+1} \cdots x_{m+r_{n-m},n} \\ &= \sum_{q \in S_m} \operatorname{sgn}(q) x_{q_1,1} \cdots x_{q_m,m} \sum_{r \in S_{n-m}} \operatorname{sgn}(r) x_{m+r_1,m+1} \cdots x_{m+r_{n-m},n} \\ &= \det(y)\det(z). \ \square \end{aligned}$$

**7.2.76. Tétel.** *Egy $\mathbb{K}$-beli elemű $m \times n$-es mátrix sorrangja, oszloprangja és determinánsrangja megegyezik.*

A bizonyítás azt is mutatja, hogyan határozható meg egy négyzetes mátrix determinánsa Gauss-féle kiküszöböléssel.

**Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy a Gauss-féle kiküszöbölés első fázisa során végzett elemi sorműveletek nem változtatják meg a determinánsrangot. A sorcseréknél az egyes aldeterminánsok legfeljebb csak egymás közt cserélődnek és előjelet váltanak. Elég megmutatni, hogy az $i$-edik sor $\lambda \neq 0$-szorosát hozzáadva a $j$-edik sorhoz, a determinánsrang nem csökkenhet, mert akkor nem is nőhet, hiszen $-\lambda$-val megismételve a műveletet, csökkenne. Ha $k$ a determinánsrang, és a művelet után minden $k \times k$-as rangmeghatározó aldetermináns eltűnne, akkor azok mindegyikében szerepelne a $j$-edik sor, de nem szerepelne az $i$-edik sor. Egy ilyen rangmeghatározó aldeterminánsban a $j$-edik sort az $i$-edikre cserélve, a kapott aldetermináns nem lehet nulla, hiszen ha nulla lenne, akkor a művelet nem változtatná a rangmeghatározó aldetermináns értékét. Ez viszont ellentmondás, mert így van olyan rangmeghatározó aldetermináns, amelyben nem szerepel a $j$-edik sor.

Ha az első fázis a $k+1$-edik lépésben ér véget, akkor az előző tétel szerint a determinánsrang nyilván $k$, mert az eredménymátrixnak van olyan $k \times k$-as aldeterminánsa, amely felső háromszög alakú, és a főátlójában nem nulla elemek állnak, de minden nagyobb aldeterminánsnak valamelyik sora csupa nullát tartalmaz. Mivel az eljárás során az oszloprang sem változik, a determinánsrang és az oszloprang megegyeznek. Az, hogy a determinánsrang és a sorrang is megegyeznek, transzponálással következik.

**7.2.77. Kifejtési tétel.** *Jelölje a $\mathbb{K}$-beli elemű $x = (x_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ négyzetes mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának elhagyásával kapott aldeterminánsának értékét $X_{i,j}$. Ekkor bármely $i$ sorindexre* $\det(x) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x_{i,j}X_{i,j}$ *és bármely $j$ oszlopindexre* $\det(x) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}x_{i,j}X_{i,j}$.

⋆ **Bizonyítás.** Elég az oszlop szerinti kifejtésre vonatkozó állítást bizonyítani, a másik transzponálással adódik. Ha $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k}e_i$, ahol $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy tetszőleges bázis, és $D$ pedig az ehhez tartozó determináns, akkor

$$\begin{aligned}\det(x) &= D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_j, x_{j+1}, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Ha felírjuk a $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_i, x_{j+1}, \dots, x_n$ vektorrendszer mátrixát, és $j-1$ szomszédos oszloppal végzett oszlopcserével a $j$-edik oszlopot az első oszlop helyére, majd $i-1$ szomszédos sorral való sorcserével az abban lévő egyetlen nem nulla elemet, ami 1, az első sorba hozzuk, azt kapjuk, hogy

$$D(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, e_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = (-1)^{j-1+i-1}X_{i,j} = (-1)^{j+i}X_{i,j},$$

ahonnan következik az állítás. □

⋆ **7.2.78. Lineáris transzformáció determinánsa.** Legyen $V$ véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(V;V)$. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\det(A)$ skalár, amit a *lineáris transzformáció determinánsá*nak hívunk, és amelyre

$$D(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n) = \det(A)D(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

bármely $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektorrendszerre és bármely $D$ alternáló $n$-lineáris formára: A bizonyításhoz legyen $D_0$ egy adott $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázishoz tartozó determináns. Mivel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto D_0(Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n)$$

egy alternáló $n$-lineáris leképezés, van olyan $\det(A)$ skalár, hogy (1) fennáll $D = D_0$-ra és minden $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$-re. Az $x_j = e_j$ választással látjuk, hogy a konstans egyértelmű is, és nem más, mint az $A$ adott bázishoz tartozó mátrixának determinánsa. Ha most $D$ tetszőleges alternáló $n$-lineáris forma, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár, hogy $D = \lambda D_0$, így $D$-re szintén teljesül (1) ugyanazon $\det(A)$ szorzóval. Tehát ezt a számot az $A$ lineáris transzformáció már önmagában meghatározza, és nem más, mint a bázisvektorok képei által alkotott vektorrendszer determinánsa. Mivel az $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázis tetszőleges volt, azt is megkaptuk, hogy bármely bázisban vesszük $A$ mátrixát, ugyanaz a determinánsa.

⋆ **7.2.79. Determinánsok szorzástétele.** *Legyen $V$ véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A, B \in \mathcal{L}(V;V)$. Ekkor* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**Bizonyítás.** Az előző definíció jelöléseivel, (1)-ből

$$\begin{aligned}\det(AB)D_0(x_1, x_2, \dots, x_n) &= D_0((AB)x_1, (AB)x_2, \dots, (AB)x_n) \\ &= D_0(A(Bx_1), A(Bx_2), \dots, A(Bx_n)) \\ &= \det(A)D_0(Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_n) \\ &= \det(A)\det(B)D_0(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

ahonnan következik az állítás, mert $D_0$ nem azonosan nulla. □

**7.2.80. Determinánsok szorzástétele mátrixokra.** *Két $\mathbb{K}$-beli elemű egyforma méretű négyzetes mátrix szorzatának a determinánsa a determinánsaik szorzata.*

**Bizonyítás.** Az állítás következik az előző tételből, de közvetlen bizonyítás is adható: lásd Kuros [26] könyvét, 99. o.

**7.2.81. Megjegyzés: lineáris transzformáció determinánsa.** Legyen $V$ véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett

$$e_1, e_2, \dots, e_n \quad \text{és} \quad e'_1, e'_2, \dots, e'_n,$$

bázisokkal, $A \in \mathcal{L}(V;V)$. Legyen $T$ vessző nélküli bázisról a vesszős bázisra való áttérés kísérő transzformációja a $V$ térben. Az előző tétel szerint, mivel $[T^{-1}][T]$ az egységmátrix, $\det([T^{-1}])\det([T]) = 1$. Innen, ismét felhasználva az előző tételt,

$$\begin{aligned}\det([T^{-1}][A][T]) &= \det([T^{-1}])\det([A])\det([T]) \\ &= \det([A])\det([T^{-1}]) = \det([A]),\end{aligned}$$

azaz $A$ bármelyik bázisban vett márixának ugyanaz a determinánsa. Ennek alapján az $A$ *lineáris transzformáció determinánsa*úgy is definiálható, mint a — tetszőleges bázisban vett — mátrixának a determinánsa.

**7.2.82. Tétel.** *Legyen $V$ véges dimenziós lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $A \in \mathcal{L}(V;V)$ lineáris transzformáció pontosan akkor invertálható, ha* $\det(A) \neq 0$.

**Bizonyítás.** Ha $A$ invertálható, akkor $AA^{-1} = \mathbb{I}$, így $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, azaz $\det(A)$ nem lehet nulla. Ha $A$ nem kölcsönösen egyértelmű, akkor van olyan $e_1 \neq 0$ vektor, amelyre $A(e_1) = 0$. Kiegészítve $e_1$-et egy $e_1, e_2, \dots, e_n$ bázissá, ha $D$ az ehhez a bázishoz tartozó determináns, akkor $D(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = 0$, azaz $\det(A) = 0$. □

**7.2.83. Tétel.** *Legyen* $x = (x_{i,j})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ *egy* $\mathbb{K}$*-beli elemű négyzetes mátrix, és jelölje az* $i$*-edik sor és* $j$*-edik oszlop elhagyásával kapott aldeterminháns értékét* $X_{i,j}$*. Ekkor az* $x$ *mátrix akár balról, akár jobbról szorozva a* $\left((-1)^{i+j}X_{i,j}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ *mátrix transzponáltjával, azaz az* $y = \left((-1)^{i+j}X_{j,i}\right)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ *mátrixszal,* $\det(x)$*-szer az egységmátrix.*

Bár a tétel felhasználható az inverz mátrix kiszámítására, alkalmazása csak kis, illetve „ritka” (sok nullát tartalmazó) mátrixok esetén célszerű.

**Bizonyítás.** A $z = xy$ szorzatmátrix

$$z_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}x_{i,k}X_{j,k}$$

eleme a kifejtési tétel szerint $i = j$ esetén $\det(x)$, egyébként egy olyan mátrix determinánsa, amelynek egyik sora megegyezik egy másik sorral, tehát nulla. □

**7.2.84. Feladat [5].** Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 123456 & 123426 \\ 123457 & 123427 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1111 & 111 & 11 \\ 11111 & 1111 & 111 \\ 12345 & 1234 & 123 \end{vmatrix}.$$

**7.2.85. Feladat [5].** Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

(1)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -6 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix};$$

(4)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**7.2.86. Lineáris egyenletek.** Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(U;V)$ és $b \in V$. Az $Ax = b$ alakú *lineáris egyenlet* megoldhatóságával, megoldáshalmazának szerkezetével kívánunk foglalkozni. Szükségünk lesz a megfelelő $Ax = 0$ *homogén lineáris egyenlet* vizsgálatára is. Vegyük észre, hogy ha a terek véges dimenziósak, $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy bázis $U$-ban, $f_1, f_2, \dots, f_m$ pedig egy bázis $V$-ben, $A$ mátrixa $(a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$, a $b$ koordinátái pedig $b_1, b_2, \dots, b_m$, akkor $x \in U$ pontosan akkor megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ koordinátái kielégítik a

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots + & a_{1,j}x_j & + \cdots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}x_1 & + & a_{i,2}x_2 & + \cdots + & a_{i,j}x_j & + \cdots + & a_{i,n}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + \cdots + & a_{m,j}x_j & + \cdots + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix}$$

egyenletrendszert, így egy lineáris egyenlet megoldásai Gauss-eliminációval meghatározhatóak.

**7.2.87. Állítás.** *Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $b \in V$. Az $Ax = b$ lineáris egyenlet pontosan akkor megoldható, ha $b \in \operatorname{rng}(A)$.* □

**7.2.88. A szuperpozíció elve.** *Legyenek $U$ és $V$ vektorterek $\mathbb{K}$ felett, legyen $A \in \mathcal{L}(U; V)$ és $b_1, b_2, \dots, b_k \in V$. Tegyük fel, hogy $Ax_i = b_i$, ha $i = 1, 2, \dots, k$, legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ skalárok, és legyen $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k$. Ekkor*

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$$

*megoldása az $Ax = b$ egyenletnek.*

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned} Ax &= A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 A x_1 + \cdots + \alpha_k A x_k \\ &= \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_k b_k = b. \ \square \end{aligned}$$

**7.2.89. Következmény.** *Ha az $Ax = b$ egyenletnek van megoldása, akkor a megoldások affin sokaságot alkotnak.*

**Bizonyítás.** Legyen $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = b$. □

**7.2.90. Következmény.** *Az $Ax = 0$ homogén egyenlet megoldásai alteret alkotnak.*

**Bizonyítás.** Legyen $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$. □

**7.2.91. Következmény.** *Ha $x_1$ az $Ax = b$ egyenlet egy megoldása, akkor $x_2$ pontosan akkor megoldása az $Ax = b$ egyenletnek, ha $x_2 - x_1$ megoldása az $Ax = 0$ homogén egyenletnek.*

**Bizonyítás.** A $b_1 = b_2 = b$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ választással kapjuk, hogy $x_2 - x_1$ megoldása a homogén egyenletnek. A $b_1 = b$, $b_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ választással kapjuk, hogy ha $x_0$ a homogén egyenlet egy megoldása, akkor $x_2 = x_1 + x_0$ megoldása az $Ax = b$ egyenletnek. □

**7.2.92. Következmény.** *Ha $\ker(A) = \{0\}$, akkor az $Ax = b$ egyenletnek minden $b \in V$-re legfeljebb egy megoldása van.* □

**7.2.93. Következmény.** *Ha az $Ax = b$ egyenlet megoldható, akkor megoldásai egy* $\dim \ker(A)$ *dimenziós affin sokaságot alkotnak.* □

**7.2.94. Invariáns alterek.** Legyen $X$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett, $A\colon X \to X$ lineáris transzformáció. Egy $Y$ alterét $X$-nek az $A$ *invariáns alter*ének nevezzük, ha $A(Y) \subset Y$.

Példák invariáns alterekre $\operatorname{rng}(A)$ és minden azt tartalmazó altér, $\ker(A)$ és minden általa tartalmazott altér. Speciálisan, az egész tér és $\{0\}$ mindig invariáns altér, ezek a *triviális invariáns alter*ek.

**7.2.95. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér.** Legyen $A\colon V \to V$ a $\mathbb{K}$ feletti $V$ vektortér lineáris transzformációja. Az mondjuk, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ *sajátértéke*, az $x \neq 0$ vektor pedig *sajátvektor*a $A$-nak, ha $Ax = \lambda x$. Pontosabban, az összes nem nulla vektort, amelyre $Ax = \lambda x$, a $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük. Az $A$ sajátértékeinek halmazát A $\sigma(A)\sigma(A)$-val jelöljük és $A$ *spektrum*ának nevezzük. A A $\varrho(A)\varrho(A)$ *spektrálsugár* a sajátértékek abszolút értékeinek maximuma.

Vegyük észre, hogy ha $x$ a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektor, akkor $A^2x = \lambda^2x$. Általánosabban, ha $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_n\lambda^n$ akkor a $p(A) = \alpha_0\mathbb{I} + \alpha_1A + \alpha_2A^2 + \cdots + \alpha_nA^n$ definícióval $p(A)x = p(\lambda)x$, tehát ha $A$-nak $x$ a $\lambda$-hoz tartozó sajátvektora, akkor $p(A)$-nak $x$ a $p(\lambda)$-hoz tartozó sajátvektora.

Adott $\lambda$ skalárra az összes olyan $x$ vektorok, amelyekre $Ax = \lambda x$ (beleértve a 0 vektort is), egy alteret alkotnak, amely nem más, mint $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$. A $\lambda \in \mathbb{K}$ skalár pontosan akkor sajátérték, ha ez az altér nem a $\{0\}$, vagy ami ezzel ekvivalens, ha $A - \lambda\mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű; ekkor a $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$ altér a $\lambda$-hoz tartozó *sajátaltér*, dimenziója a $\lambda$ *geometriai multiplicitás*a. A sajátaltér nyilván invariáns altere $A$-nak.

**7.2.96. Karakterisztikus polinom.** Legyen $V$ egy $n$ dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A \in \mathcal{L}(V;V)$. A $\lambda \mapsto \det(A - \lambda\mathbb{I})$ leképezést az $A$ transzformáció *karakterisztikus polinom*jának nevezzük; mivel bármilyen bázisban felírva $A$ mátrixát, a $\lambda \mapsto \det[A - \lambda\mathbb{I}]$ leképezésről van szó, látjuk, hogy $n$-edfokú polinom, főegyütthatója $(-1)^n$, konstans tagja $\det(A)$, és a definíció szerint nem függ a bázis megválasztásától. Szokás az $A$ transzformáció helyett az $[A]$ mátrix *karakterisztikus polinom*járól is beszélni. Nyilván ekvivalens mátrixok karakterisztikus polinomja ugyanaz, hiszen azok felfoghatók ugyanazon lineáris transzformáció más-más bázisban vett mátrixának. Hasonlóan ekvivalens transzformációk karakterisztikus polinomja is ugyanaz, mert alkalmas bázisokat választva, ugyanaz a mátrixuk. Az $[A]'$ karakterisztikus polinomja megegyezik $[A]$ karakterisztikus polinomjával, hiszen $[A]' - \lambda[\mathbb{I}] = [A - \lambda\mathbb{I}]'$, és az utóbbi determinánsa megegyezik $[A - \lambda\mathbb{I}]$ determinánsával.

A karakterisztikus polinom $n-1$-edfokú tagjának a $(-1)^{n-1}$-szerese az $[A]$ főátlójában lévő elemek összege; ezt $[A]$, illetve $A$ *nyom*ának nevezzük, és $\operatorname{Tr}(A)$-val, illetve $\operatorname{Tr}([A])$-val (vagy $\operatorname{Sp}(A)$-val, illetve $\operatorname{Sp}([A])$-val) jelöljük. Ha felírjuk a karakterisztikus polinomot $\lambda \mapsto (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$ gyöktényezős alakban, akkor látjuk, hogy (a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben is) az $A$ nyoma a karakterisztikus polinomja (multiplicitással vett komplex, tehát összes) zérushelyeinek összege.

A karakterisztikus polinom jelentőségét a sajátértékekkel való kapcsolata adja: ismeretében a következő tétel szerint meghatározhatók a sajátértékek, azok ismeretében pedig a hozzájuk tartozó sajátalterek. A karakterisztikus polinom kiszámítására, ugyanúgy, mint a determináns kiszámítására, „ritka” (sok nullát tartalmazó) mátrix vagy kis $n$ esetén a kifejtési tétel használható; egyébként érdemesebb $n+1$ helyen Gauss-féle kiküszöböléssel kiszámítani $\det[A-\lambda\mathbb{I}]$ értékét és Lagrange-interpolációval felírni a karakterisztikus polinomot. (Sokkal hatékonyabb eljárások is vannak.)

**7.2.97. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ pontosan akkor sajátértéke $A$-nak, ha $\mathbb{K}$-beli zérushelye a karakterisztikus polinomnak.*

**Bizonyítás.** Ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ egy zérushelye a karakterisztikus polinomnak, akkor $\det(A-\lambda_0\mathbb{I})=0$, így $A-\lambda_0\mathbb{I}$ magja nem $\{0\}$. Megfordítva, ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ sajátérték, akkor $A-\lambda_0\mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű, így $\det(A-\lambda_0\mathbb{I})=0$. □

**7.2.98. Algebrai multiplicitás.** Az előző definíció jelöléseivel, ha $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ a karakterisztikus polinomnak $k$-szoros zérushelye $\big[$azaz a karakterisztikus polinom osztható $(\lambda-\lambda_0)^k$-val, de nem osztható $(\lambda-\lambda_0)^{k+1}$-gyel$\big]$, akkor azt mondjuk, hogy a $\lambda_0$ sajátérték *algebrai multiplicitás*a $k$.

A geometriai és az algebrai multiplicitás nem mindig egyeznek meg: például ha $D$ a differenciálás operátora az $n$-nél alacsonyabb fokú $\mathbb{K}$-beli együtthatós polinomok terén, akkor $D$-nek nem nulla sajátértéke nem lehet, mert bármely polinom deriváltja alacsonyabb fokú, mint a polinom. A 0 viszont sajátérték, a megfelelő sajátaltér a konstans polinomok egydimenziós altere. Az $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ hatványfüggvényekből álló bázisban felírva $D$ mátrixát adódik, hogy a karakterisztikus polinomja $\lambda \mapsto (-1)^n\lambda^n$, így a 0 algebrai multiplicitása $n$. A geometriai multiplicitás nem nagyobb, mint az algebrai: ha $e_1, e_2, \ldots, e_k$ a $\lambda_0$-hoz tartozó sajátaltér egy bázisa, és ezt kiegészítjük $V$ egy bázisává, akkor ebben a bázisban $A$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{k,k+1} & \ldots & a_{k,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

ahonnan látszik, hogy $(\lambda-\lambda_0)^k$ osztója a karakterisztikus polinomnak.

⋆ **7.2.99. Cayley–Hamilton-tétel.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek, és $p$ az $A$ karekterisztikus polinomja. Ekkor $p(A)=0$.*

**Bizonyítás.** Legyen $n$ a tér dimenziója, $p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n$, rögzítsünk egy bázist, legyen $A$ mátrixa $a$, az egységmátrix $e$, és jelölje $b_{i,j}(\lambda)$ az $a-\lambda e$ mátrix $i$-edik oszlopának (sic!) és $j$-edik sorának elhagyásával kapott aldetermináns értékének $(-1)^{i+j}$-szeresét. A $b(\lambda) = \big(b_{i,j}(\lambda)\big)_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ mátrix és az $a-\lambda e$ mátrix szorzata a 7.2.83 tétel szerint $\det(a-\lambda e)e$. A $b(\lambda)$ mátrix minden eleme legfeljebb $n-1$-edfokú polinomja $\lambda$-nak. Írjuk fel a $b(\lambda)$ mátrixot $b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \cdots + \lambda^{n-1}b_{n-1}$ alakban. Az előző állítás szerint

$$b_0a + \lambda(b_1a - b_0) + \cdots + \lambda^{n-1}(b_{n-1}a - b_{n-2}) - \lambda^n b_{n-1} = (p_0 + p_1\lambda + \ldots + p_n\lambda^n)e.$$

A két oldalon szereplő mátrixoknak elemenként meg kell egyezniük minden $\lambda$-ra. Innen $b_0a = p_0e$, $b_ja - b_{j-1} = p_je$, ha $j = 1, 2, \ldots, n-1$, és $-b_{n-1} = p_n$. Ezeket az egyenlőségeket balról beszorozva rendre $a^0 = e$-vel, $a$-val, $a^2$-tel, stb, $a^n$-nel, majd összeadva, azt kapjuk, hogy $0 = p_0e + p_1a + p_2a^2 + \cdots + p_na^n$. □

**7.2.100. Felső háromszög alak.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek. Akkor és csak akkor van olyan bázis, amelyben $A$ mátrixa felső háromszög alakú, ha a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$-beli együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként írható.*

A bizonyítás konstruktív.

⋆ **Bizonyítás.** Ha $A$ mátrixa valamely bázisban felső háromszög alakú, akkor gyöktényezős alakban (elsőfokú polinomok szorzataként) olvasható le a karakterisztikus polinom: gyökei a főátlóban álló elemek. A megfordítást a $V$ dimenziója szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Egy dimenzióban igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n-1$ dimenzióra igaz. Legyen $\lambda_1$ egy sajátértéke $A$-nak, és legyen $f_1$ egy hozzá tartozó sajátvektor. Egészítsük ki az $f_1$ vektort $e_2, e_3, \dots, e_n$ vektorokkal $V$ egy bázisává. Ebben a bázisban $A$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

alakú. Tekintsük a $P\colon V \to U$ projekciót, ahol $P(x) = x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$, ha

$$x = x_1f_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Mivel $P$ lineáris, a $B = PA$, $B\colon U \to U$ leképezés is lineáris, és az $e_2, \dots, e_n$ bázisban mátrixa

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Innen $A$ karakterisztikus polinomja a $\lambda \mapsto \lambda_1 - \lambda$ polinomnak és $B$ karakterisztikus polinomjának a szorzata, tehát $B$ karakterisztikus polinomja is felírható elsőfokú tényezők szorzataként. Az indukciós feltevés szerint van olyan $f_2, \dots, f_n$ bázis $U$-ban, amelyben $B$ mátrixa felső háromszög alakú. Az $f_1, f_2, \dots, f_n$ bázisban $A$ mátrixa felső háromszög alakú. □

**7.2.101. Következmény.** *Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor van olyan bázis, amelyben $A$ mátrixa felső háromszög alakú.* □

⋆ **7.2.102. Segédtétel.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek. Ha $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ páronként különböző sajátértékek, $x_1, \dots, x_m$ pedig hozzájuk tartozó sajátvektorok, akkor $x_1 + \cdots + x_m \neq 0$.*

**Bizonyítás.** Indukcióval: $m = 1$-re nyilvánvaló. Ha $m$-re nem lenne igaz, azaz $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m = 0$ teljesülne, akkor alkalmazva $A$-t mindkét oldalra, azt kapnánk, hogy

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_{m-1}x_{m-1} + \lambda_mx_m = 0.$$

Ebből az összefüggésből kivonva az előző összefüggés $\lambda_m$-szeresét, az adódna, hogy

$$(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + (\lambda_2 - \lambda_m)x_2 + \cdots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0,$$

ami ellentmond az indukciós feltevésnek, mert $(\lambda_j - \lambda_m)x_j$ is a $\lambda_j$-hez tartozó sajátvektor, ha $j = 1, 2, \ldots, m-1$. □

**7.2.103. Átlós alak.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek. Akkor és csak akkor van olyan bázis, amelyben $A$ mátrixa diagonális, ha a karakterisztikus polinom $\mathbb{K}$-beli együtthatós elsőfokú polinomok szorzataként írható, és minden sajátérték geometriai dimenziója megegyezik az algebrai dimenziójával.*

A bizonyítás konstruktív.

⋆ **Bizonyítás.** Ha $A$ mátrixa valamely bázisban diagonális, akkor gyöktényezős alakban (elsőfokú polinomok szorzataként) olvasható le a karakterisztikus polinom: gyökei a főátlóban álló elemek, a megfelelő bázisvektorok pedig az adott sajátértékhez tartozó, annak algebrai multiplicitásával megegyező dimenziós alteret feszítenek ki, így az algebrai és geometriai multiplicitások megegyeznek. A megfordításhoz legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ a karakterisztikus polinom páronként különböző gyökei, és

$$\lambda \mapsto (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{k_m}$$

a karakterisztikus polinom. Minden sajátértékhez választva a sajátaltérből egy bázist, egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorrendszert kapunk, ahol $\dim(V) = n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$. Ez a vektorrendszer lineárisan független, mert ha $\sum_{t=1}^{n} \alpha_t e_t = 0$, és $e_{s_1}, e_{s_2}, \ldots, e_{s_{k_j}}$ a $\lambda_j$ sajátértékhez tartozó sajátaltérben vannak, akkor $x_j = \alpha_{s_1} e_{s_1} + \alpha_{s_2} e_{s_2} + \cdots + \alpha_{s_{k_j}} e_{s_{k_j}}$ is. Ezen vektorok között viszont nem lehetnek nullától különbözőek, mert azok páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lennének, így az előző segédtétel szerint összegük nem lehet nulla. Tehát azt kapjuk, hogy az összes $\alpha_t$ együttható nulla, azaz $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis. Ebben a bázisban $A$ mátrixa diagonális mátrix. □

⋆ **7.2.104. Általánosított sajátvektor.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A\colon V \to V$ lineáris transzformáció. Az mondjuk, hogy az $x$ vektor a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátvektor*a $A$-nak, ha valamely $p \in \mathbb{N}$-re $(A - \lambda\mathbb{I})^p x = 0$. Másként az $x$ vektor pontosan akkor $\lambda$-hoz tartozó általánosított sajátvektor, ha benne van $\cup_{p\in\mathbb{N}} \ker\big((A - \lambda\mathbb{I})^p\big)$-ben. Mivel $\ker\big((A-\lambda\mathbb{I})^p\big) \subset \ker\big((A-\lambda\mathbb{I})^{p+1}\big)$ minden $p \in \mathbb{N}$-re, az $A$-nak a $\lambda \in \mathbb{K}$ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorai egy alteret alkotnak; ez a $\lambda$ sajátértékhez tartozó *általánosított sajátaltér*, amelynek nyilván része a $\lambda$-hoz tartozó sajátaltér. Ez az altér nyilván invariáns altere $A$-nak, hiszen ha tartalmazza $x$-et, akkor $(A - \lambda\mathbb{I})x$-et is, így $Ax = (A - \lambda\mathbb{I})x + \lambda x$-et is.

Legyen $x$ a $\lambda$ sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektor. Az $x$-hez tartozó *vektorsorozat*on a

$$(A - \lambda\mathbb{I})^{p-1}x, (A - \lambda\mathbb{I})^{p-2}x, \ldots, (A - \lambda\mathbb{I})x, x$$

sorozatot érjük, ahol $p$ a legkisebb olyan természetes szám, amelyre $(A - \lambda\mathbb{I})^p x = 0$. Vegyük észre, hogy a vektorsorozat tagjai mind különbözőek és az első tagja $\lambda$-hoz tartozó sajátvektora $A$-nak.

⋆ **7.2.105. Segédtétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek, $\lambda$ pedig sajátértéke $A$-nak. Ha $S_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ a $\lambda$-hoz tartozó általánosított sajátvektorokból álló (nem üres) vektorsorozatok, első vektoraik, az $y_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek, akkor a vektorsorozatok egyesítése is lineárisan független rendszer.*

**Bizonyítás.** Legyen $p_i$ az $S_i$ vektorsorozat hossza. Feltehetjük, hogy

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k.$$

A bizonyítás $p_1$ szerinti indukcióval történik. Ha $p_1 = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert az $y_i$-k függetlenségét mondja ki. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $1 \leq p_1 < m$-re, és tegyük fel, hogy $m = p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$. Legyen $r$ a legnagyobb olyan index, amelyre $p_r > 1$. Legyen $S_i'$ az a vektorsorozat, amelyet úgy kapunk, hogy elhagyjuk az utolsó $x_i$ vektort $S_i$-ből, ha $1 \leq i \leq r$. A kezdővektorok nem változtak, így az $S_i'$, $i = 1, 2, \ldots, r$ vektorsorozatok együtt lineárisan független rendszert alkotnak. Meg kell mutatnunk, hogy visszarakva az elhagyott (az $S_i'$-k egyesítésében nyilván nem szereplő) $x_i$ vektorokat, a kapott $S$ rendszer lineárisan független. Tegyük fel, hogy $\sum_{x \in S} \alpha_x x = 0$. Jelölje $S''$ az $S$ azon részhalmazát, amelyet úgy kapunk, hogy az $y_i$, $1 \leq i \leq k$ vektorokat hagyjuk el $S$-ből. Alkalmazva az $A - \lambda\mathbb{I}$ operátort, azt kapjuk, hogy

$$0 = \sum_{x \in S} \alpha_x (A - \lambda\mathbb{I})x = \sum_{x \in S''} \alpha_x (A - \lambda\mathbb{I})x = \sum_{x \in S'} \alpha_x x.$$

Mivel az $S'$-beli vektorok lineárisan függetlenek, az ezekhez tartozó együtthatók mind nullák. A többi együtthatók a $\sum_{x \in S} \alpha_x x = 0$ összegben viszont az $y_i$-khez tartoznak, így azok függetlensége miatt ezek is mind nullák. □

⋆ **7.2.106. Segédtétel.** *Legyen $V$ vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ pedig különböző sajátértékei $A$-nak. Bármely $1 \leq i \leq m$-re választva egy lineárisan független vektorrendszert a $\lambda_i$-hez tartozó általánosított sajátaltérben, a kapott vektorrendszerek egyesítése lineárisan független.*

**Bizonyítás.** Ha nem lenne az, akkor lineárisan kombinálhatnánk belőle a nulla vektort nem csupa nulla együtthatóval. Jelölje $x_i$ a $\lambda_i$-hez tartozó vektorok adott lineáris kombinációját; $x_i$ a $\lambda_i$-hez tartozó általánosított sajátvektor. Ha megmutatjuk, hogy mindegyik $x_i$ nulla, akkor ellentmondást kapunk. Tegyük fel indirekt, hogy valamelyik $x_i$ nem nulla, mondjuk $x_1 \neq 0$. Legyen $p_i$ az a legkisebb természetes szám, amelyre $(A - \lambda_i\mathbb{I})^{p_i} x_i = 0$. Alkalmazzuk az $0 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_m$ egyenlőség mindkét oldalára az $(A - \lambda_1\mathbb{I})^{p_1 - 1} \prod_{i=2}^m (A - \lambda_i\mathbb{I})^{p_i}$ operátort. Felhasználva, hogy a szorzat tényezői felcserélhetőek, kapjuk, $(A - \lambda_1\mathbb{I})^{p_1 - 1} \prod_{i=2}^m (A - \lambda_i\mathbb{I})^{p_i} x_j = 0$, ha $j = 2, \ldots, m$. Mivel az $(A - \lambda_1\mathbb{I})^{p_1 - 1} x_1$ vektor a $\lambda_1$-hez tartozó sajátvektora $A$-nak,

$$\left(\prod_{i=2}^m (A - \lambda_i\mathbb{I})^{p_i}\right)(A - \lambda_1\mathbb{I})^{p_1 - 1} x_1 = \left(\prod_{i=2}^m (\lambda_1 - \lambda_i\mathbb{I})^{p_i}\right)(A - \lambda_1\mathbb{I})^{p_1 - 1} x_1 \neq 0.$$

Ez ellentmondás. □

⋆ **7.2.107. Jordan normálalak.** Egy $\mathbb{K}$-beli elemű négyzetes mátrixot *Jordan-blokk*nak nevezünk, ha $1 \times 1$-es vagy pedig 1 felső sávmátrix a főátlóban mindenütt ugyanazzal a $\lambda$ skalárral, felette pedig mindenütt 1-gyel. Egy $\mathbb{K}$-beli elemű négyzetes mátrixot *Jordan-normálalak*únak nevezünk, ha $1 \times 1$-es vagy pedig 1 felső sávmátrix, amely a főátlóra felfűzött Jordan-blokkokból áll. Egy véges dimenziós vektortér egy adott lineáris transzformációja esetén egy bázist a transzformációhoz tartozó *Jordan-bázis*nak nevezünk, ha ebben a bázisban a transzformáció mátrixa Jordan-normálalakú.

⋆ **7.2.108. Jordan-bázis létezése és a Jordan-normálalak egyértelműsége.** *Legyen $V$ véges dimenziós vektortér $\mathbb{K}$ felett, $A$ lineáris transzformációja $V$-nek. Pontosan akkor létezik Jordan-bázis $A$-hoz, ha a karakterisztikus polinomja elsőfokú tényezők szorzataként írható $\mathbb{K}$ felett. A Jordan-normálalak (ha létezik) egyértelmű a következő értelemben: az egyes sajátértékekhez tartozó Jordan-blokkok száma a sajátérték geometriai multiplicitása, méreteinek összege a sajátérték algebrai multiplicitása, ami az adott sajátértékhez tartozó általánosított sajátaltér dimenziója, és az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok száma egyértelműen meghatározott.*

A bizonyítás konstruktív, lehetőséget ad a Jordan-bázis megkeresésére.

**Bizonyítás.** A létezés bizonyításával kezdjük. A feltétel szükségességet már láttuk, hiszen a Jordan-normálalak felső háromszög alak. Az elégségességet az $n$ dimenziószám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 1$, nyilván igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n > 1$, és minden $n$-nél kisebb dimenzióban igaz az állítás.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $A$ képtere $n$-nél kisebb dimenziós. Mivel $\mathrm{rng}(A)$ invariáns altere $A$-nak, az indukciós feltevést alkalmazhatjuk $A|_{\mathrm{rng}(A)}$-ra. Az egy adott Jordan-blokkhoz tartozó bázisvektorok nyilván a megfelelő $\lambda$ sajátértékhez tartozó vektorsorozatot alkotnak. Jelölje $S_1, S_2, \ldots, S_k$ a 0 sajátértékhez tartozó ilyen vektorsorozatokat, és legyen ezek első, illetve utolsó vektora $y_1, y_2, \ldots, y_k$, illetve $w_1, w_2, \ldots, w_k$. Mivel $w_i$ a képtérben van, létezik hozzá olyan $x_i$ vektor, amelyre $Ax_i = w_i$. Mivel az $y_1, y_2, \ldots, y_k$ vektorok a 0-hoz tartozó, tehát $\ker(A)$-beli sajátvektorok, és nyilván lineárisan függetlenek, hiszen egy bázis tagjai, sorozatuk kiegészíthető $z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_r$ vektorokkal $\ker(A)$ egy bázisává. Ha $1 \leq i \leq k$, akkor legyen $S_i'$ az a vektorsorozat, amelyet úgy kapunk, hogy $S_i$ végére odaírjuk $x_i$-t, ha pedig $k < i \leq r$, akkor legyen $S_i'$ az egyetlen $z_i$ vektorból álló vektorsorozat; a többi sajátértékhez tartozó vektorsorozatokat nem változtatjuk. Az így kapott összes vektorsorozat vektorai pontosan $n$ vektort tartalmaznak, mivel $n = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{rng}(A))$, és az előző két segédtétel felhasználásával adódik, hogy lineárisan független vektorrendszert — tehát bázist — alkotnak. Ebben a bázisban $A$ mátrixa nyilván Jordan-normálalakú.

Végül az általános esetben legyen $\lambda$ egy sajátértéke $A$-nak, és alkalmazzuk az eddig bizonyítottakat az $A - \lambda\mathbb{I}$ leképezésre, amelynek van 0-hoz tartozó sajátvektora, tehát amelyre $\dim(\mathrm{rng}(A)) < n$.

Az egyértelműség bizonyításához vegyük észre, hogy egy adott Jordan-normálalak esetén egy adott $\lambda$ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkhoz tartozó bázisvektorok egy, az adott sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektor-sorozatot alkotnak. Mivel ezek nyilván lineárisan függetlenek — hiszen egy bázis vektorai — és számuk a $\lambda$ algebrai multiplicitása — hiszen a Jordan-normálalakból a karakterisztikus polinomot gyöktényezős alakban kapjuk — csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\lambda$-hoz tartozó általánosított sajátaltér egy bázisát alkotják. Ha ez nem lenne igaz, akkor választhatnánk még az általánosított sajátaltérből egy tőlük lineárisan független vektort. Mivel a Jordan-bázis többi vektora a többi általánosított sajátaltérben van, ez ellentmond az előző segédtételnek, hiszen több lineárisan független vektort kaptunk, mint a tér dimenziója.

Jelölje $J_1, \ldots, J_k$ a $\lambda$ sajátértékhez tartozó Jordan-blokkokat, $J_i$ legyen $p_i \times p_i$ méretű, és legyen $e_{i,p_i-1}, e_{i,p_i-2}, \ldots, e_{i,0}$ az adott blokkhoz tartozó vektorsorozat a Jordan-bázisból. Az egyértelműséggel kapcsolatos összes többi állítás következik, ha megmutatjuk, hogy az $e_{i,j}$, $1 \leq i \leq k$, $\max\{0, p_i - r\} \leq j < p_i$ bázisvektorok $\ker((A - \lambda\mathbb{I})^r)$ egy bázisát adják. Az nyilvánvaló, hogy mindannyian ebben az altérben vannak, mert $(A - \lambda\mathbb{I})e_{i,p_i-1} = 0$ és $(A - \lambda\mathbb{I})e_{i,j} = e_{i,j+1}$, ha $j < p_i - 1$, így csak azt kell megmutatnunk, hogy generátorrendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy $(A - \lambda\mathbb{I})^r x = 0$. Ekkor $x$ a $\lambda$-hoz tartozó általánosított sajátvektor, így az eddig bizonyítottak szerint felírható $x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-1} \alpha_{i,j} e_{i,j}$ alakban. Mindkét oldalra alkalmazva $(A - \lambda\mathbb{I})^r$-et azt kapjuk, hogy $(A - \lambda\mathbb{I})^r x = 0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{p_i-r-1} \alpha_{i,j} e_{i,j+r}$. Az itt szereplő $\alpha_{i,j}$ együtthatóknak a lineáris függetlenség miatt nullának kell lenni, ami igazolja az állítást. □

⋆ **7.2.109. Következmény.** *Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor van Jordan-bázis, amelyben $A$ mátrixa Jordan-normálalakú.* □

**7.2.110. Feladat [5].** Határozzuk meg a térvektorok tere alábbi lineáris transzformációinak sajátértékeit és sajátvektorait:

(1) forgatás a $z$ tengely körül 45°-kal;

(2) merőleges vetítés az $xy$ síkra;

(3) tükrözés az $xy$ síkra;

(4) merőleges vetítés az $i - 2j - 3k$ vektort tartalmazó egyenesre.

**7.2.111. Feladat [5].** Van-e olyan síkbeli, illetve térbeli lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátvektora? Ha van, határozzuk meg mátrixának sajátértékeit és sajátvektorait komplexben!

**7.2.112. Feladat [4].** Az $\mathbb{R}^3$ egy transzformációjának sajátvektorai és sajátértékei az adottak. Határozzuk meg a mátrixát a szokásos bázisban:

(1) $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(0, 0, 1)$ az 1 sajátértékkel;

(2) $(1, 2, 3)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ az 1 sajátértékkel;

(3) a $z$ tengely vektorai a 2 sajátértékkel és az $x+y-z = 0$ sík vektorai a 3 sajátértékkel.

**7.2.113. Feladat [4].** Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait valósban és komplexben:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**7.2.114. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait valósban és komplexben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**7.2.115. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-normálalakját és a megfelelő bázist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**7.2.116. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi mátrix Jordan-normálalakját:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 10 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 10 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 1 \\ -6 & -2 & -2 & 2 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

## 7.3 Belső szorzat

**7.3.1. Norma.** Legyen $X$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését $X$-nek $\mathbb{R}$-be *normá*nak, az $(X, \|\ \|)$ párt pedig *normált tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett, ha

(1) $\|x\| \geq 0$ minden $x \in X$-re és $\|x\| = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ minden $x \in X$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra (*abszolútérték-homogenitás*);

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$-re (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Megjegyezzük, hogy $\|\ \|$ helyett az $|\ |$ jelölés is szokásos. Normált tér bármely lineáris altere is normált tér. Egy $x \in X$ elemet *normált*nak nevezünk, ha $\|x\| = 1$. A normált terek *izomorfizmus*ai definíció szerint a lineáris és normatartó bijekciók. Bármely $X$ véges dimenziós normált tér izomorf valamely alkalmas normával ellátott $\mathbb{K}^n$ térrel: Ha az $X$ tér $n$ dimenziós, akkor tudjuk, hogy létezik egy $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$ lineáris izomorfizmus. Legyen $\|\varphi(x)\| := \|x\|$, ha $x \in X$. Ezzel a normával $(\mathbb{K}^n, \|\ \|)$ normált tér, az előbbi $\varphi$ pedig normatartó lineáris bijekció. A normált terek normált térbe való leképezéseit általában *operátor*nak, skalár értékű leképezéseit pedig *funkcionál*nak nevezzük.

**7.3.2. Példák.** A $\mathbb{K}^n$ tér normált tér a

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|, \quad \text{illetve} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|,$$

ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ normákkal.

A jelölés onnan ered, hogy akármilyen $1 \leq p < \infty$ valós számra az

$$x \mapsto \|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{1/p}$$

leképezés norma $\mathbb{K}^n$-en (ez az úgynevezett $p$-norma): a $t \mapsto t^p$ leképezés konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}z + \frac{v}{u+v}w\right)^p \leq \frac{u}{u+v}z^p + \frac{v}{u+v}w^p,$$

ha $u, v, z, w \geq 0$, $u+v > 0$; az $u = \|x\|_p$, $v = \|y\|_p$, $z = |x_j|/\|x\|_p$, $w = |y_j|/\|y\|_p$ helyettesítés után $j$-re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\left(\|x\|_p + \|y\|_p\right)^p} \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| + |y_j|\right)^p \leq 1,$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség, a többi feltétel teljesülése pedig triviális. A $\| \ \|_1$ a $p = 1$ speciális eset, $\| \ \|_\infty$-t pedig a $p \to \infty$ határérték adja.

**7.3.3. Belső szorzat.** Ha $X$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezése $X \times X$-nek $\mathbb{K}$-ba úgy, hogy minden $x, y, z \in X$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ (*additivitás*);

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ (*homogenitás*);

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (*Hermite-szimmetria*);

(4) $\langle x, x\rangle > 0$, ha $x \neq 0$ (*pozitív definitség*);

akkor $X$-et *belső szorzat tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Az $x$ és $y$ elemek $\langle x, y\rangle$ *belső szorzat*ának vagy *skaláris szorzat*ának jelölésére az $(x, y)$, $(x|y)$, $\langle x|y\rangle$, $x \cdot y$, $xy$ és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak. A belső szorzat terek *izomorfizmus*ai definíció szerint a lineáris és belső szorzat tartó bijekciók.

(3)-ból bármely $x \in X$-re $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, tehát $\langle x, x\rangle$ valós. (1)-ből és (3)-ból

$$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, y\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

így a belső szorzás additív a második változóban is, és

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle,$$

így a második változóból $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén nem a skalár, hanem a skalár konjugáltja emelhető ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában a $\langle y|x\rangle = \langle x, y\rangle$ belső szorzatot használják, ez a második változóban lineáris és az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja. (2)-ből $\langle 0, x\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$ minden minden $x \in X$-re. Természetesen a konjugálásnak csak a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben van jelentősége; a valós esetben (3) egyszerűen a szimmetriát jelenti, és a belső szorzás szimmetrikus bilineáris forma, amelyhez tartozó kvadratikus forma (4) szerint pozitív definit.

**7.3.4. Tétel.** *Ha $X$ belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az $x$ elem* normáját *a $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ összefüggéssel definiálva*

(1) $$\left|\langle x, y\rangle\right| \leq \|x\|\|y\| \qquad \textit{minden } x, y \in X\textit{-re}$$

*(*Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség*), és $X$ normált tér.*

**Bizonyítás.** Az $x = 0 = y$ eset triviális. Ha például $y \neq 0$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

amiből $\alpha = \langle x, y\rangle/\|y\|^2$ választással

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,\end{aligned}$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség. A többi normatulajdonság triviális. □

**7.3.5. Példa.** Legyen $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, ha $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Könnyű látni, hogy így egy belső szorzatot kapunk, amelyet $\mathbb{K}^n$ *szokásos belső szorzat*ának nevezünk. A belőle adódó norma az előző példában a $p = 2$ esetnek felel meg.

**7.3.6. Megjegyzés.** Egyszerű számolással adódik, hogy egy $X$ belső szorzat térben teljesül az

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{ha} \quad x, y \in X$$

*paralelogramma-azonosság.* Mivel $n > 1$ és $p \neq 2$ esetén ez az azonosság nem teljesül $\mathbb{K}^n$-en a $\| \, \|_p$ normára, az nem származhat belső szorzatból. Megmutatható, hogy egy norma pontosan akkor származik belső szorzatból, ha teljesül rá a paralelogramma-azonosság.

**7.3.7. Szögek, euklideszi tér, unitér tér.** Valós belső szorzat térben két nem nulla vektor által bezár *szög* alatt azt az egyetlen $0 \leq \alpha \leq \pi$ szöget értjük, amelyre $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\alpha$. A véges dimenziós valós belső szorzat tereket *euklideszi ter*eknek, a véges dimenziós komplex belső szorzat tereket pedig *unitér ter*eknek is szokás nevezni. (Vannak, akik az unitér tereket, sőt, a végtelen dimenziós belső szorzat tereket is euklideszi térnek nevezik.)

**7.3.8. Definíció.** Legyen $X$ belső szorzat tér. Ha $x, y \in X$, és $\langle x, y\rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $x$ és $y$ *merőleges*ek vagy *ortogonális*ak. Jelölése: ortogonalis y rtogonalis y $x \perp yx \perp y$mero|leges y ero|leges y $x \perp y$. Az $M, N \subset X$ halmazokat *ortogonális*aknak nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M$, $y \in N$-re. Jelölése: ortogonalis n rtogonalis n $M \perp NM \perp N$. Egy $M \subset X$ halmaz *ortogonális komplementer*én az $X$ összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak $M$ minden elemére. Jelölése: ortogonalis komplementere rtogonalis komplementere $M^{\perp}M^{\perp}$. Vegyük észre, hogy bármely halmaz ortogonális komplementere altér. Egy $x_i$, $i \in I$ rendszert *ortogonális rendszer*nek nevezünk, ha bármely két különböző eleme egymásra ortogonális, azaz ha $i, j \in I$, $i \neq j$, akkor $x_i \perp x_j$. Ha egy ortogonális rendszer minden eleme normált, akkor *ortonormált rendszer*ről beszélünk. Az $x \in X$ elemnek az $x_i$, $i \in I$ ortonormált rendszerre vonatkozó *Fourier-együtthatói*n az $\langle x, x_i\rangle$, $i \in I$ számokat értjük.

**7.3.9. Vegyes szorzat.** Jelölje $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisát $i, j, k$. Könnyű kiszámolni, hogy az $x_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ és $x_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$ vektorok vektoriális szorzata a

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & i \\ c_1 & c_2 & j \\ d_1 & d_2 & k \end{vmatrix}$$

determináns utolsó oszlop szerint formális kifejtésével is megkapható, és hogy merőleges az $x_1$ és az $x_2$ vektorra is. Ha $x_3 = b_3 i + c_3 j + d_3 k$, akkor az $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \langle x_1 \times x_2, x_3\rangle$ vegyes szorzatra egyszerű számolással

$$\langle x_1 \times x_2, x_3\rangle = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

azaz a vegyes szorzat nem más, mint a három vektornak az $i, j, k$ bázishoz tartozó determinánsa. Ha $x_3$ helyére olyan normált vektort helyettesítünk, amelynek $x_1 \times x_2$ nemnegatív konstansszorosa, akkor (újra) látjuk, hogy a vektoriális szorzat hossza az $x_1$ és $x_2$ által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe.

**7.3.10. Pitagorasz-tétel.** *Ha az $X$ belső szorzat tér*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

*vektorai páronként merőlegesek és $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, akkor*

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

**Bizonyítás.**

$$\langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\langle x_j, x_k\rangle = \sum_{\ell=1}^{n}\|x_\ell\|^2. \ \square$$

**7.3.11. Következmény.** *Ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ ortonormáltak, akkor lineárisan függetlenek.*

**Bizonyítás.** Ha $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ nulla, akkor

$$0 = \langle x, x\rangle = \sum_{j=1}^{n}\|\alpha_j x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2. \ \square$$

**7.3.12. Gram–Schmidt-ortogonalizálás.** Legyen $X$ egy belső szorzat tér, és $y_1, y_2, \dots$ egy véges vagy végtelen lineárisan független sorozat $X$-ben, azaz olyan sorozat, amelynek minden tagja lineárisan független az előtte állóktól. Egy olyan $x_k$ ortonormált sorozatot fogunk megkonstruálni, amelyre

$$\{y_k : k \le n\} \quad \text{és} \quad \{x_k : k \le n\}$$

ugyanazt az alteret feszítik ki minden $n$-re.

Legyen $u_1 = y_1$ és $x_1 = u_1/\|u_1\|$. Legyen $u_2 = y_2 - \langle y_2, x_1\rangle x_1$ és $x_2 = u_2/\|u_2\|$. Folytassuk teljes indukcióval ezt az eljárást. Legyen

$$u_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1}\langle y_n, x_k\rangle x_k \quad \text{és} \quad x_n = u_n/\|u_n\|.$$

Ha $1 \le k < n$, akkor

$$\langle u_n, x_k\rangle = \left\langle \left(y_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle y_n, x_j\rangle x_j\right), x_k \right\rangle = 0,$$

így $\langle x_n, x_k\rangle = 0$. Mivel $u_n$ benne van az $u_1, \dots, u_{n-1}, y_n$ rendszer által kifeszített altérben, mindkét rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki.

**7.3.13. Következmény.** *Bármely véges dimenziós belső szorzat térben létezik ortonormált bázis.* $\square$

**7.3.14. Következmény.** *Bármely $n$ dimenziós belső szorzat térnek létezik izomorfizmusa a szokásos belső szorzattal ellátott $\mathbb{K}^n$ térre.*

**Bizonyítás.** Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy ortonormált bázis a térben, és ha

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

akkor legyen $x$ képe $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $\square$

**7.3.15. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a valós változós, $\mathbb{K}$-beli együtthatós legfeljebb másodfokú polinomok terén melyik leképezés belső szorzat? Ha az, adjunk meg egy ortonormált bázist!

(1) $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$;

(2) $\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g}(t)\,dt$;

(3) $\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g}(t) + f'(t)\overline{g}'(t)\,dt$;

(4) $f(1)\overline{g}(1) + f(2)\overline{g}(2)$;

(5) $\sum_{k=1}^{4} f(k)\overline{g}(k)$;

(6) $f(1)\overline{g}(1) + f'(1)\overline{g}'(1) + f''(1)\overline{g}''(1)$;

**7.3.16. Feladat [4].** Milyen szöget zárnak be $\mathbb{R}^4$-ben az alábbi vektorok:

(1) $(1,1,1,1)$ és $(1,1,1,0)$;

(2) $(1,1,1,1)$ és $(1,-1,-1,-1)$;

(3) $(1,\sqrt{2},1,0)$ és $(0,1,\sqrt{2},1)$.

**7.3.17. Tétel.** *Legyen $e_1, e_2, \dots, e_n$ egy ortonormált bázis az $X$ belső szorzat térben. Ekkor egy $x \in X$ elem koordinátái ebben a bázisban az $\alpha_j = \langle x, e_j \rangle$ Fourier-együtthatók.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Ekkor

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = \alpha_j. \ \square$$

**7.3.18. Az approximáció alapfeladata normált térben.** Legyen $X$ egy normált tér, $Y$ egy lineáris altere $X$-nek, és $x \in X$. Az *approximáció alapfeladata* abban áll, hogy döntsük el, van-e az $x$-et az $Y$-ból *legjobban approximáló elem*, azaz olyan $y \in Y$, amelyre $\|x - y\|$ minimális, ha van, egyértelmű-e, és határozzuk meg.

**7.3.19. Legjobb lineáris approximáció belső szorzat térben.** *Legyen*

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

*egy ortonormált rendszer az $X$ belső szorzat térben, $x \in X$. Ekkor*

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Big\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \big|\langle x, x_k \rangle\big|^2,$$

*bármilyen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ skalárokra, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_k = \langle x, x_k \rangle$ fennáll $k = 1, 2, \dots, n$-re, azaz ha az $\alpha_k$-k a Fourier-együtthatók.*

**Bizonyítás.**

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\|^2 = \|x\|^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\overline{\alpha_k}-\overline{\alpha_k}\langle x,x_k\rangle-\alpha_k\langle x_k,x\rangle)$$
$$= \|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|\langle x,x_k\rangle\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left|\alpha_k-\langle x,x_k\rangle\right|^2. \square$$

**7.3.20. Következmény: Bessel-egyenlőtlenség.**

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\langle x,x_k\rangle\right|^2 \le \|x\|^2,$$

*és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x$ az $x_k$-k lineáris kombinációja.*

**Bizonyítás.** Az előző tételben $\alpha_k=\langle x,x_k\rangle$ helyettesítéssel egyenlőség teljesül, így

$$0\le\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,x_k\rangle x_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}\left|\langle x,x_k\rangle\right|^2. \square$$

**7.3.21. Ortogonális felbontási tételfelbontási tétel .** *Legyen $X$ egy véges dimenziós belső szorzat tér, és $Y$ egy altere $X$-nek. Ekkor minden $x\in X$ egyértelműen felírható $x=y+z$ alakban, ahol $y\in Y$ és $z\in Y^\perp$, továbbá* $\dim(Y)+\dim(Y^\perp)=\dim(X)$.

A tételt *projekció tétel*nek is szokás nevezni, mivel $z=x-y$ merőleges $y$-ra, így $x\mapsto y$ *merőleges vetítés*e, idegen szóval *ortogonális projekció*ja $X$-nek $Y$-ra. A bizonyítás mutatja, hogy $y$ az $x$-et $Y$-ból legjobban approximáló elem, és $Y^\perp$ egy ortonormált bázisát is megadja.

**Bizonyítás.** Válasszunk egy olyan bázist $X$-ben, amelynek első $m$ tagja bázis $Y$-ban, és ortonormáljuk. A kapott $e_1,e_2,\dots,e_n$ bázisból az első $m$ ortonormált bázis $Y$-ban. Legyen $y=\sum_{j=1}^{m}\langle x,e_j\rangle e_j\in Y$, ami az $x$-et az $Y$-ból legjobban approximáló elem. Ekkor $j=1,2,\dots,m$-re $\langle x-y,e_j\rangle=0$, így $z=x-y$ merőleges $Y$-ra, azaz a kívánt felbontás létezik.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x=y+z=y'+z'$, $(y,y'\in Y,\ z,z'\in Y^\perp)$, akkor $Y\ni y-y'=z'-z\in Y^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0=\langle y-y',z'-z\rangle=\langle y-y',y-y'\rangle=\|y-y'\|^2,$$

amiből $y=y'$, $z=z'$.

Nyilván $z=\sum_{j=m+1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j$, és így a konstrukció miatt $e_{m+1},\dots,e_n$ bázisa $Y^\perp$-nek. $\square$

**7.3.22. Következmény.** $(Y^\perp)^\perp=Y$.

**Bizonyítás.** Mivel $Y$ minden eleme merőleges $Y^\perp$ minden elemére, $Y\subset(Y^\perp)^\perp$. A másik irányú tartalmazáshoz vegyük észre, hogy ha $x=y+z$ az $x$ ortogonális felbontása, akkor $\langle x,z\rangle=\|z\|^2$. Így ha $x\in(Y^\perp)^\perp$, akkor $0=\langle x,z\rangle=\|z\|^2$, ahonnan $z=0$, így $x=y\in Y$. $\square$

**7.3.23. Következmény.** *Ha $z_1, z_2, \dots, z_k$ egy generátorrendszere az $Y^\perp$ altérnek, akkor*

$$Y = \{y \in X \colon \langle y, z_j \rangle = 0,\ j = 1, 2, \dots, k\},$$

*azaz $Y$ egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza, és ha $v \in X$ tetszőleges, akkor*

$$\begin{aligned} Y + v &= \{y + v \in X \colon \langle y, z_j \rangle = 0,\ j = 1, 2, \dots, k\} \\ &= \{u \in X \colon \langle u - v, z_j \rangle = 0,\ j = 1, 2, \dots, k\} \\ &= \{u \in X \colon \langle u, z_j \rangle = \langle v, z_j \rangle,\ j = 1, 2, \dots, k\}, \end{aligned}$$

*azaz az $Y + v$ affin sokaság egy inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza.* □

**7.3.24. Feladat [4].** Ortonormáljuk az alábbi vektorrendszereket:

(1) $(3, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$;

(2) $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 0, 0)$;

(3) $(1, 2, -1)$, $(2, 1, 0)$, $(-4, 1, 5)$.

**7.3.25. Feladat [4].** Határozzuk meg az affin sokaság azon vektorát, amely legközelebb van az adott vektorhoz:

(1) $t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, $(-2, 3, -4)$;

(2) $u(1, 1, 1) + v(1, 1, -1)$, $u, v \in \mathbb{R}$, $(-2, 3, -4)$;

(3) $(1, 1, 1) + u(1, 0, 1) + v(-1, 0, 1)$, $u, v \in \mathbb{R}$, $(-2, 3, -4)$;

(4) $(1, 1, 1, 1) + u(1, i, 1, 0) + v(i, -1, 0, 1)$, $u, v \in \mathbb{C}$, $(-2i, 3i, -4 - 2i, 5)$.

**7.3.26. Előállítási tétel.** *Legyen $f$ lineáris funkcionál az $X$ véges dimenziós belső szorzat téren. Ekkor létezik egy és csak egy olyan $y \in X$, amelyre*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \qquad \textit{minden } x \in X\textit{-re.}$$

⋆ **Bizonyítás.** Tudjuk, hogy $Y = \ker(f)$ lineáris altere $X$-nak. Ha $Y = X$, akkor $y = 0$ választható. Ha $Y \neq X$, akkor $Y^\perp \neq \{0\}$. Legyen $u$ egy nem nulla eleme $Y^\perp$-nek. Ekkor bármely $x \in X$ esetén $f(x)u - f(u)x \in Y$, mert

$$f(f(x)u - f(u)x) = f(x)f(u) - f(u)f(x) = 0.$$

Így

$$0 = \langle f(x)u - f(u)x, u \rangle = f(x)\|u\|^2 - f(u)\langle x, u \rangle,$$

ahonnan $f(x)$-et kifejezve, $y = \overline{f(u)}u/\|u\|^2$ jelöléssel kapjuk az állítást.

Az egyértelműséghez: ha $f(x) = \langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, akkor $\langle x, y - z \rangle = 0$ minden $x$-re, amiből $x = y - z$ helyettesítéssel $y = z$. □

**7.3.27. Adjungált leképezés.** Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett, $A\colon X \to Y$ lineáris leképezés. Bármely rögzített $y \in Y$-ra az $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ leképezés lineáris funkcionál $X$-en, így van olyan ($A$-tól és $y$-tól függő) $A^*y \in X$, amelyre

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \text{ha} \quad x \in X.$$

Az $A^*\colon y \mapsto A^*y$ leképezését $Y$-nak $X$-be az $A$ *adjungált*jának nevezzük. Ha $A^*A = \mathbb{I}_X$ és $AA^* = \mathbb{I}_Y$, azaz $A$ és $A^*$ egymás inverzei, akkor $A$-t *unitér*nek nevezzük.

**7.3.28. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel $A^*$ lineáris leképezése $Y$-nak $X$-be. Bármely $A$-ra $(A^*)^* = A$. Ha $B\colon X \to Y$ egy másik lineáris leképezés és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$. Ha $Z$ egy harmadik belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, és $C\colon Y \to Z$ egy lineáris leképezés, akkor $(CA)^* = A^*C^*$.*

**Bizonyítás.** Mivel $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x \in X$, $y, z \in Y$ esetén

$$\langle Ax, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle Ax, y\rangle + \overline{\beta}\langle Ax, z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, A^*y\rangle + \overline{\beta}\langle x, A^*z\rangle = \langle x, \alpha A^*y + \beta A^*z\rangle,$$

kapjuk, hogy $A^*(\alpha y + \beta z) = \alpha A^*y + \beta A^*z$, azaz $A^*$ lineáris.

Mivel bármely $x \in X$, $y \in Y$ esetén

$$\langle y, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle} = \overline{\langle x, A^*y\rangle} = \langle A^*y, x\rangle = \langle y, (A^*)^*x\rangle,$$

azt kapjuk, hogy $(A^*)^* = A$.

Mivel

$$\begin{aligned}\big\langle (A+B)x, y\big\rangle &= \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle + \langle x, B^*y\rangle = \langle x, A^*y + B^*y\rangle\\ &= \big\langle x, (A^* + B^*)y\big\rangle,\end{aligned}$$

kapjuk, hogy $A^* + B^* = (A+B)^*$. Hasonlóan

$$\langle \lambda Ax, y\rangle = \lambda\langle Ax, y\rangle = \lambda\langle x, A^*y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}A^*y\rangle = \langle x, (\overline{\lambda}A^*)y\rangle,$$

ahonnan $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$.

Végül bármely $x \in X$, $z \in Z$-re

$$\big\langle (CA)x, z\big\rangle = \big\langle C(Ax), z\big\rangle = \langle Ax, C^*z\rangle = \big\langle x, A^*(C^*z)\big\rangle = \big\langle x, (A^*C^*)z\big\rangle,$$

ahonnan $(CA)^* = A^*C^*$. □

**7.3.29. Adjungált operátor mátrixa.** *Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett $e_1, \ldots, e_n$, illetve $f_1, \ldots, f_m$ ortonormált bázisokkal, $A\colon X \to Y$ lineáris leképezés. Ekkor $[A^*] = \overline{[A]}' = \overline{[A]'}$.*

**Bizonyítás.** Az $A$ mátrixának $a_{i,j}$ elemei $\langle Ae_j, f_i\rangle$, míg $A^*$ mátrixának $a^*_{j,i}$ elemei

$$\langle A^*f_i, e_j\rangle = \overline{\langle e_j, A^*f_i\rangle} = \overline{\langle Ae_j, f_i\rangle} = \overline{a_{i,j}}. \;\square$$

**7.3.30. Feladat [4].** Adjuk meg a síkon az alábbi transzformációk adjungáltját:

(1) tükrözés az $x$ tengelyre;

(2) tükrözés egy origón átmenő egyenesre;

(3) origó körüli 90°-os forgatás;

(4) origó körüli forgatás;

(5) merőleges vetítés az $x$ tengelyre;

(6) merőleges vetítés egy origón átmenő egyenesre;

(7) az $y$ tengellyel párhuzamos vetítés az $y = x$ egyenesre;

(8) az $(x, y) \mapsto (x + y, 0)$ leképezés.

**7.3.31. Önadjungált és normális transzformációk.** Legyen $X$ véges dimenziós belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, $A\colon X \to X$ lineáris transzformáció. Ha $A^* = A$, akkor $A$-t *önadjungált*nak, ha pedig $A^* = -A$, akkor *ferdén önadjungált*nak nevezzük. Komplex belső szorzat térben szokásos a *Hermite-szimmetrikus*, illetve *ferdén Hermite-szimmetrikus*, valós belső szorzat térben pedig a *szimmetrikus*, illetve *ferdén szimmetrikus* elnevezés is. Az utóbbi elnevezések világossá válnak, ha meggondoljuk, hogy ortonormált bázisban mit is jelentenek ezek a feltételek a transzformáció mátrixára.

Komplex térben az, hogy $A$ ferdén önadjungált, azzal ekvivalens, hogy $iA$ önadjungált; valóban, ha $A$ ferdén önadjungált, akkor $(iA)^* = \bar{i}A^* = -i(-A) = iA$, és ha $(iA)^* = iA$, akkor $-iA^* = -i(-A) = iA$, ahonnan $i$-vel szorozva $A^* = -A$.

Az $A$ önadjungált transzformáció *pozitív szemidefinit*, illetve *negatív szemidefinit*, ha $\langle Ax, x\rangle \geq 0$, illetve $\langle Ax, x\rangle \leq 0$ minden $x \in X$-re, egyébként *indefinit*; ha $\langle Ax, x\rangle > 0$, illetve $\langle Ax, x\rangle < 0$ minden $0 \neq x \in X$-re, akkor $A$ *pozitív definit*, illetve *negatív definit.*

Az $A\colon X \to X$ lineáris transzformáció *normális*, ha felcserélhető az adjungáltjával, azaz $AA^* = A^*A$. A normális transzformációk osztálya elég széles: az önadjungált, ferdén önadjungált és unitér transzformációk nyilván normálisak. Több tételt normális transzformációkra fogunk bebizonyítani.

**7.3.32. Példa.** Ha $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett, $A\colon X \to Y$ lineáris leképezés, akkor $A^*A$ és $AA^*$ önadjungáltak, mert $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ és $(AA^*) = (A^*)^*A^* = AA^*$.

**7.3.33. Polarizációs formula.** *Legyen $X$ unitér tér, $A\colon X \to X$ lineáris transzformáció. Ha $x, y \in X$, akkor*

$$\begin{aligned} 4\langle Ax, y\rangle = {} & \big\langle A(x+y), x+y\big\rangle - \big\langle A(x-y), x-y\big\rangle \\ & + i\big\langle A(x+iy), x+iy\big\rangle - i\big\langle A(x-iy), x-iy\big\rangle. \end{aligned}$$

*Ha $X$ euklideszi tér és $A$ önadjungált, akkor*

$$4\langle Ax, y\rangle = \big\langle A(x+y), x+y\big\rangle - \big\langle A(x-y), x-y\big\rangle.$$

**Bizonyítás.** Kiszámoljuk. □

**7.3.34. Következmény.** *A belső szorzat kifejezhető a normával, így adott normához legfeljebb egy belső szorzat van, amelyből származik.*

**Bizonyítás.** Legyen $A = \mathbb{I}$. □

**7.3.35. Következmény.** *Ha $\langle Ax, x\rangle = 0$ minden $x \in X$-re és $X$ komplex vagy $A$ önadjungált, akkor $A = 0$.*

**Bizonyítás.** Minden $x, y \in X$-re $\langle Ax, y\rangle = 0$, ahonnan $y = Ax$ helyettesítéssel bármely $x \in X$-re $Ax = 0$. □

**7.3.36. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett. Egy $U\colon X \mapsto Y$ lineáris leképezésre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) $U^*U = \mathbb{I}_X$;

(2) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *bármely* $x, y \in X$*-re;*

(3) $\|Ux\| = \|x\|$ *bármely* $x \in X$*-re;*

(4) $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ *bármely* $x, y \in X$*-re.*

A tétel úgy is fogalmazható, hogy az $U^*U = \mathbb{I}_X$ feltétel az izometrikus (távolságtartó) lineáris transzformációkat jellemzi.

⋆ **Bizonyítás.** Mivel

$$\langle x, y\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle,$$

(1)-ből következik (2). (2)-ből nyilván következik (3). Nyilván (3) és (4) ekvivalensek, mert $U$ lineáris. Tegyük fel, hogy (3) teljesül. Ekkor

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

bármely $x \in X$-re, így $\big\langle (U^*U - \mathbb{I}_X)x, x\big\rangle = 0$, ahonnan felhasználva, hogy $U^*U - \mathbb{I}_X$ önadjungált, kapjuk, hogy $U^*U = \mathbb{I}_X$. □

**7.3.37. Következmény.** *Az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *$U$ unitér;*

(2) $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *bármely* $x, y \in X$*-re;*

(3) $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\|Ux\| = \|x\|$ *bármely* $x \in X$*-re;*

(4) $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ *bármely* $x \in X$*-re.*

A tétel úgy is fogalmazható, hogy az unitér transzformációk pontosan a belső szorzat terek, illetve a belső szorzatból származó normával ellátott normált terek izomorfizmusai.

⋆ **Bizonyítás.** Ha $U$ unitér, akkor $UU^* = \mathbb{I}_Y$ miatt $Y$-ra képez, így teljesül (2). Nyilván (2), (3) és (4) ekvivalensek, és következik belőlük, hogy $U^*U = \mathbb{I}_X$. Mivel $U$ lineáris, $Y$-ra képez, és $\|Ux\| = \|x\|$ miatt $\ker(U) = \{0\}$, ezért létezik inverze, tehát $U^* = U^{-1}$. □

**7.3.38. Megjegyzés.** Az $m = \dim(X)$, $n = \dim(Y)$ jelölésekkel, felírva $U^*$ és $U$ mátrixát azt kapjuk, hogy az $U^*U = \mathbb{I}_X$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy ortonormált bázisokban $[U]$ oszlopai ortonormált vektorrendszert alkotnak $\mathbb{K}^m$-ben. Azokat a mátrixokat, amelyekre ez teljesül, *ortogonális mátrix*oknak fogjuk nevezni. Néha a lineáris izometriákat is szokás *ortogonális lineáris transzformáció*nak nevezni. Az $UU^* = \mathbb{I}_Y$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy ortonormált bázisokban $[U]$ sorai ortonormált vektorrendszert alkotnak $\mathbb{K}^n$-ben. Ha $U$ unitér, akkor $m = n$ és ortonormált bázisokban $[U]$ oszlopai és a sorai is ortonormált bázist alkotnak $\mathbb{K}^n$-ben, az $[U]$ és a transzponálja is ortogonális mátrix.

**7.3.39. Tétel.** *Legyen $X$ véges dimenziós belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, $A\colon X \to X$ lineáris transzformáció. Az $A$-nak az $Y$ akkor és csak akkor invariáns altere, ha $Y^\perp$ invariáns altere $A^*$-nak.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $Y$ invariáns altere $A$-nak. Ha $z$ az $Y^\perp$ egy eleme, akkor $\langle y, A^*z\rangle = \langle Ay, z\rangle = 0$ bármely $y \in Y$-ra (mert $Ay \in Y$), így $A^*z \in Y^\perp$. A megfordítás $A = (A^*)^*$, $Y = (Y^\perp)^\perp$ felhasználásával adódik. □

**7.3.40. Segédtétel.** *Ha $A$ egy unitér tér egy normális transzformációja és $x$ a $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátvektora $A$-nak, akkor $x$ a $\overline{\lambda}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora $A^*$-nak.*

**Bizonyítás.** Mivel $A$ normális,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2.$$

Mivel ha $A$ normális, akkor $A - \lambda\mathbb{I}$ is, és $(A - \lambda\mathbb{I})^* = A^* - \overline{\lambda}\mathbb{I}$, a fentiek alapján

$$\|Ax - \lambda x\| = \|A^*x - \overline{\lambda}x\|,$$

ahonnan következik az állítás. □

**7.3.41. Normális transzformáció átlós alakja.** *Egy unitér tér egy $A$ lineáris transzformációjához pontosan akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelyben $A$ mátrixa átlós alakú, ha $A$ normális.*

A bizonyítás konstruktív.

⋆ **Bizonyítás.** Ha egy unitér tér valamely $A$ lineáris transzformációja ortogonális bázis választásával átlós alakra hozható, akkor ebben a bázisban adjungáltjának mátrixa is átlós alakú, így $A$ és $A^*$ felcserélhetőek. Megmutatjuk, hogy $A$ normális volta nem csak szükséges, hanem elégséges is. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Ha $n = 1$, az állítás nyilvánvaló. Az algebra alaptétele szerint $A$-nak van sajátértéke. Legyen $e_n$ egy ehhez tartozó normált sajátvektor. Ez sajátvektora $A^*$-nak is, így az $n-1$ dimenziós $U = \{e_n\}^\perp$ altér invariáns altere $A$-nak és $A^*$-nak is. Vegyük észre, hogy $A|_U$ adjungáltja $A^*|_U$, mert

$$\big\langle (A|_U)x, y\big\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \big\langle x, (A^*|_U)y\big\rangle,$$

ha $x, y \in U$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $A|_U$ normális, mert

$$(A|_U)(A|_U)^*x = (A|_U)(A^*|_U)x = AA^*x = A^*Ax = (A^*|_U)(A|_U)x = (A|_U)^*(A|_U)x,$$

ha $x \in U$. Az indukciós feltevés szerint $U$-nak van olyan $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ ortonormált bázisa, amelyben $A|_U$ mátrixa átlós mátrix. Innen következik az állítás. □

**7.3.42. Következmény.** *Unitér tér normális transzformációja pontosan akkor önadjungált, pozitív szemidefinit, pozitív definit, ferdén Hermite-szimmetrikus, unitér, illetve invertálható, ha sajátértékei valósak, nemnegatívak, pozitívak, tiszta képzetesek, egységnyi abszolút értékűek, illetve nullától különbözőek.*

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk az átlós alakot. □

**7.3.43. Valós önadjungált transzformáció átlós alakja.** *Ha $A$ egy euklideszi tér egy önadjungált transzformációja, akkor van a térnek olyan ortonormált bázisa, amelyben $A$ mátrixa átlós alakú.*

**Bizonyítás.** Az alapgondolat az úgynevezett *komplexifikálás*. Írjuk fel egy ortonormált bázisban $A$ mátrixát. Ez a valós elemű szimmetrikus mátrix tekinthető egy unitér tér egy önadjungált transzformációja mátrixának is valamely ortonormált bázisban. Innen az előző következmény szerint karakterisztikus polinomjának zérushelyei mind valósak. Ezt felhasználva, alkalmazhatjuk a normális transzformációk esetén használt gondolatmenetet. □

**7.3.44. Poláris felbontás.** *Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek $\mathbb{K}$ felett és $A\colon X \to Y$ egy lineáris leképezés. Ha* $\dim(X) \leq \dim(Y)$, *akkor létezik olyan $Q\colon X \to Y$ lineáris izometria és $P\colon X \to X$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = QP$, ha pedig* $\dim(X) \geq \dim(Y)$, *akkor létezik olyan $Q\colon Y \to X$ lineáris izometria és $P\colon Y \to Y$ pozitív szemidefinit transzformáció, hogy $A = PQ^*$.*

A bizonyítás konstruktív.

⋆ **Bizonyítás.** Először legyen $\dim(X) \leq \dim(Y)$. Válasszunk olyan $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormált bázist $X$-ben, amelyben az $A^*A$ önadjungált transzformáció mátrixa diagonális. Erre $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle A^*Ae_i, e_j\rangle = 0$. Legyen $Pe_i = \|Ae_i\|e_i$ $(1 \leq i \leq m)$ és legyen $Qe_i = Ae_i/\|Ae_i\|$, ha $Ae_i \neq 0$, az $A$ nullterét pedig képezze le $Q$ izometrikusan $\operatorname{rng}(A)$ ortogonális komplementerébe. A másik esetben $A^* = QP$, és így $A = P^*Q^* = PQ^*$. □

⋆ **7.3.45. Szinguláris érték felbontás.** *Egy $\mathbb{K}$ feletti $m \times n$-es $a$ mátrix felírható $a = \tilde{q}s\overline{q}'$ alakban, ahol $s$ egy $m \times n$-as diagonális mátrix a főátlójában álló*

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_k \geq 0, \quad k = \min\{m, n\}$$

*értékekkel, $\tilde{q}$ és $q$ pedig $m \times m$-es, illetve $n \times n$-es ortogonális mátrixok.*

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást az *a maximális szinguláris érték felbontás*ának nevezzük, az $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_k$ értékek a *szinguláris érték*ek. Megjegyezzük, hogy ha $n < m$, akkor $\tilde{q}$ utolsó $m - n$ oszlopa el is hagyható, hiszen $s$ utolsó $m - n$ sora úgyis nulla. Ezt az alakot nevezzük *szinguláris érték felbontás*nak, ezt fogjuk bizonyítani. Sőt, ha $a$ rangja $r$, akkor $s$ rangja is $r$ kell legyen, így

$$s_{r+1} = s_{r+2} = \cdots = s_k = 0,$$

tehát $\tilde{q}$ utolsó $m - r$ oszlopa, valamint $q$ utolsó $n - r$ oszlopa (azaz $\overline{q}'$ utolsó $n - r$ sora) is elhagyható; ezt az alakot *minimális szinguláris érték felbontás*nak nevezzük.

**Bizonyítás.** Legyen $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa a szokásos bázisban $a$. Tekintsük $A$ poláris felbontását: $A = QP$. Van olyan ortonormált bázis, amelyben $P$ mátrixa diagonális és a bázisvektorok cserélgetésével az is elérhető, hogy ebben a bázisban $P$ diagonálisának elemei monoton csökkenő sorozatot alkossanak. Legyen $s$ ez a mátrix. Legyen $T$ az erről a bázisról a szokásos bázisra való áttérés kísérő transzformációja. Ekkor $P$ mátrixa a szokásos bázisban $[T]^{-1}s[T]$, így

$$a = [A] = [Q][T]^{-1}s[T] = [QT^{-1}]s[T].$$

Mivel $T$, és így $T^{-1}$ is unitér, $QT^{-1}$ lineáris izometria, így $\tilde{q} = [QT^{-1}]$, $q = [T]^{-1}$ jelöléssel kapjuk az állítást. Az $m \geq n$ esetben a bizonyítás hasonló. □

⋆ **7.3.46. Általánosított inverz.** Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek, $A\colon X \to Y$ lineáris operátor. Az $Ax = b$ lineáris egyenlet helyett tekinthetjük az általánosabb $\|Ax - b\|^2 \to \min$ problémát, amelyről megmutatjuk, hogy mindig megoldható. Ennek a megoldásait a *legkisebb négyzetek módszere* értelmében vett megoldásoknak nevezzük. A megoldás nem mindig egyértelmű, ezért $\min_{x\in X} \|Ax - b\|^2 = \alpha$ jelöléssel tekintsük az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$, $\|x\|^2 \to \min$ problémát. Megmutatjuk, hogy ennek egyetlen $x_b$ megoldása van. Valóban, az $\|y - b\| \to \min$, $y \in \operatorname{rng}(A)$ problémának egyetlen megoldása van, amelyet meg is kaphatunk: tekintsünk egy ortonormált bázist az $\operatorname{rng}(A)$ altérben, és kombináljuk a vektorait $b$-nek a Fourier-együtthatóival. Most $A^{-1}(y)$ minden eleme az $\|Ax - b\|^2 = \alpha$ megoldása. Legyen $x_0 \in A^{-1}(y)$. Ezzel $A^{-1}(y) = \ker(A) + x_0$. Írjuk fel $x_0$-at $x_1 + x_2$ alakban, ahol $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in \ker(A)^\perp$. Megmutatjuk, hogy $x_2$ a keresett $x_b$ elem. Mivel $y = A(x_0) = A(x_1) + A(x_2) = A(x_2)$, kapjuk, hogy $x_2 \in A^{-1}(y)$. Minden $x \in A^{-1}(y)$ egyértelműen felírható $x = x_2 + x'$ alakban, ahol $x' \in \ker(A)$. Mivel $x_2 \in \ker(A)^\perp$, azt kapjuk, hogy $\|x\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x'\|^2$, az $\|x\|^2$ (és így $\|x\|$ is) akkor minimális, ha $x' = 0$, azaz valóban $x_b = x_2$.

Az $A^\dagger\colon b \mapsto x_b$ leképezését $Y$-nak $X$-be az $A$ *általánosított inverz*ének nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a $\operatorname{rng}(A) = Y$, $\ker(A) = \{0\}$ esetben megegyezik az inverzzel.

⋆ **7.3.47. Feladat [7].** Ha a szokásos bázisban

$$[A_c] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

ahol $c$ valós paraméter, számítsuk ki $A_c^\dagger$ mátrixát. Vizsgáljuk a $\lim_{c\to 0} A_c^\dagger$ határértéket.

⋆ **7.3.48. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek, $e_1, \ldots, e_n$, illetve $f_1, \ldots, f_m$ ortonormált bázisokkal, $A\colon X \to Y$ lineáris operátor, rangja $r$. Legyen $A$ mátrixának maximális szinguláris érték felbontása $a = \tilde{q}s\overline{q}'$. Ekkor $A^\dagger$ lineáris operátor, és mátrixa ugyanezekben a bázisokban $a^\dagger = qs^\dagger\overline{\tilde{q}}'$, ahol $s^\dagger$ egy $n \times m$-es diagonális mátrix, átlójában az $1/s_1, 1/s_2, \ldots, 1/s_r, 0, \ldots, 0$ értékekkel.*

**Bizonyítás.** Legyen $b \in Y$, $\alpha = \min_{x\in X} \|Ax - b\|^2$, és $x$ az $\alpha = \|Ax - b\|^2$ minimális normájú megoldása, azaz $x = A^\dagger(b)$. Ekkor

$$\alpha = \big\|a[x] - [b]\big\|^2 = \big\|\tilde{q}s\overline{q}'[x] - [b]\big\|^2 = \big\|s\overline{q}'[x] - \overline{\tilde{q}}'[b]\big\|^2 = \big\|s[y] - [c]\big\|^2,$$

ahol $[c] = \overline{\tilde{q}}'[b]$ és $[y] = \overline{q}'[x]$, mivel $\tilde{q}$ és $\overline{q}'$ ortogonális mátrixok. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \qquad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\|s[y] - [c]\|^2 = \sum_{j=1}^{r} |s_j y_j - c_j|^2 + \sum_{j=r+1}^{m} |c_j|^2.$$

Innen $y_j = c_j/s_j$, ha $1 \le j \le r$, és $y_j$ tetszőleges, ha $r < j \le m$ esetben lesz a bal oldal minimális. Ezen vektorok közül $y$ normája akkor lesz minimális, ha $r < j \le m$ esetén $y_j = 0$. Innen $[x] = q[y] = qs^\dagger[c] = qs^\dagger\overline{\tilde{q}}'[b]$, azaz $A^\dagger$ lineáris és $[A^\dagger] = qs^\dagger\overline{\tilde{q}}'$. □

⋆ **7.3.49. Tétel:** $QR$**-felbontás.** *Legyen $a$ egy $m \times n$-es $\mathbb{K}$-beli elemű mátrix, és legyen $k$ a rangja. Ekkor létezik olyan $m \times k$-as $q$ ortogonális mátrix és $k \times n$-es felső trapéz mátrix, hogy $a = qr$.*

A bizonyítás konstruktív. A tételben szereplő felbontást *minimális $QR$-felbontás*nak szokás nevezni. További nulla sorokkal kiegészítve $r$-et és megfelelő oszlopokkal kiegészítve $q$-t elérhető, hogy a méretekben szereplő $k$-ra $k = \min\{m, n\}$ legyen, ezt fogjuk *$QR$-felbontás* alatt érteni. Ha $m > n$, akkor tovább folytatva a kiegészítést, azt is elérhetjük, hogy a méretekben szereplő $k$-ra $k = m$ legyen; ezt a felbontást *maximális $QR$-felbontás*nak nevezzük.

**Bizonyítás.** Legyenek $a$ oszlopai $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hagyjunk el minden olyan vektort ezek közül, amely az előzőek lineáris kombinációja, majd a maradék $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}$ vektorokat ortonormáljuk. A kapott $q_1, q_2, \ldots, q_k$ vektorok legyenek $q$ oszlopai. Ha $1 \le j \le n$ és $j_\ell \le j < j_{\ell+1}$ (ahol $j_0 = 0$ és $j_{k+1} = n+1$), akkor $a_j$ lineárisan kombinálható a $q_1, \ldots, q_\ell$ vektorokból: $a_j = \sum_{i=1}^{\ell} r_{i,j} q_i$. Legyen $r_{i,j} = 0$, ha $\ell < i \le k$. A kapott $r = (r_{i,j})$ mátrix felső trapéz mátrix és nyilván $a = qr$. □

⋆ **7.3.50. Megjegyzés.** Abban a speciális esetben, amikor az $A\colon X \to Y$ lineáris operátor kölcsönösen egyértelmű, ahol $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek, a $QR$-felbontás is felhasználható az $\|Ax - b\|^2 \to \min$ probléma megoldására. Választva $e_1, \ldots, e_n$ és $f_1, \ldots, f_m$ ortonormált bázisokat ($m \ge n$), az $a = [A]$ jelöléssel, ha $a = qr$ az $a$ maximális $QR$-felbontása, akkor

$$\|Ax - b\|^2 = \big\|a[x] - [b]\big\|^2 = \big\|qr[x] - [b]\big\|^2 = \big\|r[x] - \overline{q}'[b]\big\|^2 = \big\|[y] - [c]\big\|^2,$$

ahol $[y] = r[x]$ és $[c] = \overline{q}'[b]$, mivel $q$ ortogonális. Legyen

$$[y] = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [c] = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\big\|[y] - [c]\big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j - c_j|^2 + \sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2.$$

Innen a minimum értéke $\sum_{j=n+1}^{m} |c_j|^2$ és akkor kapjuk, ha $y_j = c_j$ ($j = 1, \ldots, n$). Az $r[x] = [y]$ egyenletrendszer egyértelműen (és könnyen) megoldható, mert $r$ rangja $n$, és felső háromszög alakú.

**7.3.51. Feladat [10].** Az alábbi $\mathbb{K}^4$-transzformációkról döntsük el, hogy a transzformáció normális, önadjungált, unitér, szimmetrikus, vagy ortogonális-e? Ha igen, hozzuk ortonormált bázisban diagonális alakra! Ha nem, határozzuk meg a poláris felbontását:

(1) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3)$;

(2) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, x_1, x_2, x_3)$;

(3) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_1, x_1, x_1)$;

(4) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1+x_2+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3+x_4)$;

(5) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$;

(6) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto .25(x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$.

⋆ **7.3.52. Feladat [8].** Legyen $h = (h_{i,j})$ a $15 \times 15$-ös Hilbert-márix, azaz legyen $h_{i,j} = 1/(i+j)$. Számoljuk ki a csupa 1 koordinátájú $x$ oszlopmátrixra $b = hx$ értékét pontosan, majd oldjuk meg Gauss-eliminációval részleges főelem-kiválasztással lebegőpontosan az egyenletrendszert $x$-re. Csináljuk meg ugyanezt $h$ szinguláris érték felbontásával, nullázva a $10^{-10}$-nél kisebb szinguláris értékeket.

⋆ **7.3.53. Feladat [8].** Legyen a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad [b] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a legkisebb négyzetes értelemben vett megoldások közül a legkisebb normájút. Ismételjük meg ugyanezt, a második sor második elemét $10^{-12}$-re cserélve.

°⋆ **7.3.54. Tyihonov-regularizáció.** Legyenek $X$ és $Y$ véges dimenziós belső szorzat terek, $A\colon X \to Y$ lineáris operátor. Az

$$\|Ax - b\|^2 = \alpha, \quad \|x\|^2 \to \min, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \min_{x \in X} \|Ax - b\|^2$$

probléma helyett adott $C > 0$ konstanssal tekintsük a

$$\|A_\delta x - b_\delta\|^2 + \delta\|Tx\|^2 \to \min$$

problémát, ahol $\delta > 0$, $\|b - b_\delta\| \le \delta$, $\|A - A_\delta\| \le \delta$, $\|Pb - P_\delta b_\delta\| \le C\delta$ és $T$ a *Tyihonov-operátor*, leggyakrabban $T = \mathbb{1}_X$; itt $P$ a $\operatorname{rng}(A)$-ra, $P_\delta$ pedig $\operatorname{rng}(A_\delta)$-ra való merőleges vetítés operátora. Ennek a problémának a megoldása sokszor sokkal jobban viselkedik (és megmutatható, hogy ha $T = \mathbb{1}_X$, akkor $\delta \to 0$ esetén tart az első probléma megoldásához). Az eljárást *Tyihonov-regularizáció*nak nevezzük.

°⋆ **7.3.55. Feladat [7].** Ha a szokásos bázisban

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad [b] = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix},$$

ahol $a, c$ valós paraméterek, számítsuk ki a Tyihonov-regularizációval kapott probléma $x_\delta$ megoldását, ha $C = 1$, $T = \mathbb{1}_X$, $A_\delta = A$ és $b_\delta = b$. Vizsgáljuk a $\lim_{\delta \to 0} x_\delta$ határértéket.

# 8

# Többváltozós analízis

Ebben a fejezetben a cél a vektoranalízis alapjainak, véges dimenziós belső szorzat terekben az analízis alapjainak tárgyalása. Sok minden azonban sokkal általánosabban is tárgyalható, és később szükségünk is lesz erre az általánosságra. Ezért a folytonossággal és a határértékkel kapcsolatos alapfogalmakat metrikus terekben tárgyaljuk. A differenciálszámításnál alkalmas általánosság lenne normált terekben dolgozni, mivel a legtöbb tételben csak a norma tulajdonságait használjuk, így az eredmények nagy része tetszőleges normált térben is érvényes marad. Mivel ez némi bonyodalmat jelent, és erre az általánosításra nem lesz szükségünk, maradunk az euklidészi terekben. Ezután a határozott integrált általánosítjuk $\mathbb{R}^k$-ra. Mivel ezzel az integrálfogalommal a deriváltból nem kapjuk vissza a függvényt, a görbe menti integrállal is meg kell ismerkednünk.

## 8.1 Metrikus terek

Ebben a fejezetben metrikus terekben tárgyaljuk a határértékkel és folytonossággal kapcsolatos alapfogalmakat. Bár nagyon sok minden hasonlóan megy, mint a skalár változós, skalár értékű függvények esetén, inkább mindent részletesen leírunk.

**8.1.1. Metrikus tér.** Az $X$ halmaz *félmetrikus tér*nek nevezzük, ha bármely két $x, y$ eleméhez hozzá van rendelve egy x y y $d(x, y)d(x, y)$ nemnegatív bővített valós szám, az $x$ és $y$ *eltérés*e úgy, hogy minden $x, y, z \in X$ esetén

(1) $d(x, x) = 0$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*szimmetria*);

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha még az is teljesül, hogy

(4) $x \neq y$ esetén $0 < d(x, y) < \infty$,

akkor $d$-t *távolság*nak vagy *metriká*nak, az $X$ halmazt *metrikus tér*nek nevezzük.

Ha $d$ eltérés, $x_0 \in X$, és $X_0 = \{x : x \in X,\ d(x, x_0) < \infty\}$, akkor ezen a részhalmazon az eltérés véges. Ha $d$ egy véges eltérés $X$-en és $x, y, u, v$ tetszőleges pontok, akkor teljesül a

$$\left|d(x, y) - d(u, v)\right| \leq d(x, u) + d(y, v)$$

*négyszög-egyenlőtlenség*. Ez a

$$d(x, y) \leq d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

egyenlőtlenségből, illetve az $x$ és $u$, valamint $y$ és $v$ szerepének felcserélésével kapható hasonló egyenlőtlenségből következik. Minden véges eltérésből kaphatunk távolságot, ha azokat a pontokat, amelyek eltérése nulla, egy osztályba sorolva, azonosítjuk. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az ilyen pontokat „összeragasztjuk”. Ily módon sok érdekes metrikus teret kaphatunk.

A metrikát általában $d$-vel fogjuk jelölni, néha $d_X$-szel, ha utalni akarunk arra, hogy az $X$ tér metrikájáról van szó.

**8.1.2. Definíció.** A metrikus terek izomorfizmusai a *távolságtartó leképezés*ek, másnéven *izometriá*k vagy *egybevágóság*ok: az $f: X \to Y$ leképezése az $(X, d_X)$ térnek az $(Y, d_Y)$ térre izometria, ha $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ minden $x, y \in X$ esetén. Természetesen egy izometria mindig kölcsönösen egyértelmű.

Metrikus terek hasonlósága is definiálható: az $f: X \to Y$ leképezése az $(X, d_X)$ térnek az $(Y, d_Y)$ térre *hasonlóság*, ha valamely $0 < c < \infty$ konstanssal

$$d_Y(f(x), f(y)) = c d_X(x, y)$$

minden $x, y \in X$ esetén. Hasonlóság is mindig kölcsönösen egyértelmű.

Segíthet a metrikus terek elképzelésében, ha tudjuk, hogy minden metrikus tér egybevágó valamely normált tér egy részhalmazával. Ezt később bebizonyítjuk.

**8.1.3. Példák metrikus térre.** Metrikára a legegyszerűbb példa a *diszkrét metrika*, amelynél különböző pontok távolsága mindig 1. A számegyenes, illetve a komplex sík metrikus tér a $d(x, y) = |x - y|$ metrikával. Általánosabban, minden normált tér metrikus tér a $d(x, y) = \|x - y\|$ metrikával. Speciálisan, a belső szorzat terek metrikus terek. Metrikus tér bármely részhalmaza maga is metrikus tér, az eredeti tér *alter*e.

**8.1.4. Definíció.** Az $X$ halmazon értelmezett $d_1$ és $d_2$ metrikákat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha léteznek olyan $c, C > 0$ konstansok, hogy $cd_1(x, y) \le d_2(x, y) \le Cd_1(x, y)$ minden $x, y \in X$ esetén. Egy adott $X$ halmazon értelmezett metrikák körében a metrikák ekvivalenciája ekvivalenciareláció.

Hasonlóan az $X$ lineáris téren a $|\ |$ és $\|\ \|$ normákat *ekvivalens*eknek nevezzük, ha léteznek olyan $c, C > 0$ valós számok, hogy

$$c|x| \le \|x\| \le C|x|$$

minden $x \in X$ esetén. Például $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$ bármely $1 \le p < \infty$ esetén minden $x \in \mathbb{K}^n$-re. Normák ekvivalenciája nyilván ekvivalencia-reláció. Egy normált téren ekvivalens normákból ekvivalens metrikák származnak. (Fontos tudni, hogy véges dimenziós normált téren bármely két norma ekvivalens; ezt majd bebizonyítjuk.)

**8.1.5. Gömbök, átmérő, korlátosság.** Ha $X$ metrikus tér, $x \in X$ és $A, B \subset X$, használni fogjuk a (nem teljesen korrekt)

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

és

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

jelöléseket.x a a $d(x, A)$a b b $d(A, B)$ Nyilván $d(x, A) = d(\{x\}, A)$. Tetszőleges nem üres $A$ halmazra és $x, y \in X$-re $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \le d(x, y)$; valóban, minden $z \in X$-re $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$, tehát $d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$, és hasonlóan $d(y, A) \le d(x, y) + d(x, A)$.

Az $A$ halmaz *átmérő*jén a $d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ számot értjük. $d(A) = 0$ pontosan akkor, ha $A$ egyelemű. Ha $d(A) < +\infty$, akkor az $A$ halmazt *korlátos*nak nevezzük. Nyiván ha $A, B \subset X$ nem üresek, akkor $d(A \cup B) \le d(A) + d(A, B) + d(B)$, így véges sok korlátos halmaz egyesítése korlátos.

Legyen $X$ metrikus tér, $x \in X$ és $\varepsilon \geq 0$. Az $\varepsilon$ sugarú *gömb*ökre az

$$\mathbb{U}_\varepsilon(x) = \{y \colon d(x,y) < \varepsilon\}, \qquad \mathbb{B}_\varepsilon(x) = \{y \colon d(x,y) \leq \varepsilon\},$$

epszilon a pszilon a $_\varepsilon(A)$epszilon a pszilon a $_\varepsilon(A)$jelöléseket fogjuk használni. Az $\varepsilon$ sugarú *gömbfelület*re az $\mathbb{S}_\varepsilon(x) = \{y \colon d(x,y) = \varepsilon\}$ jelölést fogjuk használni. Általánosabban, ha $A \subset X$, használni fogjuk az

$$\mathbb{U}_\varepsilon(A) = \{x \colon d(x,A) < \varepsilon\}, \qquad \mathbb{B}_\varepsilon(A) = \{x \colon d(x,A) \leq \varepsilon\}$$

és $\mathbb{S}_\varepsilon(A) = \{x \colon d(x,A) = \varepsilon\}$ jelöléseket.epszilon x pszilon x $_\varepsilon(x)$epszilon x pszilon x $_\varepsilon(x)$epszilon x pszilon x $_\varepsilon(x)$

**8.1.6. Belső, külső, izolált, torlódási és határpontok.** Az $X$ metrikus tér $x$ elemének $r > 0$ sugarú *környezet*én az $\mathbb{U}_r(x)$ gömböt érjük, azaz azon pontok halmazát, amelyek távolsága $x$-től kisebb, mint $r$. Ha a sugár nem lényeges, akkor egyszerűen $x$ egy $U$ környezetéről beszélünk.

Legyen $A \subset X$ és $x \in X$. Az $x$ pontot az $A$ halmaz *belső pont*jának nevezzük, ha van $U$ környezete $x$-nek, amelyre $U \subset A$. Az $A$ belső pontjainak halmazát $A$ *belsejé*nek nevezzük, és $A^\circ$-rel jelöljükko|r o|r $A^\circ$. A komplementer belső pontjait $A$ *külső pont*jainak nevezzük, a többi pontok $A$ *határpont*jai. A határpontok halmaza $A$ *határ*a, jelölése $\partial A$hatara atara $\partial A$. Ha $x$ nem külső pontja $A$-nak, azaz ha belső pontja vagy határpontja, akkor azt mondjuk, hogy $x$ *érintkezési pont*ja $A$-nak. Ez azzal ekvivalens, hogy $d(x,A) = 0$. Az $A$ összes érintkezési pontjainak halmazát lezartja ezartja $A\overline{A}$ jelöli, ez az $A$ halmaz *lezárt*ja. Nyilván $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$. Az $\overline{A}$ pontjait szokás a következőképpen is felosztani: egy $x \in \overline{A}$ pont *izolált pont*ja $A$-nak, ha van olyan környezete, hogy abban ő az egyetlen $A$-beli pont; egyébként — azaz ha $x$ minden környezete tartalmaz $x$-től különböző pontot $A$-ból — azt mondjuk, hogy $x$ *torlódási pont*ja $A$-nak. A belső pont és az izolált pont eleme $A$-nak, a határpont és a torlódási pont nem feltétlenül, a külső pont pedig nem eleme $A$-nak.

Bár a gömbök megváltoznak, a többi itt definiált fogalom nem változik, ha ekvivalens metrikára térünk át.

**8.1.7. Nyílt és zárt halmazok.** Ha az $X$ metrikus tér $A$ részhalmazának minden pontja belső pontja $A$-nak, akkor $A$-t *nyílt*nak nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $X$ nyílt halmazok. Ha az $A$ halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, akkor *zárt*nak nevezzük. Például az üres halmaz és az egész $X$ zártak.

A nyílt és zárt halmazok nem változnak, ha ekvivalens metrikára térünk át.

**8.1.8. Állítás.** *Egy $X$ metrikus tér $A$ részhalmaza akkor és csak akkor nyílt, ha a komplementere zárt.*

**Bizonyítás.** Ha $A$ nyílt, $x$ pedig a komplementer egy torlódási pontja, akkor $x$ nem lehet $A$-ban, mert annak minden pontja belső pont, így van olyan környezete, amelyben csak $A$-beli pontok vannak. Ha $A$ komplementere zárt, $x$ pedig $A$ egy pontja, akkor $x$ nem lehet torlódási pontja $A$ komplementerének, mert az minden torlódási pontját tartalmazza. Mivel ő maga $A$-ban van, van olyan környezete, amelyben nincs pontja a komplementernek, tehát $x$ belső pontja $A$-nak. $\square$

**8.1.9. Állítás.** *Ha $X$ metrikus tér, $A \subset X$ és $\varepsilon \geq 0$ (sic!), akkor $\mathbb{U}_\varepsilon(A)$ nyílt, $\mathbb{B}_\varepsilon(A)$ pedig zárt halmaz.epszilon x pszilon x $_\varepsilon(x)$epszilon x pszilon x $_\varepsilon(x)$*

**Bizonyítás.** Ha $x \in \mathbb{U}_\varepsilon(A)$, akkor $d(x, A) < \varepsilon$. A $\delta = \varepsilon - d(x, A)$ választással $d(x, y) < \delta$ esetén $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A) < \varepsilon$, azaz $x$ belső pontja $\mathbb{U}_\varepsilon(A)$-nak. Ha $x \notin \mathbb{B}_\varepsilon(A)$, azaz $d(x, A) > \varepsilon$, akkor $\delta = d(x, A) - \varepsilon > 0$ választással $d(x, y) < \delta$ esetén $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y) > \varepsilon$, így a második halmaz komplementere nyílt. □

**8.1.10. Tétel.** *Legyen $A$ az $X$ metrikus tér részhalmaza. Az $A$ egy torlódási pontjának bármely környezetében $A$-nak végtelen sok pontja van.*

**Bizonyítás.** Legyen $x$ torlódási pontja $A$-nak. Ha az állítás az $x$ valamely $U$ környezetére nem teljesülne, akkor $\varepsilon > 0$-t úgy választva, hogy $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset U$ legyen, és $\mathbb{U}_\varepsilon(x)$ az $U \cap A$-ból egyetlen $x$-től különböző pontot se tartalmazzon, ellentmondást kapnánk. □

**8.1.11. Tétel.** *Metrikus térben akárhány nyílt halmaz egyesítése nyílt és véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.*

Végtelen sok nyílt halmaz metszete nem feltétlenül nyílt, például $\mathbb{R}$-ben

$$\{0\} = \cap_{n=1}^{\infty} ]-1/n, 1/n[.$$

**Bizonyítás.** Ha $G_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ nyílt halmazok tetszőleges rendszere, és $x \in G$, ahol $G = \cup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$, akkor valamely $\gamma \in \Gamma$-ra $x \in G_\gamma$. Ebből következik, hogy valamely $\varepsilon > 0$-ra $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G_\gamma \subset G$. Ha $G_1, G_2, \ldots, G_n$ nyílt halmazok, és $x \in G = \cap_{i=1}^n G_i$, akkor minden $i$-re van olyan $\varepsilon_i > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$. De ekkor $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$-vel $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset G$. □

**8.1.12. Következmény.** *Akárhány zárt halmaz metszete zárt. Véges sok zárt halmaz egyesítése zárt.*

**Bizonyítás.** Áttérünk komplementerekre. □

**8.1.13. Következmény.** *Halmaz belseje nyílt.*

**Bizonyítás.** Válasszunk az $A$ halmaz minden $x$ belső pontjához egy $U_x$ környezetet, amely benne van $A$-ban. Mivel $U_x$ nyílt, minden pontja belső pontja $A$-nak, így $A^\circ = \cup_{x \in A^\circ} U_x$ nyílt. □

**8.1.14. Következmény.** *Halmaz határa és lezártja zárt.*

**Bizonyítás.** A lezárt a komplementer belsejének komplementere. A határ a halmaz lezártjának és a komplementere lezártjának metszete. □

**8.1.15. Következmény.** *Egy $Y$ altér egy $V$ részhalmaza pontosan akkor nyílt $Y$-ban, ha előáll $V = U \cap Y$ alakban, ahol $U$ nyílt $X$-ben.*

**Bizonyítás.** Ha előáll, $y \in V$ és az $X$-beli $\varepsilon$ sugarú környezete része $U$-nak, akkor az $Y$-beli $\varepsilon$ sugarú környezete része $V$-nek. Megfordítva, minden $y \in V$-hez válasszunk egy $\varepsilon_y > 0$ számot, amelyre az $Y$-beli $\varepsilon_y$ sugarú környezete $y$-nak része $V$-nek. Legyen $U$ az összes $y \in V$-re vett $\varepsilon_y$-sugarú $X$-beli környezetek egyesítése. □

**8.1.16. Következmény.** *Egy $Y$ altér egy $B$ részhalmaza pontosan akkor zárt $Y$-ban, ha előáll $B = A \cap Y$ alakban, ahol $A$ zárt $X$-ben.*

**Bizonyítás.** Áttérünk komplementerekre. □

**8.1.17. Sűrű halmazok.** Legyenek $A, B$ az $X$ metrikus tér részhalmazai. Az mondjuk, hogy $A$ *sűrű* $B$-ben, ha $B \subset \overline{A}$. Egy, az egész $X$-ben sűrű halmazt *mindenütt sűrű*nek, vagy röviden *sűrű*nek nevezünk. Ha van megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaza, akkor a teret *szeparábilis*nak nevezzük. Például $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben, így $\mathbb{R}$ szeparábilis.

**8.1.18. Feladat [8].** Vizsgáljuk meg, hogy $\mathbb{R}$-en a megadott függvény távolság-e?

(1) $d(x, y) = (x - y)^2$;

(2) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$;

(3) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$;

(4) $d(x, y) = |x - 2y|$;

(5) $d(x, y) = |x - y|/(1 + |x - y|)$.

**8.1.19. Feladat [5].** Mi $\mathbb{R}^n$-ben $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ külseje, lezártja, belseje és határa?

**8.1.20. Feladat [5].** Mi $\mathbb{R}^n$-ben $\mathbb{Q}^n$ lezártja, külseje, belseje és határa? Sűrű-e a komplementere?

**8.1.21. Feladat [6].** Mi $\mathbb{R}^2$-ben az alábbi halmazok belseje, külseje és határa:

(1) $x, y > 0$, $x + y < 1$;

(2) $y = 0$, $0 < x < 1$;

(3) $x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^+$, $0 < y < 1$.

**8.1.22. Feladat [5].** Van-e olyan halmaz $\mathbb{R}^2$-ben, amelynek pontosan három belső pontja van? És metrikus térben?

**8.1.23. Feladat [6].** Adjunk meg két olyan diszjunkt zárt halmazt $\mathbb{R}^2$-ben illetve $\mathbb{R}$-ben, amelyek távolsága nulla!

**8.1.24. Feladat [5].** Mi egy metrikus térben $\mathbb{U}_\varepsilon(x)$, $\varepsilon \geq 0$ belseje, lezártja és határa? Lehet-e a lezártja egyenlő a környezettel?

**8.1.25. Feladat [5].** Egy metrikus térben az $a$ és $B$ halmazok lezártja megegyezik. Igaz-e, hogy a torlódási pontjaik halmaza is megegyezik? Igaz-e, hogy a két halmaz megegyezik?

**8.1.26. Feladat [5].** Legyen $X = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{N}^+$, $d$ a diszkret metrika $A$-n, $d(0, 0) = 0$, és $d(0, n) = d(n, 0) = 1 + 1/n$, ha $n \in A$. Mutassuk meg, hogy $d$ metrika! Van-e olyan $a \in A$, amelyre $d(0, a) = d(0, A)$? Zárt-e az $A$ halmaz?

**8.1.27. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy metrikus térben egy $A$ halmaz

(1) pontosan akkor nyílt, ha $A = A^\circ$;

(2) ha $G \subset A$ nyílt, akkor $G \subset A^\circ$;

(3) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

(4) $A^\circ$ komplementere az $A$ komplementerének a lezártja;

(5) véges sok halmaz metszetének a belseje a belsejük metszete;

(6) az előző egyenlőségből melyik tartalmazás marad érvényben végtelen sok halmazra?

(7) véges sok halmaz uniójának a lezártja a lezártjuk uniója;

(8) az előző egyenlőségből melyik tartalmazás marad érvényben végtelen sok halmazra?

(9) megegyezik-e mindig $A$ és $A^\circ$ lezártja?

**8.1.28. Folytonosság.** Legyenek $X, Y$ metrikus terek, $A \subset X$ és $f\colon A \to Y$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *folytonos* az $a \in A$ pontban, ha $f(a)$ bármely $V$ környezetéhez van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \in U \cap A$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $d_X(x, a) < \delta$, akkor $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Nyilván ha egy függvény folytonos egy $a$ pontban, akkor bármely megszorítása, amely értelmezve van $a$-ban, szintén folytonos $a$-ban. Figyeljük meg, hogy a folytonosság csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha $f$-et megváltoztatjuk $a$ valamely környezetén kívül. Ha $a$ izolált pontja $A$-nak, akkor $f$ biztos, hogy folytonos $a$-ban.

Ha $f$ az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos, akkor röviden azt mondjuk, hogy *folytonos*. Vegyük észre, hogy a folytonosságban az $X$ tér $A$-n kívüli része semmi szerepet sem játszik, így ugyanazt kapjuk, ha $X$ helyett az $A$ alteret tekintjük. Elég lenne tehát az egész metrikus téren értelmezett folytonos függvényekkel foglalkozni.

Azokat az $f \in X \to Y$ függvényeket, amelyekre

$$\operatorname{Lip}(f) = \sup_{x,y \in \operatorname{dmn}(f), x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

véges, *Lipschitz-függvény*eknek nevezzük. Ezek mind folytonosak, mert $\delta = \varepsilon / \operatorname{Lip}(f)$ választható $\varepsilon > 0$-hoz. Ha $\operatorname{Lip}(f) < 1$, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *kontrakció* vagy magyarul *összehúzás*.

A folytonosság és a Lipschitz-függvény fogalma nem változik, ha akár mindkét téren ekvivalens metrikára térünk át, de a Lipschitz-konstans, és így a kontrakció fogalma is változhat.

**8.1.29. Tétel.** *Legyenek $X$, $Y$ metrikus terek, $f\colon X \to Y$ egy függvény. A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

(1) *$f$ folytonos;*

(2) *bármely $G$ nyílt részhalmazára $Y$-nak $f^{-1}(G)$ nyílt;*

(3) *bármely $F$ zárt részhalmazára $Y$-nak $f^{-1}(F)$ zárt;*

(4) *bármely $A$ részhalmazára $X$-nek $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

**Bizonyítás.** Ha (1) teljesül, és $a$ érintkezési pontja $A$-nak, akkor mivel $f(a)$ bármely $V$ környezetére $f^{-1}(V)$ környezete $a$-nak, belemetsz $A$-ba. Így $f(a)$ érintkezési pontja $f(A)$-nak, azaz teljesül (4). Nyilván (4)-ből következik (3), mivel ha $F \subset Y$ zárt, $A = f^{-1}(F)$, akkor $f(\overline{A}) \subset \overline{F} = F$, amiből $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Komplementerképzéssel következik (3)-ból (2). Végül, ha (2) teljesül, és $V$ környezete $f(a)$-nak, akkor $V$ tartalmaz egy $f(a)$-t tartalmazó $G$ nyílt halmazt. Mivel $f^{-1}(G)$ nyílt, tartalmazza $a$-t, és része $f^{-1}(V)$-nek, $f^{-1}(V)$ környezete $a$-nak. □

**8.1.30. Következmény.** *Ha $X$ és $Y$ metrikus terek, $f\colon X \to Y$ folytonos függvény, $A \subset X$ sűrű a $B \subset X$ halmazban, akkor $f(A)$ sűrű az $f(B)$ halmazban.* □

**8.1.31. Példák.** A konstans függvény és az identikus leképezés Lipschitz-függvények, így folytonosak. Ha $A \subset X$ nem üres, akkor az $x \mapsto d(x, A)$ leképezés Lipschitz-függvény, mert — mint láttuk — tetszőleges $x, y \in X$-re $\left|d(x, A) - d(y, A)\right| \le d(x, y)$.

**8.1.32. Tétel.** *Legyenek $X, Y, Z$ metrikus terek $A \subset X$, $B \subset Y$, és legyenek $f: A \to Y$, $g: B \to Z$ függvények. Ha $a \in A$ és $b = f(a) \in B$, továbbá $f$ folytonos $a$-ban, $g$ pedig folytonos $b$-ben, akkor $g \circ f$ folytonos $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Legyen $W$ egy tetszőleges környezete $g(b) = g(f(a))$-nak. Ehhez van olyan $V$ környezete $b = f(a)$-nak, hogy ha $y \in B \cap V$, akkor $g(y) \in W$. Másrészt $V$-hez létezik olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azt jelenti, hogy ha $x \in U$, és $(g \circ f)(x)$ értelmezve van, akkor $(g \circ f)(x) \in W$. □

**8.1.33. Feladat [3].** Igazoljuk, hogy egy metrikus teret $\mathbb{R}$-be képező $f$ folytonos függvény zérushelyeinek halmaza zárt halmaz!

**8.1.34. Feladat [5].** Bizonyítsuk be az egyenlőség kiterjesztésének elvét: Ha egy $X$ metrikus teret az $Y$ metrikus térbe képező $f, g$ folytonos függvények egy sűrű halmazon megegyeznek, akkor mindenütt!

**8.1.35. Feladat [5].** Bizonyítsuk be az egyenlőtlenség kiterjesztésének elvét: Ha egy $X$ metrikus teret $\mathbb{R}$-be képező $f, g$ folytonos függvényekre $f \leq g$ egy sűrű halmazon, akkor mindenütt!

**8.1.36. Feladat [8].** Legyen $f$ és $g$ a síkon az origóban nulla, egyébként legyen $f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ és legyen $g(x, y) = xy^2/(x^2 + y^6)$. Igazoljuk, hogy egyik függvény sem folytonos az origóban, de mindkét függvény minden egyenesen folytonos, továbbá hogy $f$ korlátos, viszont $g$ az origó egyetlen környezetében sem korlátos.

**8.1.37. Terek szorzata.** Ha $X_1, X_2, \dots X_n$ metrikus terek, és

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

a Descartes-szorzatuk, akkor $X$-et metrikus térré tehetjük a

$$d_X(x, y) = \max_i d_{X_i}(x_i, y_i)$$

metrikával, ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Ez a *metrikus terek Descartes-szorzata.*,metrikusterekre etrikusterekre Descartes-szorzat, metrikus terekre

Hasonlóan, ha $X_1, X_2, \dots X_n$ normált terek, akkor az $X$ Descartes-szorzatukat normált térré tehetjük a

$$\|x\| = \max_i |x_i|$$

normával. Ez a *normált terek Descartes-szorzata.*,normaltterekre ormaltterekre Descartes-szorzat, normált terekreA szorzatnormából a szorzatmetrika származik.

Ha $X_1, X_2, \dots X_n$ belső szorzat terek, akkor az $X$ Descartes-szorzatukat belső szorzat térré tehetjük az

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, y_i \rangle$$

belső szorzattal. Ez a *belső szorzat terek Descartes-szorzata.*,belso|szorzatterekre elso|szorzatterekre Descartes-szorzat, belső szorzat terekreEbből nem a normák szorzata származik, hanem azzal ekvivalens norma:

$$|x|^2 \leq \langle x, x \rangle \leq n|x|^2.$$

**8.1.38. Tétel.** *Legyenek $X, Y_1, Y_2, \dots Y_n$ metrikus terek, $A \subset X$, $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ és $f = (f_1, \dots, f_n): A \to Y$ egy függvény, $a \in A$. Az $f$ függvény pontosan akkor folytonos az $a$ pontban, ha az $f_j$ koordinátafüggvények folytonosak $a$-ban $j = 1, 2, \dots, n$-re.*

**Bizonyítás.** Mivel

$$d_{Y_j}\big(f_j(x), f_j(a)\big) \le d_Y\big(f(x), f(a)\big),$$

ha $1 \le j \le n$, az $f$ folytonosságából következik a koordinátafüggvények folytonossága.

Megfordítva, adott $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_j$-t, hogy ha $d_X(x,a) < \delta_j$, $x \in A$, akkor $d_{Y_j}\big(f_j(x), f_j(a)\big) < \varepsilon$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_j, 1 \le j \le n\}$ választással, ha $x \in A$, $d_X(x,a) < \delta$, akkor

$$d_Y\big(f(x), f(a)\big) \le \max_j d_{Y_j}\big(f_j(x), f_j(a)\big) < \varepsilon. \ \square$$

**8.1.39. Segédtétel.** *Legyen $X$ metrikus tér, $A \subset X$, $a \in A$, $Y$ normált tér $\mathbb{K}$ felett és $f\colon A \to \mathbb{K}$, $g\colon A \to Y$ függvények. Ha az egyik függvény folytonos $a$-ban és értéke nulla $a$-ban, a másik pedig lokálisan korlátos $a$-ban, azaz van olyan $U$ környezete $a$-nak és $K > 0$ valós szám, hogy $x \in U \cap A$ esetén az abszolút értéke illetve normája kisebb, mint $K$, akkor $fg$ folytonos $a$-ban. Ugyanez a helyzet $\langle f, g\rangle$-vel, ha $f, g\colon A \to Y$ és $Y$ belső szorzat tér.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ a folytonos, akkor $\varepsilon > 0$-ra $\varepsilon/K$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $d(x,a) < \delta$, $x \in A$ esetén $\big|f(x)\big| < \varepsilon/K$. Nyilván $\delta$ választható úgy is, hogy ne legyen nagyobb, mint $U$ sugara. Ekkor $\big|f(x)g(x) - f(a)g(a)\big| = \big|f(x)g(x)\big| < \varepsilon$. A többi eset bizonyítása hasonló. $\square$

**8.1.40. Tétel.** *Legyen $X$ metrikus tér, $Y$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $A \subset X$, $a \in A$ és $f, g\colon A \to Y$, $h\colon A \to \mathbb{K}$ az $a$-ban folytonos függvények. Ekkor*

(1) *$f + g$ és $f - g$ folytonosak $a$-ban;*

(2) *$hf$ folytonos $a$-ban;*

(3) *ha $Y$ belső szorzat tér, akkor $\langle f, g\rangle$ folytonos $a$-ban;*

(4) *ha $h(a) \ne 0$, akkor $a$ valamely $U$ környezetére $1/h$ értelmezve van $A \cap U$-ban és folytonos $a$-ban.*

**Bizonyítás.** Adott $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_1$, illetve $\delta_2$-t, hogy ha $d(x,a) < \delta_1$, $x \in A$, akkor $\big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon/2$, ha pedig $d(x,a) < \delta_2$, $x \in A$, akkor $\big|g(x) - g(a)\big| < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $d(x,a) < \delta$, $x \in A$, akkor

$$\big|(f+g)(x) - (f+g)(a)\big| \le \big|f(x) - f(a)\big| + \big|g(x) - g(a)\big| < \varepsilon$$

és

$$\big|(f-g)(x) - (f-g)(a)\big| \le \big|f(x) - f(a)\big| + \big|g(x) - g(a)\big| < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (1)-et.

Az $a$ valamely $U$ környezetében $\big|h(x) - h(a)\big| < 1$, ahonnan $\big|h(x)\big| < \big|h(a)\big| + 1$, azaz $h$ lokálisan korlátos. Ez azt jelenti, hogy van olyan $K$, hogy $\big|h(x)\big|, \big|f(a)\big| < K$. Mivel

$$\begin{aligned}\big|(hf)(x) - (hf)(a)\big| &\le \big|h(x)f(x) - h(x)f(a)\big| + \big|h(x)f(a) - h(a)f(a)\big| \\ &= \big|h(x)\big|\big|f(x) - f(a)\big| + \big|h(x) - h(a)\big|\big|f(a)\big|,\end{aligned}$$

valamint (1) szerint $f(x) - f(a)$ és $h(x) - h(a)$ folytonosak $a$-ban ahol értékük nulla, az előző segédtételből kapjuk az állítást.

(3) hasonlóan következik az

$$\Big|\langle f(x), g(x)\rangle - \langle f(a), g(a)\rangle\Big| \le \big|f(x)\big|\big|g(x) - g(a)\big| + \big|f(a)\big|\big|g(x) - g(a)\big|$$

becslésből.

(4)-hez, mivel $h(a) \ne 0$, választhatunk olyan $U$ környezetét $a$-nak, amelyben

$$\big|h(x) - h(a)\big| < \frac{\big|h(a)\big|}{2}.$$

Ebben a környezetben nyilván $h(x) \ne 0$, sőt, $\big|h(x)\big| > \big|h(a)\big|/2$. Mivel

$$\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(a)} = \frac{h(a) - h(x)}{h(x)h(a)},$$

és a nevező abszolút értéke legalább $\big|h(a)\big|^2/2$, ha $x \in U \cap A$, a reciproka lokálisan korlátos, így (4) is következik az előző segédtételbőlk. □

**8.1.41. Példák.** A $p_j\colon (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto x_j$ leképezése $\mathbb{K}^k$-nak $\mathbb{K}$-ba, az úgynevezett $j$-edik *projekció* folytonos, mivel $\big|p_j(x) - p_j(y)\big| \le |x - y|$ bármely $x, y \in \mathbb{K}^k$-ra. Innen és a korábbiakból következik, hogy a (többváltozós) polinomok mindenütt folytonosak $\mathbb{K}^k$-n. Ezt felhasználva kapjuk, hogy egy racionális törtfüggvény $\mathbb{K}^k$ egy nyílt részhalmazán van értelmezve, és ott folytonos. Egy $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris leképezés folytonos, mert koordinátafüggvényei elsőfokú polinomok. A $\mathbb{K}$-beli elemű $k \times k$-as mátrixhoz a determinánsát rendelő $a \mapsto \det(a)$ leképezés, mint $\mathbb{K}^{k^2}$ leképezése $\mathbb{K}$-ba, folytonos, mivel a determináns a mátrixelemek polinomfüggvénye. Az $a \mapsto a^{-1}$ leképezés, mint $\mathbb{K}^{k^2} \to \mathbb{K}^{k^2}$ eleme, nyílt halmazon van értelmezve és ott folytonos, mert az inverz mátrix pontosan akkor van értelmezve, ha $\det(a) \ne 0$, és elemei az eredeti mátrix elemeinek racionális törtfüggvényei.

**8.1.42. Jobb és bal oldali folytonosság.** Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$, $Y$ metrikus tér, $f\colon A \to Y$ egy függvény, és az $f$ függvény $\{x \in A\colon x \ge a\}$, illetve $\{x \in A\colon x \le a\}$ halmazra való megszorítása folytonos $a$-ban, akkor az mondjuk, hogy $f$ *jobbról folytonos*, illetve *balról folytonos* $a$-ban. Ha $f$ folytonos $a$-ban, akkor nyilván jobbról és balról is folytonos $a$-ban. Megfordítva, ha $f$ jobbról és balról is folytonos $a$-ban, akkor folytonos $a$-ban.

**8.1.43. Felülről és alulról folytonosság.** Legyen $X$ metrikus tér, $A \subset X$, $a \in A$ és $f\colon A \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy $x \in U \cap A$ esetén $f(x) < f(a) + \varepsilon$, illetve $f(x) > f(a) - \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *felülről folytonos* (*felülről félig folytonos*), illetve *alulról folytonos* (*alulról félig folytonos*) $a$-ban. Ha $f$ minden $a \in A$ pontban felülről, illetve alulról folytonos, akkor azt mondjuk, hogy *felülről folytonos*, illetve *alulról folytonos* $X$-en. Nyilvánvaló, hogy ha $f$ és $g$ felülről, illetve alulról folytonosak $a$-ban, $c \ge 0$, akkor $f + g$ és $cf$ is felülről, illetve alulról folytonosak $a$-ban.

**8.1.44. Határérték.** Legyenek $X$ és $Y$ metrikus terek, $A \subset X$ és $f\colon A \to Y$ egy függvény, $a$ pedig torlódási pontja $A$-nak. Azt írjuk, hogy $f(x) \to b$, ha $x \to a$, vagy $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ha $b \in Y$ és a

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A \setminus \{a\}, \\ b, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos $a$-ban. Másként fogalmazva ez azt jelenti, hogy $b$ bármely $V$ környezetéhez van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy ha $x \neq a$, $x \in A \cap U$, akkor $f(x) \in V$. Ez azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in A$ és $0 < d_X(x, a) < \delta$, akkor $d_Y\big(f(x), b\big) < \varepsilon$. A határérték és a folytonosság definíciójának összevetéséből azt kapjuk, hogy ha $a$ torlódási pontja $A$-nak, akkor $f$ pontosan akkor folytonos $a$-ban, ha $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Nyilván ha egy függvény határértéke $a$-ban $b$, akkor bármely megszorításának, ha az értelmezési tartománynak torlódási pontja $a$, szintén határértéke $b$. Figyeljük meg, hogy a határérték létezése és értéke csak a függvény lokális viselkedésétől függ, azaz nem változik, ha $f$-et megváltoztatjuk $a$ valamely környezetén kívül.

**8.1.45. Tétel.** *Függvény határértéke, ha létezik, egyértelmű.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy $\lim_{x\to a} f(x) = b_1$ és $\lim_{x\to a} f(x) = b_2$. Bármely $\varepsilon > 0$-hoz választva olyan $\delta_1$, illetve $\delta_2$-t, hogy ha $0 < d_X(x, a) < \delta_1$, $x \in A$, akkor $d_Y\big(f(x), b_1\big) < \varepsilon$, ha pedig $0 < d_X(x, a) < \delta_2$, $x \in A$, akkor $d_Y\big(f(x), b_2\big) < \varepsilon/2$ teljesüljön, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ választással, ha $0 < d_X(x, a) < \delta$, $x \in A$ (ilyen $x$ létezik, mivel $a$ torlódási pontja $A$-nak), akkor

$$d_Y(b_2, b_1) \leq d_Y\big(f(x), b_1\big) + d_Y\big(f(x), b_2\big) < \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, csak $b_1 = b_2$ lehetséges. □

**8.1.46. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ metrikus térek, $A \subset X$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és $f, g\colon A \to Y$, $h\colon A \to \mathbb{K}$ függvények.*

(1) *Ha $Y$ az $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ metrikus terek szorzata, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = b$ pontosan akkor létezik, ha az $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ koordinátafüggvényekre a*

$$\lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$$

*határértékek léteznek, továbbá ekkor $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.*

(2) *ha $d \neq 0$, akkor $a$ valamely $U$ környezetére $1/h(x)$ értelmezve van, ha $a \neq x \in A \cap U$ és $\lim_{x\to a}(1/h)(x) = 1/d$.*

*Tegyük fel, hogy $Y$ normált tér $\mathbb{K}$ felett.*

(3) *Ha az $f$ és $h$ függvényekből az egyik lokálisan korlátos, a másiknak a határértéke pedig nulla $a$-ban, akkor $\lim_{x\to a}(hf)(x) = 0$.*

*Ha $\lim_{x\to a} f(x) = b$ és $\lim_{x\to a} g(x) = c$, akkor*

(4) *$\lim_{x\to a}(f + g)(x) = b + c$ és $\lim_{x\to a}(f - g)(x) = b - c$.*

*Ha $\lim_{x\to a} f(x) = b$ és $\lim_{x\to a} h(x) = d$, akkor*

(5) *$\lim_{x\to a}(hf)(x) = db$.*

*Ha $Y$ belső szorzat tér, akkor*

(6) *$\lim_{x\to a}\langle f, g\rangle(x) = \langle b, c\rangle$; ugyanez teljesül, ha az egyik határérték nulla, a másik függvény pedig lokálisan korlátos.*

**Bizonyítás.** A tétel a folytonosság és a határérték kapcsolatából következik. □

**8.1.47. Jobb és bal oldali határérték.** Ha $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $Y$ metrikus tér és $f\colon A \to Y$ egy függvény, akkor az $f$ függvény $\{x \in A\colon x \geq a\}$, illetve $\{x \in A\colon x \leq a\}$ halmazra való megszorítása határértékeit $a$-ban (ha léteznek) az $f$ *jobb oldali határérték*ének, illetve *bal oldali határérték*ének nevezzük. Jelölésük : $\lim_{x\downarrow a} f(x)$, illetve $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ vagy $f(a+)$, illetve $f(a-)$. A folytonosság és a határérték kapcsolata alapján világos, hogy ha mindkét oldali határérték létezik $a$-ban, akkor a határérték pontosan akkor létezik, hogyha a jobb és a bal oldali határérték megegyezik, és ekkor a közös érték a határérték is.

**8.1.48. Szakadások.** Ha $f$ nem folytonos $a$-ban, akkor azt mondjuk, hogy *szakadás*a van $a$-ban. Ha $\lim_{x\to a} f(x)$ létezik, de nem egyenlő $f(a)$-val, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *megszüntethető szakadás*a van, egyébként a szakadás *nem megszüntethető szakadás*.

Ha $f$ valós változós, $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ és $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ léteznek, de nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek *elsőfajú szakadás*a vagy *ugrás*a van $a$-ban, minden más nem megszüntethető szakadást *másodfajú szakadás*nak nevezünk.

**8.1.49. A végtelen mint határérték, határérték a végtelenben.** Mivel $\overline{\mathbb{R}}$-ban $-\infty$ és $+\infty$ környezetei, $\overline{\mathbb{C}}$-ban pedig $\infty$ környezetei definiálva vannak, mindazokat a fogalmakat, amelyeket környezetek segítségével értelmeztünk (folytonosság, jobb és bal oldali folytonosság, határérték, jobb és bal oldali határérték, szakadás, megszüntethető szakadás, nem megszüntethető szakadás, elsőfajú szakadás, másodfajú szakadás), átvihetjük erre az esetre is. Számos tétel is érvényben marad, például a 8.1.39, 8.1.32 és 8.1.45 tételek.

**8.1.50. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $X$ metrikus tér, $A \subset X$, $a$ torlódási pontja $A$-nak, $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{K}}$ és $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Ha a jobb oldal értelmezve van, akkor*

(1) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = b+c$ *és* $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = b-c$;

(2) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = bc$;

(3) $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = b/c$.

Megjegyezzük, hogy van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy $a \neq x \in U \cap A$ esetén a bal oldalon álló függvény értelmezve van.

**Bizonyítás.** A $b, c \in \mathbb{K}$ eseteket már láttuk. A többi eset hasonlóan bizonyítható. Például ha $\overline{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ és $c = +\infty$, akkor van olyan $U_1$ környezete $a$-nak, hogy $a \neq x \in U_1 \cap A$ esetén $\left|f(x) - b\right| < 1$, valamint tetszőleges $B \in \mathbb{R}$-hez van olyan $U_2$ környezete $a$-nak, hogy $a \neq x \in U_2 \cap A$ esetén $g(x) > B - b - 1$. Innen $U = U_1 \cap U_2$ jelöléssel $a \neq x \in U \cap A$ esetén $(f+g)(x)$ értelmezve van, és nagyobb, mint $B$. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$. □

**8.1.51. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $X$ metrikus tér, $A \subset X$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és $a$-ban létezik határértéke az $f, g\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényeknek.*

(1) *Ha $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, akkor van olyan $U$ környezete $a$-nak, hogy*

$$f(x) < g(x), \qquad \text{ha} \quad a \neq x \in U \cap A;$$

(2) *ha a valamely $U$ környezetére $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) \leq g(x)$, akkor*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} f(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $b = \lim_{x\to a} f(x) < d < c = \lim_{x\to a} g(x)$, és válasszuk $V$, illetve $W$ környezeteit $b$-nek, illetve $c$-nek úgy, hogy $V \subset [-\infty, d[$, $W \subset ]d, +\infty]$ teljesüljön. Legyen $U$ az $a$ megfelelő környezeteinek metszete. Ekkor $a \neq x \in U \cap A$ esetén $f(x) < d < g(x)$, amivel beláttuk (1)-et. (2) indirekt következik (1)-ből. □

**8.1.52. Tétel: rendőr-elv.** *Ha $X$ metrikus tér, $A \subset X$, $a$ torlódási pontja $A$-nak és az $a$ valamely $U$ környezetére az $f, g, h\colon A \to \overline{\mathbb{R}}$ függvényekre $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, továbbá*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x),$$

*akkor*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $V$ környezete az $f$ és $h$ közös határértékének, $U$ pedig az $a$ megfelelő környezeteinek metszete. □

**8.1.53. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy az $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = xy^2/(x^2 + y^4)$ függvény minden egyenes mentén folytonos, de nem folytonos az origóban!

**8.1.54. Feladat [10].** Léteznek-e az alábbi függvények határértékei az adott helyen:

(1) $(x-2)/(y-3)$, $(2,3)$; $x^2y/(x^2+y)$, $(0,0)$; $x\sin(1/y)$, $(0,0)$;

(2) $(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$, $(0,0)$; $x + 1/y$, $(3,2)$; $\sin(xy)/y$, $(0,0)$;

(3) $x^y$, $x > 0$, $(0,0)$; $(1+x)^y$, $(0,0)$; $x^2y^2/(x+y)$, $(0,0)$;

(4) $(xy-1)/(x-1)$, $(1,1)$; $\ln x/(y-1)$, $(1,1)$; $\sqrt[3]{x^2y^5}/(x^2+y^2)$, $(0,0)$;

(5) $(\sin x - \sin y)/(x-y)$, $(0,0)$; $xy/(x^2+y^2)^\alpha$, $(0,0)$;

(6) $f(0,0) = 0$, egyébként $f(x,y) = |x|^\alpha |y|^\beta$, $(0,0)$.

**8.1.55. Sorozatok.** A sorozatok $\mathbb{N}^+$-on értelmezett függvények, így beszélhetünk egy $X$ metrikus térbeli sorozatok $+\infty$-ben vett határértékéről. Az, hogy $A \in X$ az $a_n$ sorozat határértéke, azt jelenti, hogy $A$ bármely környezetére véges sok $n$ kivételével minden $n$-re $a_n$ benne van az adott környezetben. Jelölése: n tart vegtelen an egyenlo| A tart vegtelen an egyenlo| A $_{n\to\infty} a_n = A \lim_{n\to\infty} a_n = A$ (pontosabb lenne $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$) vagy $a_n \to A$. Ilyenkor az $a_n$ sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergens* vagy $A$-hoz *konvergál*. Tudjuk, hogy a határérték egyértelmű. Világos, hogy a határérték nem változik, ha a sorozatnak véges sok tagját megváltoztatjuk, és hogy konvergens sorozat korlátos. Ekvivalens megfogalmazás, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $n \geq N$, akkor $d(a_n, A) < \varepsilon$ (itt $n > N$, illetve $d(a_n, A) \leq \varepsilon$ is írható), valamint hogy $\lim_{n\to\infty} d(a_n, A) = 0$. Konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és a határértéke ugyanaz. Az mondjuk, hogy a metrikus tér egy $A$ pontja az $a_n$ sorozatnak *sűrűsödési hely*e, ha van a sorozatnak olyan részsorozata, amelynek határértéke $A$. Az $A$ pont pontosan akkor sűrűsödési helye az $a_n$ sorozatnak, ha $A$ bármely $U$ környezetéhez és bármely $N$-hez van olyan $n \geq N$, amelyre $a_n \in U$. Ebből következik, hogy egy sorozat sűrűsödési helyeinek halmaza zárt halmaz, mert a komplementere nyílt. Ha $Y \subset X$, akkor $A \in \overline{Y}$ akkor és csak akkor, ha van olyan $a_n \in Y$ sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Ha egy normál térbeli sorozat nullához konvergál, akkor *nullsorozat*nak nevezzük. Normált térben az, hogy $a_n$ konvergál $A$-hoz, azzal ekvivalens, hogy $a_n - A$ nullsorozat. Az, hogy $a_n$ nullsorozat, azzal ekvivalens, hogy $|a_n|$ nullsorozat $\mathbb{R}$-ben. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor *divergens*nek nevezzük. Természetesen indexelhetjük a sorozatokat nullától is.

Ha $n_1 < n_2 < \ldots$ pozitív egész számok egy sorozata, akkor az $a_{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ sorozatot az $a_n$ sorozat *részsorozat*ának nevezzük. A definícióból azonnal következik, hogy ha egy sorozatnak van határértéke, akkor bármely részsorozatának is ugyanaz a határértéke.

Nyilvánvaló, hogy egy *konstans sorozat*, azaz egy olyan sorozat, amelynek minden tagja ugyanaz a $c \in X$ elem, konvergens, és határértéke az adott $c$ konstans.

A következő két állítás azonnal következik a függvények határértékére tanultakból.

**8.1.56. Tétel.** *Legyen $X$ az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ metrikus terek szorzata. Az*

$$a_n = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{k,n}) \in X$$

*sorozat pontosan akkor konvergál az*

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_k) \in X\text{-hez,}$$

*ha koordinátánként is, azaz ha $a_{j,n} \to A_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.* □

**8.1.57. Tétel.** *Ha $X$ normált tér $\mathbb{K}$ felett, $a_n, b_n \in X$ és $c_n \in \mathbb{K}$ sorozatok, $a_n \to A$, $b_n \to B$ és $c_n \to C$, akkor $(a_n + b_n) \to (A + B)$, $\langle a_n, b_n \rangle \to \langle A, B \rangle$ és $(c_n a_n) \to CA$.* □

**8.1.58. Átviteli elv.** Tegyük fel, hogy $X, Y$ metrikus terek, $A \subset X$, $f\colon A \to Y$, és $a$ torlódási pontja $A$-nak. Pontosan akkor teljesül, hogy $\lim_{x \to a} f(x) = b$, ha minden olyan $x_n \in A \setminus \{a\}$ sorozatra, amelyre $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, teljesül, hogy $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$. Ugyanez igaz akkor is, ha $X$ vagy $Y$ helyett $\overline{\mathbb{K}}$ szerepel.

**Bizonyítás.** Ugyanúgy bizonyítható, mint számok esetén. □

**8.1.59. Cauchy-sorozatok.** Egy metrikus térbeli sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $n, m \geq N$, akkor $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Konvergens sorozat mindig Cauchy-sorozat; ez ugyanúgy látható be, mint számok esetén. Metrikus térben a megfordítás nem mindig teljesül, de ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens; valóban, ha $a_{n_k} \to A$, $\varepsilon > 0$ és $n, m \geq N$ esetén $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$, akkor elég nagy $k$-ra $d(a_{n_k}, A) < \varepsilon/2$ és $n_k \geq N$, azaz $d(a_n, a_{n_k}) < \varepsilon/2$, így $d(a_n, A) < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Egy Cauchy-sorozat értékkészlete korlátos, mert $\varepsilon = 1$-re alkalmazva a definíciót, kapjuk hogy a sorozatnak csak véges sok tagja van kívül egy 1 sugarú gömbön. Egy metrikus teret *teljes*nek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens. Könnyű látni, hogy metrikus tér teljes altere zárt, és teljes metrikus tér egy zárt altere teljes. Egyébként a Cauchy-sorozat és a konvergens sorozat fogalma akkor is definiálható, ha $d$ csak eltérés, így ekkor is beszélhetünk teljességről.

A teljesség jelentőségét az adja, hogy anélkül dönthetünk segítségével a konvergenciáról, hogy ismernénk a határértéket.

**8.1.60. Cauchy-féle konvergenciakritérium.** *Egy $\mathbb{K}^k$-beli sorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens, azaz $\mathbb{K}^k$ teljes.*

**Bizonyítás.** Áttérünk koordinátasorozatokra. □

**8.1.61. Banach-terek és Hilbert-terek.** Azokat a normált tereket, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, *Banach-tér*nek, azokat a belső szorzat tereket pedig, amelyekben minden Cauchy-sorozat konvergens, *Hilbert-tér*nek nevezzük. A Hilbert-terek nyilván Banach-terek is. Megmutatható, hogy minden belső szorzat térhez, illetve normált térhez — lényegében egyértelműen — létezik egy Hilbert-tér, illetve Banach-tér, amely őt sűrű részhalmazként tartalmazza.

**8.1.62. Baire-tétel.** *Teljes metrikus térben megszámlálható sok sűrű nyílt halmaz metszete is sűrű.*

A Baire-tétel állításából gyakran csak annyit fogunk felhasználni, hogy a metszet nem üres: néha könnyebb megmutatni, hogy valamiből sok van, mint hogy van egy.

**Bizonyítás.** Legyen az $X$ teljes metrikus térben $V_n$ sűrű nyílt halmazok egy sorozata. Megmutatjuk, hogy bármely $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$ nyílt gömb esetén $\mathbb{U}_{r_0}(x_0) \cap (\cap_{n=1}^{\infty} V_n)$ nem üres. Az $\mathbb{U}_{r_0}(x_0) \cap V_1$ metszet nyílt és nem üres, mert $\overline{V_1} = X$ miatt $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$-ban van $V_1$-beli pont, így tartalmaz egy $x_1$ középpontú, $0 < r_1 < 1/2$ sugarú zárt gömböt. Most alkalmazzuk ugyanezt a meggondolást $\mathbb{U}_{r_1}(x_1) \cap V_2$-re, stb. Teljes indukcióval olyan $x_n$ és $0 < r_n < 1/2^n$ sorozatot kapunk, amelyre $\mathbb{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \mathbb{U}_{r_n}(x_n) \cap V_{n+1}$. A gömbök középpontjai Cauchy-sorozatot alkotnak, és így a tér teljessége miatt van olyan $x \in X$, amelyre $x_n \to x$. Mivel $x_k \in \mathbb{B}_{r_n}(x_n)$, ha $k \geq n$, $x$ benne van minden $\mathbb{B}_{r_n}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ zárt gömbben, így minden $V_n$-ben, és $\mathbb{U}_{r_0}(x_0)$-ban is. □

**8.1.63. Kompakt halmazok.** Egy $X$ metrikus tér egy $K$ részhalmazának egy *nyílt lefedés*én egy olyan nyílt halmazokból álló halmazrendszert értünk, amelynek az egyesítése tartalmazza $K$-t. A $K$ halmazt *kompakt*nak nevezzük, ha $K$ bármely nyílt halmazokkal való lefedéséből kiválaszható véges lefedés. Véges sok kompakt halmaz egyesítése nyilván kompakt. A véges halmazok kompaktak. A kompaktság a végesség egyfajta kiterjesztése; egy kompakt halmaz „közelítőleg véges”. Egy $K$ kompakt halmaz és egy $F$ zárt halmaz $K \cap F$ metszete kompakt; valóban, $K \cap F$ egy nyílt lefedéséhez hozzávéve $F$ komplementerét, $K$ nyílt lefedését kapjuk; ebből kiválasztva $K$ egy véges lefedését, és elhagyva belőle $F$ komplementerét, $K \cap F$ egy véges lefedését kapjuk.

A $K$ halmaz kompaktsága nem függ attól, hogy milyen altérben tekintjük: elég $K$-nak, mint altérnek a kompaktságát vizsgálni. Ez azonnal következik az altérbeli nyílt halmazok előállításából.

**8.1.64. Példa.** Egy $[a, b]$ intervallum $\mathbb{R}$-ben kompakt: Egy nyílt lefedéséhez választhatunk minden $t \in [a, b]$ ponthoz olyan $\delta(t) > 0$ számot, hogy $\mathbb{U}_{\delta(t)}(t)$ benne van egy lefedő nyílt halmazban. Választva $[a, b]$ egy $\delta$-finom beosztását, az $\mathbb{U}_{\delta(t_i)}(t_i)$ környezeteket tartalmazó nyílt halmazok egy véges lefedést adnak. □

**8.1.65. Feladat [5].** Bizonyítsuk be csak a definíciót használva, hogy a

$$[0\} \cup \{1/n \colon n \in \mathbb{N}^+\} \subset \mathbb{R}$$

halmaz kompakt!!

**8.1.66. Feladat [5].** Adjunk példát $]0, 1[$ olyan nyílt lefedésére, amelyből nem választható ki véges lefedés!

**8.1.67. Lokális tulajdonságok.** Akkor mondjuk, hogy egy tulajdonság *lokálisan teljesül*, ha metrikus terünk bármely pontjának van olyan környezete, amelyre, vagy amelynek a lezártjára az adott tulajdonság teljesül. Például egy metrikus tér *lokálisan kompakt*, ha minden pontjának van kompakt lezártú környezete; vegyük észre, hogy ha a pontnak van kompakt lezártú környezete, akkor minden zárt gömb, amely ennek része, szintén kompakt, így a pontnak van tetszőlegesen kicsiny kompakt környezete is. Sok más (de nem minden) tulajdonságnál is, az hogy az adott tulajdonság lokálisan teljesül, arra egyszerűsödik, hogy a tér minden pontjának van az adott tulajdonsággal rendelkező környezete. Kétséges esetben pontosan megfogalmazzuk, hogy mit is értünk az alatt, hogy az adott tulajdonság lokálisan teljesül.

A kompakt halmazok jelentősége az, hogy a legtöbb lokális tulajdonság átvihető kompakt halmazokra. Valóban, a kompakt halmaz minden pontjához választva egy olyan környezetet, amely (vagy a lezártja) az adott tulajdonsággal rendelkezik, az így kapott lefedésből kiválaszthatunk egy véges lefedést. Például lokálisan kompakt térben minden kompakt halmaznak létezik kompakt környezete. Megfordítva, lokálisan kompakt terekben a kompakt halmazokra teljesülő tulajdonságok lokálisan teljesülnek. Néha a kompaktság helyett a $\sigma$-kompaktság használható. Ez azt jelenti, hogy a halmaz megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése.

$\rightarrow$ **8.1.68. Feladat [7].** Legyen $X$ lokálisan kompakt metrikus tér, $K \subset V \subset X$, $K$ kompakt, $V$ nyílt. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $\mathbb{B}_\varepsilon(K)$ kompakt és $K \subset \mathbb{B}_\varepsilon(K) \subset V$.

**8.1.69. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy lokálisan kompakt szeparábilis metrikus térben minden nyílt halmaz megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése.

**8.1.70. Teljesen korlátosság.** Az $X$ metrikus tér egy $B$ részhalmaza halo alo $\varepsilon$-háló*$\varepsilon$-háló* az $A \subset X$ halmaz számára, ha $A \subset \mathbb{U}_\varepsilon(B)$. Az $A$-t *teljesen korlátos*nak nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik véges $\varepsilon$-háló $A$ számára. Ez nyilván azzal ekvivalens, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra $A$ lefedhető véges sok $\varepsilon$-nál kisebb átmérőjű halmazzal. Világos, hogy teljesen korlátos halmaz bármely részhalmaza is teljesen korlátos. Teljesen korlátos halmaz mindig korlátos, megfordítva azonban nem, mint egy végtelen diszkrét tér mutatja.

**8.1.71. Tétel.** *Egy $X$ metrikus térre az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *$X$ kompakt;*

(2) *$X$ minden végtelen részhalmazának létezik torlódási pontja;*

(3) *minden $X$-beli sorozatnak van sűrűsödési helye;*

(4) *$X$ teljes és teljesen korlátos.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy (1) teljesül. (2) bizonyításához elég megmutatni, hogy $X$ minden megszámlálható végtelen $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ részhalmazának létezik torlódási pontja. Ha ez nem teljesülne, akkor az $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$ halmazok zártak lennének, így komplementereik $X$ egy nyílt lefedését adnák. Ebből a lefedésből nem választható ki véges lefedés.

Ha (2) teljesül, és az $x_n$ sorozat értékkészlete végtelen, akkor az értékkészlet egy torlódási pontja a sorozatnak sűrűsödési helye. Ha a sorozat értékkészlete véges, akkor valamelyik értéket végtelen sokszor veszi fel, így van sűrűsödési helye.

Ha (3) teljesül, akkor bármely $X$-beli Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata. Ha egy Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens, így $X$ teljes. Ha $X$ nem lenne teljesen korlátos, akkor valamely $\varepsilon > 0$-hoz nem létezne véges $\varepsilon$-háló. Erre az $\varepsilon$-ra teljes indukcióval kiválaszthatnánk egy $x_n$ sorozatot úgy, hogy a sorozat bármely két különböző tagjának távolsága legalább $\varepsilon$. Ennek a sorozatnak nyilván nem lehet konvergens részsorozata, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy (4) teljesül, de $X$ valamely $V_\gamma$ nyílt lefedéséből nem választható ki véges lefedés. Mivel $X$ teljesen korlátos, lefedhető véges sok $1/2$ sugarú nyílt gömbbel. Ezek között van egy olyan $U_1$ gömb, amely nem fedhető le véges sok $V_\gamma$-val. $X$-et lefedve véges sok $1/2^2$ sugarú nyílt gömbbel, ezek között van egy olyan $U_2$ gömb, amely belemetsz $U_1$-be, és nem fedhető le véges sok $V_\gamma$-val. Teljes indukcióval, nyílt gömbök olyan $U_n$ sorozatát kapjuk, amelyekre $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, $U_n$ sugara $1/2^n$, és a gömbök egyike sem fedhető le véges sok $V_\gamma$-val. $U_n$ középpontját $x_n$-nel jelölve, $d(x_n, x_{n+1}) < 1/2^{n-1}$, és így

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) < \frac{1}{2^{n-2}},$$

ha $m > n$, tehát $x_n$ Cauchy-sorozat, amely $X$ teljessége miatt konvergál egy $x$ elemhez. Van olyan $\gamma$, hogy $x \in V_\gamma$, és mivel $V_\gamma$ nyílt, van olyan $\varepsilon > 0$, hogy az $\mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset V_\gamma$. Ha $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ és $1/2^n < \varepsilon/2$, akkor $U_n = \mathbb{U}_{1/2^n}(x_n) \subset \mathbb{U}_\varepsilon(x) \subset V_\gamma$, ami ellentmondás. □

**8.1.72. Következmény.** *Metrikus tér egy $K$ kompakt részhalmaza korlátos és zárt.*

**Bizonyítás.** (4)-ből következik: egyrészt korlátos, másrészt ha $x$ egy torlódási pontja, akkor a hozzá konvergáló sorozat Cauchy-sorozat és így konvergens $K$-ban, tehát $K$ tartalmazza $x$-et. □

**8.1.73. Következmény: Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.** *Minden $\mathbb{K}^k$-beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

A tétel végtelen dimenzióban nem marad érvényes.

**Bizonyítás.** Példánk szerint egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallum kompakt, így (3) szerint $\mathbb{R}$-ben teljesül az állítás. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A sorozatból válasszunk ki egy részsorozatot, amelynek első koordinátái konvergensek, majd ebből egy részsorozatot, aminek második koordinátái konvergensek, stb. □

**8.1.74. Heine–Borel-tétel.** *Egy $K \subset \mathbb{K}^k$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Végtelen dimenzióban az állítás nem marad érvényben.

**Bizonyítás.** Az elégségesség következik a Bolzano–Weierstrass-tételből, a szükségességet már láttuk. □

**8.1.75. Következmény: Weierstrass tétele.** *Minden $A \subset \mathbb{K}^k$ korlátos végtelen halmaznak van torlódási pontja $\mathbb{K}^k$-ban.*

Végtelen dimenzióban az állítás nem marad érvényben.

**Bizonyítás.** A lezártja kompakt. □

**8.1.76. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy kompakt metrikus tér szeparábilis!

**8.1.77. Feladat [6].** Adjuk meg a valós számok olyan kompakt részhalmazát, amelynek torlódási pontjai megszámlálható végtelen halmazt alkotnak!

**8.1.78. Feladat [6].** A racionális számokban mint altérben mutassuk meg, hogy $\{r: 2 < r^2 < 3\}$ korlátos és zárt halmaz, de nem kompakt. Nyílt-e ez a halmaz?

**8.1.79. Feladat [6].** Legyen $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ nem üres zárt halmazok egy sorozata egy metrikus térben, amelyre $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$. Mutassuk meg, hogy a metszet nem üres! Elhagyható-e az utolsó feltétel? Helyettesettesíhető-e azzal, hogy a halmazok kompaktak?

**8.1.80. Feladat [5].** Legyen $\mathbb{N}^+$-on $d(m,n) = 1/(1 + min(m,n))$, ha $m \neq n$, nulla egyébként. Mutassuk meg, hogy metrikus teret kapunk, amelyben az $x_n = n$ sorozat Cauchy-sorozat, de nem konvergens! Mik a kompakt halmazok?

**8.1.81. Feladat [5].** Oldjuk meg az előző feladatot, ha $d(m,n) = max(1/m, 1/n)$, ha $m \neq n$, nulla egyébként.

**8.1.82. Tétel.** *Legyen $K$ kompakt, $Y$ tetszőleges metrikus tér és $f: K \to Y$ egy folytonos függvény. Ha $K$ kompakt, akkor $f(K)$ is kompakt.*

**Bizonyítás.** Ha $V_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ egy nyílt lefedése $f(X)$-nek, akkor $f^{-1}(V_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ nyílt lefedése $X$-nek. Ebből kiválasztva egy véges lefedést, a megfelelő $V_\gamma$ halmazok lefedését adják $f(X)$-nek. □

**8.1.83. Következmény: Weierstrass tétele.** *Ha $K$ kompakt metrikus tér és az $f: K \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor $f(K)$ korlátos, és van olyan $a, b \in X$, hogy $f(a) = \inf f(K)$, $f(b) = \sup f(K)$, tehát $f$ felveszi maximumát és minimumát.*

**Bizonyítás.** Az előző tétel szerint $f(K)$ kompakt, így korlátos és zárt. Mivel $\inf f(K)$ és $\sup f(K)$ érintkezési pontjai $f(K)$-nak, benne vannak $f(K)$-ban. □

**8.1.84. Definíció.** Legyen $X$ metrikus tér, $Y$ normált tér. Egy $f: X \to Y$ függvény spt $f$ *tartó*ján a $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$ halmaz lezártját értjük.

Az előző következmény nyilván érvényben marad, ha $X$ nem kompakt, de $f$ kompakt tartójú.

**8.1.85. Hausdorff tétele.** *Ha $K$ kompakt, $Y$ tetszőleges metrikus tér, $f: K \to Y$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor $f^{-1}$ is folytonos $f(K)$-n.*

**Bizonyítás.** Elég megmutatni, hogy ha $F \subset X$ zárt, akkor $f(F)$ is zárt. Ez azonban következik az előző tételből. □

**8.1.86. Példa.** A kompaktság nem hagyható el: a $t \mapsto \cos t + i \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$ leképezés folytonos és kölcsönösen egyértelmű, de az inverze nem folytonos.

**8.1.87. Lebesgue-szám.** Egy $X$ metrikus tér egy $A$ részhalmaza egy lefedésének a *Lebesgue-szám*án egy olyan $\delta > 0$ számot értünk, amelyre minden $x \in A$ esetén $\mathbb{U}_\delta(x)$ benne van a lefedés valamelyik halmazában.

**8.1.88. Tétel.** *Egy $X$ metrikus tér bármely $K$ kompakt részhalmaza nyílt lefedésének van pozitív Lebesgue-száma.*

**Bizonyítás.** Legyen $G_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ a $K$ kompakt halmaz egy nyílt lefedése. Minden $x \in K$-hoz van olyan $\varepsilon_x > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset G_\gamma$ valamely $\gamma \in \Gamma$-ra. Az $\mathbb{U}_{\varepsilon_x/2}(x)$ környezetek nyílt lefedését alkotják $K$-nak. Kiválasztva ebből a nyílt lefedésből egy véges részlefedést, az ehhez tartozó $\varepsilon_{x_i}/2$ számok $\delta$ minimuma Lebesgue-száma a nyílt lefedésnek, mert ha $y \in K$, akkor $y \in \mathbb{U}_{\varepsilon_{x_i}/2}(x_i)$ valamely $x_i$-re, így

$$\mathbb{U}_\delta(y) \subset \mathbb{U}_{\varepsilon_{x_i}}(x_i) \subset G_\gamma$$

valamely $\gamma \in \Gamma$-ra. □

**8.1.89. Egyenletes folytonosság.** Egy $X$ metrikus tér $A$ részhalmazát az $Y$ metrikus térbe képező $f$ leképezést *egyenletesen folytonos*nak nevezünk, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x, y \in A$ és $d(x, y) < \delta$, akkor $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Lipschitz-függvény nyilván egyenletesen folytonos. Egyenletesen folytonos leképezés folytonos is, de a megfordítás nem igaz általában, például ha $A \subset \mathbb{R}$ nem tartalmazza egy $x_0$ torlódási pontját, akkor $x \mapsto 1/(x - x_0)$ folytonos, de nem egyenletesen folytonos $A$-n.

Ha $g \in Y \to Z$ is egyenletesen folytonos, akkor $g \circ f$ is egyenletesen folytonos.

**8.1.90. Heine tétele.** *Egy metrikus tér egy $K$ kompakt részhalmazán folytonos $f\colon K \to Y$ függvény egyenletesen is folytonos.*

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $x \in K$-nak van olyan $U_x$ környezete, hogy $y \in U_x$ esetén $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$. Legyen $\delta > 0$ az $U_x$, $x \in K$ nyílt lefedés Lebesgue-száma. Ekkor $y, z \in X$, $d(y, z) < \delta$ esetén $d(f(y), f(z)) < \varepsilon$. □

**8.1.91. Feladat [4].** Igazoljuk hogy egyenletesen folytonos leképezésnél Cauchy-sorozat képe Cauchy-sorozat!

**8.1.92. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az $X$ metrikus tér egy sűrű alterén egyenletesen folytonos leképezés az $Y$ teljes metrikus térbe egyértelműen kiterjeszthető folytonos leképezésként az egész $X$-re!

**8.1.93. Sorok.** Ha $a_0, a_1, \ldots$ egy sorozat az $X$ normált térben, akkor az $X$-beli $\sum_{n=0}^\infty a_n$ vagy $\sum a_n$ *végtelen sor*t vagy röviden *sor*t az $s_n = \sum_{j=0}^n a_j$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *részletösszeg*ek sorozatával azonosítjuk. Az $a_n$ vektort a sor $n$-edik *tag*jának nevezzük. A sor tagjait rendszerint nullától indexeljük. A részletösszegekből visszakaphatjuk a sor tagjait, hiszen $a_0 = s_0$ és $a_n = s_n - s_{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=0}^\infty a_n$ *sor konvergens*, és *összeg*e $A$, ha az $s_n$ részletösszegek sorozata $A$-hoz konvergál. Ezt, nem teljesen korrekt módon, úgy is jelöljük, hogy $\sum_{n=0}^\infty a_n = A$. Ha a sor nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy *divergens.* A $\sum_{n=0}^\infty a_n$ sort *abszolút konvergens*nek nevezzük, ha a $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ sor konvergens. Ha a sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor *feltételesen konvergens*nek nevezzük.

A sorozatokra vonatkozó legtöbb tétel egyszerűen átfogalmazható sorokra.

**8.1.94. Tétel.** *Ha a $\mathbb{K}$ feletti $X$ normált térben a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ sorok konvergensek, összegük $A$, illetve $B$, és $c \in \mathbb{K}$, akkor $\sum(a_n + b_n) = A + B$ és $\sum(ca_n) = cA$.*

**Bizonyítás.** A részletösszegek felhasználásával azonnal következik. □

**8.1.95. Cauchy-féle konvergenciakritérium.** *Egy Banach-térben a* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergál, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz van olyan* $N \in \mathbb{N}$*, hogy* $m \geq n \geq N$ *esetén* $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \varepsilon$. □

**8.1.96. Következmény.** *Ha* $\sum a_n$ *konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Bizonyítás.** Legyen $m = n$. □

**8.1.97. Összehasonlító kritérium.** *Ha Banach-térben a* $\sum a_n$ *sorra véges sok* $n$ *kivételével* $|a_n| \leq b_n$*, és* $\sum b_n$ *konvergál, akkor* $\sum a_n$ *is.*

**Bizonyítás.** A Cauchy-kritériumból minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $m \geq n \geq N$, akkor $|a_n| \leq b_n$ és $\sum_{j=n}^{m} b_j < \varepsilon$. Innen

$$|\sum_{j=n}^{m} a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} b_j < \varepsilon,$$

és így a konvergencia következik a Cauchy-kritériumból. □

**8.1.98. Következmény.** *Abszolút konvergens sor konvergens is.*

**Bizonyítás.** Legyen $b_n = |a_n|$. □

**8.1.99. Tétel.** *Egy* $X$ *normált tér pontosan akkor Banach-tér, ha benne minden abszolút konvergens sor konvergens.*

**Bizonyítás.** Csak az elégségességet kell megmutatni. Legyen $a_n$ Cauchy-sorozat $X$-ben, és válasszunk ki egy részsorozatát, amelyre $\|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}\| < 1/2^k$. Ekkor az

$$a_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_{k+1}} - a_{n_k})$$

sor abszolút konvergens, így konvergens is. Viszont részletösszegei az $a_n$ sorozat egy részsorozatát alkotják, így annak van konvergens részsorozata. Ha Cauchy-sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor konvergens. □

**8.1.100. Cauchy-féle gyökkritérium.** *Legyen* $\sum a_n$ *egy sor az* $X$ *normált térben. Ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

*és* $X$ *Banach-tér, akkor* $\sum a_n$ *konvergens, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

*akkor* $\sum a_n$ *divergens.*

**Bizonyítás.** Ha $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $\alpha < 1$, akkor $\alpha < \beta < 1$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$, azaz $|a_n| \leq \beta^n$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\alpha > 1$, akkor $\alpha > \beta > 1$ esetén végtelen sok $n$-re $|a_n| \geq \beta^n > 1$, így $a_n$ nem tart nullához. □

**8.1.101. d'Alembert-féle hányadoskritérium.** *Egy $X$ normált térben nem nulla tagokból álló $\sum a_n$ sorra, ha*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

*és $X$ Banach-tér, akkor $\sum a_n$ konvergens, ha*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

*vagy ha véges sok $n$ kivételével $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.*

**Bizonyítás.** Ha $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, akkor van olyan $\beta < 1$ szám és $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \leq \beta$. Innen indukcióval $|a_n| \leq |a_N|\beta^{n-N}$, ha $n \geq N$, így az összehasonlító kritérium szerint $\sum a_n$ abszolút konvergens. Ha $\liminf_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$. Innen indukcióval $|a_n| \geq |a_N|$, ha $n \geq N$, így $a_n$ nem tart nullához. □

**8.1.102. Kettős sor tétel.** *Legyen $X$ Banach-tér, $a_{i,j} \in X$, ha $i, j \in \mathbb{N}$. Ha van olyan $K$ valós szám, hogy $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \leq K$ minden $n, m \in \mathbb{N}$-re, akkor az alábbi sorok abszolút konvergensek és*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}. \tag{1}$$

Vegyük észre, hogy a feltétel teljesülése következik, ha feltesszük, hogy (1)-ben vagy a jobb, vagy a bal oldalon minden tagot a normájával helyettesítve a kapott sorok konvergensek.

⋆ **Bizonyítás.** Rögzített $m$-re $n \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, ahonnan $m \to \infty$ határátmenettel $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{j,k}| \leq K$, és hasonlóan kapjuk, hogy a jobb oldalon szereplő sorok is abszolút konvergensek. Feltéve, hogy $K$ a pontos felső korlát, $\varepsilon > 0$, elég nagy $m$-re és $n$-re $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_{j,k}| \geq K - \varepsilon$. Ha most $n' > n$, akkor

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n'} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből $n' \to \infty$ határátmenettel

$$\Big|\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon.$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}\Big| \leq \varepsilon,$$

amiből

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k} - \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k}\Big| \leq 2\varepsilon.$$

Ha most $n \to \infty$, majd $m \to \infty$, akkor kapjuk a tétel állítását. □

**8.1.103. Következmény: sorok átrendezése.** *Ha $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy permutáció (azaz bijekció), és az $X$-beli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, összege $A$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ sor is abszolút konvergens, és összege $A$.*

A következmény alapján ha $M$ megszámlálható végtelen halmaz, $a_m \in \mathbb{K}^k$, ha $m \in M$, és van olyan $K$ valós szám, hogy bármely véges $M' \subset M$-re $\sum_{m \in M'} |a_m| \le K$, akkor bármely $p\colon \mathbb{N} \to M$ bijekcióra a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n}$ összeg ugyanaz. Jelölése: $\sum_{m \in M} a_m$.

**Bizonyítás.** Legyen $a_{i,j} = a_i$, ha $j = p_i$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

**8.1.104. Következmény.** *Ha az $I$ megszámlálható halmaz a $I_j$, $j \in J$ diszjunkt halmazok megszámlálható uniója, $a_i \in X$, ha $i \in I$, és $\sum_{i \in I} |a_i| < \infty$, akkor*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} a_i.$$

**Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $I, J \subset \mathbb{N}$. Legyen $a_{i,j} = a_i$, ha $i \in I_j$, egyébként nulla, és alkalmazzuk a kettős sor tételt.

**8.1.105. Fixpont.** Ha $T$ az $X$ halmazt önmagába leképező függvény, akkor $T$ *fixpont*jának azokat a pontokat nevezzük, amelyekre $T(x) = x$.

**8.1.106. Banach-féle fixponttétel.** *Ha $X$ egy teljes metrikus tér és $T\colon X \to X$ egy kontrakció, akkor $T$-nek pontosan egy $x$ fixpontja van. Ha $x_0 \in X$ tetszőleges, akkor az $x_{n+1} = T(x_n)$ iterációval adódó sorozatra $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

**Bizonyítás.** Legyen $D = d(x_0, x_1)$, $\alpha = \mathrm{Lip}(T)$. Teljes indukcióval

$$d(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^n D, \quad \text{ha} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Ebből $m > n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\le \alpha^n D + \alpha^{n+1} D + \cdots + \alpha^{m-1} D \le \alpha^n D(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) = \frac{\alpha^n D}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Mivel $\alpha^n D/(1-\alpha) \to 0$, ha $n \to \infty$, $x_n$ Cauchy-sorozat, amely konvergál $X$ egy $x$ eleméhez. Megmutatjuk, hogy $x$ fixpontja $T$-nek.

$$0 \le d\big(x, T(x)\big) \le d(x, x_n) + d\big(x_n, T(x)\big) \le d(x, x_n) + \alpha d(x_{n-1}, x),$$

amiből $n \to \infty$ esetén $d\big(x, T(x)\big) = 0$ következik. A fixpont egyértelműsége abból következik, hogy ha $x$ és $y$ fixpontok, akkor

$$d(x, y) = d\big(T(x), T(y)\big) \le \alpha d(x, y). \ \square$$

**8.1.107. Feladat [4].** Bizonyítsuk be, hogy ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható és a deriváltja sehol sem 1, akkor legfeljebb egy fixpontja van!

**8.1.108. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy az $f(x) = x+1/(1+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvénynek nincs fixpontja, pedig $0 < f'(x) < 1$ mindenütt!

**8.1.109. Feladat [7].** Igazoljuk, hogy az $f(x) = (x^3 + 1)/3$ függvénynek három fixpontja van, $\alpha < \beta < \gamma$. Mutassuk meg, hogy $-2 < \alpha < -1$, $0 < \beta < 1$, $1 < \gamma < 2$. Mutassuk meg, hogy az iterációt $\alpha$ és $\gamma$ közül indítva $\beta$-hoz konvergál, de $\alpha$-nál kisebb értékből indítva $-\infty$-hez, $\gamma$-nál kisebb értékből indítva $+\infty$-hez divergál.

**8.1.110. Függvényterek, függvénysorozatok.** Legyen $X$ tetszőleges halmaz, $Y$ metrikus tér. Az $X$-et $Y$-ba képező függvények terében két konvergencia játsza a legfontosabb szerepet. Azt mondjuk, hogy az $f_n\colon X \to Y$ függvények sorozata az $x \in X$ pontban *konvergál* az $f\colon X \to Y$ függvényhez, ha $Y$-ban $f_n(x) \to f(x)$. Azon pontok halmazát, ahol a konvergencia fennáll, a függvénysorozat *konvergenciahalmaz*ának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $f_n\colon X \to Y$ függvények sorozata *pontonként konvergál* az $f\colon X \to Y$ függvényhez, ha $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re. Ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $n \geq N$, akkor $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$ minden $x \in X$-re, akkor azt mondjuk, hogy $f_n$ *egyenletesen konvergál* $f$-hez. Az egyenletes konvergenciából nyilván következik a pontonkénti.

Az egyenletes konvergencia származtatható eltérésből: Ha $f, g\colon X \to Y$ függvények, akkor legyen

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Ez az eltérés nem feltétlenül véges, de ha $d(f, g) = 0$, akkor $f = g$. Nyilván $f_n$ pontosan akkor konvergál $f$-hez egyenletesen, ha $n \to \infty$ esetén $d(f_n, f) \to 0$.

**8.1.111. Példák.** Az $x^n$, $x \in \mathbb{R}$ függvénysorozat konvergenciahalmaza $]-1, 1]$, és az 1-ben 1-hez, egyébként nullához konvergál. A konvergencia minden $[-a, a]$ intervallumon egyenletes, de $[0, 1[$-en nem. Az $\mathbb{R}$-en a $(2/\pi)\operatorname{arctg}(nx)$ függvénysorozat a sgn függvényhez konvergál. Ha $a > 0$, akkor az $[a, +\infty[$ intervallumon a konvergencia egyenletes. $\mathbb{R}^+$-on a konvergencia nem egyenletes. A példák mutatják, hogy folytonos függvények pontonkénti határértéke nem feltétlenül folytonos.

**8.1.112. Határátmenetek felcserélése.** *Tegyük fel, hogy $X$ és $Y$ metrikus terek, $A \subset X$, $Y$ teljes, $f, f_n\colon A \to Y$, és $a$ torlódási pontja $A$-nak. Ha $f_n$ egyenletesen konvergál $A$-n $f$-hez, és $\lim_{x\to a} f_n(x) = b_n$ létezik minden $n$-re, akkor a $b_n$ sorozat konvergens, és ha határértéke $b$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = b$, más szóval a két határátmenet felcserélhető, azaz*

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Ekkor van olyan $N$, hogy ha $n \geq N$, akkor $d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ minden $x \in A$-ra. Képezzük az $x \to a$ határértéket: azt kapjuk, hogy $d_Y(b_n, b_m) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $b_n$ Cauchy-sorozat, így konvergens; jelölje $b$ a határértékét. Nyilván

$$d_Y(f(x), b) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), b_n) + d_Y(b_n, b).$$

Válasszunk olyan $n$-et, amelyre egyrészt $d_Y(f(x), f_n(x)) \leq \varepsilon/3$ minden $x \in A$-ra, másrészt $d_Y(b_n, b) \leq \varepsilon/3$. Erre az $n$-re válasszunk olyan $V$ környezetét $a$-nak, amelyre $a \neq x \in A \cap V$ esetén $d_Y(f_n(x), b_n) \leq \varepsilon/3$. Ekkor az is teljesül, hogy $d_Y(f(x), b) \leq \varepsilon$. $\square$

**8.1.113. Következmény.** *Ha az $f_n \colon A \to Y$ folytonos függvények egyenletesen konvergálnak az $f \colon A \to Y$ függvényhez, akkor $f$ folytonos $A$-n.*

**Bizonyítás.** Következik a határértékekre vonatkozó előző tételből $b_n = f_n(a)$ választással. □

**8.1.114. Példa.** Az előző tételben a pontonkénti konvergencia nem elegendő. Ha $f_n(x) = x^2/(1+x^2)^n$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor részletösszegei minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergálnak, de összege 0, ha $x = 0$, és $1 + x^2$, ha $x \neq 0$, azaz nem folytonos a nullában, ami mutatja, hogy a konvergencia nem egyenletes.

**8.1.115. Példa.** A $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \big(\cos(m!\pi x)\big)^{2n}$ határérték létezik, ha $x \in \mathbb{R}$, és a Dirichlet-függvény.

**8.1.116. Feladat [9].** Hol konvergensek, illetve egyenletesen konvergensek az alábbi valós függvénysorozatok:

(1) $\sqrt[n]{|x|}$; $x^n/n!$; $x^n - x^{n+1}$; $x^n/(1 + x^2 n)$;

(2) $(1 + x/n)^n$; $(1 + x^{2n})^{1/n}$; $\sqrt{x^2 + 1/n^2}$.

**8.1.117. Feladat [9].** Hol konvergensek, illetve egyenletesen konvergensek az alábbi valós függvénysorok:

(1) $\sum x^n/(1 + x^n)$; $\sum n/x^n$; $\sum n^x$; $\sum(\ln n)^x$;

(2) $\sum n e^{-nx}$; $\sum \sin x^n/n^2$; $\sum x^2 e^{-nx}$, $\sum \sin(x/n^2)$;

(3) $\sum\big((1 + x)/(1 - x)\big)^n$; $\sum \sqrt[n]{x^{2n} + 1}/2^n$; $\sum \operatorname{arctg}(nx)/(n^2 + x^2)$.

**8.1.118. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha egy korlátos intervallumon valós értékű függvények sorozata egyenletesen konvergál egy függvényhez, akkor a határfüggvény integrálja az integrálok határértéke! (Később jóval erősebb tételeket fogunk bizonyítani.)

**8.1.119. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy $n^2(x^{n-1} - x^n)$ függvénysorozat pontonként, de nem egyenletesen tart $[0, 1]$-en nullához! Hová tart az integrálok sorozata?

**8.1.120. Feladat [6].** Hol konvergensek, abszolút konvergensek, illetve egyenletesen konvergensek az alábbi függvénysorok?

(1) $\sum(1 - x)x^n/n^2$;

(2) $\sum \cos^2 x \sin^n x/n^3$.

**8.1.121. Feladat [9].** Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeire lesz az $n^\alpha x e^{-nx}$, $0 \le x \le 1$ függvénysorozat pontonként konvergens? Mikor lesz egyenletesen konvergens? Mikor lesz a határfüggvény integrálja az integrálok határértéke?

**8.1.122. Feladat [9].** Oldjuk meg az előző feladatot az $nxe^{-n^\alpha x}$, $0 \le x \le 1$ függvénysorozatra!

**8.1.123. Feladat [4].** Egyenletes-e a $\sum x^n$ hatványsor konvergenciája $]-1, 1[$-en?

**8.1.124. Feladat [5].** Legyen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

Milyen $x$ értékekre abszolút konvergens ez a sor? Milyen intervallumokon konvergál egyenletesen? Folytonos-e az $f$ mindenütt, ahol a sor konvergál? Korlátos-e az $f$?

**8.1.125. Feladat [6].** Legyen $f_n(x) = \sin^2(\pi/x)$, ha $1/(n+1) \le x \le 1/n$, és nulla egyébként. Mutassuk meg, hogy $f_n$ folytonos függvényhez konvergál, de nem egyenletesen! Mutassuk meg, hogy a $\sum f_n$ sor mindenütt abszolút konvergens, de nem egyenletesen!

**8.1.126. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

sor egyenletesen konvergens minden korlátos intervallumon, de egyetlen pontban sem abszolút konvergens!

**8.1.127. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy ha $x_n$ különböző $]a,b[$-beli pontokból álló sorozat és $\sum |c_n|$ konvergens, akkor a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Theta(x - x_n) \quad \text{ha} \quad x \in [a,b]$$

sor egyenletesen konvergens és $f$ folytonos minden $x \ne x_n$-ben!

A továbbiakban az eddig tanultakat normált terekre, belső szorzat terekre, elsősorban $\mathbb{K}^n$-re, és ezek leképezéseire fogjuk alkalmazni.

**8.1.128. Vektor-skalár, skalár-vektor és vektor-vektor függvények.** Elsősorban $\mathbb{K}_1^m \to \mathbb{K}_2^n$-beli függvényekkel kívánunk foglalkozni. Mivel $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{C}^k$, szorítkozhatnánk $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ típusú függvényekre. Mivel $\mathbb{C}^k$ úgyis azonosítható $\mathbb{R}^{2k}$-val, az sem jelenti az általánosság megszorítását, ha $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$-beli függvényekre szorítkozunk. Az $m = 1$, $n = 1$ esetet már ismerjük. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$-beli függvényeket *vektor-skalár* függvényeknek nevezzük. Az $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$-beli függvényeket *skalár-vektor* függvényeknek vagy *skalármező*nek nevezzük. Végül az $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$-beli függvényeket *vektor-vektor* függvényeknek, az $m = n$ esetben *vektormező*nek nevezzük.

**8.1.129. Tartomány.** A $D \subset \mathbb{K}^k$ részhalmazt *tartomány*nak nevezzük, ha nyílt és nem állítható elő két nem üres diszjunkt nyílt halmaz egyesítéseként. Az utóbbi tulajdonság azt fejezi ki, hogy $D$ „összefüggő”.

**8.1.130. Konvex halmaz, konvex és konkáv függvény.** Egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér egy $K$ részhalmazát *konvex halmaz*nak nevezzük, ha $x, y \in K$ esetén az $x$ és $y$ pontot összekötő szakasz $\alpha x + (1-\alpha)y$, $0 < \alpha < 1$ pontjai is benne vannak a halmazban. Egy valós értékű függvényt *konvex függvény*nek nevezünk, ha egy $K$ konvex halmazon van értelmezve és $x, y \in K$, $0 < \alpha < 1$ esetén

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y);$$

ha az egyenlőtlenség mindig szigorú, akkor *szigorúan konvex függvény*ről beszélünk, ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén pedig *konkáv függvény*ről illetve *szigorúan konkáv függvény*ről. Egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérben *konvex kombináción* olyan affin kombinációt értünk, amelyben az együtthatók nemnegatívok. A tagszám szerinti indukcióval adódik, hogy egy

$K$ konvex halmazra, illetve egy rajta értelmezett konvex függvényre ha $x_1, \ldots, x_n \in K$, akkor $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in K$ és

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

minden konvex kombinációra. Az $n = 2$ esetben visszakapjuk a konvexség definícióját.

Például a gömbök konvex halmazok: ha $a$ a gömb középpontja, akkor

$$\bigl|\lambda x + (1-\lambda)y - a\bigr| \le \bigl|\lambda(x-a)\bigr| + \bigl|(1-\lambda)(y-a)\bigr| \le \max\bigl\{|x-a|, |y-a|\bigr\}.$$

**8.1.131. Görbék.** Legyen $X$ metrikus tér. Egy $X$-beli *görbe* alatt egy $\gamma$ folytonos leképezését értjük egy nem csak egy pontból álló $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumnak $X$-be. (Szokás bármilyen intervallumon értelmezett folytonos leképezést is görbének nevezni.) Az $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$-beli görbéket *síkgörbé*knek, az $\mathbb{R}^3$-beli görbéket pedig *térgörbé*knek nevezzük. A $\gamma(a)$, illetve $\gamma(b)$ pontokat a görbe *kezdő-*, illetve *végpontja*inak nevezzük. Ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, akkor azt mondjuk, hogy $\gamma$ *zárt görbe.* A görbét *egyszerű görbé*nek nevezzük, ha kölcsönösen egyértelmű, kivéve hogy zárt görbe esetén a kezdő- és végpont megegyezik. A

$$\check{\gamma}(t) = \gamma(-t), \quad \text{ha} \quad t \in [-b, -a]$$

görbét a $\gamma$ *megfordítás*ának nevezzük. Ha $\gamma_1$ az $[a, b]$-n, $\gamma_2$ a $[b, c]$-n definiált görbék, és $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, akkor definiálhatjuk a $\gamma_1$ és $\gamma_2$ *egymás utáni bejárás*át, a $\gamma_1 \vee \gamma_2 = \gamma$ görbét, a

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{ha } a \le t \le b, \\ \gamma_2(t), & \text{ha } b \le t \le c \end{cases}$$

összefüggésselmadar adar $\gamma$majd gammaketto ajd gammaketto $\gamma_1 \vee \gamma_2$. Legegyszerűbb görbék a $t \mapsto c + td$ alakban előállítható *lineáris görbé*k valamely rögzített $c, d \in \mathbb{R}^m$ vektorokkal. A $d = 0$ speciális esetnek megfelelő *konstans görbé*k értékkészlete egyetlen pont. A véges sok lineáris görbe egymás utáni bejárásával kapható görbék a *szakaszonként lineáris görbé*k.

Az $I_1$ intervallumon értelmezett $\gamma_1$ és az $I_2$ intervallumon értelmezett $\gamma_2$ *görbéket ekvivalens*eknek nevezzük, ha van olyan $\varphi$ szigorúan monoton növekedő folytonos függvény, amely $I_1$-et $I_2$-re képezi le, és amelyre $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Könnyű látni, hogy görbék ekvivalenciája ekvivalencia-reláció.

**8.1.132. Tétel.** *Egy $X \subset \mathbb{K}^n$ nyílt halmazra az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *$X$ tartomány;*

(2) *az $X$ bármely két $u$ és $v$ pontjához van olyan $X$-beli szakaszonként lineáris görbe, amelynek $u$ a kezdő-, $v$ a végpontja;*

(3) *bármely két $X$-beli ponthoz van olyan $X$-beli görbe, amelynek az egyik pont a kezdő-, a másik a végpontja;*

$\star$ **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy (1) teljesül, és legyen $u \in X$. Azon $v \in X$ pontok halmaza, amelyekhez létezik olyan szakaszonként lineáris görbe, amelynek kezdőpontja $u$, végpontja pedig $v$, nyílt és nem üres. De hasonlóan azon $v \in X$ pontok halmaza, amelyekhez nem létezik olyan szakaszonként lineáris görbe, amelynek kezdőpontja $u$, végpontja pedig $v$, szintén nyílt, így ennek üresnek kell lennie, azaz kapjuk (2)-t.

Az nyilvánvaló, hogy (2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy (3) teljesül, de $X$ nem tartomány. Ekkor előállna $U, V$ nem üres, diszjunkt, nyílt halmazok egyesítéseként. Legyen $g$ olyan görbe, amelynek kezdőpontja $U$-ban, végpontja $V$-ben van, és legyen $t = \sup g^{-1}(U)$. Ha $g(t) \in U$, akkor a folytonosság miatt $t$ nem lehet felső korlát, ha pedig $g(t) \in V$, akkor a folytonosság miatt nem lehet a legkisebb felső korlát. Így (3)-ból következik (1). □

**8.1.133. Következmény.** *A számegyenesen a tartományok az* $]a, b[$, $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$ *alakú nyílt intervallumok.*

**Bizonyítás.** Ha egy $X \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz nem intervallum, akkor léteznek olyan $x < z < y$ pontok, amelyekre $x, y \in X$ de $z \notin X$, így $X$ az $X \cap ]-\infty, z[$ és $X \cap [z, +\infty[$ nem üres diszjunkt nyílt halmazok egyesítése. A megfordítás következik (2)-ből.

**8.1.134. Félnormák.** Legyen $X$ lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését $X$-nek $[0, \infty]$-be *félnormá*nak nevezzük, ha

(1) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (*abszolútérték-homogén*, itt $0 \cdot \infty = 0$);

(2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Félnormákra is $\|\ \|$ helyett az $|\ |$ jelölés is szokásos. Mint tudjuk, ha még az is teljesül, hogy

(3) $0 < \|x\| < \infty$, ha $0 \neq x \in X$,

akkor a leképezést *normá*nak nevezzük.

Egy félnormált térben $\{x : x \in X, \|x\| < \infty\}$ lineáris altér, és ezen az altéren a félnorma véges. Ha a félnorma véges, akkor a tér mindig normált térré tehető, ha azokat az elemeket, amelyek különbségének félnormája nulla, mintegy „összeragasztva” azonosítjuk.

Félnormált téren $d(x, y) = \|x - y\|$ eltérés. Az így definiált eltérésre $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$) és $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, ha $x, y, z \in X$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, azaz az eltérés *abszolútérték-homogén* és *eltolásinvariáns.*

**8.1.135. Definíció.** Normált térbeli értékű függvények egyenletes konvergenciája félnormából származtatható: Ha $X$ tetszőleges halmaz, $Y$ normált tér, $f : X \to Y$, akkor legyen

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \bigl|f(x)\bigr|.$$

A $\|\ \|$ félnormából az egyenletes konvergenciának megfelelő eltérés származik. A félnorma nyilván a korlátos függvényekre lesz véges.

**8.1.136. Cauchy-kritérium függvénysorozatokra.** *Az előző pont jelöléseivel ha $Y$ Banach-tér, akkor az $f_n$ függvénysorozat pontosan akkor konvergál egyenletesen egy $f$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq N$ esetén*

(1) $$\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

*minden $x \in X$-re.*

**Bizonyítás.** Ha $f_n$ egyenletesen konvergál $f$-hez, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/2$ minden $x \in X$-re. Innen $n, m \geq N$ esetén (1) teljesül minden $x \in X$-re.

Megfordítva, legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $n, m \geq N$ esetén (1) fennáll. Mivel eszerint bármely $x \in X$-re $f_n(x)$ Cauchy-sorozat, konvergens is. Jelölje $f(x)$ a határértékét. (1)-ből $m \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $n \geq N$ esetén $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ minden $x \in X$-re. □

**8.1.137. Következmény.** *A korlátos függvények tere Banach-tér.*

**Bizonyítás.** Az egyenletes konvergencia normájával teljes. □

**8.1.138. Következmény.** *Ha $X$ metrikus tér, akkor a korlátos folytonos függvények tere Banach-tér.*

**Bizonyítás.** Az egyenletes konvergencia metrikájával zárt altere a korlátos függvények terének. □

**8.1.139. Függvénysorok.** Legyen $X$ egy tetszőleges halmaz. Az $X$-et egy $Y$ normált térbe képező függvények körében értelmezve van függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciáját a sorokhoz hasonlóan a részletösszegek pontonkénti, illetve egyenletes konvergenciájával értelmezzük.

**8.1.140. Weierstrass-kritérium.** *Tegyük fel, hogy $X$ egy halmaz, $Y$ Banach-tér, $f_n\colon X \to Y$ egy függvénysorozat, és $\|f_n\| \leq M_n$, ha $n = 0, 1, \ldots$. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ egyenletesen konvergál $X$-en.*

**Bizonyítás.** Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $m \geq n \geq N$, akkor

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{m} f_j\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} M_j \leq \varepsilon.$$

Így a Cauchy-kritériumból következik az egyenletes konvergencia. □

A következő tételben az egyenletes konvergenciát egy érdekes példa konstruálására használjuk.

⋆ **8.1.141. Weierstrass példája.** *Létezik olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amely sehol sem differenciálható.*

**Bizonyítás.** Legyen $0 < a < 1$ és $b$ olyan páratlan egész szám, amelyre $ab > 2\pi + 1$. A példa az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k x)$$

függvény. A függvénysorra alkalmazható a Weierstrass-kritérium, így $f$ folytonos. Rögzített $x$-re

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{\cos(b^k(x+h) - \cos(b^k x)}{\hbar} \\ &\quad + a^n \frac{\cos(b^n(x+h) - \cos(b^n x)}{\hbar} \\ &\quad + \sum_{k=n+1}^{\infty} a^k \frac{\cos(b^k(x+h) - \cos(b^k x)}{\hbar}.\end{aligned}$$

Jelölje a jobb oldalon szereplő tagokat rendre $A_n(h)$, $B_n(h)$ és $C_n(h)$. Mivel a középértéktétel szerint a cos függvény Lipschitz 1 konstanssal,

$$|A_n(h)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^k \frac{|b^k h|}{|h|} = \frac{(ab)^n - 1}{ab - 1} < \frac{(ab)^n}{ab - 1}.$$

A konstrukció alapgondolata, hogy megadunk egy olyan $h_n \to 0$ sorozatot, amelyre $B_n(h_n)$ nagy a $C_n(h_n)$ összegnek pedig minden tagja nemnegatív.

Ha $\cos(b^n x) \leq 0$, akkor legyen $h_n$ az a legkisebb pozitív szám, amelyre $b^n(x+h_n) = 2j\pi$, azaz legyen $2(j-1)\pi \leq b^n(x+h_n) < 2j\pi$ és $h_n(2j\pi - b^n x)/b^n$. Ekkor $0 < h_n < 2\pi/b^n$, tehát $h_n \to 0$. Mivel $B_n(h_n)$-ben a számláló legalább 1, $B_n(h_n) \geq b^n/h > b^n a^n/(2\pi)$. Ha $k > n$, akkor is $b^k(x + h_n)$ többszöröse $2\pi$-nek, így a $C_n(h_n)$ összeg tagjainak számlálója nemnegatív, így az összeg is nemnegatív. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} > -\frac{(ab)^n}{ab - 1} + \frac{(ab)^n}{2\pi} \to \infty.$$

Ha $\cos(b^n x) > 0$, akkor legyen $h_n$ a legnagyobb negatív szám, amire $b^n(x+h_n) = (2j-1)\pi$. Hasonlóan kapjuk, hogy $h_n \to 0$ és a differenciahányados tart végtelenhez. □

⋆ **8.1.142. Megjegyzés.** Nem tudjuk, mi motiválta Weierstrass-t példájának megalkotásakor. Mindenesetre a $\sum a^n z^{b^n}$ hatványsor konvergenciasugara 1. A határát paraméterezve a $z = e^{it}$ paraméterezéssel a $\sum a^n e^{itb^n}$ sor kapjuk, aminek az összegfüggvénye folytonos, de mint láttuk, a valós része nem differenciálható. Ez mutatja, hogy az összegfüggvény a határ egyetlen pontjában sem egyezik meg egy analitikus függvénnyel, tehát a kör belsejében analitikus függvényt „semmilyen irányban sem tudjuk analitikusan folytatni". □

**8.1.143. Tétel.** *Bármely $X$ metrikus tér izometrikus egy Banach-tér egy részhalmazával.*

**Bizonyítás.** Legyen $X$ a metrikus tér, $z \in X$ rögzített, és tekintsük az $X$-en értelmezett, valós értékű korlátos folytonos függvények $Y$ Banach-terét. Egy $x \in X$ elemhez a $t \mapsto d(x,t) - d(z,t)$ leképezést fogjuk hozzárendelni. Ez korlátos, folytonos, és normája legfeljebb $d(z,x)$, sőt, pontosan ennyi, mivel a $t = z$ helyen ezt fel is veszi. Az $x$-hez és $y$-hoz rendelt leképezések különbsége a $t \mapsto d(x,t) - d(y,t)$ leképezés, aminek normája $d(x,y)$. □

**8.1.144. Feladat [1].** Mi a racionális számok teljes metrikus burka?

**8.1.145. Megjegyzés.** Az előző tétel szerint beágyazva egy metrikus teret egy Banach-térbe, és ott lezárva, teljes metrikus teret kapunk — az $X$ teljes burkát — amelyben $X$ sűrű. Ha $X$ normált tér volt, akkor a norma kiterjeszthető a teljes burokra, amely így Banach-tér lesz, ha pedig belső szorzat tér volt, akkor a belső szorzat kiterjeszthető a teljes burokra, amely így Hilbert-tér lesz. Nem túl erős megszorítás tehát teljes terekre szorítkozni.

**8.1.146. Tétel.** *Véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens.*

**Bizonyítás.** Elég az állítást $\mathbb{R}^n$ normáira bizonyítani. Mivel a normák ekvivalenciája ekvivalencia-reláció, elég belátni, hogy $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges $\| \ \|$ normája a szokásos belső szorzatból származó $| \ |$ normával ekvivalens. Legyen

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

a szokásos ortonormált bázisa $\mathbb{R}^n$-nek. Ekkor $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ esetén $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ és

$$\|x\| \le \max\{|x_i|: 1 \le i \le n\} \sum_{i=1}^n \|e_i\| \le |x| \sum_{i=1}^n \|e_i\|,$$

tehát teljesül az $\|x\| \le C|x|$ egyenlőtlenség. Innen az $(\mathbb{R}^n, | \ |)$ tér $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ térre való identikus leképezése folytonos, és mivel az $| \ |$ normában vett egységgömb határa (azaz határpontjainak halmaza) kompakt, rajta a $\| \ \|$ függvény felveszi $c$ pontos alsó határát, ami nem lehet nulla. Így $\|x/|x|\| \ge c$, ha $x \ne 0$, azaz $\|x\| \ge c|x|$ minden $x \in \mathbb{R}^n$-re. $\square$

**8.1.147. Lemma.** *Legyen $Y$ véges dimenziós, $Z$ pedig zárt altere az $X$ normált térnek úgy, hogy $Y \cap Z = \{0\}$. Ekkor $Y + Z$ is zárt altér, és ha az $x_n = y_n + z_n$, $y_n \in Y$, $z_n \in Z$ sorozat konvergens, akkor $y_n$ és $z_n$ is konvergensek.*

**Bizonyítás.** Az $Y$ dimenziója szerinti teljes indukciót használunk. Ha $Y$ egydimenziós, $y$ egy nem nulla eleme, és $D$ jelöli az $y$ távolságát $Z$-től, akkor $\alpha_n y + z_n = x_n \to x$ esetén $\|\alpha_n y + z_n\| \ge |\alpha_n| D$ miatt $\alpha_n$ korlátos, így van konvergens részsorozata. Erre áttérve, kapjuk, hogy ez a részsorozata $z_n$-nek is konvergens, így $x$ előáll $\alpha y + z$ alakban, tehát $Y + Z$ zárt. Ha $\alpha_n$-nek más torlódási pontja is lenne, akkor ez az előállítás nem lenne egyértelmű, ami ellentmond az $Y \cap Z = \{0\}$ feltételnek. Az általános esetet az $Y = Y' + Y''$, $x_n = y'_n + y''_n + z_n$, $y'_n \in Y'$, $y''_n \in Y''$, $z_n \in Z$ felbontásból kapjuk, ahol $Y'$ egydimenziós.

**8.1.148. Következmény.** *Normált tér véges dimenziós altere zárt.* $\square$

**8.1.149. Riesz lemmája majdnem ortogonális elem létezéséről.** *Legyen $X$ egy normált tér, $Y$ valódi zárt lineáris altere $X$-nek. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $x$ elem, amelyre $\|x\| = 1$ és $d(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Véges dimenziós térben $d(x, Y) = 1$ is elérhető, mert az $x \mapsto d(x, Y)$ függvény folytonos a zárt egységgömbön, és így felveszi szuprémumát. Euklidészi térben ekkor $x$ ortogonális $Y$-ra, innen kapta a lemma a nevét.

**Bizonyítás.** Legyen $z \in X \setminus Y$ és válasszuk meg az $y \in Y$ elemet úgy, hogy

$$\|z - y\| - d(z, Y) < \varepsilon d(z, Y)$$

teljesüljön. Mivel $Y$ zárt, $z \notin Y$, így $0 < d(z, Y) \le \|z - y\|$, képezhetjük tehát az $x = (z - y)/\|z - y\|$ elemet. Erre $\|x\| = 1$, és megbecsülve a $d(x, Y)$ távolságot, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
d(x, Y) &= \inf_{u \in Y} \|x - u\| = \inf_{u \in Y} \left\| \frac{z - y}{\|z - y\|} - u \right\| \\
&= \frac{1}{\|z - y\|} \inf_{u \in Y} \|z - (y + \|z - y\| u)\| \\
&= \frac{1}{\|z - y\|} \inf_{v \in Y} \|z - v\| = \frac{d(z, Y)}{\|z - y\|} \\
&> \frac{d(z, Y)}{d(z, Y)(1 + \varepsilon)} = \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

**8.1.150. Tétel.** *Egy normált tér akkor és csak akkor véges dimenziós, ha a zárt egységgömbje kompakt.*

**Bizonyítás.** Csak azt kell megmutatnunk, hogy ha a tér nem véges dimenziós, akkor az egységgömb nem kompakt. Teljes indukcióval válasszunk olyan, egységnyi normájú elemekből álló $x_n$ sorozatot, amelynek minden tagja az előzőek lineáris burkától 1/2-nél nagyobb távolságra van. Az így kapott sorozat bármely két különböző tagja 1/2-nél nagyobb távolságra van, tehát nem lehet konvergens részsorozata.

$\to$ **8.1.151. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy egy normált tér pontosan akkor lokálisan kompakt, ha véges dimenziós.

$\to$ **8.1.152. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy véges dimenziós altér esetén a legjobb approximáció problémájának van megoldása.

$\to$ **8.1.153. Feladat [7].** Egyértelmű-e egy kétdimenziós normált tér egy lineáris alterében a legjobban approximáló elem?

**8.1.154. Bázis.** Az $X$ normált tér elemeinek egy $e_n$ (véges vagy végtelen) sorozatát a tér *Schauder-bázis*ának, vagy röviden *bázis*ának nevezzük, ha minden $x \in X$ egyértelműen előállítható $x = \sum_n \alpha_n e_n$ alakban. Világos, hogy véges dimenziós térben ez a fogalom egybeesik a szokásos bázis fogalommal. Végtelen dimenziós térben egy másik, tisztán algebrai bázis fogalom, a Hamel-bázis fogalma is létezik, ezt mi nem fogjuk használni. Ha egy normált térben van Schauder-bázis, akkor a tér szeparábilis, mert a bázis vektorainak racionális (vagy racionális valós és képzetes részű) együtthatókkal képzett véges lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak a térben. A megfordítás nem igaz, mint 1973-ban Enflo megmutatta, de — mint majd belátjuk — Hilbert-térben igaz.

Következő célunk az ortogonális felbontás tétel és az előállítási tétel általánosítása tetszőleges Hilbert-térre. Megjegyezzük, hogy belső szorzat térben tetszőleges halmaznak az ortogonális komplementer zárt, mert az $\left|\langle x, y\rangle\right| \le |x||y|$ egyenlőtlenség miatt a belső szorzat mindkét változójában Lipschitz-függvény.

**8.1.155. Legjobb approximáció Hilbert-térben.** *Legyen $X$ egy Hilbert-tér, és $K$ egy zárt konvex részhalmaza $X$-nek. Ekkor minden $x \in X$-hez létezik egy és csak egy legjobban approximáló elem $K$-ban.*

**Bizonyítás.** Legyen $x \in X$ és $D = d(x, K)$. Legyen $\varepsilon \ge 0$, $y, z \in K$ és tegyük fel, hogy $\|x-y\|^2 \le D^2 + \varepsilon^2$, $\|x-z\|^2 \le D^2 + \varepsilon^2$. Ekkor $(y+z)/2 \in K$ és

$$D^2 + \varepsilon^2 \ge \frac{\|y-x\|^2 + \|z-x\|^2}{2} = \frac{\|y+z-2x\|^2 + \|y-z\|^2}{4} \ge D^2 + \frac{\|y-z\|^2}{4},$$

amiből $\|y-z\| \le 2\varepsilon$. Legyen $y_n$ egy olyan $K$-beli sorozat, amelyre $\|x-y_n\| \to D$. Ekkor az előző egyenlőtlenségből $y_n$ Cauchy-sorozat. Ezért $y_n \to y$, és $K$ zártsága miatt $y \in K$. Innen $D = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \|x-y\|$. Az egyértelműség ugyancsak a fenti egyenlőtlenségből következik.

**8.1.156. Ortogonális felbontási tétel.** *Legyen $X$ egy Hilbert-tér, és $Y$ egy zárt lineáris altere $X$-nak. Ekkor minden $x \in X$ egyértelműen felírható $x = y + z$ alakban, ahol $y \in Y$ és $z \in Y^\perp$.*

**Bizonyítás.** Az előző tétel szerint létezik $x$-et legjobban approximáló $y \in Y$. Legyen $D = \|x-y\|$. Megmutatjuk, hogy $x = y + (x-y)$ a keresett felbontás, azaz $z = x-y$ ortogonális $Y$-ra. Legyen $u \neq 0$ az $Y$ tetszőleges eleme, akkor

$$\begin{aligned} D^2 &= \|x-y\|^2 \leq \|x-y+\alpha u\|^2 = \|z+\alpha u\|^2 \\ &= \langle z+\alpha u, z+\alpha u\rangle = D^2 + \alpha\langle u,z\rangle + \overline{\alpha}(\langle z,u\rangle + \alpha\|u\|^2). \end{aligned}$$

Legyen $\alpha = -\langle z,u\rangle/\|u\|^2$, azaz válasszuk $\alpha$-t úgy, hogy a zárójelben lévő kifejezés eltűnjön. Ekkor $D^2 \leq D^2 - \left|\langle z,u\rangle\right|^2/\|u\|^2$, ami csak úgy lehetséges, hogy $\langle z,u\rangle = 0$, $z \in Y^\perp$.

A felbontás egyértelmű, ha ugyanis $x = y+z = y'+z'$, $(y, y' \in Y,\ z, z' \in Y^\perp)$, akkor $Y \ni y - y' = z' - z \in Y^\perp$, de az egyenlőség két oldalán álló vektorok ortogonálisak, így

$$0 = \langle y-y', z'-z\rangle = \langle y-y', y-y'\rangle = \|y-y'\|^2,$$

amiből $y = y'$, $z = z'$. □

**8.1.157. Riesz reprezentációs tétele.** *Legyen $f$ korlátos lineáris funkcionál az $X$ Hilbert-téren. Ekkor egy és csak egy olyan $v \in Y$ létezik, amelyre*

$$f(x) = \langle x, v\rangle \quad \textit{minden } x \in H\textit{-ra.}$$

**Bizonyítás.** Vegyük észre hogy $Y = \ker(f)$ zárt lineáris altere $X$-nak. A továbbiakban a bizonyítás ugyanúgy megy, mint véges dimenzióban. □

# 8.2 Differenciálszámítás

*A differenciálás linearizálás, a magasabb differenciálás multilinearizálás.*

*Eberhard Zeidler*

*Figyelemre méltó, hogy a jelölés megkönnyíti a felfedezést: a legcsodálatosabban csökkenti az értelem munkáját.*

*Gottfried Wilhelm Leibniz*

A differenciál- és az integrálszámítás általánosításánál az általánosabb értékkészlet általában nem okoz sok gondot. Például a valós változós függvények differenciál- és integrálszámítását kevés munkával általánosíthatnánk akár Banach-térbeli értékű függvényekre is. Sokkal több gondot okozna — bár lehetséges lenne — Banach-téren értelmezett függvények differenciálszámítását tárgyalni $\mathbb{R}^n$-en értelmezett függvények helyett. Ebben a könyvben nem fogunk ilyen általános elméletet használni, ezért közönséges vektor-vektor függvényekre szorítkozunk.

**8.2.1. Lineáris operátorok normája.** Tekintsünk egy-egy (ugyanúgy jelölt) normát a $\mathbb{K}^n$, illetve $\mathbb{K}^m$ tereken. Egy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ lineáris leképezésre legyen

$$\|L\| = \sup_{|x|\leq 1} |Lx| \tag{1}$$

A szuprémum véges, mert $L$ folytonos (mivel koordinátái elsőfokú polinomok) és így korlátos az egységgömbön. Mivel $Lx = |x| L(x/|x|)$, ahonnan $|Lx| \leq \|L\||x|$ minden $0 \neq$

$x \in \mathbb{K}^n$-re, $\|L\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre $|Lx| \leq \|L\||x|$ minden $x \in \mathbb{K}^n$-re, azaz $\|L\| = \mathrm{Lip}(L)$. Nyilván $\|L\| \geq 0$ és $\|L\| = 0$ pontosan akkor, ha $L = 0$. Az is világos, hogy $\|\lambda L\| = |\lambda|\|L\|$. Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$, $|x| \leq 1$, akkor

$$\big|(L_1 + L_2)x\big| \leq |L_1 x| + |L_2 x| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

amiből a bal oldalon szuprémumot véve, azt kapjuk, hogy

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

így $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ normált tér. Az (1) összefüggéssel definiált normát a $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken adott vektornormákhoz tartozó *operátornormá*nak (vagy ha a lineáris operátor mátrixáról van szó, *mátrixnormá*nak) nevezzük. Ha mást nem mondunk, akkor a belső szorzatból származó normákhoz tartozó operátornormát fogjuk használni. Ha kifejezésre akarjuk juttatni, hogy mindkét téren a $p$-normát ($1 \leq p \leq \infty$) használjuk, akkor a kapott operátornormát $\|\ \|_p$-vel jelöljük.

Nyilván $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ esetén $|\lambda| \leq \|L\|$ bármely $\lambda$ sajátérték és bármely operátornorma esetén. A numerikus analízishez fontos tudni, hogy minden $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$-hez és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\|\ \|$ norma $\mathbb{K}^n$-en, amelyre $\|L\| < \varrho(L) + \varepsilon$.

**8.2.2. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy ha $[L]$ jelöli az $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ mátrixát a szokásos bázisban, akkor

$$\big\|[L]\big\|_\infty \leq \|L\|_2 \leq \big\|[L]\big\|_2.$$

→ **8.2.3. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy az operátornorma *szubmultiplikatív*, azaz ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ és $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^k, \mathbb{K}^n)$, akkor

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

→ **8.2.4. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $A_k \to A$ a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ térben, és $x_k \to x$ a $\mathbb{K}^n$ térben, akkor $\mathbb{K}^m$-ben $A_k x_k \to Ax$.

→ **8.2.5. Feladat [10].** Határozzuk meg a kétdimenziós euklideszi tér azon lineáris transzformációjának normáját, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

⋆ **8.2.6. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén, ha $L$ mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |\ell_{i,j}|$.

⋆ **8.2.7. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén, ha $L$ mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |\ell_{i,j}|$.

⋆ **8.2.8. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ esetén $\|L\|_2$ az $A^*A$ sajátértékei abszolút értékének maximuma.

**8.2.9. Definíció.** Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor az $f$ függvényt az $x$ pontban akkor neveztük differenciálhatónak, ha létezik a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \in \mathbb{R}$$

határérték. Tudjuk (5.1.16 segédtétel), hogy ez átfogalmazható úgy, hogy

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h),$$

ahol $r$ olyan függvény, amelyre $\lim_{h\to 0} r(h)/h = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $f(x+h) - f(x)$ különbség előállítható egy $h$-ban lineáris „főtag" és egy kicsiny „maradéktag" összegeként. A derivált fogalmának ezt az alakját általánosíthatjuk többváltozós függvényekre.

Legyen $G \subset \mathbb{K}^n$ és $f\colon G \to \mathbb{K}^m$. Ha $x$ belső pontja $G$-nek, és van olyan

$$L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$$

lineáris leképezés, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\bigl|f(x+h) - f(x) - Lh\bigr|}{|h|} = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy $f$ *differenciálható* vagy *totálisan differenciálható* az $x$ pontban. A differenciálhatóság nyilván lokális tulajdonság: ha két függvény megegyezik az $x$ pont valamely környezetében, akkor egyszerre differenciálhatóak és deriváltjuk megegyezik.

Geometriailag a differenciálhatóság az $x$ pontban azt jelenti, hogy az $f$ függvényhez, azaz az

$$\Bigl\{(y, f(y))\colon y \in G\Bigr\}$$

párok halmazához létezik egy

$$\Bigl\{(y, f(x) + L(y-x))\colon y \in \mathbb{K}^n\Bigr\}$$

affin sokaság, az *érintőtér*, amely az $\bigl(x, f(x)\bigr)$ pontban érinti azt.

Világos, hogy ha $f$ differenciálható az $x$ pontban, akkor ott folytonos is, mert ekkor

$$\lim_{h\to 0}\bigl|f(x+h) - f(x) - Lh\bigr| = 0,$$

amiből $\lim_{h\to 0} Lh = 0$ miatt $f$ folytonos $x$-ben.

Ha $h \in \mathbb{K}^n$, akkor $f$-et az $x$ pontban a $h$ *irány mentén differenciálható*nak nevezzük, ha $t \mapsto f(x+th)$ értelmezve van a $0$ egy környezetében, és létezik a

$$\partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

határérték, az $f$ függvény $x$ pontbeli $h$ *irány menti derivált*ja vagy *variáció*ja. A $\delta f(x;h)$ jelölés is használatos. Nyilván $\partial_{-h} f(x) = -\partial_h f(x)$.

A definícióból közvetlenül következik, hogy ha $f$ differenciálható $x$-ben, akkor minden $h \in \mathbb{K}^n$-re létezik a $\partial_h f(x)$ irány menti derivált is és

$$\partial_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = Lh,$$

mert $h \neq 0$ esetén

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\left|f(x+th)-f(x)-L(th)\right|}{|th|} = \frac{1}{|h|} \lim_{t\to 0} \left|\frac{f(x+th)-f(x)}{t} - Lh\right|,$$

így a fenti $L$ egyértelműen meghatározott. Az $L$-et az $f$ függvény $x$ pontbeli *differenciál*jának vagy *totális differenciál*jának nevezzük és $f'(x)$-szel jelöljükvesszo esszo $f'$.

Ha $n = 1$, akkor az $f$ függvény $x$-beli differenciálhatósága ekvivalens a

$$c = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határérték, az $f$ függvény $x$ pontbeli *derivált*jának létezésével, és

$$f'(x)h = hc \quad \text{minden } h \in \mathbb{K}\text{-ra.}$$

A deriváltat is $f'(x)$-szel szokás jelölni, bár fogalmilag a differenciál és a derivált különböznek: a derivált a $c$ vektor, a differenciál pedig a $h \mapsto hc$ leképezés, aminek a mátrixa a $c$ egyelemű vektorrendszer mátrixa. Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, és van olyan $\delta > 0$, amelyre $[x, x+\delta[$ részhalmaza $f$ értelmezési tartományának, akkor az

$$f'(x+) := \lim_{y\downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

jobb oldali határértéket a $f$ függvény $x$-beli *jobb oldali derivált*jának nevezzük. Teljesen hasonlóan értelmezhető az $f'(x-)$ *bal oldali derivált.* Ha $f$ egy $[a,b] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumon van értelmezve, akkor az alatt, hogy $f$ *differenciálható* $[a,b]$-n, azt fogjuk érteni, hogy differenciálható az intervallum belső pontjaiban, valamint a végpontokban léteznek a jobb, illetve bal oldali deriváltak. A deriváltakra vonatkozó állítások általában értelemszerűen átvihetők jobb és bal oldali deriváltakra is; ezzel a kérdéssel részletesen nem foglalkozunk.

Ha $m = 1$, akkor egyértelműen létezik olyan

$$\nabla f(x) \in \mathbb{K}^n,$$

az $f$ *gradiens*e, amelyre

$$f'(x)h = \langle h, \nabla f(x)\rangle \quad \text{minden } h \in \mathbb{K}^n\text{-re.}$$

Fogalmilag a gradiens és a differenciál különböznek: a gradiens egy vektor, a differenciál pedig egy lineáris forma.

Az irány menti deriváltak általában könnyen számíthatók.

Az itt definiált fogalmak és értékek nem változnak, ha a normákat ekvivalens normákkal helyettesítjük, így $\mathbb{K}^n$-en és $\mathbb{K}^m$-en is bármilyen normát tekinthetünk.

A legegyszerűbb példa differenciálható függvényre egy konstans függvény, amelynek differenciálja nulla, vagy egy $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ lineáris függvény, amelynek differenciálfüggvénye konstans: $f'(x) = f$ minden $x \in \mathbb{K}^m$-re.

Ha $f' = g$, akkor azt is mondjuk, hogy $f$ a $g$ *primitív függvény*e.

**8.2.10. Példa.** Az $x \mapsto |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$ függvény folytonos, sőt Lipschitz-függvény, de az origóban nem differenciálható: $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén még a $h$ irány menti deriváltja sem létezik.

**8.2.11. Példa.** Legyen $f$ az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, 0 < |y| < x^2\}$ halmaz karakterisztikus függvénye. A függvény nyilván nem folytonos az origóban, bár ott minden irány menti deriváltja létezik és nulla: ha $h = (h_1, h_2)$ és $h_1 h_2 \neq 0$, akkor $0 < |t| \leq |h_2|/h_1^2$ esetén $f(th_1, th_2) = 0$, mert $|th_2| \geq t^2 h_1^2$, ha pedig $h_1 h_2 = 0$, akkor ez minden $t$-re teljesül.

**8.2.12. Sima görbék.** Egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ függvény egy $\mathbb{R}^m$-beli mozgásnak felel meg. Ha a függvény differenciálható az $x$ pontban, akkor $f'(x)$ az *érintővektor*a $x$-ben. Ha $f'(x) \neq 0$, akkor az $x$-beli *érintőegyenes*én vagy röviden *érintő*jén az

$$\Big\{(t, f(x) + tf'(x)) : t \in \mathbb{R}\Big\}$$

egyenest értjük.

Egy $\mathbb{R}^m$-beli görbét *sima görbé*nek nevezünk, ha értelmezési tartományán folytonosan differenciálható (a végpontokban féloldali deriváltakat tekintünk). Ha egy görbe véges sok sima görbe egymás utáni bejárása, akkor *szakaszonként simá*nak nevezzük.

**8.2.13. Összegszabály.** *Ha az $f, g \in \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvények differenciálhatóak $x$-ben, $\alpha$ és $\beta$ skalárok, akkor $\alpha f + \beta g$ is differenciálható $x$-ben, és*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

**Bizonyítás.** Következik a definícióból. □

**8.2.14. Láncszabály.** *Ha $f \in \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \in \operatorname{dmn} f$, $y = f(x)$, $g \in \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^\ell$ , $f$ differenciálható $x$-ben és $g$ differenciálható $y$-ban, akkor*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

⋆ **Bizonyítás.** Feltevésünk szerint

$$g(y + k) - g(y) = g'(y)k + |k|s(k),$$

ahol $s(0) = 0$, és $s$ folytonos a nullában. Legyen

$$k = f(x + h) - f(x) = f'(x)h + |h|r(h),$$

ahol $r(0) = 0$ és $r$ folytonos a nullában. Ekkor behelyettesítve $y = f(x)$-et és $k$-t,

$$\begin{aligned} g(y + k) - g(y) = g\big(f(x + h)\big) - g\big(f(x)\big) &= g'(y)f'(x)h + g'(y)|h|r(h) + |k|s(k) \\ &= g'(y)f'(x)h + |h|t(h), \end{aligned}$$

ahol $t(0) = 0$ és

$$t(h) = g'(y)r(h) + \frac{|k|}{|h|}s(k)$$

egyébként. Mivel $h \to 0$ esetén $k \to 0$, valamint

$$\frac{|k|}{|h|} \leq \big\|f'(x)\big\| + \big|r(h)\big|,$$

kapjuk, hogy $t(h) \to 0$, ha $h \to 0$. □

**8.2.15. Koordinátafüggvények differenciálhatósága.** *Ha $f = (f_1, \dots, f_m)$ a $\mathbb{K}^n$ tér $x$ pontjának egy környezetét $\mathbb{K}^m$-be képező függvény, akkor $f$ pontosan akkor differenciálható az $x$ pontban, ha az $f_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ koordinátafüggvények differenciálhatóak $x$-ben, és $h \in \mathbb{K}^n$-re $f'(x)h = (f_1'(x)h, \dots, f_m'(x)h)$.*

**Bizonyítás.** A $p_j \colon (y_1, \dots, y_m) \mapsto y_j$ projekció linearitásából és a láncszabályból következik, hogy ha $f$ differenciálható, akkor $f_j = p_j \circ f$ is. Az állítás többi része a definícióból következik: az $\left|f_j(x+h) - f_j(x) - f_j'(x)\right|/|h|$ koordináták mindegyike nullához tart. $\square$

**8.2.16. Parciális deriváltak.** Legyen $G \subset \mathbb{K}^{k_1} \times \mathbb{K}^{k_2} \times \cdots \mathbb{K}^{k_n}$. Az $f \colon G \to \mathbb{K}^m$ leképezés $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pontbeli $x_j$ szerint *parciális differenciál*ját, illetve *parciális derivált*ját a

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

parciális leképezés $x_j$ pontban vett differenciáljaként, illetve $k_j = 1$ esetén deriváltjaként definiáljuk. Ha ez létezik, akkor $f$ *parciálisan differenciálható* $x$-ben a $j$-edik változó szerint. A parciális differenciált x j x j x $f_{x_j}(x)f_{x_j}(x)$-el, x j f x j f x $\partial_{x_j} f(x)\partial_{x_j} f(x)$-el, vagy j f x f x $\partial_j f(x)\partial_j f(x)$-szel jelöljük.

Világos, hogy ha $f$ differenciálható az $x$ pontban, akkor ott parciálisan is differenciálható, és $\partial_j f(x)h_j = f'(x)h$, ahol $h = (0, \dots, 0, h_j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{k_1} \times \mathbb{K}^{k_2} \times \cdots \mathbb{K}^{k_n}$ (itt $h_j$ a $j$-edik helyen áll). Nyilván a parciális differenciál, illetve derivált is differenciál, illetve derivált, tehát az eddig tanultak alkalmazhatók.

Leggyakrabban azt az esetet használjuk, amikor $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$. Ekkor a parciális deriváltak a szokásos bázis vektorai szerinti irány menti deriváltak, így felhasználhatók a differenciál mátrixának felírására a szokásos bázisban: az $e_j$ vektornak $f'(x)$ differenciál szerinti képe a $\partial_j f(x)$ vektor. Ha $f$ koordinátái $f_1, f_2, \dots, f_m$, akkor ennek a vektornak a koordinátái a $\partial_j f_i(x)$ számok, így $f'(x)$ mátrixa $\left(\partial_j f_i(x)\right)_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$. Ha $m = 1$, akkor ez egy sormátrix, és $\nabla f(x)$ mátrixa ennek a transzponáltja.

Fontos kérdés, hogyan következtethetünk a parciális deriváltak segítségével a függvény differenciálhatóságára. Mint egy példával megmutattuk, még az összes irány menti deriváltak létezése sem elég még a folytonossághoz sem. Még egyszerűbb példa — a $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy \neq 0\right\}$ halmaz karakterisztikus függvénye — mutatja, hogy a parciális deriváltak létezése nem elég még a folytonossághoz sem. A kérdés vizsgálatához szükségünk lesz egy önmagában is fontos egyenlőtlenségre. Ez az egyenlőtlenség helyettesíti a Lagrange-féle középérték-tételt, amely vektor értékű függvényekre nem marad igaz.

**8.2.17. Középérték-egyenlőtlenség.** *Ha $f$ a $\mathbb{K}^n$ tér egy, az $x$ és $x + h$ pontokat összekötő $\{x + th \colon 0 \le t \le 1\}$ zárt szakaszt tartalmazó részhalmazának a leképezése $\mathbb{K}^m$-be, amelynek megszorítása a zárt szakaszra folytonos, az $\{x + th \colon 0 < t < 1\}$ nyílt szakasz minden pontjában létezik a $h$ irány menti derivált, $c \in \mathbb{K}^m$ tetszőleges, akkor*

$$\left|f(x+h) - f(x) - c\right| \le \sup_{0<t<1} \left|\partial_h f(x + th) - c\right|.$$

A tételt gyakran $c = 0$ vagy $c = \partial_h f(x)$ választással és a $\left|\partial_h f(y)\right| \le \left\|f'(y)\right\| |h|$, illetve $\left|\partial_h f(y) - \partial_h f(x)\right| \le \left\|f'(y) - f'(x)\right\| |h|$ becslésekkel használjuk, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left|f(x+h) - f(x)\right| \le \sup_{0<t<1} \left|\partial_h f(x + th)\right| \le |h| \sup_{0<t<1} \left\|f'(x + th)\right\|,$$

illetve

$$\begin{aligned}\left|f(x+h)-f(x)-\partial_h f(x)\right| &\le \sup_{0<t<1}\left|\partial_h f(x+th)-\partial_h f(x)\right| \\ &\le |h| \sup_{0<t<1}\left\|f'(x+th)-f'(x)\right\|\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A $g(t)=f(x+th)-tc$ jelöléssel definíció szerint

$$g'(t)=\partial_h f(x+th)-c,$$

így a jobb oldali szuprémum $k=\sup_{0<t<1}\left|g'(t)\right|$, és azt kell megmutatnunk, hogy

$$\left|g(1)-g(0)\right| \le k, \quad \text{ha} \quad k<\infty.$$

Legyen $\varepsilon>0$ és $K>k$. Ha $\tau$ az

$$S=\left\{0\le t\le 1\colon \left|g(t)-g(0)\right|\le \varepsilon+Kt\right\}$$

halmaz szuprémuma, akkor $g$-nek a 0-beli folytonossága miatt $\tau>0$ és $S$ zártságából $\tau\in S$. Ha $\tau<1$ lenne, akkor

$$\lim_{t\to\tau}\frac{g(t)-g(\tau)}{t-\tau}=g'(\tau)$$

miatt a $\tau$ egy elég kis környezetéből vett bármely $t>\tau$-ra $\left|g(t)-g(\tau)\right|<K(t-\tau)$, ami ellentmond $\tau$ definíciójának. Így $\tau=1$, tehát $\left|g(1)-g(0)\right|\le\varepsilon+K$. Végül $\varepsilon\downarrow 0$, $K\downarrow k$ határátmenettel kapjuk az állítást. □

**8.2.18. Következmény.** *Ha $f'$ létezik és korlátos, $\|f'\|\le B$ egy $K$ konvex halmazon, akkor $f$ Lipschitz-függvény $K$-n és* $\operatorname{Lip}(f)\le B$.

**Bizonyítás.** Ha $\|f'\|\le B$ a $K$-n, akkor $x,y\in K$ esetén

$$\left|f(y)-f(x)\right|\le |y-x|\sup_{0<t<1}\left\|f'(x+t(y-x))\right\|\le B|y-x|. \ \square$$

**8.2.19. Következmény.** *Ha egy tartományon $F_1$ és $F_2$ az $f$ primitív függvényei, akkor $F_1-F_2$ állandó.*

**Bizonyítás.** $F=F_1-F_2$ deriváltja nulla, így a középérték-egyenlőtlenség szerint lokálisan állandó. Legyen egy adott pontban felvett érték $c$. Így azon pontok halmaza, ahol $F$ értéke $c$, nyílt és nem üres. Hasonlóan, azon pontok halmaza, ahol az $F$ értéke nem $c$, szintén nyílt, így ez utóbbi üres kell legyen. □

**8.2.20. Tétel.** *Legyen $G\subset\mathbb{K}^{k_1}\times\mathbb{K}^{k_2}\times\cdots\times\mathbb{K}^{k_n}$, $f\colon G\to\mathbb{K}^k$. Ha az $\partial_j f$, $j=1,2,\dots,n$ parciális deriváltak léteznek az $x=(x_1,\dots,x_n)\in G$ pont egy környezetében, és folytonosak $x$-ben, akkor $f$ differenciálható $x$-ben, és $h=(h_1,\dots,h_n)$ jelöléssel*

$$f'(x)h=\sum_{i=1}^{n}\partial_j f(x)h_j.$$

⋆ **Bizonyítás.** Legyen

$$r(h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j f(x) h_j.$$

Minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|h| \le \delta$, akkor

$$\left|\partial_j r(h)\right| = \left|\partial_j f(x+h) - \partial_j f(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{n} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ebből $|h| \le \delta$ esetén a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\left|r(h)\right| &\le \sum_{j=1}^{n} \left|r(h_1, \dots, h_j, 0, \dots, 0) - r(h_1, \dots, h_{j-1}, 0, \dots, 0)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |h_j| \sup_{0<t<1} \left|\partial_j r(h_1, \dots, h_{j-1}, th_j, 0, \dots, 0)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon |h_j|}{n} \le \varepsilon |h|. \ \square\end{aligned}$$

**8.2.21. Megjegyzés.** Természetesen a parciális deriváltak folytonossága nem szükséges a derivált létezéséhez: például az $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cos(1/x)$, ha $0 \ne x \in \mathbb{R}$ függvény differenciálható 0-ban, de a deriváltja nem folytonos. Hasonlóan, az $f(0) = 0$, $f(x) = |x|^2 \cos(1/|x|)$, ha $0 \ne x \in \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható az origóban, de ott a parciális deriváltjai nem folytonosak.

**8.2.22. Példák.** Az előző tétel alkalmazásával adódik, hogy a szorzás és az osztás, mint kétváltozós függvények, differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Innen következik, hogy a (többváltozós) polinomok és racionális törtfüggvények is differenciálhatóak az értelmezési tartományukon. Az előző tételből az is következik, hogy a bilineáris és multilineáris függvények is differenciálhatóak.

→ **8.2.23. Feladat [4].** Legyen $f$ nulla az origóban, egyébként pedig $xy/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy a parciális deriváltak mindenütt léteznek, bár $f$ nem folytonos az origóban!

→ **8.2.24. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha az $f$ függvény az origóban nulla és $xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ egyébként, akkor a parciális deriváltjai mindenütt léteznek és korlátosak, de $f$ nem differenciálható az origóban!

**8.2.25. Feladat [6].** Mely pontokban léteznek az alábbi függvények parciális deriváltjai:

(1) $|x + y|$;

(2) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

(3) $f(x, y) = x$, ha $x \in \mathbb{Q}$, egyébként $y$.

→ **8.2.26. Feladat [6].** Határozzuk meg $\sqrt{x^2 + y^2}$ és $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ gradiensét, ahol létezik!

→ **8.2.27. Feladat [7].** Határozzuk meg az $x \mapsto \|x\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ leképezés differenciálját és gradiensét!

→ **8.2.28. Feladat [8].** Legyen az $f$ függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x,y) = xy^2/(x^2+y^2)$. Mutassuk meg, hogy $f$ irány menti deriváltjai mindenütt léteznek, de a $h \mapsto \partial_h f(0)$ leképezés nem lineáris!

→ **8.2.29. Feladat [8].** Legyen az $f$ függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x,y) = x^3y/(x^4+y^2)$. Mutassuk meg, hogy az irány menti deriváltak léteznek az origóban, a $h \mapsto \partial_h f(0)$ leképezés lineáris, de $f$ nem differenciálható az origóban!

**8.2.30. Feladat [9].** Ahol az alábbi függvények nincsenek értelmezve, ott értsük nullának. Differenciálhatóak-e az origóban?

(1) $\sqrt{x^2+y^2}$; $\sqrt{|x^2-y^2|}$; $\sqrt{|x^3-y^3|}$;

(2) $\sqrt{|x^3+y^3|}$; $\sqrt{|x^2y+xy^2|}$; $xy/\sqrt{x^2+y^2}$;

(3) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$; $\sqrt[3]{x^3+y^4}$; $x\sqrt{|y|}$;

(4) $xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$; $(x^3+y^5)/(x^2+y^4)$; $x^2\sin(x^2+y^2)^{-1}$;

(5) $x^3/(x^2+y^2)$; $\sqrt[3]{x^2y^5}/\sqrt{x^2+y^2}$; $x\sin 1/y$.

**8.2.31. Feladat [8].** Legyen $f$ az origóban nulla, egyébként $|x|^\alpha|y|^\beta$. Milyen $\alpha,\beta$-ra lesz differenciálható az origóban? Mikor lesz mindenütt differenciálható?

**8.2.32. Feladat [6].** Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazán értelmezett valós értékű függvény parciális deriváltjai mindenütt léteznek és korlátosak. Mutassuk meg, hogy $f$ folytonos, sőt Lipschitz!

**8.2.33. Bevezető példa.** Legyen $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$, ha $n = 1, 2, \ldots$. A függvénysorozat $\mathbb{R}$-en egyenletesen konvergál az azonosan nulla $f$ függvényhez, de $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ nem konvergál $f' \equiv 0$-hoz, például $x = 0$-ra. (Megmutatható, hogy sehol sem.)

**8.2.34. Függvénysorozat tagonkénti differenciálása.** *Legyen $G \subset \mathbb{K}^\ell$ tartomány, $f_n\colon G \to \mathbb{K}^k$ differenciálható függvények egy sorozata. Ha legalább egy pontban $f_n$ konvergens, és $f_n'$ lokálisan egyenletesen konvergens (azaz minden pontnak van olyan környezete, amelyen egyenletesen konvergens), akkor az $f_n$ sorozat lokálisan egyenletesen konvergens, és $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ jelöléssel $f$ differenciálható és $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.*

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

⋆ **Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a $\mathbb{B}_r(a) \subset G$ gömbön az $f_n'$ sorozat konvergenciája egyenletes. Ekkor a középérték-egyenlőtlenségből

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Big|f_m(x) - f_n(x) - \big(f_m(a) - f_n(a)\big)\Big| &\le |x-a| \sup_{y\in\mathbb{B}_r(a)} \big\|f_m'(y) - f_n'(y)\big\| \\ &\le r \sup_{y\in\mathbb{B}_r(a)} \big\|f_m'(y) - f_n'(y)\big\|. \end{aligned}$$

Ez azt mutatja, hogy ha $f_n$ a $\mathbb{B}_r(a)$ gömb valamely pontjában konvergens, akkor a középpontban is, és viszont, ha a középpontban konvergens, akkor egyenletesen konvergens

$\mathbb{B}_r(a)$-n. Így egyrészt azon $x \in G$ pontok halmaza, ahol $f_n$ lokálisan egyenletesen konvergens, nyílt és nem üres, másrészt azon pontok halmaza, ahol $f_n$ nem konvergens, szintén nyílt, így ez utóbbi csak üres lehet. Tehát a konvergencia fennáll, sőt lokálisan egyenletes az egész $G$-n. Legyen $g = \lim_{n\to\infty} f_n'$. Meg kell mutatnunk, hogy $f$ differenciálható, és $f' = g$. Adott $a \in G$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N$, hogy $n, m \geq N$ esetén minden $y \in \mathbb{B}_r(a)$-ra $\|f_m'(y) - f_n'(y)\| \leq \varepsilon$ és $\|g(a) - f_n'(a)\| \leq \varepsilon$ teljesül, tehát $\Big|(g(a) - f_n'(a))(x-a)\Big| \leq \varepsilon|x-a|$. Az (1) egyenlőtlenségben $m \to \infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy $n \geq N$ és $x \in \mathbb{B}_r(a)$ esetén

$$\Big|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\Big| \leq \varepsilon|x-a|.$$

Másrészt minden $n \geq N$-hez van olyan $r' \leq r$, hogy $|x-a| \leq r'$ esetén

$$\big|f_n(x) - f_n(a) - f_n'(a)(x-a)\big| \leq \varepsilon|x-a|$$

teljesül. Így rögzítve egy $n$-et, azt kapjuk, hogy $|x-a| \leq r'$ esetén

$$\big|f(x) - f(a) - g(a)(x-a)\big| \leq 3\varepsilon|x-a|. \;\square$$

**8.2.35. Feladat [6].** Legyen $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/(1+nx^2)$. Mutassuk meg, hogy $f_n$ egyenletesen konvergál egy $f$ függvényhez, $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$, ha $x \neq 0$, de a nullában nem!

**8.2.36. Magasabbrendű deriváltak.** Az $f''$, $f'''$, … *magasabbrendű differenciál*okat,

$$\partial_y\partial_x f = \partial_y(\partial_x f), \;\ldots \quad \text{vagy} \quad f_{xy} = (f_x)_y, \;\ldots$$

*magasabbrendű parciális differenciál*okat, valamint a *magasabbrendű derivált*akat indukcióval értelmezzük. Például $\mathbb{K}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{K}^k$-ba képező $f$ függvényt szer differencialhato zer differencialhato $m$-szer differenciálható*m-szer differenciálható*nak nevezünk az $x$ pontban, ha az $f$ függvény $m-1$-szer differenciálható az $x$ egy környezetében, és az $f^{(m-1)}$ függvény differenciálható $x$-ben. Vegyük észre, hogy míg $f'(x)$ az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)$ tér egy eleme, $f''(x)$ már az $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n;\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)\big)$ tér eleme, stb.

Az *m-edrendű irány menti derivált*akat is rekurzióval, a

$$\partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\ldots\partial_{h_1} f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}$$

határértékként értelmezzük, ha a

$$g(t) = \partial_{h_{m-1}}\ldots\partial_{h_1} f(x + th_m)$$

függvény értelmezve van a nulla egy környezetében.

Megjegyezzük, hogy ha $f^{(m)}(x)$ létezik, akkor minden $m$-edrendű

$$\partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\ldots\partial_{h_1} f(x)$$

irány menti derivált is és értéke

$$f^{(m)}(x)h_m h_{m-1}\dots h_1 = \Big(\dots(f^{(m)}(x)h_m)\dots h_1\Big),$$

mert — indukcióval és felhasználva a határértékképzés linearitását —

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x)h_m h_{m-1}\dots h_1 &= (f^{(m)}(x)h_m)h_{m-1}\dots h_1 = (\partial_{h_m} f^{(m-1)}(x))h_{m-1}\dots h_1 \\ &= \left(\lim_{t\to 0}\frac{f^{(m-1)}(x+th_m)-f^{(m-1)}(x)}{t}\right)h_{m-1}\dots h_1 \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f^{(m-1)}(x+th_m)h_{m-1}\dots h_1 - f^{(m-1)}(x)h_{m-1}\dots h_1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x+th_m)-\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x)}{t} \\ &= \partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\dots\partial_{h_1} f(x). \end{aligned}$$

Használni fogjuk az

$$f^{(m)}(x)h^m = f^{(m)}(x)\,\overbrace{h\cdots h}^{m\text{-szer}}$$

és

$$\partial_h^m f(x) = \overbrace{\partial_h\dots\partial_h}^{m\text{-szer}} f(x)$$

rövidítéseket.

**8.2.37. Magasabbrendű deriváltak és parciális deriváltak kapcsolata.** Az előző definíció jelöléseivel $f$ kétszeri differenciálhatósága az $x$ pontban azzal ekvivalens, hogy az első derivált koordinátái, a $\partial_j f_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, n$ skalár értékű függvények mind differenciálhatóak az $x$ pontban. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy a $\partial_j f$, $j = 1, 2, \dots, n$ vektor értékű függvények mind differenciálhatóak az $x$ pontban, mivel ezek koordinátafüggvényei a $\partial_j f_i$ függvények. Az $m$ szerinti indukcióval azt kapjuk, hogy $f$ pontosan akkor $m$-szer differenciálható, ha a

$$\partial_{j_{m-1}}\partial_{j_{m-2}}\cdots\partial_{j_1} f_i, \qquad 1 \le j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \le n, \quad 1 \le i \le k$$

skalár értékű, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$\partial_{j_{m-1}}\partial_{j_{m-2}}\cdots\partial_{j_1} f, \qquad 1 \le j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \le n$$

vektor értékű függvények mind differenciálhatóak az $x$ pontban. Az $m$-edrendű $f^{(m)}(x)$ differenciált a

$$\partial_{j_m}\partial_{j_{m-1}}\cdots\partial_{j_1} f_i(x), \qquad 1 \le j_1, j_2, \dots, j_m \le n, \quad 1 \le i \le k$$

skalárokkal, vagy ami ezzel ekvivalens, a

$$\partial_{j_m}\partial_{j_{m-1}}\cdots\partial_{j_1} f(x) \in \mathbb{K}^k, \qquad 1 \le j_1, j_2, \dots, j_m \le n$$

vektorokkal adhatjuk meg. Ha $f^{(m)}(x)$ létezik és

$$h_1, h_2, \dots, h_m \in \mathbb{K}^n, \quad h_\ell = (h_{\ell,1}, h_{\ell,2}, \dots, h_{\ell,n}), \quad \text{ha} \quad 1 \le \ell \le m,$$

akkor

$$\begin{aligned}\partial_{h_m}\partial_{h_{m-1}}\cdots\partial_{h_1} f(x) &= f^{(m)}(x)h_m h_{m-1}\cdots h_1 \\ &= \sum_{j_m=1}^{n}\cdots\sum_{j_1=1}^{n} h_{m,j_m}\cdots h_{1,j_1}\partial_{j_m}\cdots\partial_{j_1} f(x).\end{aligned}$$

**8.2.38. A második derivált, mint bilineáris leképezés.** Definíció szerint egy $f \in \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény második deriváltja egy $x$ pontban $\mathcal{L}\big(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)\big)$ egy $L$ eleme. A $B\colon (h,k) \mapsto L(h)(k) = Lhk$ leképezése $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$-nek $\mathbb{K}^m$-be mindkét változójában lineáris, így $L$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ bilineáris leképezéssel azonosítható. Általában egy $B$ bilineáris leképezés *normá*ját a lineáris leképezések normájához hasonlóan a

$$\|B\| = \sup_{|x|\le 1, |y|\le 1} \big|B(x,y)\big|$$

összefüggéssel értelmezzük; $\|B\|$ nyilván az a legkisebb szám, amelyre

$$\big|B(x,y)\big| \le \|B\||x||y|, \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Vegyük észre, hogy az $L \mapsto B$, $B(x,y) = L(x)(y)$ összefüggéssel értelmezett leképezés kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezése

$$\mathcal{L}\big(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)\big)$$

térnek a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ térre, továbbá

$$\begin{aligned}\|B\| &= \sup_{|x|\le 1, |y|\le 1} \big|B(x,y)\big| = \sup_{|x|\le 1}\sup_{|y|\le 1}\big|L(x)y\big| \\ &= \sup_{|x|\le 1}\big\|L(x)\big\| = \|L\|,\end{aligned}$$

így $B \mapsto \|B\|$ tényleg norma, továbbá $\mathcal{L}\big(\mathbb{K}^n; \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)\big)$ és $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ azonosítható.

**8.2.39. A magasabbrendű deriváltak, mint multilineáris leképezések.** Egy $M\colon \mathbb{K}^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{k_m} \to \mathbb{K}^k$ multilineáris leképezésnél $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ helyett gyakran csak $Mx_1x_2\dots x_m$-et írunk. Az $M$ *normá*ját a

$$\|M\| = \sup_{|x_1|\le 1, \dots, |x_m|\le 1} |Mx_1\dots x_m|$$

összefüggéssel értelmezzük. Az $\|M\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre

$$|Mx_1\dots x_m| \le \|M\||x_1|\cdots|x_m|, \quad \text{ha} \quad x_1 \in \mathbb{K}^{k_1}, \dots x_m \in \mathbb{K}^{k_m}.$$

Az

$$M \mapsto L, \quad M(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1)(x_2, \dots, x_m)$$

összefüggéssel definiált leképezés kölcsönösen egyértelmű lineáris leképezése az

$$\mathcal{L}(\mathbb{K}^{k_1}, \mathbb{K}^{k_2}, \dots, \mathbb{K}^{k_m}; \mathbb{K}^k)$$

térnek az

$$\mathcal{L}\big(\mathbb{K}^{k_1}; \mathcal{L}(\mathbb{K}^{k_2}, \dots, \mathbb{K}^{k_m}; \mathbb{K}^k)\big)$$

térre, továbbá

$$\begin{aligned}\|M\| &= \sup_{|x_1|\le 1,\dots,|x_m|\le 1} |Mx_1 \dots x_m| \\ &= \sup_{|x_1|\le 1} \sup_{|x_2|\le 1,\dots,|x_m|\le 1} \big|L(x_1)x_2 \dots x_m\big| \\ &= \sup_{|x_1|\le 1} \big\|L(x_1)\big\| = \|L\|.\end{aligned}$$

Ebből $m$ szerinti teljes indukcióval következik, hogy $M \mapsto \|M\|$ norma.

Ennek alapján az $f$ függvény edik differencial dik differencial $m$-edik differenciál$m$-*edik differenciál*ja az $x$ pontban azzal az $m$-lineáris $f^{(m)}(x)\colon (\mathbb{K}^n)^m \to \mathbb{K}^k$ leképezéssel azonosítható, amelyre

$$f^{(m)}(x)h_m h_{m-1}\cdots h_1 = (f^{(m-1)})'(x)h_m(h_{m-1}, \dots, h_1).$$

Ez a korábbi rekurzív definíció egy másik alakja.

**8.2.40. Young tétele.** *Ha az $f \in \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ függvény kétszer differenciálható az $x$ pontban, akkor $f''(x)$ szimmetrikus, azaz $f''(x)hk = f''(x)kh$ minden $h, k \in \mathbb{K}^n$-re.*

Az állítás azzal ekvivalens, hogy $\partial_i\partial_j f(x) = \partial_j\partial_i f(x)$, ha $1 \le i, j \le n$.

⋆ **Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy $h, k \to 0$ esetén

$$(1) \qquad \frac{\big|f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - f''(x)hk\big|}{\big(|h| + |k|\big)^2}$$

tart nullához. Feltehetjük, hogy $x = 0$. Adott $\varepsilon > 0$-hoz $f''(0)$ létezése miatt van olyan $\delta > 0$, hogy

$$\big|f'(y) - f'(0) - f''(0)y\big| \le \varepsilon|y|, \quad \text{ha} \quad |y| < 2\delta.$$

Ha $|h|, |k| \le \delta$, legyen

$$g_k(h) = f(h+k) - f(h) - f(k) + f(0) - f''(0)kh,$$

és vegyük észre, hogy $h$ szerint differenciálva

$$\begin{aligned}g_k'(h) &= f'(h+k) - f'(h) - f''(0)k \\ &= \big(f'(h+k) - f'(0) - f''(0)(h+k)\big) - \big(f'(h) - f'(0) - f''(0)h\big),\end{aligned}$$

amiből

$$\big|g_k'(h)\big| \le \varepsilon|h+k| + \varepsilon|h| \le 2\varepsilon\big(|h| + |k|\big).$$

Mivel $g_k(0) = 0$, a középérték-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\left|g_k(h)\right| \le 2\varepsilon\big(|h| + |k|\big)|h| \le 2\varepsilon\big(|h| + |k|\big)^2,$$

tehát (1) határértéke nulla. Felcserélve $h$ és $k$ szerepét és a két számlálót kivonva egymásból

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{\left|f''(x)kh - f''(x)hk\right|}{\big(|h| + |k|\big)^2} = 0.$$

Ha most valamely $h, k \in \mathbb{K}^n$-re $f''(x)hk \ne f''(x)kh$, akkor $t \to 0$ esetén $th \to 0$-ra és $tk \to 0$-ra alkalmazva az előző összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\left|f''(x)(tk, th) - f''(x)(th, tk)\right|}{\big(|th| + |tk|\big)^2} = \frac{\left|f''(x)(k, h) - f''(x)(h, k)\right|}{\big(|h| + |k|\big)^2} \ne 0,$$

ami ellentmondás. □

**8.2.41. Példa.** Legyen $f(x, y) = g(x)$, ahol $g$ folytonos, de sehol sem differenciálható. Ez a példa mutatja, hogy $f_{yx}$ létezéséből, sőt folytonosságából nem következik $f_x$ létezése.

→ **8.2.42. Feladat [9].** Legyen az $f$ függvény az origóban nulla, a sík többi pontjában pedig legyen $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Mutassuk meg, hogy az összes második parciális deriváltak léteznek, de a vegyes parciális deriváltak nem egyeznek meg az origóban.

**8.2.43. Feladat [7].** Milyen $\alpha, \beta$-ra lesz $|x|^\alpha |y|^\beta$ kétszer differenciálható az origóban?

**8.2.44. $\mathcal{C}^m$-leképezések.** Ha $0 \le m \le \infty$, az $f$-et m lekepezes lekepezes -leképezés$\mathcal{C}^m$-*leképezés*nek nevezzük, ha egy $X$ véges dimenziós normált tér egy nyílt részhalmazán van értelmezve, értékei egy $Y$ véges dimenziós normált térben vannak, és minden pontban léteznek és folytonosak a differenciálfüggvényei $m$-ed rendig bezárólag. Ha $f$ kölcsönösen egyértelmű és $f^{-1}$ is $\mathcal{C}^m$-leképezés, akkor $f$-et $\mathcal{C}^m$*-diffeomorfizmus*nak nevezzük. Ha $G \subset X$ nem üres halmaz, jelölje $\mathcal{C}^m(G; Y)$ azon függvények osztályát, amelyek $\mathcal{C}^m$-leképezései $G$ belsejének $Y$-ba, és minden, legfeljebb $m$-edrendű differenciálfüggvényük egyértelműen kiterjeszthető egy $G$-n értelmezett folytonos függvénnyé. Ha $m < \infty$ és $f \in \mathcal{C}^m(G; Y)$, legyen

$$\|f\|_m = \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in G} \|f^{(k)}(x)\|.$$

$\mathcal{C}^m(G; Y)$ azon $f$ függvényei, amelyekre $\|f\|_m < \infty$, egy normált teret alkotnak. Ennek egy altere $\mathcal{K}^m(G; Y)$, azon $\mathcal{C}^m(G; Y)$-beli függvények osztálya, amelyeknek minden legfeljebb $m$-edrendű differenciálfüggvénye egy kompakt halmazon kívül eltűnik. Az egyszerűbb jelölések kedvéért $\mathcal{C}^\infty(G; Y)$ helyett $\mathcal{E}(G; Y)$-t, $\mathcal{K}^\infty(G; Y)$ helyett pedig $\mathcal{D}(G; Y)$-t szokás írni.

→ **8.2.45. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}^m$ Banach-tér.

**8.2.46. Taylor-formula maradéktag nélkül.** *Legyen $f$ az $X$ véges dimenziós normált tér egy részhalmazát az $Y$ véges dimenziós normált térbe képező függvény. Ha $f$ az $a$ pontban $n$-szer differenciálható, akkor a*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k, \quad \text{ha} \quad x \in X$$

*összefüggéssel definiált* $n$-ed fokú Taylor-polinom*ra*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T(x)}{\|x-a\|^n}=0.$$

A Taylor-formulának ez a „maradéktag nélküli” alakja használható a legkönnyebben függvényvizsgálatra.

**Bizonyítás.** Teljes indukcióval: $n=1$-re a derivált definíciójából következik az állítás. Ha $n>1$, akkor vegyük észre, hogy $T'$ az $f'$-höz tartozó $n-1$-ed fokú Taylor-polinom, és $T(a)=f(a)$, így a középérték-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\big\|f(x)-T(x)\big\|}{\|x-a\|^n}\le\sup_{0<\tau<1}\frac{\Big\|(f-T)'\big(a+\tau(x-a)\big)\Big\|}{\|x-a\|^{n-1}}\to 0,$$

ha $x\to a$. □

**8.2.47. Taylor-formula valós értékű függvényekre.** *Legyen* $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x,h\in\mathbb{R}^n$, *és tegyük fel, hogy* $f$ *értelmezve van és folytonos a* $\{x+th\colon 0\le t\le 1\}$ *zárt szakaszon,* $\partial_h^k f$ *értelmezve van és folytonos az* $\{x+th\colon 0\le t<1\}$ *félig zárt szakaszon* $0<k<m$*-re, valamint* $\partial_h^m f$ *értelmezve van a* $\{x+th\colon 0<t<1\}$ *nyílt szakaszon. Ekkor van olyan* $0<\tau<1$*, hogy*

$$f(x+h)=f(x)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\,\partial_h^k f(x)+\frac{1}{m!}\,\partial_h^m f(x+\tau h).$$

Ez az $m$-edrendű *Taylor-formula.*

**Bizonyítás.** Legyen $g(t)=f(x+th)$, ekkor $g^{(k)}(t)=\partial_h^k f(x+th)$, így formulánk a $g$-re felírt szokásos Taylor-formula megfelelője. Bizonyításához legyen

$$M=g(1)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

és

$$h(t)=g(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g^{(k)}(0)t^k}{k!}-Mt^m.$$

Legyen $\tau_0=1$. Mivel $0=h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(m-1)}(0)$ és $h(1)=0$, a Rolle-tételt felhasználva a $[0,\tau_{k-1}]$ intervallumon, teljes indukcióval kapjuk, hogy $1\le k\le m$-re létezik olyan $0<\tau_k<\tau_{k-1}\le 1$, hogy $h^{(k)}(\tau_k)=0$. Legyen $\tau=\tau_m$. □

**8.2.48. Megjegyzés.** A formula vektor értékű függvényekre nem marad igaz még az $n=1$, $m=1$ esetben sem, de a koordinátafüggvényekre alkalmazható (persze más és más $\tau$-val).

**8.2.49. Implicit függvény tétel.** *Legyen* $(a, b) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$, *és* $(x, y) \mapsto F(x, y)$ *az* $(a, b)$ *egy környezetét* $\mathbb{K}^m$*-be képező folytonos függvény, amelyre* $F(a, b) = 0$. *Ha* $F_y$ *létezik és folytonos az* $(a, b)$ *egy környezetében, továbbá az* $F_y(a, b)$ *lineáris operátor invertálható, akkor*

(1) *léteznek olyan* $\varepsilon$ *és* $\delta$ *pozitív számok, hogy minden* $x \in \mathbb{K}^n$*-re, amelyre* $|x - a| \leq \varepsilon$, *pontosan egy* $y(x) \in \mathbb{K}^m$ *létezik, amelyre* $\big|y(x) - b\big| \leq \delta$ *és* $F\big(x, y(x)\big) = 0$*;*

(2) $x \mapsto y(x)$ *folytonos;*

(3) *ha* $F$ *az* $(a, b)$ *egy környezetében folytonosan differenciálható, akkor az* $a$ *egy környezetében* $x \mapsto y(x)$ *is folytonosan differenciálható, az* $F_y\big(x, y(x)\big)$ *lineáris operátor invertálható, és*
$$y'(x) = -F_y\big(x, y(x)\big)^{-1} F_x\big(x, y(x)\big).$$

⋆ **Bizonyítás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$, $b = 0$, és helyettesíthetjük $F$-et $F_y(0, 0)^{-1}F(x, y)$-nal, azaz feltehetjük, hogy $F_y(0, 0) = \mathbb{I}$. Legyen $G(x, y) = y - F(x, y)$, és definiáljuk az ($x$-től függő) $T_x$ leképezést a $T_x(y) = G(x, y)$ összefüggéssel. Ekkor az $F(x, y) = 0$ egyenlet az $y = T_x(y)$ egyenlettel ekvivalens. Vizsgáljuk $G$-t. Mivel $G_y = \mathbb{I} - F_y$, a középérték-egyenlőtlenség szerint elég kicsiny $\varepsilon$ és $\delta$ esetén, ha $|x| \leq \varepsilon$, $M = \mathbb{B}_\delta(0) = \big\{y\colon |y| \leq \delta\big\}$ és $y, z \in M$, akkor (mivel az $y$ és $z$ pontokat összekötő szakasz is az $M$ gömbben van)
$$\big|G(x, y) - G(x, z)\big| \leq r(\varepsilon, \delta)|y - z|,$$
ahol
$$r(\varepsilon, \delta) = \sup_{|x| \leq \varepsilon, u \in M} \big\|G_y(x, u)\big\|,$$
és így
$$\big|G(x, y)\big| \leq \big|G(x, y) - G(x, 0)\big| + \big|G(x, 0)\big| \leq r(\varepsilon, \delta)|y| + \big|G(x, 0)\big|.$$
Mivel $F$ és $F_y$, és így $G$ és $G_y$ is folytonosak, továbbá $G(0, 0) = 0$ és $G_y(0, 0) = 0$, az $\varepsilon$ és $\delta$ csökkentésével elérhető, hogy $r(\varepsilon, \delta) \leq 1/2$ teljesüljön, valamint — ha kell, tovább csökkentve $\varepsilon$-t — hogy $|x| \leq \varepsilon$ esetén $\big|G(x, 0)\big| \leq \delta/2$ is fennálljon. Így ha $|x| \leq \varepsilon$ és $y, z \in M$, akkor
$$\big|T_x(y) - T_x(z)\big| \leq \frac{|y - z|}{2} \quad \text{és} \quad \big|T_x(y)\big| \leq \delta,$$
tehát $|x| \leq \varepsilon$ esetén $T_x$ egy $M$-et önmagába képező kontrakció. A Banach-féle fixponttételből következik (1).

Ha $|x|, |x_0| \leq \varepsilon$, akkor $y_0 = y(x_0)$ jelöléssel
$$\begin{aligned}\big|y(x) - y_0\big| &= \Big|T_x\big(y(x)\big) - T_{x_0}(y_0)\Big| \leq \Big|T_x\big(y(x)\big) - T_x(y_0)\Big| + \big|T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)\big| \\ &\leq \frac{\big|y(x) - y_0\big|}{2} + \big|T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)\big|,\end{aligned}$$
amiből
$$\big|y(x) - y_0\big| \leq 2\big|T_x(y_0) - T_{x_0}(y_0)\big| = 2\big|G(x, y_0) - G(x_0, y_0)\big| \to 0,$$
ha $x \to x_0$, azaz beláttuk (2)-t.

A $k = y(x+h) - y(x)$ jelöléssel a

$$0 = F(x+h, y(x)+k) - F(x, y(x))$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$0 = F_x(x, y(x))h + F_y(x, y(x))k + s(h,k),$$

ahol $\left|s(h,k)\right|/(|h|+|k|) \to 0$, amint $|h|+|k| \to 0$. Innen

$$k = -F_y(x, y(x))^{-1} F_x(x, y(x))h + q(h,k),$$

ahol $\left|q(h,k)\right|/(|h|+|k|) \to 0$, amint $|h|+|k| \to 0$. [Az $F_y(x, y(x))$ inverzének létezése az $F_y$, az $y$ és a mátrixok inverzképzésének folytonosságából következik.] Mivel $h \to 0$ esetén $k \to 0$, ebből következik, hogy valamely $c$ konstanssal $|k| \le c|h| + |k|/2$, ha $|h|$ elég kicsi. Így $|k| \le 2c|h|$, amiből $y$ deriválható, és

$$y'(x) = -F_y(x, y(x))^{-1} F_x(x, y(x)).$$

Mivel $F'$, $y$ és az inverzképzés folytonosak, a derivált folytonos. □

→ **8.2.50. Feladat [5].** Igazoljuk, hogy $(x_3, x_4)$ lokálisan kifejezhető $(x_1, x_2)$ függvényeként az $(1,2,0,0)$ pont egy környezetében az

$$x_1 e^{x_3+x_4} - 2x_3x_4 = 1, \quad x_2 e^{x_3-x_4} + \frac{x_3}{1+x_4} = 2x_1$$

egyenletrendszerből!

→ **8.2.51. Feladat [5].** Határozzuk meg $y'(0)$ és $y''(0)$ értékét, ha $y$ mint $x$ függvénye az

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0$$

összefüggéssel adott az $x = 0$, $y = 1$ egy környezetében!

→ **8.2.52. Feladat [5].** Számítsuk ki a $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$ és $\partial^2 z/\partial y^2$ értékeket, ha $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ és

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0.$$

→ **8.2.53. Feladat [5].** Legyen $f(x,y,z) = x^2y + e^x + z$. Mutassuk meg, hogy az implicit függvény tétel alkalmazható a $(0,1,-1)$ pontban, és határozzuk meg az implicit $g(y,z)$ függvény parciális deriváltjait $(1,-1)$-ben!

→ **8.2.54. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $u = \varphi(y/x) + x\psi(y/x)$, akkor

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**8.2.55. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0, \\ x - y + 2z + u &= 0, \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer nem oldható meg az $x$, $y$, $z$ ismeretlenekre $u$ függvényében, de bármely másik három ismeretlenre megoldható!

**8.2.56. Inverz függvény tétel.** *Legyen $f$ a $\mathbb{K}^n$ egy $a$ pontjának egy környezetét $\mathbb{K}^n$-be képező leképezés. Ha $f$ mindenütt folytonosan differenciálható és $f'(a)$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $f$ az $a$ egy környezetében kölcsönösen egyértelmű, az inverze folytonosan differenciálható az $f(a)$ egy környezetében, és ott*

$$(f^{-1})'(f(x)) = \left(f'(x)\right)^{-1},$$

*vagy az $y = f(x)$ jelöléssel*

$$(f^{-1})'(y) = \Big(f'(f^{-1}(y))\Big)^{-1}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $b = f(a)$, $F(x, y) = y - f(x)$, és alkalmazzuk az implicit függvény tételt, $x$ és $y$ szerepét felcserélve. Azt kapjuk, hogy $x$ lokálisan kifejezhető az $y$-nal, és mint $y$ függvénye differenciálható, azaz $f$ lokálisan invertálható, az inverze deriválható és deriváltja a megadott alakú. □

**8.2.57. Megjegyzés.** Mátrix inverzének a képzése, azaz az $a \mapsto a^{-1}$, $\mathbb{K}^{n^2} \to \mathbb{K}^{n^2}$ leképezés, mivel az inverzmátrix koordinátái az eredeti mátrix koordinátáinak racionális törtfüggvényei, akárhányszor differenciálható. Ezt felhasználva könnyen kapjuk, hogy ha az implicit függvény tételben azt tesszük fel, hogy az $F$ függvény $k$-szor folytonosan differenciálható, akkor $y$ is $k$-szor folytonosan differenciálható ($1 \leq k \leq \infty$). Ezt felhasználva adódik, hogy ha az inverz függvény tételben azt tesszük fel, hogy az $f$ függvény $k$-szor folytonosan differenciálható, akkor $f^{-1}$ is $k$-szor folytonosan differenciálható ($1 \leq k \leq \infty$).

→ **8.2.58. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az inverz függvény tételben a derivált folytonossága nem hagyható el, még egy dimenzióban sem: legyen $f$ a nullában nulla, és egyébként $f(t) = t + 2t^2 \sin(1/t)$; ekkor a derivált korlátos $]-1, 1[$-ben, $f'(0) = 1$, de a függvény nem kölcsönösen egyértelmű a nulla egyetlen környezetében sem.

→ **8.2.59. Feladat [7].** Vizsgáljuk a

$$z = (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y) = e^z$$

leképezést! Mi a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek képe? Mi az értékkészlet? Mutassuk meg, hogy a leképezés minden pontban lokálisan kölcsönösen egyértelmű!

**8.2.60. Szélsőérték szükséges feltétele.** *Legyen $f$ az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Ha $f$-nek minimuma van az $x$ pontban, és $\partial_h f(x)$ létezik, akkor $\partial_h f(x) = 0$. Ha még $\partial_h^2 f(x)$ is létezik, akkor $\partial_h^2 f(x) \geq 0$.*

A tételt gyakran lokálisan alkalmazzuk: ha $f$-nek lokális minimuma van az $x$ pontban, azaz ha $f$-et megszorítva az $x$ valamely környezetére, a kapott függvénynek minimuma van az $x$ pontban, akkor erre a megszorításra alkalmazhatjuk a tételt. Maximum esetén $-f$-re alkalmazandó.

**Bizonyítás.** A $g(t) = f(x + th)$ függvényre kell megmutatnunk, hogy $g'(0) = 0$ és $g''(0) \geq 0$. Ha $g'(0) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g(t) - g(0) < 0$, ami ellentmondás. A $g'(0) > 0$ eset negatív $t$-re ad ellentmondást. Ha $g''(0) < 0$, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $0 < t < \varepsilon$ esetén $g'(t)/t < 0$. Ebből a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $0 < s < \varepsilon$ esetén $g(s) - g(0) < 0$, ami ellentmondás. □

**8.2.61. Lokális szélsőérték másodrendű elégséges feltétele.** *Legyen $f$ az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Ha $f''$ létezik és folytonos az $x$ egy környezetében, továbbá $f'(x) = 0$, azaz $\nabla f(x) = 0$ és a $h \mapsto f''(x)hh$ kvadratikus forma pozitív definit, illetve negatív definit, akkor $f$-nek lokális minimuma, illetve maximuma van $x$-ben. Ha a kvadratikus forma indefinit, akkor $f$-nek nincs lokális szélsőértéke $x$-ben.*

⋆ **Bizonyítás.** Ha a kvadratikus forma pozitív definit, akkor a folytonos

$$h \mapsto f''(x)hh$$

leképezés pozitív a $\{h\colon |h| = 1\}$ kompakt halmazon, így valamely $\varepsilon > 0$ alsó korlátja. A Taylor-formula maradéktag nélküli alakjából ban lyan $\delta > 0$, hogy

$$\frac{\left|f(y) - f(x) - \frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2\right|}{|x-y|^2} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Innen $f(y) - f(x) \geq \varepsilon|x-y|/4$. A negatív definit eset hasonlóan adódik. Az indefinit esetben van olyan $\varepsilon > 0$ és vannak olyan $h_1, h_2$ normált (1 hosszú) vektorok, hogy $f''(x)h_1h_1 \geq \varepsilon$, $f''(x)h_2h_2 \leq -\varepsilon$. A fenti számolással azt kapjuk, hogy $0 < t \leq \delta$ esetén $f(x + th_1) > f(x) > f(x + th_2)$. □

⋆ **8.2.62. Lokális szélsőérték magasabbrendű elégséges feltétele.** *Legyen $f$ az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazát $\mathbb{R}$-be képező leképezés. Tegyük fel, hogy $m > 1$-re $f^{(m)}$ létezik és folytonos az $x$ egy környezetében, $f^{(k)}(x) = 0$, ha $1 \leq k < m$ és $f^{(m)}(x) \neq 0$. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezés minden $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén pozitív, akkor $f$-nek lokális minimuma van $x$-ben. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezés minden $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ esetén negatív, akkor $f$-nek lokális minimuma van $x$-ben. Ha a $h \mapsto f^{(m)}(x)h^m$ leképezéshez van olyan $0 \neq h_1 \in \mathbb{R}^n$ is, amelyre pozitív, és van olyan $0 \neq h_2 \in \mathbb{R}^n$ is, amelyre negatív (mindig ez a helyzet, ha $m$ páratlan), akkor $f$-nek nincs lokális szélsőértéke $x$-ben.*

**Bizonyítás.** A bizonyítás hasonló az előző tétel bizonyításához. □

→ **8.2.63. Feladat [6].** Legyen $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$. Határozzuk meg a lehetséges szélsőértékhelyeit és döntsük el, hol van lokális szélsőértéke!

**8.2.64. Feladat [8].** Mint az előző feladatban, vizsgáljuk az alábbi függvényeket:

(1) $x^2 + y - 1$;

(2) $\sin x + \cos y + \cos(x - y)$;

(3) $xy \ln(x^2 + y^2)$;

(4) $(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$;

(5) $2x^3 + 6xy - 3x^2 + 3y^2$;

(6) $(x + y)e^{-x^2-y^2}$;

(7) $e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$;

(8) $e^{y^2-x}(2 + 3y - x)$;

(9) $x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

$\to$ **8.2.65. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy az $f(x,y) = (x-y)(x-y^3)$ függvénynek minden origón átmenő egyenesen lokális szélsőértéke ven az origóban, de nincs lokális szélsőértéke az origőban!

**8.2.66. Feladat [8].** Legyen $f$ az origóban nulla, egyébként

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}.$$

Mutassuk meg, hogy

(1) $4x^4y^2 \le (x^4+y^2)^2$;

(2) $f$ folytonos;

(3) minden origón áthaladó egyenesen $f$-nek szigorú lokális minimuma van az origóban;

(4) $f$-nek nincs lokális minimuma az origóban!

**8.2.67. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése .** *Legyen $G$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, $m < n$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ és $g\colon G \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálhatóak. Ha $f$-nek az $c$ pontban szélsőértéke (azaz minimuma vagy maximuma) van a $g^{-1}(0)$ halmazon, és $g'(c)$ rangja $m$, akkor létezik $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ hogy*

$$f'(c) - \lambda g'(c) = 0.$$

*Az $F(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ jelöléssel a feltétel $F_x(c,\lambda) = 0$ alakban írható.*

Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

$\star$ **Bizonyítás.** A koordinátákat alkalmasan csoportosítva, elérhetjük, hogy az

$$(u_1,\dots,u_{n-m},v_1,\dots,v_m) = (u,v) \mapsto g(u,v), \qquad c = (a,b)$$

jelöléssel $g_v(a,b)$ invertálható. Alkalmazva az implicit függvény tételt $g$-re egy olyan $U$ környezetét kapjuk $a$-nak és egy azon értelmezett $u \mapsto v(u)$ folytonosan differenciálható függvényt, amelyre $g\big(u,v(u)\big) = 0$, ha $u \in U$. Ezzel kiküszöböltük $g$-t. Az $u \mapsto f\big(u,v(u)\big)$ függvénynek szélsőértéke van $a$-ban és $b = v(a)$, így

$$0 = f_u(a,b) + f_v(a,b)v'(a).$$

Innen felhasználva az

$$v'(u) = -g_v\big(u,v(u)\big)^{-1} g_u\big(u,v(u)\big)$$

előállítást, $\lambda = f_v(a,b)g_v(a,b)^{-1}$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$0 = f_u(a,b) - f_v(a,b)g_v(a,b)^{-1}g_u(a,b) = f_u(a,b) - \lambda g_u(a,b).$$

A $\lambda$ definíciója alapján nyilvánvaló, hogy

$$f_v(a,b) - \lambda g_v(a,b) = 0.$$

A két utolsó összefüggés ekvivalens az állítással. $\square$

Az alábbi állítás azt mutatja, hogy a szélsőérték létezésének második deriváltakkal megfogalmazott elégséges feltétele érvényben marad feltételes szélsőérték-számításnál is. Az állítást nem bizonyítjuk, bizonyítása, valamint magasabb deriváltakkal megfogalmazott változata megtalálható Zeidler [63] könyvében, III. kötet, 290. o., 43.D tétel.

⋆ **8.2.68. Feltételes szélsőérték másodrendű elégséges feltétele.** *A Lagrange-elvnél használt jelölésekkel, az ottani feltételeken kívül tegyük fel azt is, hogy $f$ és $g$ kétszer folytonosan differenciálhatóak. Ha a $c \in G$-hez van olyan $\lambda \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ lineáris funkcionál, hogy $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$ és a $h \mapsto (f''(c) - \lambda g''(c))hh$ kvadratikus funkcionál pozitív definit, illetve negatív definit, akkor $f$-nek lokális minimuma, illetve lokális maximuma van $c$-ben. Az $F(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$ jelöléssel a feltételek $F_x(c,\lambda) = 0$, illetve hogy az $F_{xx}(c,\lambda)$ bilineáris formához definit kvadratikus forma tartozik.*

**8.2.69. Szélsőérték-számítás.** Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$. Egy $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény lehetséges szélsőértékhelyeit 8.2.60 segítségével megkereshetjük, ha $A$ nyílt halmaz. Ha $A$ nem nyílt, akkor $\partial A \cap A$ pontjainak halmazát paraméteresen (egy függvény értékkészleteként) előállítva, vagy a Lagrange-elvet használva kereshetjük meg az ezen a halmazon belül lehetséges szélsőértékhelyet adó pontokat. Használható a Lagrange-elv alábbi, általánosabb változata is.

**8.2.70. Példa.** Keressük meg az $xy(x^2+y^2-1)$ függvény maximumát az $x^2+y^2 \le 1$ körlapon! A körlap határán a függvény nulla, de a belsejében felvesz pozitív és negatív értékeket is. A parciális deriváltak

$$y(x^2+y^2-1) + 2x^2y \quad \text{és} \quad x(x^2+y^2-1) + 2y^2x.$$

Ha $x = 0$, akkor az első egyenletből $y = 0$, de itt a függvény nulla. Hasonlóan $y \ne 0$. Így $x^2 + 3y^2 - 1 = y^2 + 3x^2 - 1 = 0$, ahonnan $x = \pm 1/2$ és $y = \pm 1/2$. Ezekből a pontokból kettőben $1/8$-ot, kettőben $-1/8$-ot vesz fel a függvény.

**8.2.71. Példa.** Keressük meg az $x + 2y + 3z$ függvény szélsőértékeit az egységgömb felületén! Az

$$F(x,y,z,\lambda) = x + 2y + 3z - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

függvény differenciálásával az $1 - 2\lambda x = 0$, $2 - 2\lambda y = 0$, $3 - 2\lambda z = 0$, $x^2+y^2+y^2-1 = 0$ egyenleteket kapjuk, ahonnan $x = y/2 = z/3$, tehát $x^2 + 4x^2 + 9x^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{14}$, $y = \pm 4/\sqrt{14}$, $z = \pm 9/\sqrt{14}$. A $+$ előjelek adják a maximumot, a $-$ előjelek a minimumot. □

**8.2.72. Feladat [7].** Határozzuk meg az $(x^2-6x)(y^2-4y)$ függvény lokális szélsőértékeit és a $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2x$ halmazon az abszolút szélsőértékeit!

**8.2.73. Feladat [7].** Határozzuk meg az adott függvény szélsőértékeit az adott feltétel mellett:

(1) $5x - 2y - 1$, $25x^2 + 4y^2 - 50 = 0$;

(2) $2x + 3y + 1$, $4x^2 + 9y^2 - 72 = 0$;

(3) $2x + 3y + 1$, $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

→ **8.2.74. Feladat [7].** Határozzuk meg $xy$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 = 1$ körön!

→ **8.2.75. Feladat [8].** Határozzuk meg $x - y + 3z$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2/2 + z^2/3 = 1$ ellipszoidon!

→ **8.2.76. Feladat [7].** Határozzuk meg $xyz$ legnagyobb értékét az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbön!

→ **8.2.77. Feladat [7].** Határozzuk meg $xyz$ legnagyobb értékét az $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$ feltételek mellett!

→ **8.2.78. Feladat [7].** Határozzuk meg az egyenes körkúpba írható maximális térfogatú téglatestet!

→ **8.2.79. Feladat [7].** Határozzuk meg a félgömbbe írható maximális térfogatú téglatestet!

**8.2.80. Feladat [7].** Határozzuk meg a félhenger maximális térfogatát, ha felszíne adott!

**8.2.81. Feladat [6].** Határozzuk meg $x^2 + y^2 - xy$ maximumát a $[0, 1]^2$ négyzeten!

**8.2.82. Feladat [6].** Határozzuk meg $x^2 + y^2 - xy$ és $x^2 + 3xy + y^2$ abszolút szélsőértékhelyeit, ha $|x| + |y| \le 1$!

**8.2.83. Feladat [7].** Határozzuk meg $x+y^2/(4x)+z^2/y+2/z$ minimumát, ha $x, y, z > 0$!

**8.2.84. Feladat [6].** Határozzuk meg $(x^3 + y^3 + z^3)/(xyz)$ minimumát, ha $x, y, z$ pozitívak!

**8.2.85. Feladat [6].** Határozzuk meg $xy \ln(x^2 + y^2)$ maximumát és minimumát, ha $x^2 + y^2 \le R^2$.

**8.2.86. Feladat [6].** Határozzuk meg $x^{\sqrt{2}} + y^e + z^\pi$ maximumát, ha $x, y, z \ge 0$, $x + y + z = 1$.

**8.2.87. Feladat [6].** Határozzuk meg $2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ minimumát!

**8.2.88. Feladat [6].** Határozzuk meg $x^2 + y^2 + z^2$ szélsőértékeit, ha $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $a > b > c > 0$.

**8.2.89. Feladat [6].** Határozzuk meg $xy + 50/x + 20/y$ maximumát, ha $x, y > 0$.

**8.2.90. Feladat [7].** Legyen $a \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy azon $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pontok halmaza, amelyekre

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$$

kompakt halmaz. Mikor lesz ezen $z$ maximális?

**8.2.91. Feladat [8].** Írjuk fel az alábbi függvények harmadfokú Taylor-polinomját az adott pontban:

(1) $x/y$, $(1, 1)$;

(2) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1, 1, 1)$;

(3) $\sin(x + y)$, $(0, 0)$;

(4) $x^y$, $(1, 0)$;

(5) $x^2y + yx + x^2 - y^2 + x + 1$, $(-1, 2)$;

(6) $e^{x-y} \sin y$, $(0, 0)$;

(7) $e^{x+y} \cos x$, $(0, 0)$.

**8.2.92. Feladat [7].** Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és abszolút szélsőértékeit:

(1) $x^3 + xy + y^2 - 3x - 3y$;

(2) $x^3y^2(2 - x - y)$;

(3) $x^3 + y^3 - 9xy$;

(4) $x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

(5) $x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

⋆ **8.2.93. Lagrange-szorzók.** Az

$$(1)\qquad \begin{aligned} &f_0(x) \to \min, \quad x \in G \\ &f_j(x) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ &f_j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, m \end{aligned}$$

feltételes minimumproblémát akarjuk tanulmányozni, ahol $X \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Szükséges és elégséges feltételt is a $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *Lagrange-szorzó*k segítségével adhatunk:

$$(2)\qquad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(c) = 0,$$

$$(3)\qquad \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \ge 0, \quad \lambda_j f_j(c) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

$$(4)\qquad f_j(c) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad f_j(c) = 0, \quad j = k+1, \dots, m.$$

Nyilván ha $f_j(c) < 0$, akkor $\lambda_j = 0$ kell legyen, $(j = 1, \dots, k)$, ekkor azt mondjuk, hogy a feltétel *nem aktív*. Figyeljük meg, hogy ha egy pozitív konstanssal megszorozzuk a Lagrange-szorzókat, (2) és (3) ekvivalens feltételbe mennek át, így akár azt is feltehetjük, hogy vagy $\lambda_0 = 0$ (*elfajuló eset*), vagy $\lambda_0 = 1$ (*nemelfajuló eset*). Mindkét esetben (2), (3) és (4) összesen $n + m$ skalár egyenletet adnak $c$ és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ meghatározásához.

A (2), (3) és (4) feltételek az $L$ *Lagrange-függvény* segítségével is kifejezhetők, amelyet az

$$L(x, y) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(x)$$

összefüggéssel definiálunk, ahol $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Például a $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ jelöléssel (2) nyilván ekvivalens az $L_x(c, \lambda) = 0$ feltétellel, és ha $k = 0$, akkor (4) ekvivalens az $L_y(c, \lambda) = 0$ feltétellel.

⋆ **8.2.94. Lagrange-elv: feltételes szélsőérték keresése, egyenlőtlenségeket is tartalmazó feltételrendszer.** *Az előző pont jelöléseivel, tegyük fel, hogy $f_i\colon G \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, m$ folytonosan differenciálhatóak $G$-n.*

*Szükségesség: Ha $c \in G$ az (1) feltételes minimumprobléma megoldása, akkor léteznek olyan nem mind nulla Lagrange-szorzók, hogy (2), (3) és (4) teljesül.*

*Elégségesség: A (2), (3) és (4) feltételekből következik, hogy $c$ megoldása (1)-nek, feltéve, hogy az alábbi két kiegészítő feltétel teljesül:*

(5) $\lambda_0 = 1$;

(6) $f_i$, $i = 0, 1, \dots, k$ *és* $x \mapsto \sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *konvexek.*

A tételt és bizonyítását Páles [39] jegyzetéből vettük át. A bizonyítás nem használja az implicit függvény tételt. Ezt a tételt is gyakran alkalmazzuk lokálisan.

**Bizonyítás.** Az elégségességet bizonyítása teljesen elemi. Legyen

$$\varphi(t) = L(c + t(x - c), \lambda),$$

ahol $t \in [0, 1]$ és $x \in U$ rögzített. A $\varphi$ függvény konvex, és (2) szerint $\varphi'(0) \geq 0$, ezért a $[0, 1]$-en $\varphi$-nek minimuma van 0-ban. Innen következik, hogy $L(c, \lambda) \leq L(x, \lambda)$, ha $x \in G$. Mivel $\lambda_0 = 1$, a (3) és (4) feltételekből $f_0(c) = L(c, \lambda)$. Minden $x$-re, amely teljesíti az (1)-ben szereplő mellékfeltételeket, $L(x, \lambda) \leq f_0(x)$, mivel $\lambda_j \geq 0$ $(j = 1, \ldots, k)$. Innen $f_0(c) \leq f_0(x)$.

A szükségesség bizonyításában az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és hogy $f_0(c) = 0$, $f_i(c) = 0$, ha $1 \leq i \leq r$ és $f_i(c) < 0$, ha $r < i \leq k$. Válasszuk úgy az $\varepsilon_0 > 0$ értéket, hogy a $\mathbb{B}_{\varepsilon_0}(0)$ zárt gömb benne legyen $G$-ben, és hogy az $f_i$, $r < i \leq k$ függvények mind negatívak legyenek ezen a gömbön.

Első lépésként azt fogjuk megmutatni, hogy bármely $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$-hoz van olyan $N$, hogy

$$f_0(x) + |x|^2 + N\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f_i^+(x)\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{m}\left(f_i(x)\right)^2\right) > 0, \tag{1}$$

ha $|x| = \varepsilon$. Indirekt módon bizonyítunk. Ha az állítás nem teljesül, akkor létezik olyan monoton növekedő $N_j$ sorozat és olyan $x_j$ sorozat, amelynek elemei $\varepsilon$ normájúak, és

$$f_0(x_j) + |x_j|^2 \leq -N_j\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f_i^+(x_j)\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{m}\left(f_i(x_j)\right)^2\right) \tag{2}$$

minden $j$-re. Az $x_j$ sorozat valamely részsorozata konvergál valamely $x^*$ ponthoz. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az egész sorozat. Ekkor $|x^*| = \varepsilon$ és $f_0(x^*) = \lim_{j\to\infty} f_0(x_j)$. Elosztva az előző egyenlőtlenség mindkét oldalát $-N_j$-vel és határátmenetet véve

$$\sum_{i=1}^{k}\left(f_i^+(x^*)\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{m}\left(f_i(x^*)\right)^2 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy $x^*$ is teljesíti a minimumfeladat feltételeit, így $f_0(x^*) \geq f_0(c)$. Ez azonban ellentmond a (2) egyenlőtlenségből következő $f_0(x^*) \leq -\varepsilon^2$ egyenlőtlenségnek.

Második lépésként azt mutatjuk meg, hogy bármely $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ esetén létezik egy $x^*$ pont és egy $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_m)$ egységvektor, amelynek $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ koordinátái nemnegatívak úgy, hogy

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + (2\lambda_0 x^* + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^*) = 0. \tag{3}$$

Értelmezzük az első lépésben szereplő $N$-nel a

$$\varphi(x) = f_0(x) + |x|^2 + N\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f_i^+(x)\right)^2 + \sum_{i=k+1}^{m}\left(f_i(x)\right)^2\right)$$

függvényt. Létezik olyan $x^*$ pont a $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$ zárt gömbben, amelyre $\varphi$ értéke minimális. Erre $\varphi(x^*) \le \varphi(0) = 0$, ezért (1) miatt $|x| = \varepsilon$ nem teljesülhet, tehát $x^*$ a gömb belsejében van, így $\varphi$ gradiense $x^*$-ban eltűnik:

$$\nabla f_0(x^*) + 2x^* + 2N\left(\sum_{i=1}^{k} f_i^+(x^*)\nabla f_i(x^*) + \sum_{i=k+1}^{m} f_i(x^*)\nabla f_i(x^*)\right) = 0. \tag{4}$$

Legyen

$$L = 1 + \sum_{i=1}^{k}\bigl(2Nf_i^+(x^*)\bigr)^2 + \sum_{i=k+1}^{m}\bigl(2Nf_i(x^*)\bigr)^2,$$

és legyen $\lambda_0 = 1/L$, $\lambda_i = 2Nf_i^+(x^*)/L$, ha $1 \le i \le k$ és $\lambda_i = 2Nf_i(x^*)/L$, ha $k < i \le m$. (Vegyük észre, hogy $\lambda_i = 0$, ha $r < i \le k$, mivel ekkor $f_i$ negatív.) A $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_m)$ vektor egységvektor, és ha (4) mindkét oldalát osztjuk $L$-lel, azt kapjuk, hogy (3) fennáll.

Végül válasszunk egy $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ nullához tartó sorozatot. A megfelelő $x_m^*$ pontok és $\lambda^{(m)}$ vektorok egy konvergens részsorozatát véve, határátmenettel a tétel állítását kapjuk. □

⋆ **8.2.95. Következmény.** *Ha $f_i(x) = a_i x - b_i$, ahol $a_i$ sormátrix, $i = 1, \dots, m$, akkor a szükségességnél a Lagrange-szorzók választhatók úgy, hogy $\lambda_0 = 1$ legyen.*

**Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy minden feltétel egyenlőtlenség, mert egy $a_i x - b_i = 0$ alakú feltétel helyett írhatunk egy $a_i x - b_i \le 0$, $-(a_i x - b_i) \ge 0$ feltétel párt. Feltehetjük, hogy csak az első $r$ feltétel aktív, azaz $f_i(c) < 0$, ha $r < i \le m$. Így $\lambda_i = 0$, ha $i > r$, és a (2) feltétel $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r = 0$, ahol $a_0 = f_0'(c)$. Tegyük fel, hogy $\lambda_0 = 0$. Ha van olyan $h \in \mathbb{R}^n$, hogy $a_i h \le 0$, $i = 1, \dots, r$ és $a_0 h < 0$, akkor elég kis pozitív $t$-re $x = c + th \in G$ még mindig teljesíti a mellékfeltételeket, de $f_0(x) < f_0(c)$, azaz $c$ nem minimum. Tehát nincs ilyen $h$. Ekkor viszont a Farkas-lemma szerint (lásd kicsit később) léteznek olyan nemnegatív $\mu_i$ számok, hogy $a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r = 0$. A $\mu_i = 0$, ha $i > r$ választással, a két egyenletet összeadva

$$a_0 + (\lambda_1 + \mu_1)a_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k)a_k = 0,$$

valamint (3) és (4) is teljesülnek $\lambda_i$ helyett $\lambda_i + \mu_i$-vel.

⋆ **8.2.96. Elválasztási tétel.** *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ zárt, konvex halmaz, $a \in \mathbb{R}^n$. Ekkor létezik $K$-ban (az $\mathbb{R}^n$ szokásos belső szorzatából számazó normára nézve) $a$-t legjobban approximáló $b$ elem, egyértelmű, és $\langle x - b, a - b\rangle \le 0$ minden $x \in K$-ra.*

Ha $a \notin K$, akkor azt mondjuk, hogy az $\langle x - b, a - b\rangle = 0$ hipersík elválasztja $K$ pontjait $a$-tól: a belső szorzat $x = a$-ra pozitív, míg $x \in K$-ra nem pozitív. Szemléletesen, $a$ a hipersík egyik oldalán van, míg $K$ a másikon.

**Bizonyítás.** Legyen $D = d(a, K)$. A $D = 0$ eset triviális, $b = a$. Egyébként van olyan $b_n \in K$ sorozat, hogy $\|b_n - a\| \to D$. A paralelogramma-azonosság szerint

$$2\|b_n - a\|^2 + 2\|b_m - a\|^2 = \|b_n - b_m\|^2 + \|b_n + b_m - 2a\|^2 \ge \|b_n - b_m\|^2 + 4D^2,$$

mivel $(b_n + b_m)/2 \in K$. Innen viszont $\|b_n - b_m\|^2 \to 0$, azaz $b_n$ Cauchy-sorozat. Legyen $b$ a határértéke, erre a norma folytonossága miatt $\|b - a\| = D$. Ha $x \in K$ tetszőleges, $x \ne b$, akkor $x - b$ és $a - b$ nem zárhatnak be hegyes szöget, mert akkor $b$-ből $x$ felé haladva az összekötő szakaszon, differenciálással adódik, hogy kezdetben a távolság csökkenne. Ha viszont nem hegyesszöget zárnak be, akkor a távolság nő, amiből következik az egyértelműség. □

⋆ **8.2.97. Farkas-lemma.** *Legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $a_0, a_1, \ldots, a_m$ az $X'$ duális tér elemei. A következő két feltétel ekvivalens:*

(1) *minden $h \in X$-re, amire $a_i h \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, az is teljesül, hogy $a_0 h \geq 0$;*

(2) *léteznek olyan $\mu_1, \ldots, \mu_m$ nemnegatív valós számok, hogy $a_0 = \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.*

**Bizonyítás.** Nyilván (2)-ből következik (1). Tegyük fel, hogy (2) nem teljesül. Jelölje $K$ az $a_1, \ldots, a_m$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációinak halmazát. Nyilván $K$ konvex. Megmutatjuk, hogy $K$ zárt. Tartalmazhat alteret: legyen $L$ egy maximális dimenziós altere. Az $L$ egyértelmű, mert ha lenne másik ugyanilyen dimenziós altér is $K$-ban, akkor azok összege nagyobb dimenziós altere lenne $K$-nak. Tekintsük azon $a_i$-ket, amelyek nincsenek $L$-ben. Feltehetjük, hogy ezek $a_1, \ldots, a_k$. Jelölje $K_1$ ezen vektorok konvex kombinációinak halmazát (ha $k = 0$, akkor $K_1$ üres). Ha $y$ a $K_1$ egy torlódási pontja, akkor van olyan $y_n \in K$ sorozat, amelyre $y_n \to y$. A kombináló együtthatók korlátos sorozatot alkotnak $\mathbb{R}^k$-ban, aminek a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel szerint van konvergens részsorozata. Az $y_n$ megfelelő részsorozata együtthatóinak összege 1, így adódik, hogy $y \in K_1$. Megmutatjuk, hogy $K_1$ diszjunkt $L$-től, amiből távolságuk pozitív, mert $L$ zárt, $K_1$ pedig kompakt. Ha nem így lenne, akkor $a_1, \ldots, a_k$ valamely konvex kombinációja $L$-ben lenne. Feltehetjük, hogy a konvex kombinációban $a_1, \ldots, a_r$ együtthatói a pozitívak. Ha $r = 1$, akkor $a_1 \in L$, ellentmondás. Legyen $z \in L$, $z = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r$ ez a kombináció. Legyen $z(t) = t a_1 + (1-t) y$, ahol $y = (\alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r)/(1-\alpha_1) \in K_1$. Ha valamely $t \neq \alpha_1$-re $z(t) \in L$, akkor minden $0 \leq t \leq 1$-re is, így $\alpha_1 \in L$, ami ellentmondás. Ha viszont nem ez a helyzet, akkor a $z(t) - z$, $0 \leq t \leq 1$ szakasznak $t = \alpha_1$-re pontja az origó, és más pontja nincs $L$-ben. Mivel a szakasz pontjainak nemnegatív konstansszorosai is $K$-ban vannak, ez ellentmond annak, hogy $L$ dimenziója maximális. Legyen most $x$ egy érintkezési pontja $K$-nak, és $x_n \in K$ egy sorozat, amelyre $x_n \to x$. Legyen $x_n = \lambda_n y_n + z_n$, ahol $\lambda_n y_n$ az $a_1, \ldots, a_k$ nemnegatív együtthatós lineáris kombinációja, $\lambda_n$ a kombináló együtthatók összege, $y_n \in K_1$ (tetszőleges, ha $\lambda_n = 0$) és $z_n \in L$; a felírás nem egyértelmű. Ha $\lambda_n$ nem lenne korlátos, akkor valamely részsorozata $+\infty$-hez tartana; feltehetjük, hogy ez az eredeti sorozat. Mivel $y_n$ egy korlátos és zárt halmazban van, lenne olyan részsorozata, amely konvergens; ismét feltehetjük, hogy ez az egész sorozat. De ekkor $z_n/\lambda_n - y_n = x_n/\lambda_n \to 0$, ami ellentmond annak hogy $L$ és $K_1$ távolsága pozitív. Most hasonló gondolatmenettel, ha kell, részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $\lambda_n \to \lambda$ és $y_n \to y \in K_1$. Ekkor $z_n$ is konvergens, $z_n \to z \in L$. Ez azt jelenti, hogy $x = \lambda y + z \in K$.

Tehát $K$ zárt konvex halmaz $X'$-ben, $a \notin K$. Az előző tétel szerint van olyan $b \in K$, hogy $\langle x - b, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$-ra. Az $x = 0$ helyettesítéssel $-\langle b, a - b \rangle \leq 0$, az $x = 2b$ helyettesítéssel pedig $\langle b, a - b \rangle \leq 0$, azaz $\langle b, a - b \rangle = 0$, így $\langle x, a - b \rangle \leq 0$ minden $x \in K$-ra. Mivel a bal oldalon egy lineáris funkcionál áll, és $X''$ azonosítható $X$-szel, van olyan $h \in X$, hogy $xh \leq 0$ minden $x \in K$-ra, speciálisan $a_1, \ldots, a_m$-re is, de $(a-b)h < 0$. Mivel $b \in K$, $bh \leq 0$, így $ah > 0$. Áttérve $-h$-ra kapjuk, hogy (1) nem teljesül. □

⋆ **8.2.98. Következmény.** *A következő két feltétel ekvivalens:*

(1) *minden $h \in X$-re, amire $h \geq 0$ és $a_i h = 0$, $i = 1, \ldots, n$, az is teljesül, hogy $a_0 h \geq 0$;*

(2) *léteznek olyan $\mu_1, \ldots, \mu_m$ valós számok, hogy $a_0 \leq \sum_{j=1}^m \mu_j a_j$.*

**Bizonyítás.** Legyen $a$ az a mátrix, amelynek sorai $a_1, \ldots, a_m$, $b$ pedig az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az $a$, a $-a$ és az $m$-szer $m$-es $\delta$ egységmátrixot egymás alá helyezzük. Ekkor (2) azzal ekvivalens, hogy $y'b = a_0$-nak van $y \geq 0$ megoldása, ami a lemmát alkalmazva $b$ soraira, ekvivalens (1)-gyel. $\square$

$\star$ **8.2.99. Primál-duál feladatpár.** A lineáris programozás alapfeladatát a megfogalmazásakor is használt jelölésekkel tömören

$$d + c'x \to \max, \quad x \geq 0, \quad ax \leq b$$

alakban írhatjuk, ahol $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopmátrixok és $a$ egy $m \times n$-es mátrix. Tekintsük ehhez a *primál feladat*hoz a

$$d + b'y \to \min, \quad y \geq 0, \quad a'y \geq c$$

*duál feladat*ot, ahol $y \in \mathbb{R}^m$. Ez nyilván

$$-d - b'y \to \max, \quad y \geq 0, \quad -a'y \leq -c$$

alakban írható, aminek a duálisa

$$-d - c'x \to \min, \quad x \geq 0, \quad -a''x \geq -b,$$

ekvivalens az eredeti feladattal. A két feladat kapcsolatának vizsgálatához szükségünk lesz egy tételre.

$\to\star$ **8.2.100. Feladat [6].** Az előző pont jelöléseivel, adjunk példát, amiben $n, m \leq 2$ és

(1) mindkét feladatnak van megengedett megoldása;

(2) csak a primál feladatnak van megengedett megoldása;

(3) csak a duál feladatnak van megengedett megoldása;

(4) egyik feladatnak sincs megengedett megoldása.

$\star$ **8.2.101. Nyeregpont tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ nem üres halmazok és $L\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $F(x) = \inf_{y \in Y} L(x, y)$ és $G(y) = \sup_{x \in X} L(x, y)$, továbbá $\alpha = \sup_{x \in X} F(x)$ és $\beta = \inf_{y \in Y} G(y)$ bővített valós értékek. Ekkor $\alpha \leq \beta$ és az alábbi két állítás ekvivalens:*

(1) *van olyan $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, hogy $L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$ minden $x \in X$, $y \in Y$-ra* (nyeregpont)*;*

(2) *$F(x_0) = \alpha$, $G(y_0) = \beta$, $\alpha = \beta$.*

*Ha (1) vagy (2) fennáll, akkor*

(3) *$\alpha = F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) = \beta$.*

**Bizonyítás.** Mivel $G(y) \geq L(x,y)$ minden $x \in X$ és $y \in Y$-ra,

$$\beta = \inf_{y \in Y} G(y) \geq \inf_{y \in Y} L(x,y) = F(x)$$

minden $x \in X$-re, ahonnan $\alpha \leq \beta$ következik.

Ha (2) fennáll, akkor

$$\beta = G(y_0) = \sup_{x \in X} L(x, y_0) \geq L(x_0, y_0) \geq \inf_{y \in Y} L(x_0, y) = F(x_0) = \alpha,$$

így mindenütt egyenlőség áll, amiből (1) következik.

Ha (1) fennáll, akkor

$$F(x_0) = \inf_{y \in Y} L(x_0, y) = L(x_0, y_0) = \sup_{x \in X} L(x, y_0) = G(y_0),$$

így

$$\alpha \geq F(x_0) = L(x_0, y_0) = G(y_0) \geq \beta,$$

amivel (2)-t és (3)-at is beláttuk.

$\star$ **8.2.102. A lineáris programozás főtétele.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha* $X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \geq 0, ax \leq b\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R}^m \colon y \geq 0, a'y \geq c\}$, $\alpha = \sup_{x \in X} c'x + d$, *és* $\beta = \inf_{y \in Y} b'y + d$, *akkor* $\alpha \leq \beta$ *és az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *a primál feladatnak van* $x_0$ *optimális megoldása;*

(2) *a duál feladatnak van* $y_0$ *optimális megoldása;*

(3) *mindkét feladatnak van megengedett megoldása.*

*Továbbá ha (1), (2) teljesülnek, akkor* $x_0, y_0$ *az* $L(x,y) = d + c'x + b'y - y'ax$, $x \in X$, $y \in Y$ *függvénynek nyeregpontja,* $\alpha = \beta = y_0'ax_0$.

Tehát egy lineáris programozási problémának, ha van megengedett megoldása, akkor vagy van optimális megoldása vagy a célfüggvény nem korlátos. A szimplex módszer eldönti, melyik eset áll fenn. Persze az is lehetséges, hogy sem a primál, sem a duál feladatnak nincs megengedett megoldása.

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy (1) teljesül: a célfüggvény $-d - c'x$ ellentettjének van minimuma az $ax - b \leq 0$, $-e_j x \leq 0$, $j = 1, \ldots, n$ feltételek mellett, ahol $e_i$ a sorvektorok terének szokásos bázisa, és $'$ a transzponálás. Ha $a_i$ az $a$ mátrix $i$-edik sora, akkor az $ax \leq b$ feltétel az $a_i x - b_i$, $i = 1, \ldots, m$ feltételekkel ekvivalens. Jelöljön $x_0$ egy optimális megoldást, és alkalmazzuk a Lagrange-elv egyenlőtlenséges alakjának következményét. Kicsit más jelölésekkel azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, m+n$ Lagrange-szorzók, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j} e_j = 0,$$

továbbá $\lambda_i(a_i x_0 - b_i) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ és $\lambda_{m+j} = 0$, ha az $x_0$ vektor $j$-edik koordinátája nem nulla. Ez azt jelenti, hogy

$$-c' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

minden koordinátája nemnegatív, és nulla, ha az $x_0$ vektor $j$-edik koordinátája nem nulla, azaz tömören

$$-c' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \geq 0 \quad \text{és} \quad \Big(-c' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i\Big) x_0 = 0.$$

Tehát bevezetve az $y_0$ oszlopmátrixot $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ koordinátákkal, $x_0 \geq 0$, $y_0 \geq 0$, és

$$\text{(4)} \qquad -c' + y_0' a \geq 0, \quad (-c' + y_0' a) x_0 = 0, \quad a x_0 - b \leq 0, \quad y_0'(a x_0 - b) = 0.$$

Tekintsük az $L(x, y) = d + c'x - y'(ax - b)$ Lagrange-függvényt, ha $x \geq 0$ és $y \geq 0$, és alkalmazzuk a nyeregpont-tételt. Most

$$F(x) = \inf_{y \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} d + c'x, & \text{ha } ax \leq b, \\ -\infty & \text{egyébként;} \end{cases}$$

valóban, ha $ax - b \leq 0$, akkor $-y'(ax - b)$ minimális értéke 0, ha viszont $ax - b$ valamelyik koordinátája pozitív, akkor $y$ megfelelő koordinátáját elég nagynak, a többit nullának választva, $-y'(ax - b)$ bármilyen számnál kisebb lehet. Így $\alpha = \sup_{x \geq 0} F(x)$. Mivel $L(x, y) = d + b'y + x'(c - a'y)$, hasonlóan

$$G(y) = \sup_{x \geq 0} L(x, y) = \begin{cases} d + b'y, & \text{ha } a'y \geq c, \\ +\infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így $\beta = \inf_{y \geq 0} G(y) \geq \sup_{x \geq 0} F(x) = \alpha$. A (4) összefüggésekből egyrészt $c'x - y_0' a x \leq 0 = c'x_0 - y_0' a x_0$, ahonnan $L(x, y_0) \leq L(x_0, y_0)$, másrészt $y'b - y'ax_0 \geq 0 = y_0'(b - a x_0)$, ahonnan $L(x_0, y_0) \leq L(x_0, y)$. Ez azt jelenti, hogy $x_0, y_0$ nyeregpont, azaz $x_0$ az $F$-nek maximumhelye, $y_0$ a $G$-nek minimumhelye és $\alpha = \beta$. Tehát (1)-ből következik (2), és a szélsőértékek egyenlősége. A dualitás miatt (2)-ből is következik (1). Ha csak a megengedett megoldások kisebb $X$, $Y$ halmazain tekintjük $L$-et, $x_0, y_0$ ott is nyeregpont. Az világos, hogy (1)-ből és (2)-ből következik (3). Azt kell megmutatnunk, hogy (3)-ból következik (1), vagyis ha a $d + c'x$ célfüggvény felülről korlátos, akkor felveszi az $\alpha$ szuprémumát. Tegyük fel indirekt, hogy nem. Feltehetjük, hogy $d = 0$ és az $x \geq 0$ feltételrendszert belefoglalhatjuk az $ax \leq b$ feltételekbe, ha $a$ alá írjuk egy $n$-szer $n$-es $\delta$ egységmátrix ellentettjét, $b$-t pedig nullákkal egészítjük ki. Az indirekt feltevés szerint nincs olyan $x \in \mathbb{R}^n$, amelyre $ax \leq b$ és $c'x \geq \alpha$. Ekkor viszont a Farkas-lemma következménye szerint (azt $a_0 = (b', \alpha)$-ra, az $a$ mátrix soraira és $-c'$-re alkalmazva) van olyan $y \geq 0$ és $\lambda \geq 0$, hogy $y'a - \lambda c' = 0$, de $y'b - \lambda\alpha < 0$. Innen

$$\begin{aligned} \lambda\alpha &= \lambda \sup\{c'x : ax \leq b\} = \sup\{\lambda c'x : ax \leq b\} = \sup\{y'ax : ax \leq b\} \\ &\leq y'b < \lambda\alpha. \ \square \end{aligned}$$

⋆ **8.2.103. Approximáció.** Az approximáció feladata a következő. Legyen adott egy $H$ halmazon értelmezett valós $f$ függvény. Ismerjük $f(x)$ értékeit a $H$ halmazon, vagy annak adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontjaiban. Keresendő egy $m$ paraméteres $g(x, a_1, \ldots, a_m)$ függvényseregből az a függvény, amely $f$-et a „legjobban közelíti". Általában olyan függvények közül választjuk a közelítő függvényt, amelyek értékei könnyen számíthatók. Mivel számítógépen közvetlenül csak a négy alapművelet végezhető el, előnyben részesítjük a polinom és racionális törtfüggvény közelítéseket. Lehetséges az is, hogy érdemes $H$-t kisebb részekre osztani, és a részeken külön-külön keresni a közelítéseket. Egy adott halmazon való közelítést helyettesítéssel egy másik halmazon való közelítésre vezethetünk vissza, például bármilyen korlátos zárt intervallumon való közelítés lineáris helyettesítéssel visszavezethető a $[0, 1]$ vagy a $[-1, 1]$ intervallumon való közelítésre. A lineáris helyettesítés előnye, hogy a polinomok polinomba, racionális törtfüggvények racionális törtfüggvénybe mennek át, és a fokszámok sem változnak.

Attól függően, hogy $f$ és a közelítő függvény eltérését hogyan mérjük, különböző eseteket kapunk. Ha azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen $f$-fel, kapjuk az *interpoláció* esetét. Ha azt követeljük meg, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban mért eltérések négyzetösszege minimális legyen, akkor a *legkisebb négyzetes közelítés*t kapjuk. Végül, ha az egész $H$-n vett eltérés szuprémumát minimalizáljuk, akkor az *egyenletesen legjobb közelítés*t kapjuk.

Ha az $f$ függvény értékeit csak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban ismerjük, akkor az interpoláció a legkézenfekvőbb lehetőség. A legáltalánosabb esetben az

$$f(x_j) = g(x_j, a_1, \ldots, a_m), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az $a_1, \ldots, a_m$ paraméterekre megoldva kapunk egy interpoláló függvényt. Például, ha $g_1, \ldots, g_m$ adott és

$$g(x, a_1, \ldots, a_m) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_m g_m(x),$$

akkor lineáris egyenletrendszert kapunk. A legfontosabb az az eset, amikor $f$ egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvény, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az $[a, b]$ pontjai, interpoláló függvényként pedig $n$-nél alacsonyabb fokú polinomot keresünk: ez a Lagrange-interpoláció, amit már tanultunk.

Sokszor a közelítendő függvény mért értékei elég nagy hibát tartalmaznak. Ilyenkor nem célszerű azt kívánni, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen a mért értékekkel, mert akkor a hibát is tartalmazza. Elég azt megkövetelni, hogy a mért értékek közelében legyen. A *legkisebb négyzetek módszere* értelmében tehát az $a_1, \ldots, a_m$ paramétereket úgy kell megválasztani, hogy ha $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ a mért értékek, akkor a

$$\Phi(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} w_i \big(f(x_i) - g(x_i, a_1, \ldots, a_m)\big)^2$$

eltérés minimális legyen. Itt a $w_i$-k pozitív súlyok, amelyeket az $f(x_i)$ értékek szórásnégyzete reciprokának célszerű választani, mert minél pontatlanabb a mért érték, annál kisebb súllyal kívánjuk figyelembe venni. Ezt a minimumot a $\nabla\Phi(a_1, \ldots, a_m) = 0$ egyenletrendszer megoldásával kereshetjük.

$\star$ **8.2.104. A Newton-módszer.** Ha $f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ és az $f(x) = 0$ egyenletet kívánjuk megoldani, természetes módon adódik a Newton-módszer: az egyenletet egy adott $x_n$ érték birtokában az $f$ függvényt lineáris részével közelítjük. Ekkor az

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \approx 0$$

egyenletet kapjuk, amiből a következő közelítésre az

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$$

egyenlet adódik, így $x_{n+1}$ meghatározásához egy lineáris egyenletet kell megoldani, például Gauss-eliminációval. Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens.

Gyakran használatos a módosított Newton-módszer is, ennél a derivált kiszámítására és invertálására csak egyszer van szükség, de a konvergencia lelassul:

$$\Delta x_n = -\big(f'(x_0)\big)^{-1} f(x_n).$$

Néhány lépés után újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A *fékezett Newton-módszer*nél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletből meghatározzuk $\Delta x_n$-et, de $x_{n+1} = x_n + \alpha_n \Delta x_n$, ahol az $0 < \alpha_n \le 1$ *relaxációs paraméter*t úgy választjuk, hogy $\big\|f(x_{n+1})\big\|^2 < \big\|f(x_n)\big\|^2$ legyen. Ez mindig lehetséges, ha az egyenlet megoldható: Az $\|f\|^2$-nek a $\Delta x_n$ irány menti deriváltja az $x_n$ helyen

$$2\langle f(x_n), f'(x_n)\Delta x_n\rangle = -2\big\|f(x_n)\big\|^2,$$

így

$$\frac{\big\|f(x_n + \alpha\Delta x_n)\big\|^2 - \big\|f(x_n)\big\|^2}{\alpha\big\|f(x_n)\big\|^2} \to -2,$$

ha $\alpha \to 0$. Általában azt követeljük meg, hogy a hányados kisebb legyen, mint $1-\sigma$ valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \le \sigma \le 10^{-1}$.) Ezt úgy érjük el, hogy $\alpha_n = 1$ választással próbálkozunk, és ha a feltétel nem teljesül, akkor csökkentjük $\alpha_n$-et, rendszerint szorozzuk $\varrho$-val, ahol $0 < \varrho < 1$, általában $0{,}3 \le \varrho \le 0{,}8$.

A módosított Newton-módszerből is képezhető fékezett változat, de itt már nem biztos, hogy a feltétel teljesíthető, esetleg újra kell számolni a deriváltat.

⋆ **8.2.105. Kvázi Newton-módszer.** A Newton-módszernél az $f'(x_n)\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenletet kell megoldanunk minden lépésben. A kvázi Newton-módszernél $x_{n+1}$ értékét az $A_n\Delta x_n = -f(x_n)$ egyenlet megoldásával nyerjük, ahol $A_n$ az $f'(x_n)$ egy közelítése (itt is lehetséges fékezett változat). A közelítést nyerhetjük például differenciákkal közelítve a parciális deriváltakat. Ha minden irányban a differencia lépésköze konstansszor $|x_n - x|$ alatt marad, ahol $x$ a gyök, akkor a konvergencia elméletileg kvadratikus, de a kerekítési hibák veszélyesek lehetnek. A *Broyden-módszer*nél $A_0 = f'(x_0)$, és $A_{n+1}$-et úgy próbáljuk meghatározni, hogy $A_{n+1}\Delta x_n = f(x_{n+1}) - f(x_n) = \Delta f(x_n)$ teljesüljön. Mivel ez az egyenlet alulhatározott, úgy választunk, hogy $A_{n+1} - A_n = \Delta A_n$ mátrixának normája (a szokásos bázisban) minimális legyen. Ez akkor teljesül, ha $\Delta A_n$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n) - A_n\Delta x_n][\Delta x_n]'}{|\Delta x_n|^2}.$$

A konvergencia lineárisnál jobb, bár nem biztos, hogy $A_n \to f'(x)$. Lehetőség van mindjárt $A_{n+1}^{-1}$ számítására: a szokásos bázisban $A_{n+1}^{-1} - A_n^{-1} = \Delta A_n^{-1}$ mátrixa

$$\frac{[\Delta x_n - A_n^{-1}\Delta f(x_n)][\Delta x_n]'[A_n^{-1}]}{\langle \Delta x_n, A_n^{-1}\Delta f(x_n)\rangle}.$$

⋆ **8.2.106. Feladat [10].** Alkalmazzuk a Newton-módszert és változatait az

$$e^{x_1^2+x_2^2}-1=0, \quad e^{x_1^2-x_2^2}-1=0$$

egyenletrendszer megoldására $x_1, x_2 = 0{,}1$, 10, 20 kezdőértékekkel.

⋆ **8.2.107. Feladat [10].** Alkalmazzuk a Newton-módszert és változatait az

$$x_1+x_2-3=0, \quad x_1^2+x_2^2-9=0$$

egyenletrendszer megoldására $x_1=2$, $x_2=4$ kezdőértékekkel. Hova konvergál a Broyden-módszernél $A_n$?

⋆ **8.2.108. Kapcsolat minimumfeladatokkal.** Ismeretes, hogy egy valós értékű $\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény minimumának megkeresését visszavezethetjük a $\Phi'(x)=0$ egyenlet megoldására. Megfordítva, egy $f(x)=0$, $f \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ operátoregyenlet megoldásait meghatározhatjuk úgy is, hogy megkeressük a $\Phi(x)=\|f(x)\|_2^2$ függvény minimumait. A $\| \ \|_2^2$ választás azért előnyös például $\| \ \|_2$ helyett, mert a $\| \ \|_2^2$ függvény differenciálható. Néha előnyösebb egy másik normát használni, például a $\Phi(x)=\sum_{i=1}^k w_i\big(f_i(x)\big)^2$ függvény minimumait keresni, ahol az $f_i$ függvények az $f$ függvény koordinátái. A pozitív $w_i$ súlyok tetszés szerint választhatók, de alkalmas megválasztásuk a minimumfeladat megoldását megkönnyítheti. Ahol $\Phi$ nincs értelmezve, ott az értékét $+\infty$-nek tekintjük.

⋆ **8.2.109. Nelder–Mead-módszer minimumfeladatokra.** Ez egy valós értékű $\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény minimumának megkeresésére alkalmas heurisztikus módszer. Minden lépésben az $x_0, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^k$ pontokat módosítja, amelyek nincsenek egy hipersíkban, így egy úgynevezett szimplexet (kétdimenzióban háromszöget, három dimenzióban tetraédert, stb.) adnak meg, és amelyeket úgy indexelünk, hogy

$$\Phi(x_0) \le \Phi(x_1) \le \ldots \le \Phi(x_k)$$

teljesüljön. Ha adott $\varepsilon > 0$ tűrésre

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\big(\Phi(x_j)-\overline{\Phi}\big)^2 < \varepsilon^2,$$

$\big[$ahol $\overline{\Phi}$ a $\Phi(x_j)$ értékek számtani közepe$\big]$, akkor megállunk, az eredmény az $x_j$-k számtani közepe. Egyébként $x_k$-t tükrözzük a többi pont $\overline{x}_k$ számtani közepére, pontosabban legyen $y=\overline{x}_k+\alpha(\overline{x}_k-x_k)$; az $\alpha$ *tükrözési paraméter* rendszerint 1. Ha

$$\Phi(x_0) \le \Phi(y) \le \Phi(x_{k-1}),$$

akkor $x_k$-t kicseréljük $y$-nal. Ha még $\Phi(y) < \Phi(x_0)$ is teljesül, akkor kiszámítjuk $\Phi(z)$ értékét, ahol $z=\overline{x}_k+\beta(\overline{x}_k-x_k)$; $\beta$ a *kiterjesztési paraméter*, rendszerint 2. Az $x_k$ pontot $\Phi(z) < \Phi(y)$ esetén $z$-re, egyébként $y$-ra cseréljük.

Ha $\Phi(y) > \Phi(x_{k-1})$, akkor a szimplexet összehúzzuk: legyen

$$w = x_k + \gamma(\overline{x}_k - x_k),$$

ahol a $\gamma$ *összehúzási paraméter* rendszerint 1/2. Ha $\Phi(w) < \Phi(x_k)$, az $x_k$ pontot kicseréljük $w$-vel; egyébként az $x_0$ kivételével az összes $x_j$ pontot az $x_0+\delta(x_j-x_0)$ ponttal helyettesítjük, ahol a $\delta$ *redukciós paraméter* rendszerint 1/2.

⋆ **8.2.110. Az irány menti csökkentés módszere.** Lényege, hogy a $\Phi \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény minimumhelyét úgy keressük, hogy minden $x_n$ közelítéshez meghatározunk egy $e_n$ irányt, amerre a függvény értéke tovább csökken, és a közelítést ebbe az irányba mozdítjuk el: $\Delta x_n = \alpha_n e_n$. Ha egy bázis vektorait ($\pm$ előjellel) választjuk $e_n$-nek úgy, hogy az utolsó bázisvektor után újrakezdjük az elsővel, akkor a *ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszerét* kapjuk. Ha a deriválható $\Phi$ egy nyílt részhalmazon van értelmezve, és minden lépésben $e_n = -\nabla\Phi(x_n)$, a legmeredekebb csökkenés iránya, akkor a *gradiens módszert* kapjuk. Ha $e_n = -\nabla\Phi(x_n) + \beta_{n-1} e_{n-1}$ alkalmas $\beta_{n-1}$ konstanssal, akkor a *konjugált gradiens módszert* kapjuk: az egyik változatnál $\beta_{-1} = \beta_0 = 0$, $e_{-1} = 0$ és

$$\beta_n = \frac{\bigl|\nabla\Phi(x_n)\bigr|^2}{\bigl|\nabla\Phi(x_{n-1})\bigr|^2}, \quad \text{ha} \quad n > 0,$$

míg a másik változatnál $\beta_{-1} = \beta_0 = 0$, $e_{-1} = 0$ és

$$\beta_n = \frac{\bigl\langle \nabla\Phi(x_n), \nabla\Phi(x_n) - \nabla\Phi(x_{n-1})\bigr\rangle}{\bigl|\nabla\Phi(x_{n-1})\bigr|^2}, \quad \text{ha} \quad n > 0.$$

A konjugált gradiens módszer előnyét mutatja, hogy $\mathbb{R}^k$ egy pozitív definit kvadratikus formájánál véges sok lépésben megtalálja a minimumot, és kicsiben sima függvény a minimum közelében közelítőleg ilyen.

Az $e_n$ kijelölése után az elmozdulás mértékének meghatározásához az egyváltozós $g(t) = \Phi(x_n + te_n)$ függvényt kell minimalizálnunk. (Ha sikerül, a kapott pontban a gradiens merőleges lesz $e_n$-re. Ez az észrevétel adja a konjugált gradiens módszerek alapját: a $-\nabla\Phi(x_n)$ irányba minimalizálva, utána tudnánk még tovább csökkenteni az $e_{n-1}$ irányba; a konjugált gradiens módszernél ezt próbáljuk „megelőlegezni".) A $t \mapsto g(t)$ függvényt csak közelítőleg fogjuk minimalizálni. Ez történhet a következőképpen. A $t_0 = 0$, $t_1$ és $t_2$ pontokban meghatározzuk a $g$ függvény értékét, majd Lagrange-interpolációval meghatározzuk azt a $p(t)$ másodfokú polinomot, amely ezekben a pontokban megegyezik $g(t)$-vel. A $t_1$ értékének jó megválasztásához az előző lépések adhatnak útmutatást, úgy választjuk, hogy $g(t_1) < g(t_0)$ teljesüljön; $t_2$ választása függhet $g(t_1)$-től is. A gradiens és a konjugált gradiens módszereknél a másodfokú polinomot inkább úgy választjuk, hogy a $t_0 = 0$ helyen értéke $\Phi(x_n)$, deriváltja $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ legyen, így $t_2$-re nincs szükség. A $t^*$ közelítést úgy kapjuk, hogy vesszük $p$ minimumhelyét. (Arra is gondolnunk kell, hogy a másodfokú polinomban a másodfokú tag együtthatója nempozitív is lehet.) Bár valamelyik pontot elhagyva, helyette a $t^*$ pontot tekintve, ez a lépés megismételhető, általában nem érdemes $g$ minimumhelyét túl pontosan meghatározni, hanem $t^*$ meghatározása után $\alpha_n = t^*$ választással áttérhetünk az $x_{n+1} = x_n + \alpha_n e_n$ pontra. Az alulrelaxálás, azaz az adott lépésben optimális $t^*$-nál kisebb $\alpha_n$ választása általában növeli a módszer hatékonyságát, mert a cikcakkpálya kisimul. Az alulrelaxálást például $\alpha_n$ olyan választásával biztosíthatjuk, amelyre az

$$\frac{\Phi(x_n + \alpha_n e_n) - \Phi(x_n)}{\alpha_n}$$

differenciahányados és a $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ irány menti derivált hányadosa $\sigma$ és $1 - \sigma$ közé esik valamely $0 < \sigma < 1/2$ értékre. (Rendszerint $10^{-5} \leq \sigma \leq 10^{-1}$.) Az alsó korlát kiküszöböli a túl hosszú, a felső pedig a túl rövid lépést. A túl rövid lépés kiküszöbölésére azt is megkövetelhetjük, hogy a $\partial_{e_n}\Phi(x_n+\alpha_n e_n)$ és $\partial_{e_n}\Phi(x_n)$ irány menti deriváltak hányadosának abszolút értéke, vagy legalább a hányados kisebb legyen, mint valamely $\gamma$ érték, ahol $\sigma<\gamma<1$. (Rendszerint $0{,}1\le\gamma\le 0{,}5$.) Az alkalmas $\alpha_n$ értéket a $t^*\varrho^k$, $k\in\mathbb{Z}$ értékek között keressük, $k=0$-val kezdve, ahol $0<\varrho<1$.

A konvergencia általában elég lassú, és semmilyen garancia nincs arra, hogy bármelyik módszer egy abszolút minimumhoz konvergál, bár konvergenciahalmaza általában bővebb, mint a Newton-módszeré. Ezért szokás a közelítés kezdetén az iránymenti csökkentések módszerét alkalmazni, majd áttérni a gyorsabb Newton-módszerre.

⋆ **8.2.111. Kvázi Newton-módszerek minimalizálásra.** Mint már említettük, minimalizáláskor a lokális minimumhely közelében érdemes áttérni egy Newton-típusú módszerre. Ez azt jelenti, hogy $\Phi$ minimuma helyett $f=\nabla\Phi$ zérushelyét keressük. Bármelyik módszer használható, de javítások is lehetségesek. A gyakran használt Broyden-módszert például úgy szokás megváltoztatni, hogy az iteráció során $A_n$ szimmetrikus legyen, mert $\Phi''(x_n)$ szimmetrikus bilineáris forma. Az egyik szokásos választásnál $\Delta A_n=A_{n+1}-A_n$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n)-A_n\Delta x_n][\Delta f(x_n)-A_n\Delta x_n]'}{\langle\Delta f(x_n)-A_n\Delta x_n,\Delta x_n\rangle}.$$

Nem tanácsos tovább folytatni az iterációt, ha a $\Delta f(x_n)-A_n\Delta x_n$ és $\Delta x_n$ által bezárt szög koszinusza túl kicsi lesz, mondjuk $10^{-8}$ alá megy. Egyébként erre a formulára $A_{n+1}^{-1}-A_n^{-1}=\Delta A_n^{-1}$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta x_n-A_n^{-1}\Delta f(x_n)][\Delta x_n-A_n^{-1}\Delta f(x_n)]'}{\langle\Delta x_n-A_n^{-1}\Delta f(x_n),\Delta f(x_n)\rangle}.$$

Még elterjedtebb az a változat, amelyben $\Delta A_n$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{[\Delta f(x_n)][\Delta f(x_n)]'}{\langle\Delta f(x_n),\Delta x_n\rangle}-\frac{[A_n\Delta x_n][A_n\Delta x_n]'}{\langle\Delta x_n,A_n\Delta x_n\rangle}.$$

Erre a formulára $\Delta A_n^{-1}$ mátrixa a szokásos bázisban

$$\frac{\langle\Delta x_n,\Delta f(x_n)\rangle+\langle\Delta f(x_n),A_n^{-1}\Delta f(x_n)\rangle}{\langle\Delta x_n,\Delta f(x_n)\rangle^2}[\Delta x_n][\Delta x_n]'$$
$$-\frac{[A_n^{-1}\Delta f(x_n)][\Delta x_n]'+[\Delta x_n][\Delta f(x_n)]'[A_n^{-1}]}{\langle\Delta x_n,\Delta f(x_n)\rangle}.$$

⋆ **8.2.112. Feladat [10].** A $\Phi(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$ függvény minimalizálásán hasonlítsunk össze különböző módszereket.

⋆ **8.2.113. Feladat [10].** A $\Phi(x,y)=(x^2+y-11)^2+(y^2+x-7)^2$ függvénynek keressük meg a négy abszolút minimumát és az egyetlen lokális maximumát, összehasonlítva a különböző módszereket.

⋆ **8.2.114. Feladat [11].** A

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n-1} ((1 - x_j)^2 + 100\varepsilon_j (x_{j+1} - x_j^2)^2)$$

függvény — ahol $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n-1} \in ]0, 1]$ szabad paraméterek — minimalizálásán hasonlítsunk össze különböző módszereket. [A függvénynek egy globális minimuma van, de még ha minden $\varepsilon_j$ egy, akkor is már $4 \le n \le 7$ esetén van egy lokális minimuma a $(-1, 1, 1, \dots, 1)$ pont közelében.]

⋆ **8.2.115. Belső pont módszerek.** A Lagrange-szorzóknál leírt

$$\begin{aligned} &f_0(x) \to \min, \quad x \in G \\ &f_j(x) \le 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ &f_j(x) = 0, \quad j = k+1, \dots, m \end{aligned} \tag{1}$$

feltételes minimumproblémát kívánjuk numerikusan megoldani. Használni fogjuk az ottani feltevéseket és jelöléseket. Az egyenlőség típusú feltételeket kiküszöbölhetjük, ha $f_0$ helyett az $f_0 + \sum_{i=k+1}^{m} (w_i f_i)^2$ függvényt minimalizáljuk, ahol $w_i \ne 0$ súlyok. Kérdés, hogyan célszerű választani a súlyokat. Az egyenlőtlenség típusú feltételeket úgy vehetjük figyelembe, hogy a célfüggvényhez hozzáadunk egy

$$-\frac{1}{t} \sum_{j=1}^{k} \ln(-f_j(x))$$

tagot. Ez mint sorompó szerepel, az $X^- = \{x : f_j(x) < 0, j = 1, \dots, k\}$ nyílt halmaz belsejében tart minket, mert a határhoz közeledve $+\infty$-hez tart. Innen a *belső pont módszerek* elnevezés. Minél nagyobb $t$, annál gyengébb a sorompó, annál közelebb mehetünk a határhoz. A legegyszerűbb *sorompó módszer*nél $X^- \cap \operatorname{dmn}(f_0)$ egy pontjából indulunk. Egy adott pozitív $t$-re minimalizálva (például a fékezett Newton-módszerrel), ha $c(t)$-ben van a minimum, akkor megnövelt $t$-re, például $t$ helyett $\mu t$-re a $c(t)$-t használhatjuk kezdőpontnak, újra minimalizálunk, stb. A tapasztalatok szerint a módszer 3 és 100 közötti $\mu$-t választva jól működik, sebessége alig függ $\mu$-től. Leggyakrabban $\mu$ értékét 10 és 20 között választjuk. Fontos észrevétel, hogy ha nincsenek egyenlőség típusú feltételek és $c(t)$ a minimumhely, akkor $x = c(t)$-re

$$f_0'(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{f_j'(x)}{-t f_j(x)} = 0,$$

így — legalábbis a reguláris esetben — a

$$\lambda_j(t) = \frac{1}{-t f_j(c(t))}$$

mennyiségek a $c(t)$-hez tartozó Lagrange-szorzók, és $-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) f_j(x)$ az $x = c(t)$ helyen $k/t$. Ez adhatja az ötletet a sokkal agresszívebb és gyorsabb primál-duál belső pont módszerhez.

Tekintsük a

$$\begin{aligned}
0 =& f_0'(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j f_j'(x), \\
0 =& -\frac{1}{t} - y_j f_j(x), \quad j = 1, \ldots, k; \\
0 =& f_j(x), \quad j = k+1, \ldots, m
\end{aligned}$$

egyenletrendszert, amely a $t > 0$ paramétertől függ. Ennek az $(x, y)$ megoldását keressük $y_j > 0$, ha $j = 1, \ldots, k$ feltételek mellett fékezett Newton-módszerrel. Azt várjuk, hogy $t$ növekedésével $(x, y)$ tart $(c, \lambda)$-hoz. Kiszámítjuk $\eta = -\sum_{j=1}^{k} y_j f_j(x)$ értékét, és $t$-t a $k/\eta$ szám $\mu$-szörösének választjuk ($\mu$ rendszerint 10 körüli). Csak egyetlen iterációs lépést teszünk, majd újraszámoljuk $t$-t. Az egyenes szakasz menti keresésnél kiszámítjuk azt a legnagyobb $\alpha$-t, amely nem nagyobb mint 1, és amelyre $y_j + \alpha\Delta y_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, k$, majd az $\alpha$ kezdőértékének ennek mondjuk 0,99-szeresét vesszük, és ha kell, tovább csökkentjük $\alpha$-t a fékezett Newton-módszernél leírtak szerint. Az egész program akkor áll meg, ha $\eta < \varepsilon$ és $\sum_{j=k+1}^{m} f_j(x)^2$ meg az első egyenlet jobb oldala normanégyzetének összege kisebb mint $\delta^2$. Egy olyan $x \in X^-$ pontból indulunk, amely mindegyik függvény értelmezési tartományában benne van, $y_j$ kezdőértéke $-1/(tf_j(x))$, ha $j = 1, \ldots, k$, a többi $y_j$ tetszőleges, például nulla. Nincs garancia a konvergenciára, kivéve, ha az $f_i$, $i = 0, 1, \ldots, k$ függvények szigorúan konvexek, az $f_j$, $j = k+1, \ldots, m$ függvények pedig lineáris plusz konstans alakúak.

Ha nem tudunk pontot $X^-$-ban, amire minden $f_i$ értelmezve van, de ismerjük az értelmezési tartományok egy közös pontját, akkor az $f_0 \to \min$, $f_j \leq s$, $j = 1, \ldots, k$, $f_j = 0$, $j = k+1, \ldots, m$, $s = 0$ problémát próbáljuk megoldani. Ha csak külön-külön tudunk egy-egy $z_i \in \operatorname{dmn}(f_i)$ pontot, akkor az $f_0(x + z_0) \to \min$, $f_j(x + z_j) \leq s$, $j = 1, \ldots, k$, $f_j(x + z_j) = 0$, $j = k+1, \ldots, m$, $s = 0$, $z_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$ problémát próbáljuk megoldani.

## 8.3 Integrálszámítás

**8.3.1. Többváltozós függvények integrálja.** Egy $\mathbb{R}^m$-beli *m dimenziós tégla* alatt egydimenziós $T_j = [a_j, b_j]$, $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ korlátos, zárt, pozitív hosszúságú intervallumok

$$T = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m$$

Descartes-szorzatát értjük. A $T$ tégla $|T|$ *mérték*e az oldalhosszak szorzata, $\prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$. A $T$ tégla egy *felosztás*án tégláknak egy olyan $T_1, T_2, \ldots T_k$ véges sorozatát érjük, amelyek egyesítése $T$, és amelyeknek páronként nincs közös belső pontjuk.

Egy $P$ *pontozott felosztás* alatt egy felosztást értünk, amelynek minden $T_j$ résztéglájához meg van adva egy $t_j \in T_j$ pont, azaz $P = \{(T_j, t_j) : t_j \in T_j, j = 1, 2, \ldots, k\}$. Legyen $\delta : T \to \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy a $T$ egy $(T_j, t_j)$ pontozott résztéglája $\delta$-finom, ha $T_j \subset \mathbb{U}_{\delta(t_j)}(t_j)$; a $P$ pontozott felosztás *$\delta$-finom*, ha a $(T_j, t_j)$ résztéglák mind $\delta$-finomak, ha $j = 1, 2, \ldots, k$. Legyen $f : T \to \mathbb{K}^n$ egy függvény. A $T$ tégla $P$ pontozott felosztásához hozzárendeljük az

$$s(f, P) = \sum_{j=1}^{k} |T_j| f(t_j)$$

*Riemann-összeget*. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvény *integrálható* $T$-n, és *integrálja* $S$, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz van olyan $\delta\colon T \to \mathbb{R}^+$, hogy minden $\delta$-finom $P$ pontozott felosztásra $\left|S - s(f,P)\right| < \varepsilon$.

Az így kapott integrálfogalom jóval általánosabb, mint a szokásos Riemann-integrál, amit akkor kapunk, ha $f$ korlátos és $\delta$ nem függvény, hanem konstans.

**8.3.2. Tétel.** *Ha a $T \subset \mathbb{R}^m$ téglának a $T_1, \dots T_k$ téglák páronként közös belső pont nélküli résztéglái, akkor $\sum_{j=1}^k |T_j| \le |T|$. Ha a $T_1, \dots, T_k$ téglák a $T$ egy felosztását alkotják, akkor $\sum_{j=1}^k |T_j| = |T|$.*

$\star$ **Bizonyítás.** Nyilvánvaló, hogy ha a $T$ tégla valamelyik $[a_i, b_i]$ oldalát kettéosztjuk egy $a_i < c_i < b_i$ számmal, a kapott két résztégla mértékének összege $T$ mértéke. Osszuk ketté a $T$ tégla $i$-edik oldalát minden olyan $c_i$ számmal, amely valamely $T_j$ tégla $i$-edik oldalának végpontja, és amelyre $a_i < c_i < b_i$. Tegyük ezt meg minden $1 \le i \le m$-re. A kapott résztéglák összmértéke $T$ mértéke. A kapott résztéglák közül azok összmértéke, amelyeknek van közös belső pontja a $T_j$ téglával, a $T_j$ mértéke. Mivel egy résztéglának legfeljebb egy $T_j$ téglával lehet közös belső pontja, kapjuk az első állítást. Mivel a második esetben minden résztéglának van közös belső pontja valamely $T_j$-vel, a második állítás is kiadódik. $\square$

**8.3.3. Tétel.** *Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$. Minden $\delta\colon T \to \mathbb{R}^+$ függvényhez van olyan $P$ pontozott beosztása $T$-nek, amely $\delta$-finom.*

$\star$ **Bizonyítás.** A bizonyítást $m$ szerinti indukcióval végezzük. Tegyük fel, hogy már tudjuk az állítást $m-1$-re, $m > 1$. Legyen $T = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ és

$$T' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{m-1}, b_{m-1}].$$

Tekintsük azon $a_m < x \le b_m$ számok $X$ halmazát, amelyekhez $T' \times [a_m, x]$-nek van olyan pontozott felosztása, amely $\delta$-finom. Mivel $T'$-nek van $m-1$-dimenziós $\delta$-finom pontozott felosztása, és ezen felosztásnak bármely $T''$ résztéglája csúcsai a $T''$-höz tartozó $t''$ ponttól kisebb, mint $\delta(t'')$ távolságra vannak, valamely $x > a_m$-re $t'' \times [a_m, x]$ része a $t''$ középpontú, $\delta(t'')$ sugarú környezetnek. Mivel véges sok résztégla van, és ez mindegyikre igaz, azt kapjuk, hogy $X$ nem üres. Legyen $c = \sup X$. Ugyanez a gondolatmenet mutatja, hogy $c \in X$, és a $c < b_m$ esetben ellentmondásra vezet. Végül az $m = 1$ esetben is ugyanez a gondolatmenet működik. $\square$

**8.3.4. Következmény.** *$\mathbb{R}^m$-ben bármely tégla kompakt.*

**Bizonyítás.** Legyen $V_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ a $T$ tégla egy lefedése. Minden $t \in T$-re van olyan $\delta(t) > 0$, hogy $\mathbb{U}_{\delta(t)}(t) \subset V_\gamma$ valamely $\gamma \in \Gamma$-ra. Egy $\delta$-finom pontozott felosztás pontjaihoz tartozó $V_\gamma$ halmazokat kiválasztva, $T$ egy véges lefedését kapjuk. $\square$

**8.3.5. Tétel: az integrál egyértelműsége.** *Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ tégla. Ha $S'$ és $S''$ is az $f\colon T \to \mathbb{K}^n$ függvény integrálja, akkor $S' = S''$.*

Az integrált a továbbiakban $\int_T f$t felett f felett f $_T f$ fogja jelölni.

**Bizonyítás.** Ha $S' \ne S''$, az $\varepsilon = |S' - S''|/2$ választással, léteznek megfelelő $\delta', \delta''\colon T \to \mathbb{R}^+$ függvények. Legyen $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Választva egy $\delta$-finom pontozott beosztást, ellentmondást kapunk. $\square$

**8.3.6. Tétel: az integrál linearitása.** *Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ egy tégla, az $f, g\colon T \to \mathbb{K}^n$ függvények integrálhatók $T$-n és $c \in \mathbb{K}$, akkor az $f+g$ és $cf$ függvények is integrálhatók $T$-n és*

$$\int_T (f+g) = \int_T f + \int_T g, \quad \int_T (cf) = c \int_T f.$$

**Bizonyítás.** Legyen $S'$, illetve $S''$ az $f$, illetve a $g$ integrálja, $S = S' + S''$, és $\delta'$, $\delta''$ az adott $\varepsilon > 0$-hoz tartozó függvények. Ha $P$ finomabb a $\delta'$ és $\delta''$ minimumánál, akkor $\bigl|S - s(f+g, P)\bigr| < 2\varepsilon$. A második állítás következik abból, hogy $s(cf, P) = cs(f, P)$. □

**8.3.7. Tétel: integrál és koordinátafüggvények.** *Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ tégla. Egy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)\colon T \to \mathbb{K}^n$ függvény pontosan akkor integrálható, ha az $f_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ koordinátafüggvények integrálhatóak, és ekkor*

$$\int_T f = \Bigl(\int_T f_1, \int_T f_2, \ldots, \int_T f_n\Bigr).$$

A tétel lehetővé teszi, hogy a továbbiakban valós értékű függvényekre szorítkozzunk.

**Bizonyítás.** Ha $f$ integrálható és integrálja $S$, akkor $\bigl|S - s(f, P)\bigr| < \varepsilon$ esetén $\bigl|S_j - s(f_j, P)\bigr| < \varepsilon$, ha $j = 1, 2, \ldots, n$, így az $f_j$ koordinátafüggvények integrálhatóak és integráljuk $S_j$. Megfordítva, ha az $f_j$ koordinátafüggvények integrálhatóak, integráljuk $S_j$, akkor az $\varepsilon > 0$-hoz tartozó $\delta_j$ függvények $\delta$ minimumát véve, $\delta$-nál finomabb $P$-re $\bigl|S_j - s(f_j, P)\bigr| < \varepsilon$, ahonnan $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ jelöléssel $\bigl|S - s(f, P)\bigr| < n\varepsilon$, tehát $f$ integrálható. □

**8.3.8. Tétel: az integrál nemnegativitása.** *Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ tégla, és az $f\colon T \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvény integrálható, akkor $\int_T f \geq 0$.*

**Bizonyítás.** Következik abból, hogy minden Riemann-összeg nemnegatív. □

**8.3.9. Következmény: az integrál monotonitása.** *Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ tégla, és az $f, g\colon T \to \mathbb{R}$ függvények integrálhatóak, $f \leq g$, akkor $\int_T f \leq \int_T g$.*

**Bizonyítás.** Következik abból, hogy $g - f \geq 0$. □

**8.3.10. Megjegyzés.** Ha $T \subset \mathbb{R}^m$ egy tégla, $a, b \in \mathbb{R}^m$ és $a = (a_1, a_2, \ldots a_m)$ koordinátái mind nem nullák, $g(x) = \langle a, x\rangle + b$, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és egyenlőek:

$$\int_T f(x)\,dx \quad \text{és} \quad \int_{g(T)} |a_1 a_2 \cdots a_m| f\bigl(\langle a, x\rangle + b\bigr)\,dx.$$

Ez abból következik, hogy az integrálközelítő összegek megegyeznek. □

Technikailag kicsit nehezebben, de lényegében ugyanúgy, mint az egyváltozós esetben, következik az alábbi tétel.

**8.3.11. Az integrál mint téglafüggvény additivitása.** *Ha $T_1, \ldots, T_k$ a $T$ tégla egy felosztása, akkor $f$ pontosan akkor integrálható $T$-n, ha minden $T_i$-n integrálható, és ekkor*

$$\int_T f = \sum_{j=1}^{k} \int_{T_j} f. \ \square$$

**8.3.12. Tétel: határátmenet és integrál felcserélése egyenletes konvergenciánál.** *Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ egy zárt tégla, és $f_n: T \to \mathbb{R}$ integrálható függvények egy sorozata, amely egyenletesen konvergál egy $f: T \to \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor $f$ is integrálható és*

$$\int_T f = \lim_{n\to\infty} \int_T f_n.$$

Természetesen a tétel sorokra is átvihető.

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Van olyan $N$, hogy $n \geq N$ esetén $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \varepsilon$ minden $x \in T$-re. Nyilván bármely $P$ felosztására $T$-nek $\left|s(f,P) - s(f_n,P)\right| \leq \varepsilon|T|$ ha $n \geq N$. Létezik olyan $\delta_n: T \to \mathbb{R}^+$, hogy minden $\delta$-finom $P$ felosztására $T$-nek $\left|s(f_n,P) - \int_T f_n\right| \leq \varepsilon$. Innen $\delta = \min\{\delta_n, \delta_m\}$ választással egy $\delta$-finom $P$ felosztást használva $\left|\int_T f_n - \int_T f_m\right| \leq 2\varepsilon(|T|+1)$, ha $n, m \geq N$, azaz az integrálok sorozata Cauchy-sorozat. Legyen a határértéke $S$. Mivel határátmenettel $\left|\int_T f_n - S\right| \leq 2\varepsilon(|T|+1)$, például egy $\delta_N$-nél finomabb $P$ felosztásra $\left|s(f,P) - S\right| \leq 3\varepsilon(|T|+1)$, azaz $f$ integrálható és integrálja $S$.

**8.3.13. Példa.** Legyen $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, ha $0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. De a konvergencia nem lehet egyenletes, mert

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n \, dx = \frac{1}{2n+2},$$

tehát

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n \, dx = \frac{n}{2n+2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ha $0 \leq x \leq 1$ esetén $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$, akkor $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, de

$$\int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n \, dx = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty \neq 0.$$

Mint a példák mutatják, a pontonkénti konvergencia nem elegendő, valamilyen kiegészítő feltétel még szükséges. Ezzel a Lebesgue-integrálnál foglalkozunk.

Hasonlóan, mint az egyváltozós esetben, definiálhatók a nullahalmazok.

**8.3.14. Nullahalmazok.** Egy $H \subset \mathbb{R}^m$ halmaz *nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\mathbb{R}^m$-beli téglákból álló megszámlálható $T_j$ rendszer, amely lefedi $H$-t, és amelyre $\sum_j |T_j| < \varepsilon$. Ha valamilyen $\mathbb{R}^m$ pontjaira vonatkozó feltétel egy nullahalmaz kivételével teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* teljesül.

Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz. Megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz, hiszen az elsőt lefedve egy $\varepsilon/2$-nél kisebb összmértékű megszámlálható téglarendszerrel, a másodikat lefedve egy $\varepsilon/2^2$-nél kisebb összmértékű téglarendszerrel stb., a téglarendszerek egyesítése olyan megszámlálható téglarendszer, amelynek összmértéke kisebb, mint $\varepsilon$. Speciálisan, megszámlálható halmaz nullahalmaz. Nem nehéz megmutatni, hogy bármely hipersík nullahalmaz.

Érvényben marad a Lebesgue-feltétel és hogy majdnem mindenütt egyenlő függvények egyszerre integrálhatóak; a bizonyítás is hasonló mint egy változóban.

**8.3.15. Tétel: ismételt integrálás.** *Legyen $I$ az $\mathbb{R}^i$, a $J$ pedig az $\mathbb{R}^j$ tér egy téglája. Ha $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ integrálható, akkor majdnem minden $x \in I$-re létezik az $\int_J f(x,y)\,dy$ integrál, majdnem minden $y \in J$-re létezik az $\int_J f(x,y)\,dy$ integrál, továbbá az alábbi integrálok mind léteznek és*

$$\int_{I\times J} f = \int_I \int_J f(x,y)\,dy\,dx = \int_J \int_I f(x,y)\,dx\,dy.$$

Többször alkalmazva a tételt, többváltozós függvények integráljának kiszámítását tetszőleges sorrendben végzett egyváltozós integrálásokra vezethetjük vissza.

A bizonyítás nehéz, a hivatkozások megtalálhatóak KurzweilJaroslavKurzweil, JaroslavKurzweil [26] könyvében, 101. o. Inkább a Fubini-tételt fogjuk használni, lásd később. □

**8.3.16. Abszolút integrálható függvények.** Ha $f\colon T \to \mathbb{R}$ egy integrálható függvény egy $T \subset \mathbb{R}^k$ téglán, amelyre $|f|$ is integrálható, akkor azt mondjuk, hogy $f$ *abszolút integrálható* $T$-n. Nyilván ez azzal ekvivalens, hogy az

$$f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{|f| + f}{2} \quad \text{és} \quad f^- = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$$

összefüggésekkel definiált függvények, az $f$ *pozitív rész*e és *negatív rész*e integrálhatóak. Egy komplex értékű $f$ függvényt akkor nevezünk *abszolút integrálható*nak, ha valós és képzetes része abszolút integrálhatóak; ekkor nyilván $\overline{f}$ is abszolút integrálható. Vektor értékű függvényt akkor nevezünk abszolút integrálhatónak, ha a koordinátafüggvényei abszolút integrálhatóak.

Az abszolút integrálhatósággal, improprius integrállal, új változók bevezetésével integrálban itt nem foglalkozunk, mivel egy másik integrálfogalmat is fogunk tanulni, amely a halmazok mértékéből indul, mindjárt az egész téren értelmezett abszolút integrálható függvényeket adja, és helyettesítésre is alkalmasabb. Csak egy tételt bizonyítunk.

**8.3.17. Tétel.** *Legyen $T \subset \mathbb{R}^m$ tégla és $f\colon T \to \mathbb{K}^n$ egy abszolút integrálható függvény. Ekkor*

$$\left|\int_T f\right| \le \int_T |f|.$$

**Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $c = \int_T f$. Ekkor

$$|c|^2 = \sum_{j=1}^n c_j^2 = \sum_{j=1}^n c_j \int_T f_j(x)\,dx = \int_T \langle c, f(x)\rangle\,dx.$$

A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség szerint

$$\langle c, f(x)\rangle \le |c|\big|f(x)\big|,$$

így $|c|^2 \le |c| \int_T |f|$, ahonnan következik az állítás. □

Gyakran az $f$ függvény nem téglán, hanem egy korlátos $H$ halmazon van megadva. Ilyenkor terjesszük ki egy, a halmazt tartalmazó téglára (mindegy, melyikre): a halmazon kívül legyen nulla, és a téglán integráljuk; ez $\int_H f$. Például a tehetelenségi nyomaték már tanult képletét így kaphatjuk: a testen kívül a sűrűség nulla, és az integrált ismételt integrálásra vezetjük vissza. A $H$ halmaz $|H|$ mértékének (területének, térfogatának) meghatározásához az 1-et kell $H$-n integrálni. Az alábbi egy egyszerű, de gyakran használható eset.

**8.3.18. Normál integrációs tartomány.** Egy $H \subset \mathbb{R}^{k+1}$ halmazt *normál integrációs tartomány*nak vagy rövidebben *normál tartomány*nak nevezünk az utolsó koordinátára nézve, ha van olyan $T \subset \mathbb{R}^k$ tégla és vannak olyan $f, g\colon T \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, amelyekre $f \leq g$ a $T$-n mindenütt, és

$$H = \big\{(x, y)\colon x \in T, f(x) \leq y \leq g(x)\big\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$$

Hasonlóan definiálható normál tartomány bármely más koordinátára nézve.

Például egy origó középpontú, $r > 0$ sugarú $\mathbb{R}^{k+1}$-beli zárt gömb normál tartomány; ez $I = [-r, r]^k$,

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - |x|^2}, & \text{ha } |x| < r, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - |x|^2}, & \text{ha } |x| < r, \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

választással adódik.

**8.3.19. Tétel.** *Normál tartomány határa nullahalmaz.*

**Bizonyítás.** Elég belátni, hogy a

$$\big\{(x, y)\colon x \in T, y = f(x)\big\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{k+1}$$

halmaz, az $f$ grafikonja nullahalmaz, mert $a = \inf_{x\in I} f(x)$, $b = \sup_{x\in I} g(x)$ jelölésekkel $\partial H$ része $f$ és $g$ grafikonja, valamint a $\partial T \times [a, b]$ halmaz egyesítésének, és ez utóbbi nyilván nullahalmaz. Az $f$ folytonossága miatt adott $\varepsilon > 0$-hoz és minden $t \in T$-hez van olyan $\delta(t) > 0$, hogy ha $|x - t| < \delta(t)$, akkor $\big|f(x) - f(t)\big| < \varepsilon$. Legyen $T_1, T_2, \dots T_n$ egy $\delta$-finom felosztása $T$-nek. A $T_j \times \big[f(t_j) - \varepsilon, f(t_j) + \varepsilon\big]$, $j = 1, 2, \dots, n$ téglák $2\varepsilon|T|$-nél kisebb összmértékű lefedését alkotják $f$ grafikonjának. $\square$

**8.3.20. Példa: forgástest térfogata.** Bebizonyítjuk a már tanult képletet. Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy mindenütt pozitív, folytonos függvény. Határozzuk meg az ezen függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli forgatásával kapott

$$H = \big\{(x, y, z)\colon x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\big\}$$

forgástest térfogatát. A $K = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$ jelöléssel, az $y = f(x)\sin t$ helyettesítéssel

$$
\begin{aligned}
|H| &= \iiint_H 1\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{-K}^{K} \int_{-K}^{K} \xi_H\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \int_{-\sqrt{f^2(x)-y^2}}^{\sqrt{f^2(x)-y^2}} 1\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} 2\sqrt{f^2(x)-y^2}\,dy\,dx = \int_a^b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{f^2(x)-f^2(x)\sin^2 t}\,f(x)\cos t\,dt\,dx \\
&= \int_a^b 2f^2(x) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\,dx = \int_a^b f^2(x) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt\,dx \\
&= \int_a^b f^2(x) \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

**8.3.21. Feladat [5].** Határozzuk meg az $xy = a^2$ és $x + y = 5a/2$, $a > 0$ görbékkel határolt tartomány területét!

**8.3.22. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi felületekkel határolt test térfogatát:

$$z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

**8.3.23. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi felületekkel határolt test térfogatát:

$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4.$$

**8.3.24. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját a megadott halmazon:

(1) $x^2 + y^2$, $x, y \geq 0$, $x + y \leq 1$;

(2) $\sqrt{y - x^2}$, $x^2 \leq y \leq 4$;

(3) $1/\sqrt{2a - x}$, $x \leq a$, $(x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2$, $a > 0$;

(4) $\sin x\sqrt{1 + e^{x^2y^2}}/(\cosh x \cosh y)$, $x^2 + y^2 \leq R^2$;

(5) $x + y$, $y^2 \leq 2x$, $x + y \geq 4$, $x + y \leq 12$;

(6) $1 - x^2 - y^2$, $y \leq 1 - x^2$, $y \geq 0$.

**8.3.25. Feladat [8].** Határozzuk meg a következő halmazok súlypontját:

(1) $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$;

(2) $x, y \geq 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1$;

(3) $x, y \geq 0$, $y \geq x^2$, $x + y \leq 1$;

(4) $(x^2 + y^2)^3 \leq 4x^2y^2$;

(5) $x, y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq z \leq x + y$.

**8.3.26. Tétel: paraméteres integrálok differenciálása.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum, és $K \subset \mathbb{R}^k$ egy kompakt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f\colon I \times K \to \mathbb{R}$ függvényre minden $t \in I$-re létezik a*

$$\varphi(t) = \int_K f(t,x)\,dx$$

*integrál, továbbá — a végpontokban bal, illetve jobb oldali deriváltat értve — minden $(t,x) \in I \times K$-ra létezik és folytonos az $f_t$ parciális derivált. Ekkor ha a jobb oldali integrál létezik, akkor $\varphi$ differenciálható $I$-n és minden $t \in I$-re*

$$\varphi'(t) = \int_K f_t(t,x)\,dx.$$

Későbbi tételekből következni fog, hogy az integrálok léteznek, létezésüket nem kell külön feltenni.

**Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $f_t$ folytonos az $I \times K$ kompakt halmazon, ott egyenletesen is folytonos, így van olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in K$, $t, u \in I$ és $|t-u| < \delta$, akkor $\left|f_t(t,x) - f_t(u,x)\right| < \varepsilon$. Legyen $s \in I$ úgy, hogy $0 < |t-s| < \delta$ teljesüljön. A Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$$\frac{f(s,x) - f(t,x)}{s-t} = f_t(u,x),$$

ahol $u$ a $t$ és $s$ között van és függ $t$-n és $s$-en kívül $x$-től is. Integrálva $x$ szerint, azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s-t} - \int_K f_t(t,x)\,dx\right| \le \varepsilon|K|.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, kapjuk, hogy $\varphi$ differenciálható $t$-ben, és deriváltja $\int_K f_t(t,x)\,dx$.

**8.3.27. Feladat [9].** Legyen $t \ge 0$ esetén $f(t,x) = x$, ha $0 \le x \le \sqrt{t}$, $f(t,x) = 2\sqrt{t} - x$, ha $\sqrt{t} \le x \le 2\sqrt{t}$, és nulla egyébként. Ha $t < 0$, legyen $f(t,x) = -f(-t,x)$. Bizonyítsuk be, hogy $f$ folytonos a síkon. Legyen $\varphi(t) = \int_{-1}^{1} f(t,x)\,dx$. Mutassuk meg, hogy $\varphi(t) = t$, ha $|t| \le 1/4$, és hogy

$$1 = \varphi'(0) \ne \int_{-1}^{1} f_t(t,0)\,dx = 0.$$

## 8.4 Görbe menti integrál

*Mindenki tudja, mi egy görbe, amíg elég matematikát nem tanul, hogy zavarba hozza a számtalan kivétel.*

*Felix Klein*

Ez a paragrafus vektor változós függvények primitív függvénye meghatározásának problémájával foglalkozik, pontosabban azzal, mikor létezik primitív függvény, és ha létezik, hogyan határozhatjuk meg. Az általános eset lényegesen bonyolultabb, mint a valós változós függvények esete. Eszközünk a görbe menti integrál lesz. Mint az alkalmazásoknál volt szó róla, például az $F$ erőtér által a $g$ görbe mentén való mozgáskor végzett munkát

$$\sum F(g(t_i)) \cdot (g(x_i) - g(x_{i-1})$$

típusú öszegek közelítik, ahol a pont a belső szorzás. Először általánosabb,

$$\sum f(t_i) \cdot (g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

típusú összegek által közelített úgynevezett Stieltjes-integrálokat fogunk vizsgálni, ahol a szorzás egy tetszőleges bilineáris leképezés. Ebből a görbe menti integrál speciális esetként adódik.

**8.4.1. Definíció.** Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}^n$ függvény *változás*án a

$$\mathop{\mathbb{V}}_a^b f = \mathbb{V}(f) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| : a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_k = b\Big\}$$

bővített valós számot értjük. Ha $\mathbb{V}(f) < +\infty$, akkor $f$-et *korlátos változású*nak nevezzük. Ha $a \le c \le d \le b$, akkor használni fogjuk az $\mathbb{V}_c^d(f)$ jelölést $f|_{[c,d]}$ változásának jelölésére. Legyen $\mathbb{V}_d^c f = -\mathbb{V}_c^d f$.

**8.4.2. Tétel.** *Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}^n$ egy függvény, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor*

(1) *ha $a \le c \le b$, akkor $\mathbb{V}_a^b f = \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$, így a $c \mapsto \mathbb{V}_a^c f$ változásfüggvénye $f$-nek monoton növekedő;*

(2) *ha $f = (f_1, \ldots, f_n)$, akkor $\mathbb{V}(f_j) \le \mathbb{V}(f) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(f_i)$, ha $j = 1, \ldots, n$;*

(3) *$\mathbb{V}(f + g) \le \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g)$;*

(4) *$\mathbb{V}(\alpha f) = |\alpha|\,\mathbb{V}(f)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$).*

(5) *az $f$ függvény pontosan akkor folytonos balról, illetve jobbról egy $x \in [a,b]$ pontban, ha a változásfüggvénye balról, illetve jobbról folytonos $x$-ben.*

⋆ **Bizonyítás.** (1) bizonyításához, ha

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_k = b$$

és $x_j \le c \le x_{j+1}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{k} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| \le \sum_{i=1}^{j} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| + \big|f(c) - f(x_j)\big|$$
$$+ \big|f(x_{j+1}) - f(c)\big| + \sum_{i=j+2}^{k} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| \le \mathop{\mathbb{V}}_a^c f + \mathop{\mathbb{V}}_c^b f,$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \le \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$. Megfordítva,

$$\mathop{\mathbb{V}}_a^b f \ge \sum_{i=1}^{j} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| + \sum_{i=j+1}^{k} \big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big|,$$

amiből $\mathbb{V}_a^b f \geq \mathbb{V}_a^c f + \mathbb{V}_c^b f$.

(2)-t úgy kapjuk, hogy a megfelelő egyenlőtlenséget felírjuk egy felosztásra, majd előbb a jobb, aztán a bal oldalon veszünk szuprémumot. (3) ugyanígy adódik. (4) mindkét oldala ugyanazon számhalmaz szuprémuma.

(5) bizonyításához tegyük fel, hogy $f$ balról folytonos az $a < x \leq b$ pontban, és jelölje $s$ a változásfüggvényét. Legyen $\varepsilon > 0$ és válasszunk egy olyan $\delta > 0$-t, amelyre $x - \delta \leq t < x$ esetén $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2$, továbbá olyan

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = x$$

beosztást, amelyre $s(x) - \varepsilon/2 < \sum_{j=1}^{k} \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big|$ és $x_{k-1} > x - \delta$. Mivel a jobb oldali összeg utolsó tagja kisebb, mint $\varepsilon/2$,

$$s(x) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{k-1} \big|f(x_j) - f(x_{j-1})\big| \leq s(x_{k-1}).$$

Ebből $t \geq x_{k-1}$ esetén $s(x) - s(t) < \varepsilon$, azaz $s$ balról folytonos $x$-ben. A jobb oldali folytonosság hasonlóan látható be. A másik irány nyilvánvaló, mivel $x \leq y$ esetén

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq \mathop{\mathbb{V}}_{x}^{y} f. \ \square$$

**8.4.3. Jordan felbontási tétele.** *Legyen* $-\infty < a < b < +\infty$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos változású, és* $s$ *a változásfüggvénye. Ekkor az*

$$f_+(x) = \frac{s(x) + f(x)}{2} \quad \textit{és} \quad f_-(x) = \frac{s(x) - f(x)}{2}, \quad \textit{ha} \quad x \in [a,b]$$

*függvények monoton növekedőek és* $f = f_+ - f_-$

A tételben szereplő előállítása $f$-nek két monoton növekedő függvény különbségeként az $f$ *Jordan-felbontása*. Ilyen felbontás több is van, a tételben szereplő felbontás minimális abban az értelemben, hogy $\mathbb{V}(f_+) + \mathbb{V}(f_-)$ megegyezik $\mathbb{V}(f)$-fel, és nem több. Nem nehéz belátni, hogy egy minimális felbontás konstanstól eltekintve már egyértelmű.

**Bizonyítás.** Mivel $a \leq x \leq y \leq b$ esetén $\big|f(x) - f(y)\big| \leq \mathbb{V}_x^y f$, így egyrészt $f(x) - f(y) \leq \mathbb{V}_x^y f$, tehát

$$f_+(y) - f_+(x) = \frac{1}{2}\big(\mathop{\mathbb{V}}_{x}^{y} f - f(x) + f(y)\big) \geq 0,$$

másrészt $f(y) - f(x) \leq \mathbb{V}_x^y f$, tehát

$$f_-(y) - f_-(x) = \frac{1}{2}\big(\mathop{\mathbb{V}}_{x}^{y} f + f(x) - f(y)\big) \geq 0.$$

**8.4.4. Megjegyzés.** Az előző tétel mutatja, hogy a monoton függvényekre vonatkozó tételek nagy része teljesül korlátos változású függvényekre is: bal és jobb oldali határértékek létezése, megszámlálható sok szakadási hely stb.

**8.4.5. Pályák.** A $\gamma$ görbe *hosszán* a görbe $\mathbb{V}(\gamma)$ változását értjük. Ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, akkor $\gamma$-t *rektifikálható görbének* vagy *pályának* nevezzük. Ha egy zárt görbe pálya, akkor *zárt pályának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ekvivalens görbéknek, illetve egy görbének és a megfordításának ugyanaz a hossza.

**8.4.6. Tétel.** *Egy $g\colon [a,b] \to \mathbb{K}^n$ differenciálható görbe pontosan akkor pálya, ha a deriváltja abszolút integrálható és*

$$\mathop{\mathbb{V}}_a^b g = \int_a^b |g'|.$$

$\star$ **Bizonyítás.** Ha $g'$ abszolút integrálható és

$$a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_k = b,$$

akkor

$$\sum_{j=1}^k \big|g(x_j) - g(x_{j-1})\big| = \sum_{j=1}^k \left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} g'(x)\,dx\right| \le \sum_{j=1}^k \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big|g'(x)\big|\,dx$$
$$\le \int_a^b \big|g'(x)\big|\,dx,$$

ahonnan következik, hogy $g$ pálya.

Tegyük fel, hogy $g$ pálya. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Van olyan $a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b$, amelyre $\mathbb{V}(g) < \sum_{j=1}^k \big|g(y_j) - g(y_{j-1})\big| + \varepsilon$. Mivel $g$ differenciálható, folytonos is és így egyenletesen folytonos. Van tehát olyan $\delta > 0$, amelyre $\big|g(t) - g(s)\big| < \varepsilon/(2k)$, ha $|s - t| < \delta$. Mivel $g$ differenciálható, minden $t \in [a,b]$-hez van olyan $\delta'(t) > 0$, hogy ha $t \ne y$, $|y - t| < \delta'(t)$, akkor

$$\left|\frac{g(y) - g(t)}{y - t} - g'(t)\right| \le \varepsilon,$$

ahonnan $\big|g(y) - g(t) - g'(t)(y - t)\big| \le \varepsilon|y - t|$, ha $|y - t| < \delta(t)$. A $\delta'(t)$ számokat választhatjuk úgy, hogy értékük legfeljebb $\delta$ legyen. Innen bármely $\delta'$-finom $a = x_0 \le t_0 \le x_1 \le \ldots \le t_n \le x_n = b$ pontozott felosztásra

$$\Big|\big|g(x_j) - g(t_j)\big| - \big|g'(t_j)\big|(x_j - t_j)\Big| \le \varepsilon(x_j - t_j)$$

és

$$\Big|\big|g(t_j) - g(x_{j-1})\big| - \big|g'(t_j)\big|(t_j - x_{j-1})\Big| \le \varepsilon(t_j - x_{j-1}),$$

$j = 1, 2, \ldots, n$. Így

$$\left|\sum_{j=1}^n \Big(\big|g(x_j) - g(t_j)\big| + \big|g(t_j) - g(x_{j-1})\big|\Big) - \sum_{j=1}^n \big|g'(t_j)\big|(x_j - x_{j-1})\right| \le \varepsilon(b - a).$$

A zárójelben álló összeg osztópontjaihoz egyenként adjuk hozzá az $y_1, \ldots y_{k-1}$ pontokat. Minden pont hozzáadásakor az összeg legfeljebb $\varepsilon/k$-val nő, viszont az eredmény legalább $\mathbb{V}(g) - \varepsilon$ lesz. Így azt kapjuk, hogy

$$\left|\mathbb{V}(g) - \sum_{j=1}^n \big|g'(t_j)\big|(x_j - x_{j-1})\right| \le \varepsilon(b - a) + 2\varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, $|g'|$ integrálható és $\mathbb{V}(g) = \int_a^b |g'|$. Megkaptuk az egyenlőséget, de azt, hogy $g'$ abszolút integrálható, csak a valós értékű esetben. Viszont ha $g$ vektor értékű, akkor a (valós) koordináta függvényei is korlátos változásúak, így az eddig bizonyítottak szerint mindegyiknek a deriváltja abszolút integrálható. $\square$

**8.4.7. Megjegyzés.** A tétel általánosabb esetekben is érvényes. Például ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{K}^n$ abszolút integrálható és $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, akkor is igaz, hogy

$$\mathbb{V}(g) = \int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\,dx,$$

pedig ekkor $g'$ csak majdnem mindenütt létezik és majdnem mindenütt egyenlő $f$-fel.

**8.4.8. Példák.** A legegyszerűbb sima pálya a *lineáris pálya.* Gyakran fogunk *szakaszonként lineáris pályá*kat használni. Legegyszerűbb zárt pályák a három lineáris szakaszból álló *háromszögpálya* és a komplex síkban a

$$\gamma(t) = c + re^{2\pi int}, \qquad t \in [0,1], \quad c \in \mathbb{C}, \quad r > 0, \quad 0 \neq n \in \mathbb{Z}$$

*körpályá*k. Ha $n > 0$, akkor ez a körpálya a $c$ középpontú, $r$ sugarú kör kerületét „pozitív körüljárási irányban”, ha pedig $n < 0$, akkor „negatív körüljárási irányban” $|n|$-szer futja be.

**8.4.9. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(x) = |x|^\alpha \sin(|x|^{-\beta}$, $f(0) = 0$, és $\alpha \le \beta$, akkor $f$ nem korlátos változású görbe $[-1,1]$-en! Mivel tudjuk, hogy $\alpha > 1$ esetén $f$ differenciálható, a deriváltja $\beta \ge \alpha > 1$ esetén integrálható, de nem abszolút integrálható.

**8.4.10. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy a

$$\gamma_1(t)e^{it}, \quad \gamma_2(t) = e^{2it}, \quad \gamma_3(t) = e^{2\pi it\sin(1/t)}, \quad \text{ha} \quad t \in [0, 2\pi]$$

($\gamma_3(0) = 1$) görbéknek ugyanaz az értékkészlete, az első hossza $2\pi$, a másodiké $4\pi$, a harmadik nem rektifikálható.

$\star$ **8.4.11. Sima pályák természetes paraméterezése.** Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ egy sima görbe. Ha deriváltja sehol sem nulla, akkor az $s = \varphi(t) = \int_a^t |f'|$ ívhossz szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható függvénye $t$-nek. A $g(s) = f\bigl(\varphi^{-1}(s)\bigr)$ összefüggéssel definiált függvény egy, az $f$-fel ekvivalens görbe. Erre

$$\left|\frac{dg}{ds}\right| = \left|\frac{df}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \bigl|f'(\varphi^{-1}(s)\bigr|\frac{1}{\varphi'\bigl(\varphi^{-1}(s)\bigr)} = 1,$$

azaz a deriváltja egységvektor. Megfordítva, ha egy paraméterezésben az $s \mapsto g(s) \in \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható görbe deriváltja minden pontban létezik és egységvektor, akkor

$$\int_{s_0}^s |g'| = s - s_0,$$

azaz ez a paraméterezés csak konstansban különbözik az ívhossztól. Ilyen paraméterezéseket a görbe *természetes paraméterezésé*nek fogunk nevezni. Természetes paraméterezés használata sokszor egyszerűsíti a számolásokat.

→ **8.4.12. Feladat** [4]. Határozzuk meg az alábbi teljes változásokat:

$$\mathop{\mathbb{V}}_{0}^{50} e^x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_{1}^{2} \ln x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_{0}^{4\pi} \cos x, \quad \mathop{\mathbb{V}}_{-1}^{1} (x - x^3),$$

$$\mathop{\mathbb{V}}_{0}^{2\pi} (2\sin x - \cos x), \quad \mathop{\mathbb{V}}_{-\pi}^{\pi} (\sin x + 2\cos x), \quad \mathop{\mathbb{V}}_{0}^{4\pi} (\sqrt{3}\sin x - \cos x), \quad \mathop{\mathbb{V}}_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + \cos x\Big).$$

**8.4.13. Feladat** [9]. Vizsgáljuk meg, hogy az $f(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $x \neq 0$, $f(0) = 0$ függvény milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ értékekre lesz $[-1, 1]$-en korlátos változású!

→ **8.4.14. Feladat** [9]. Legyen $f(x) = x^2 \sin x^{-2}$, ha $0 \neq x \in [-1, 1]$ és legyen $f(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy $f$ mindenütt differenciálható $[-1, 1]$-en, de a deriváltja nem abszolút integrálható.

**8.4.15. Feladat** [7]. Mutassuk meg, hogy az $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \cos(x^{-2})$, ha $0 < x \leq 1$ függvény differenciálható, de nem korlátos változású $[0, 1]$-en, így a $g(0) = 0$, $g(x) = x^2 \sin(x^{-2})$, ha $0 < x \leq 1$ függvény integrálható, de nem abszolút integrálható $[0, 1]$-en.

**8.4.16. Feladat** [9]. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén lesz a $\gamma(0) = 0$, $\gamma(x) = |x|^\alpha \sin |x|^\beta$, ha $-1 \leq x \leq 1$ összefüggéssel definiált függvény pálya?

**8.4.17. Stieltjes-integrál.** Legyen $(x, y) \mapsto x \cdot y$ egy mindkét változójában lineáris leképezése $X \times Y$-nak $Z$-be, ahol $X$, $Y$ és $Z$ véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ felett. Egy ilyen leképezést gyakran (pontatlanul) *szorzás*nak fogunk nevezni, és $x \cdot y$ helyett csak $xy$-t írunk. Tudjuk, hogy van olyan minimális konstans, a $\cdot$ bilineáris leképezés $\| \cdot \|$ normája, amelyre $|x \cdot y| \leq \| \cdot \| |x| |y|$ minden $x \in X$, $y \in Y$-ra. Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f\colon [a, b] \to X$, $g\colon [a, b] \to Y$ függvények. Ha $a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ egy felosztás és $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$, azaz adott egy $P$ pontozott felosztásunk, akkor jelölje

$$s(f, g, P) = \sum_{j=1}^{n} f(\tau_j)(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

az $f$-nek $g$-re vonatkozó, a $P$ pontozott felosztáshoz tartozó *Riemann–Stieltjes integrálközelítő összeg*ét. Ha létezik olyan $S \in Z$, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$, amelyre bármely $\delta$-nál finomabb pontozott felosztásra $\big|s(f, g, P) - S\big| \leq \varepsilon$, akkor azt mondjuk, hogy $S$ az $f$ függvénynek a $g$-re vonatkozó *integrál*ja $[a, b]$-n. Ugyanúgy, mint a közönséges integrálnál, adódik, hogy $S$ egyértelmű. Jelölése:

$$\int_a^b f\,dg \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(t)\,dg(t).$$

Legyen $\int_a^a f\,dg = 0$ és $\int_b^a f\,dg = -\int_a^b f\,dg$.

**8.4.18. Megjegyzés.** Különböző szorzásokkal különböző integrálokat kaphatunk. Például lehet a szorzás a valós, a komplex, vagy a mátrixszorzás, lehet a valós vagy a komplex belső szorzás, lehet a vektoriális szorzás. Fontos speciális eset, amikor a szorzás az $x$ lineáris operátor alkalmazása $y$-ra. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektoriális szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$-ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_a^b f \times dg$. Az egyik legfontosabb speciális eset az, amikor a szorzás a szokásos skalárral való szorzás, $Y = \mathbb{R}$, és $g(t) = t$, ha $t \in [a, b]$, akkor a már tanult integrált kapjuk.

⋆ **8.4.19. Tétel: Cauchy-kritérium.** *Az előző definíció jelöléseivel egy $f$ függvény pontosan akkor integrálható $g$-re nézve, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-hoz van olyan $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, hogy bármely $\delta$-finom $P', P''$ pontozott beosztásokra*

$$\left|s(f,g,P') - s(f,g,P'')\right| \le \varepsilon.$$

**Bizonyítás.** A $Z = \mathbb{R}$ eset pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint a szokásos integrálra, az általános eset pedig következik az alábbi tétel 8.4.21 (6) pontját felhasználva.

⋆ **8.4.20. Segédtétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$-re és adott $\delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvényre tetszőleges $\delta$-finom $P_1, P_2$ pontozott beosztásaira $[a,b]$-nek*

$$\left|s(f,g,P_1) - s(f,g,P_2)\right| \le \varepsilon,$$

*akkor $a \le a' < b' \le b$ esetén is tetszőleges $\delta$-finom $P_1', P_2'$ pontozott beosztásaira $[a',b']$-nek $\left|s(f,P_1') - s(f,P_2')\right| \le \varepsilon$.*

**Bizonyítás.** Ugyanúgy adódik, mint az 6.2.9 segédtétel. □

**8.4.21. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, legyenek $f, f_j\colon [a,b] \to X$ és $g, g_j\colon [a,b] \to Y$ függvények. Ekkor*

(1) *ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f\,dg = c\big(g(b) - g(a)\big)$;*

(2) *ha $g \equiv c$ konstans, akkor $\int_a^b f\,dg = 0$;*

(3) *ha $\int_a^b f\,dg$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_a^b (cf)\,dg = c\int_a^b f\,dg$ és $\int_a^b f\,d(cg) = c\int_a^b f\,dg$ teljesül; $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha $X$ és $Z$ komplex vektorterek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris az első változóban, akkor*

$$\int_a^b (cf)\,dg = c\int_a^b f\,dg, \quad \text{illetve} \quad \int_a^b (cf)\,dg = \overline{c}\int_a^b f\,dg,$$

*ha pedig $Y$ és $Z$ komplex vektorterek és a szorzás lineáris, illetve konjugált lineáris a második változóban, akkor*

$$\int_a^b f\,d(cg) = c\int_a^b f\,dg, \quad \text{illetve} \quad \int_a^b f\,d(cg) = \overline{c}\int_a^b f\,dg;$$

(4) *ha $\int_a^b f_1\,dg$ és $\int_a^b f_2\,dg$ léteznek, akkor $\int_a^b (f_1+f_2)\,dg = \int_a^b f_1\,dg + \int_a^b f_2\,dg$; ha $\int_a^b f\,dg_1$ és $\int_a^b f\,dg_2$ léteznek, akkor $\int_a^b f\,d(g_1+g_2) = \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2$;*

(5) *ha $W$ is véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $T\colon Z \to W$ egy lineáris leképezés, $\int_a^b f\,dg$ létezik és $x * y = T(xy)$, akkor $\int_a^b f * dg = \int_a^b T(f\,dg) = T\Big(\int_a^b f\,dg\Big)$;*

(6) *ha $Z$ egy adott bázisa esetén $x * y = (x *_1 y, \dots, x *_n y)$, akkor $\int_a^b f * dg$ pontosan akkor létezik, ha az $\int_a^b f *_1 dg, \dots, \int_a^b f *_n dg$ integrálok léteznek, és*

$$\int_a^b f * dg = \left(\int_a^b f *_1 dg, \dots, \int_a^b f *_n dg\right);$$

(7) *ha $Z = \mathbb{R}$, továbbá valamely bázisban*

$$f = (f_1, \ldots, f_k), \quad g = (g_1, \ldots, g_m), \quad xy = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} x_i y_j,$$

*és ha az $\int_a^b f_i \, dg_j$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$ integrálok mind léteznek, ahol a szorzás a valós számok szorzása, akkor az $\int_a^b f \, dg$ integrál is, és értéke*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} \int_a^b f_i \, dg_j;$$

(8) *ha $\int_a^b f \, dg$ létezik, akkor $\left|\int_a^b f \, dg\right| \leq \| \cdot \| \, \mathbb{V}(g) \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$;*

(9) *ha $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő és folytonos függvény, $\int_{h(a)}^{h(b)} f \, dg$ létezik, akkor*

$$\int_a^b (f \circ h) \, d(g \circ h) = \int_{h(a)}^{h(b)} f \, dg$$

*(helyettesítéses integrálás);*

(10) *ha $\int_a^b f \, dg$ létezik és $a < c < b$, akkor $\int_a^c f \, dg$ és $\int_c^b f \, dg$ is léteznek és összegük $\int_a^b f \, dg$;*

(11) *ha $a < c < b$, valamint $\int_a^c f \, dg$ és $\int_c^b f \, dg$ léteznek, akkor $\int_a^b f \, dg$ is létezik;*

(12) *ha $\mathbb{V}_a^b \, g < \infty$ és $f_j \to f$ az $[a, b]$-n egyenletesen, az $\int_a^b f_j \, dg$ integrálok léteznek, akkor $\int_a^b f \, dg$ is létezik, és $\int_a^b f_j \, dg \to \int_a^b f \, dg$;*

(13) *ha $\mathbb{V}_a^b \, g < \infty$, $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$, a sor az $[a, b]$-n egyenletesen konvergál, az $\int_a^b f_j \, dg$ integrálok léteznek, akkor az $\int_a^b f \, dg$ integrál is létezik, és $\sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j \, dg = \int_a^b f \, dg$;*

(14) *ha $f$ és $g$ korlátos változásúak, nincs közös szakadási pontjuk, $\int_a^b f \, dg$ létezik, és $y * x = xy$, akkor $\int_a^b f \, dg + \int_a^b g * \, df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ (parciális integrálás);*

(15) *ha $\int_a^b f \, dg$ létezik, akkor*

$$\lim_{c \downarrow a} \Big( \int_c^b f \, dg + f(a)\big(g(c) - g(a)\big) \Big) = \lim_{c \uparrow b} \Big( \int_a^c f \, dg + f(b)\big(g(b) - g(c)\big) \Big) = \int_a^b f \, dg.$$

(16) *ha minden $a < c < b$-re $\int_a^c f \, dg$ létezik, és a*

$$\lim_{c \downarrow a} \Big( \int_c^b f \, dg + f(a)\big(g(c) - g(a)\big) \Big)$$

*határérték létezik vagy ha minden $a < c < b$-re $\int_c^b f \, dg$ létezik, és a*

$$\lim_{c \uparrow b} \Big( \int_a^c f \, dg + f(b)\big(g(b) - g(c)\big) \Big)$$

*határérték létezik, akkor $\int_a^b f \, dg$ is létezik és megegyezik a határértékkel.*

**Bizonyítás.** (1)–(13) a közelítő összegek segítségével hasonlóan adódnak, mint a szokásos integrálra vonatkozó tételek, felhasználva a Cauchy-kritériumot és az előző lemmát is.

(14) bizonyításához adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszuk úgy a $\delta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvényt, hogy egy $\delta$-finom beosztásra

$$\left|f(\tau_i) - f(t_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|f(t_i) - f(\tau_i)\right| \le \varepsilon$$

vagy pedig

$$\left|g(\tau_i) - g(t_{i-1})\right| \le \varepsilon \quad \text{és} \quad \left|g(t_i) - g(\tau_i)\right| \le \varepsilon$$

teljesüljön. A két integrálközelítő összeg összegéből levonva $f(b)g(b) - f(a)g(a)$-t, a maradék normája legfeljebb $2\|\cdot\|\varepsilon\big(V(f) + V(g)\big)$.

(15) ugyanazzal az eljárással bizonyítható, amelyet az integrál, mint felső határ függvénye folytonosságának bizonyításánál használtunk, (16) pedig a véges intervallumon történő improprius integrálásra vonatkozó tétel bizonyításánál használt eljárással.

**8.4.22. Megjegyzés.** Az integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett integráljainak kiszámítására vezethető vissza 8.4.21 (6) és 8.4.21 (7) segítségével; valós értékű korlátos változású függvény szerinti integrálás Jordan felbontási tétele szerint tovább redukálható, felírható két monoton növekedő függvény szerint vett integrál különbségeként. Például 8.4.21 (6) szerint, ha $X = Y = \mathbb{R}^3$, a szorzás az úgynevezett diadikus szorzás, $xy = (x_i y_j)_{i,j=1}^3$, akkor $\int_a^b f\,dg = \left(\int_a^b f_i\,dg_j\right)_{i,j=1}^3$. Ha a szorzás a belső szorzás, akkor 8.4.21 (7) szerint

$$\int_a^b \langle f, dg\rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_a^b f_i\,dg_i,$$

ha pedig a vektoriális szorzás, akkor 8.4.21 (6) és 8.4.21 (7) szerint $\int_a^b f \times dg$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2\,dg_3 - \int_a^b f_3\,dg_2$, $\int_a^b f_3\,dg_1 - \int_a^b f_1\,dg_3$ és $\int_a^b f_1\,dg_2 - \int_a^b f_2\,dg_1$.

**8.4.23. Nullahalmazok.** Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény. Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *$g$-nullahalmaz*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\mathbb{R}$-beli zárt, nem csak egy pontból álló intervallumokból álló $[a_i, b_i]$ rendszer, amely lefedi, az $a_i$, $b_i$ pontok folytonossági pontjai $g$-nek, és $\sum_i g(b_i) - g(a_i) < \varepsilon$. Ugyanezt kapjuk, ha nyílt intervallumokból, vagy tetszőleges intervallumokból álló rendszert tekintünk, ugyanis ha az összeg $\eta$, akkor minden zárt intervallumot növelhetünk $\varepsilon/\eta$-nál kisebb arányban növelve a függvényértékek különbségét, mivel a végpontok $g$-nek folytonossági pontjai. Nullahalmaz bármely részhalmaza nyilván nullahalmaz és megszámlálható sok nullahalmaz egyesítése nullahalmaz.

**8.4.24. Lebesgue-feltétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő és $g(t) = g(a)$, ha $t < a$, $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha $f$ $g$-majdnem mindenütt folytonos, akkor integrálható.*

**Bizonyítás.** A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a $g(x) = x$ esetben. □

**8.4.25. Következmény.** *Tetszőleges $g$ korlátos változású függvényre, ha $f$ folytonos, akkor $g$-integrálható.* □

**8.4.26. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ és $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő és $g(t) = g(a)$, ha $t < a$, $g(t) = g(b)$, ha $t > b$. Ha az $f_1$ és $f_2$ függvények $g$-majdnem mindenütt megegyeznek, és az $f_1$ függvény $g$-integrálható, akkor $f_2$ is és $\int_a^b f_1\,dg = \int_a^b f_2\,dg$.*

A tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóság és az integrál szempontjából a nullahalmazok „elhanyagolhatóak”. Így olyan függvények integráljáról is beszélhetünk, amelyek csak majdnem mindenütt vannak értelmezve.

**Bizonyítás.** A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a $g(x) = x$ esetben. □

→ **8.4.27. Feladat [8].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat, ha $x \le -1$ esetén $g(x) = x+2$, $-1 < x < 0$ esetén $g(x) = 2$, és $x \ge 0$ esetén $g(x) = x^2 + 3$:

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x), \quad \int_{-2}^{2} x^2\,dg(x), \quad \int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x).$$

**8.4.28. Tétel.** *Legyen $-\infty < a < b < +\infty$, $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, az $f$ korlátos, a $g$ pedig $h$-integrálható, és legyen $G(t) = \int_a^t g\,dh$, ha $a \le t \le b$. Ha az $f$ függvény $G$-integrálható, akkor az $fg$ függvény $h$-integrálható, és $\int_a^b f\,dG = \int_a^b fg\,dh$.*

A tételt leggyakrabban a $h(t) = t$, $g(t) = G'(t)$ esetben használjuk integrálok kiszámítására a Newton–Leibniz-formula segítségével. A bizonyítás megtalálható a JáraiAntalJárai AntalJárai [22] könyvben.

**8.4.29. Következmény: az integrálszámítás középérték-tétele.** *Ha $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, az $f$ monoton a $g$ pedig abszolút integrálható, akkor van olyan $\xi \in [a,b]$, hogy*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

⋆ **Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $f$ monoton növekedő. Az előző tételt fogjuk használni $h(t) = t$ választással. Legyen $G_+(x) = \int_a^x g^+(t)\,dt$, $G_-(x) = \int_a^x g^-(t)\,dt$ és $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f(x)g^+(x)\,dx - \int_a^b f(x)g^-(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\,dG_+(x) - \int_a^b f(x)\,dG_-(x) = \int_a^b f(x)\,dF(x) \\
&= f(b)G(b) - \int_a^b G(x)\,df(x).
\end{aligned}$$

Az $\int_a^b G(x)\,df(x)$ integrál értéke $\inf_{a\le\xi\le b} G(\xi)(f(b)-f(a))$ és $\sup_{a\le\xi\le b} G(\xi)(f(b)-f(a))$ között van, és mivel $G$ folytonos, van olyan $a \le \xi \le b$, hogy

$$\int_a^b G(x)\,df(x) = G(\xi)(f(b)-f(a)).$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) - f(b)G(\xi) + f(a)G(\xi) - f(a)G(a)$$
$$= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

⋆ **8.4.30. Feladat [10].** Legyen $-\infty < a < b < +\infty$. Mutassuk meg, hogy

(1) ha $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, $c \in [a,b]$ és $f$ konstans a $[a,c[$ és $]c,b]$ intervallumokon, akkor $\int_a^b f\,dg$ létezik, és számítsuk ki az értékét;

(2) ha $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények, akkor $\int_a^b f\,dg$ létezik;

(3) ha $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos változású függvények, akkor $\int_a^b f\,dg$ létezik.

**8.4.31. Definíció: görbe menti integrál.** Legyen $(y,x) \mapsto y\cdot x$ egy mindkét változójában lineáris leképezése $Y\times X$-nek $Z$-be, ahol $X$, $Y$ és $Z$ véges dimenziós valós vektorterek $\mathbb{R}$ felett, azaz egy szorzás; $y\cdot x$ helyett csak $yx$-et írunk. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a,b]$ és $\gamma\colon [a,b] \to X$ egy görbe, $f\colon \gamma([a,b]) \to Y$ pedig egy függvény. Ha létezik az $\int_a^b f\circ\gamma\,d\gamma$ integrál, akkor az az $f$ függvény $\gamma$ *görbe menti integrál*ja. Jelölése: $\int_\gamma f$ vagy $\int_\gamma f(x)\,dx$. Zárt görbe esetén az $\oint_\gamma f$ vagy $\oint_\gamma f(x)\,dx$ jelölés is szokásos. Különböző szorzásokkal különböző görbe menti integrálokat kapunk. Ha a szorzás jelölésére valamilyen meghatározott jelölést használunk, ugyanezt a jelölést használjuk az integrálban is. Például ha a vektoriális szorzást használjuk $\mathbb{R}^3$-ban, akkor azt írjuk, hogy $\int_\gamma f(x)\times\,dx$.

**8.4.32. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, legyenek $f, f_j, g\colon \gamma(I) \to Y$ függvények. Ekkor*

(1) *ha $f \equiv c$ konstans, akkor $\int_\gamma f = c(\gamma(b) - \gamma(a))$; ha $\gamma$ konstans, akkor $\int_\gamma f = 0$;*

(2) *$\int_\gamma f$ létezik, akkor $c \in \mathbb{R}$ esetén $\int_\gamma cf = c\int_\gamma f$, továbbá $c \in \mathbb{C}$ esetén, ha $Y$ és $Z$ komplex vektorterek és a szorzás az első változójában komplex lineáris, illetve konjugált lineáris, akkor $\int_\gamma cf = c\int_\gamma f$, illetve $\int_\gamma cf = \overline{c}\int_\gamma f$;*

(3) *ha $\int_\gamma f$ és $\int_\gamma g$ léteznek, akkor $\int_\gamma (f+g)$ is és $\int_\gamma (f+g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$;*

(4) *ha $\gamma_1$ a $\gamma$-val ekvivalens görbe, akkor $\int_\gamma f$ és $\int_{\gamma_1} f$ egyszerre léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$;*

(5) *$\int_\gamma f$ és $\int_{\tilde\gamma} f$ egyszerre léteznek és $\int_{\tilde\gamma} f = -\int_\gamma f$;*

(6) *ha $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, akkor $\int_\gamma f$ akkor és csak akkor létezik, ha $\int_{\gamma_1} f$ és $\int_{\gamma_2} f$ léteznek és $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$;*

(7) *ha $W$ is véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $T\colon Z \to W$ egy lineáris leképezés, $\int_\gamma f(x)\,dx$ létezik és $y * x = T(yx)$, akkor*

$$\int_\gamma f(x) * \,dx = \int_\gamma T(f(x)\,dx) = T(\int_\gamma f(x)\,dx);$$

(8) *ha $\int_\gamma f$ létezik, akkor $\left|\int_\gamma f\right| \le \|\cdot\|\,\mathbb{V}(\gamma)\sup_{t\in\gamma(I)}|f(t)|$;*

(9) *ha $f$ folytonos, akkor $\int_\gamma f$ létezik;*

(10) *ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, az $\int_\gamma f_j$ integrálok léteznek és $f_j \to f$ egyenletesen a $\gamma(I)$-n, akkor $\int_\gamma f$ is létezik és $\int_\gamma f_j \to \int_\gamma f$;*

(11) *ha $\mathbb{V}(\gamma) < \infty$, az $\int_\gamma f_j$ integrálok léteznek és $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j$ egyenletesen a $\gamma(I)$-n, akkor $\int_\gamma f$ is létezik és*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_\gamma f_j = \int_\gamma f;$$

(12) *ha $f$ korlátos $\gamma(I)$-n, $\gamma$ pedig differenciálható, és $\int_\gamma f$ létezik, akkor*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Vegyük észre, hogy az utolsó állítás lényegében egy integráltranszformációs formula.

**Bizonyítás.** Minden állítás következik a Stieltjes-integrál tulajdonságaira vonatkozó tételek állításaiból. □

**8.4.33. Megjegyzés.** Hasonlóan, mint az integrálnál, görbe menti integrálok kiszámítása valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett Stieltjes-integráljainak kiszámítására vezethető vissza. Például ha $Y = X = \mathbb{R}^3$, a szorzás a belső szorzás, akkor $\int_\gamma \langle f(x), dx\rangle = \sum_{i=1}^{3} \int_a^b f_i \circ \gamma\, d\gamma_i$, ha pedig a vektoriális szorzás, akkor $\int_\gamma f(x) \times dx$ koordinátái rendre $\int_a^b f_2 \circ \gamma\, d\gamma_3 - \int_a^b f_3 \circ \gamma\, d\gamma_2$, $\int_a^b f_3 \circ \gamma\, d\gamma_1 - \int_a^b f_1 \circ \gamma\, d\gamma_3$ és $\int_a^b f_1 \circ \gamma\, d\gamma_2 - \int_a^b f_2 \circ \gamma\, d\gamma_1$. Az $\int_a^b f_i \circ \gamma\, d\gamma_j$ integrálra a klasszikus jelölés $\int_\gamma f_i(x)\, dx_j$, ezt is használni fogjuk. (Ezeket az integrálokat szokás egyébként *vonalintegrál*oknak nevezni.) Ennek az észrevételnek a felhasználásával a görbe menti integrálokat valós értékű függvények valós értékű függvények szerint vett integráljai segítségével is definiálhatjuk. Még egyszerűbb lehetőség a 8.4.33 összefüggést használni definíciónak; ennek a hátránya hogy nem minden pályára alkalmazható.

**8.4.34. Zárt görbék homotópiája.** Legyen $X \subset \mathbb{K}^n$. Az $I$-n definiált $X$-beli $\gamma_0$ és $\gamma_1$ zárt görbéket *homotóp*oknak nevezzük $X$-ben, ha van olyan $\varphi\colon I \times [0,1] \to X$ folytonos függvény, amelyre $\varphi(t,0) = \gamma_0(t)$ és $\varphi(t,1) = \gamma_1(t)$ minden $t \in I$-re, továbbá minden $\xi \in [0,1]$-re $t \mapsto \varphi(t,\xi)$ zárt görbe. A homotópia szemléletes tartalma: a görbék „folytonosan átdeformálhatók egymásba". Zárt görbék $X$-beli homotópiája ekvivalencia-reláció. Az $X$-ben konstans görbével homotóp görbét $X$-ben *összehúzható*nak nevezünk.

Felhívjuk rá a figyelmet, hogy zárt görbék homotópiájánál lényeges, hogy a görbék milyen $X$ részhalmazban homotópok. Például ha $X = \mathbb{K}^n$, akkor $X$-ben bármely két $\gamma_0, \gamma_1\colon I \to X$ zárt görbe között létezik egy

$$\varphi(t,\xi) = \xi\gamma_1(t) + (1-\xi)\gamma_0(t)$$

*triviális homotópia.*

**8.4.35. Egyszeresen összefüggő tartomány.** Egy tartományt *egyszeresen összefüggő tartomány*nak nevezünk, ha benne minden zárt görbe összehúzható.

→ **8.4.36. Feladat [6].** Legyen $X \subset \mathbb{K}^n$ tartomány. Bizonyítsuk be, hogy ha *csillagszerű*, azaz van benne olyan $c$ pont, úgynevezett *csillagpont*, hogy minden $z \in D$-re, a $c$ és $z$ pontokat összekötő szakasz $D$-ben van, akkor $D$ egyszeresen összefüggő. Speciálisan, minden konvex tartomány egyszeresen összefüggő.

**8.4.37. Tétel.** *Ha $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ olyan függvény $D$-n, amelynek létezik egy $F$ primitív függvénye $D$-n. Ekkor minden $\gamma\colon[a,b] \to D$ pályára $\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $\varepsilon > 0$. Minden $x \in D$-hez van olyan $\eta(x) > 0$, hogy

$$\bigl|F(y) - F(x) - F'(x)(y-x)\bigr| \le \varepsilon|y-x|,$$

ha $|y-x| < \eta(x)$. Mivel $\gamma$ folytonos, ha $\tau \in [a,b]$, akkor létezik olyan $\delta(\tau) > 0$, hogy $\bigl|\gamma(t) - \gamma(ta)\bigr| < \eta(\gamma(\tau))$, ha $t \in [a,b]$ és $|t-\tau| < \delta(\tau)$. Tekintsünk egy $\delta$-finom $a = t_0 \le \tau_0 \le t_1 \le \ldots \le \tau_n \le t_k = b$ pontozott beosztást. Erre

$$\begin{aligned}
&\Bigl|F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) - \sum_{j=1}^{k} f(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Bigr| \\
&\quad\le \Bigl|\sum_{j=1}^{k} F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})) - \sum_{j=1}^{k} F'(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}))\Bigr| \\
&\quad\le \Bigl|\sum_{j=1}^{k} F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(\tau_j)) + F(\gamma(\tau_j)) - F(\gamma(t_{j-1})) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} F'(\gamma(\tau_j))(\gamma(t_j) - \gamma(\tau_j) + \gamma(\tau_j) - \gamma(t_{j-1}))\Bigr| \\
&\quad\le \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \Bigl(\bigl|\gamma(t_j) - \gamma(\tau_j)\bigr| + \bigl|\gamma(\tau_j) - \gamma(t_{j-1})\bigr|\Bigr) \\
&\quad\le \varepsilon\,\mathbb{V}(\gamma).
\end{aligned}$$

Mivel a fenti összeg tetszőleges közel lehet az integrálhoz, kapjuk az állítást. □

**8.4.38. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $f\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *$f$-nek létezik primitív függvénye $D$-n;*

(2) *bármely $D$-beli zárt $\gamma$ pályára $\int_\gamma f = 0$;*

(3) *bármely $D$-beli $\gamma, \delta$ pályákra, amelyeknek kezdő- és végpontja megegyezik, teljesül, hogy $\int_\gamma f = \int_\delta f$.*

Az utolsó feltételt szokás úgy kifejezni, hogy a görbe menti integrál független az úttól.

**Bizonyítás.** Ha $f$-nek létezik $F$ primitív függvénye, akkor bármely zárt pályára

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Ha (2) teljesül, és a $\gamma, \delta$ pályák kezdő- és végpontja megegyezik, akkor $\gamma \vee \check{\delta}$ zárt pálya, így

$$0 = \int_{\gamma\vee\check{\delta}} f = \int_\gamma f - \int_\delta f.$$

Végül, ha (3) teljesül, legyen $u \in D$ rögzített, és $F(v) = \int_\gamma f$, ahol $\gamma\colon [a,b] \to D$ olyan pálya, amelynek $u$ a kezdőpontja, $v$ a végpontja. A fenti integrál nem függ a pálya megválasztásától. A $\gamma$ pályát egy

$$\gamma_1(t) = v + (t-b)(w-v), \quad \text{ha} \quad t \in [b, b+1]$$

pályával meghosszabbítva,

$$F(w) - F(v) = \int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_1} f(v)\,dx + \int_{\gamma_1} \big(f(x) - f(v)\big)\,dx,$$

ahonnan

$$F(w) - F(v) = f(v)(w-v) + \omega(w,v),$$

ahol

$$\omega(w,v) = \int_{\gamma_1} \big(f(x) - f(v)\big)\,dx,$$

tehát $\big|\omega(w,v)\big|/|w-v| \to 0$, ha $w \to v$. □

**8.4.39. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ folytonos függvény. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

(1) *$f$-nek lokálisan létezik primitív függvénye;*

(2) *ha a $\gamma_0$ és $\gamma_1$ zárt pályák homotópok, akkor $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$;*

(3) *ha $\gamma$ egy háromszögpálya, amely az általa határolt háromszöglappal együtt $D$-ben van, akkor $\int_\gamma f = 0$.*

⋆ **Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy (1)-ből következik (2). Legyenek $\gamma_0$ és $\gamma_1$ az $I = [a,b]$-n definiálva, és legyen $\varphi\colon I \times [0,1] \to D$ egy homotópiája $\gamma_0$-nak $\gamma_1$-be. Azt nem tesszük fel, hogy minden $\xi \in [0,1]$-re a $t \mapsto \varphi(t,\xi)$ zárt görbe pálya. Mivel $\varphi$ folytonos, $C = \varphi(I \times [0,1])$ kompakt részhalmaza $D$-nek. Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszunk $C$-nek olyan $D$-beli nyílt gömbökből álló véges lefedését, amelyeken $f$-nek van primitív függvénye, és jelölje $\varrho$ ennek a lefedésnek a Lebesgue-számát. Mivel $\varphi$ egyenletesen folytonos, létezik $\eta > 0$, hogy $|t - t'| \le \eta$, $|\xi - \xi'| \le \eta$ esetén $\big|\varphi(t,\xi) - \varphi(t',\xi')\big| \le \varrho$. Most legyen

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$$

egy $\eta$-nál finomabb felosztása $I$-nek, és

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_\ell = 1$$

egy $\eta$-nál finomabb felosztása $[0,1]$-nek. Legyen

$$\delta_j(t) = \varphi(t_{i-1}, \xi_j) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} (\varphi(t_i, \xi_j) - \varphi(t_{i-1}, \xi_j))$$

ha $t_{i-1} \le t \le t_i$, $1 \le i \le k$, $0 \le j \le \ell$. Minden $\delta_j$, $0 \le j \le \ell$ egy zárt pálya $D$-ben. Jelölje $\delta_{j,i}$ a $\delta_j$, $\gamma_{j,i}$ pedig a $\gamma_j$ megszorítását $[x_{i-1}, x_i]$-re. Mivel $\gamma_{0,i} \vee \check{\delta}_{0,i}$ zárt pálya $D$ egy olyan nyílt részhalmazában, ahol $f$-nek van primitív függvénye, az előző tétel szerint

$$\int_{\gamma_{0,i}} f = \int_{\delta_{0,i}} f.$$

Összegezve $i$-re kapjuk, hogy $\int_{\gamma_0} f = \int_{\delta_0} f$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\int_{\gamma_1} f = \int_{\delta_\ell} f$. Elég tehát azt megmutatnunk, hogy

$$\int_{\delta_{j-1}} f = \int_{\delta_j} f, \quad \text{ha} \quad 1 \le j \le \ell. \tag{4}$$

Rögzítsük $j$-t. Legyen $\alpha_{j,i}$ egy lineáris pálya, $\delta_{j-1}(t_i)$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal, $\beta_{j,i}$ pedig egy lineáris pálya $\delta_{j-1}(t_{i-1})$ kezdőponttal és $\delta_j(t_i)$ végponttal. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy

$$\sum_{r=1}^{i} \left( \int_{\delta_{j-1,r}} f - \int_{\delta j,r} f \right) + \int_{\alpha_{j,i}} f - \int_{\alpha_{j,0}} f = 0, \tag{5}$$

ha $0 \le i \le \ell$. Ha $i = 0$, az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $i$-re igaz. Nyilván

$$\int_{\beta_{j,i+1}} f - \int_{\delta_{j,i+1}} f - \int_{\alpha_{j,i}} f = 0$$

és

$$\int_{\delta_{j-1,i+1}} f + \int_{\alpha_{j,i+1}} f - \int_{\beta_{j,i+1}} f = 0,$$

mivel a megfelelő háromszögpályák egy olyan gömbben vannak, amelyen $f$-nek van primitív függvénye. Ezt a két összefüggést hozzáadva (5)-höz, éppen az indukciós lépést kapjuk. Ha $i = \ell$, alkalmazva (5)-öt kapjuk (4)-et.

(2)-ből nyilván következik (3), mert $\gamma$ homotóp egy konstans pályával $D$-ben. Végül, ha (3) teljesül, és a $c$ középpontú $G$ nyílt gömb $D$-ben van, $v$ ennek egy pontja, legyen $\gamma$ egy lineáris pálya $c$ kezdőponttal és $v$ végponttal, és $F(v) = \int_\gamma f$. Ugyanúgy, mint az előző tétel bizonyításában, kapjuk, hogy $F$ a $f$ primitív függvénye a $G$ gömbön. □

**8.4.40. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f \colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ differenciálható függvény. Az $f$-nek pontosan akkor van lokálisan primitív függvénye, ha minden $x \in D$, $h, k \in \mathbb{R}^n$-re $f'(x)hk = f'(x)kh$, azaz ha $f'(x)$ szimmetrikus bilineáris függvény minden $x \in D$-re.*

⋆ **Bizonyítás.** Ha $F$ az $f$ primitív függvénye $x$ egy környezetében, akkor az $F''(x)$ második derivált szimmetrikus, így a feltétel szükséges. Az elégségesség bizonyításához elég belátnunk, hogy ha $\gamma$ egy háromszögpálya, amely az általa határolt $B$ háromszöglappal együtt $D$-ben van, akkor $\int_\gamma f = 0$. A $\gamma_0 = \gamma$ jelöléssel, a szomszédos töréspontok számtani közepeit lineáris pályákkal összekötve, olyan $\gamma_0^1$, $\gamma_0^2$, $\gamma_0^3$ és $\gamma_0^4$ háromszögpályákat kaphatunk, amelyekre

$$\int_{\gamma_0} f = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_0^j} f.$$

Jelöljünk ezek közül egyet $\gamma_1$-gyel, úgy választva meg, hogy $\left|\int_{\gamma_1} f\right| \geq M/4$ legyen, ahol $M = \left|\int_\gamma f\right|$. Nyilván $\mathbb{V}(\gamma_1) = \mathbb{V}(\gamma_0)/2$. Teljes indukcióval folytatva ezt az eljárást, háromszögpályáknak olyan $\gamma = \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ sorozatát kapjuk, amelyekre $\left|\int_{\gamma_n} f\right| \geq M/4^n$, $\mathbb{V}(\gamma_n) = \mathbb{V}(\gamma)/2^n$, és minden pálya értékkészlete tartalmazza a következő kezdőpontját. A két utolsó feltételből a kezdőpontok $B$-beli Cauchy-sorozatot alkotnak, legyen ennek határértéke $x$. Mivel $x \in B$, és $f$ differenciálható $x$-ben, $\varepsilon > 0$-hoz elég nagy $n$-re $z \in \operatorname{rng}(\gamma_n)$ esetén $f(z) = f(x) + f'(x)(z - x) + \omega(z, x)$ és $\left|\omega(z, x)\right| \leq \varepsilon |z - x|$. Mivel $h \mapsto \frac{1}{2} f'(x)hh$ deriváltja a $h$ pontban $k \mapsto \frac{1}{2} f'(x)hk + \frac{1}{2} f'(x)kh = f'(x)hk$, a $h \mapsto f'(x)h$ függvénynek van primitív függvénye. Ezt felhasználva,

$$\begin{aligned}
M &\leq 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \right| \\
&= 4^n \left| \int_{\gamma_n} f(x)\, dz + \int_{\gamma_n} f'(x)(z - x)\, dz + \int_{\gamma_n} \omega(z, x)\, dz \right| \\
&= 4^n \left| \int_{\gamma_n} \omega(z, x)\, dz \right| \leq \varepsilon 4^n\, \mathbb{V}(\gamma_n) \frac{\mathbb{V}(\gamma_n)}{2} = \frac{\varepsilon \big(\mathbb{V}(\gamma)\big)^2}{2}.
\end{aligned}$$

Így csak $M = 0$ lehetséges. □

**8.4.41. Következmény.** *A primitív függvény létezésének differenciálható $f$-re az $f'(x)$-ek szimmetriája szükséges feltétele, és ha $D$ egyszeresen összefüggő tartomány, akkor ez a feltétel elégséges is.* □

° **8.4.42. Megjegyzés.** Az előző tétel bizonyításával együtt érvényben marad akkor is, ha $m = n = 2$, és komplex differenciálásról van szó. Mivel ekkor $f'(x)hk = f'(x)kh$ mindig teljesül, hiszen a komplex számok szorzása kommutatív, differenciálható komplex függvénynek lokálisan mindig van primitív függvénye.

**8.4.43. Feladat [9].** Az alábbi leképezésekről döntsük el, hogy van-e primitív függvényük az értelmezési tartományukon, és ha igen, határozzunk meg egyet:

(1) $(x - y, x + y)$; $(x^2 + y, x + \operatorname{ctg} y)$; $(x^2 - 2xy, y^2 - x^2)$;

(2) $(x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2})$; $(y/\sqrt{x^2+y^2}, x/\sqrt{x^2+y^2})$;

(3) $(-y/\sqrt{x^2+y^2}, x/\sqrt{x^2+y^2})$; $(\ln\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}(x/y))$;

(4) $(\operatorname{arctg}(x/y), -\ln\sqrt{x^2+y^2})$; $(y/(1+x^2)+x, \operatorname{arctg} x + z/y, \ln y + z)$;

(5) $(\cos(x)/x - \sin(x)/x^2 - y/x^2, 1/x)$; $((x+y)/(x^2+y^2), (y-x)/(x^2+y^2))$.

**8.4.44. Feladat [7].** Számítsuk ki az $(\ln\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}(x/y))$ függvény görbe menti integrálját a $g(t) = (\operatorname{sh} t, 1+\chi t)$, $0 \le t \le 1$ görbén!

**8.4.45. Feladat [7].** Legyen

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sin\frac{t}{2} + (\cos t + 1)\ln(t^2+1), \frac{\pi - t}{\pi} e^{t\sin t}\right), \quad 0 \le t \le \pi.$$

Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(1)
$$\int_\gamma \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx + \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) dy$$

és

(2)
$$\int_\gamma e^{-y}\,dx + (2y - xe^{-x})\,dy.$$

# 9

# Mérték és valószínűség

Ez a fejezet hat alfejezetből áll. Az első a mértékelméletet, a második az erre épülő integrálást tárgyalja. A harmadik a vektoranalízis klasszikus eredményei, a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel, Green és Stokes tétele után differenciálformák integrálásával foglalkozik, és a Poincaré–Stokes-tételig jut el. A negyedik az alkalmazásokban oly fontos $\mathbb{L}^p$-terekkel foglalkozik. A kihagyott bizonyítások általában megtalálhatók az [21] illetve [19] könyvemben. Az ötödik valószínűségszámítással, a hatodik pedig matematikai statisztikával foglalkozik.

## 9.1 Mérték

*Majdnem minden fogalom, amely a modern mérték- és integrálelmélethez kapcsolódik, Lebesgue (1875–1941) munkájára vezethető vissza. Ezeknek a fogalmaknak a bevezetése volt a fordulópont a tizenkilencedik század matematikájából a huszadik század matematikájába való átmenet során.*

*N. J. Vilenkin (1975)*

*Ellentétben a klasszikus Riemann-integrállal, az én új integrálfogalmam jobb választ ad a differenciálás és integrálás közötti kapcsolat kérdésére.*

*Henry Leon Lebesgue (1902)*

$$0 \le f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n \uparrow \int f;$$
$$0 \le f \Rightarrow \iint f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \iint f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).$$

*Adrian Cornelis Zaanen*

A mérték fogalma egyidős a matematikával: a matematika alapjait a hosszúság-, terület- és térfogatmérések hívták életre. Később a különböző mértékek, a hosszúság, terület, térfogat, ívhossz és felszín fogalmát, legalábbis bizonyos egyszerűbb alakzatokra, a görög matematikusok pontosan definiálták. Arkhimédész görbe vonalakkal határolt síkidomok (például parabolaszegmens) területét, és görbült felületű testek (például gömb, henger) térfogatát definiálta és határozta meg, lényegében integrálszámítás segítségével.

A mérték fogalma szoros kapcsolatban áll az integrál fogalmával. Minden integrálfogalom lényegében a következőképpen épül fel: az integrációs tartományt kis részekre osztjuk, majd minden kis rész mértékét szorozzuk az integrálandó függvénynek ezen a részen felvett értékeit közelítő értékkel, és az így nyert szorzatok összegének vesszük a határértékét, miközben a beosztás valamilyen értelemben „finomodik”.

A sokszögek területének, illetve a poliéderek térfogatának egyszerű fogalmát először Giuseppe Peano és Camille Jordan terjesztették ki a XIX. század végén a sík, illetve a tér részhalmazainak nagyobb osztályára, véges sok poliéderrel történő külső és belső közelítéseket használva. (Peano–Jordan-mérték.) Ez a mértékfogalom egyszerű, de több célra, elsősorban az integrálás céljára, nem teljesen megfelelő. René Baire és Émile Borel fejlesztették tovább, de a döntő lépést Henry Leon Lebesgue tette meg 1902-ben. Lebesgue véges lefedések helyett megszámlálható sok ismert mértékű halmazzal történő lefedéseket vizsgált, és bevezetett a euklidészi terekben egy, a Peano–Jordan-mértéknél jóval általánosabb és kényelmesebben kezelhető mértéket, valamint egy erre alapozott integrálfogalmat, és bebizonyított sok fontos, ezekre a fogalmakra alapozott tételt.

Az évek során egyre nyilvánvalóbbá váltak az új mérték- és integrálfogalom előnyei: a jóval nagyobb általánosság, az integrál és a határátmenet felcserélhetősége, az integrál és a differenciálszámítás szorosabb kapcsolata. Döntő lépés volt a Riesz–Fischer-tétel felfedezése (1907), amely összekapcsolta Lebesgue elméletét az ortogonális sorok régi, és a funkcionálanalízis akkor születő új elméletével, új lendületet adva mindegyiknek. A század tízes-húszas éveiben tisztázódtak a mérték- és integrálelmélet, és a vele szoros kapcsolatban álló valós függvénytan alapvető kérdései, és az elmélet a modern analízis egyik legfontosabb eszközévé vált. A valószínűségszámítás megalapozását 1933-ban Andrej Nyikolajevics Kolmogorov a mértékelmélet segítségével végezte el, ezzel a valószínűségszámítás a mértékelmélet egyik legfontosabb felhasználási területévé vált. Ugyanebben az évben Haar Alfréd magyar matematikus bevezetett egy Lebesgue-típusú mértéket, amely döntő jelentőségű a topologikus csoportok elméletében. A modern geometria egyes fejezetei is elképzelhetetlenek a Lebesgue-féle mértékelmélet nélkül.

Itt a hangsúlyt az eredmények gyors elérésére helyezzük. A külső mértékek és a mértékterek tárgyalása után definiáljuk a Lebesgue-, Lebesgue–Stieltjes-, és a Hausdorff-mértéket, összefoglalva legfontosabb tulajdonságaikat. A mérhető függvények tárgyalása mutatja, hogy ez a függvényosztály minden, a gyakorlatban felmerülő függvényt tartalmaz. Csak az integrál egyszerűbb, koordinátákat használó bevezetésével foglalkozunk, de nem árt tudni, hogy van egy koordinátamentes és végtelen dimenziós terekben is alkalmazható felépítés is.

**9.1.1. Halmazfüggvények.** A geometriai hossz, terület, térfogat, ívhossz, felszín, a valószínűség, valamint a fizikában az extenzív mennyiségek (például tömeg) közös tulajdonságait általánosító mérték fogalmát kívánjuk vizsgálni. Egy $X$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett $\mu$ függvénnyel (*halmazfüggvénnyel*) kívánunk foglalkozni. Olyan $\mu$ halmazfüggvények érdekelnek bennünket, amelyek nemnegatív bővített valós számokat vesznek fel értékként, és amelyekre

(1) $A, A_i \in \mathcal{H}$, $A \subset \bigcup_i A_i$ esetén $\mu(A) \le \sum_i \mu(A_i)$

teljesül, bármely véges $A_i$ halmazrendszerre. Ezt a tulajdonságot *szubadditivitás*nak fogjuk nevezni. A szubadditivitásból következik a *monotonitás*: ha $A, B \in \mathcal{H}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \le \mu(B)$. Mivel az üres unió az üres halmaz és az üres összeg pedig nulla, ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\emptyset) = 0$. Néha egyszerűsíti a fogalmazást, ha $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$; ha ezt használjuk, azt külön jelezzük.

Egy másik követelmény, amelyet szemléletünk sugalmaz:

(2) diszjunkt $A_i \in \mathcal{H}$ rendszer esetén, ha $\cup_i A_i \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$,

bármely véges $A_i$ halmazrendszerre. Ez az *additivitás*. Ebből is következik, hogy ha $\emptyset \in \mathcal{H}$, akkor $\mu(\emptyset) = 0$.

A tapasztalat szerint sokkal jobban használható fogalmakat kapunk — jobb lesz a határátmenettel való kapcsolat — ha erősebb követelményeket támasztunk, és (1) illetve (2) teljesülését megszámlálható halmazrendszerre követeljük meg. Ekkor a *$\sigma$-szubadditivitás* illetve *$\sigma$-additivitás* fogalmához jutunk. (Mivel nemnegatív tagú sorok összege permutációinál nem változik, a jobb oldali összeget a tagok tetszőleges sorbarendezésénél fellépő részletösszegek határértékeként defininálhatjuk.) Célszerűnek tűnik a $\mu$ halmazfüggvényt az $X$ alaphalmaz összes részhalmazán értelmezni. A $\sigma$-szubadditivitásnál ez nem okoz problémát. A $\sigma$-additivitás esetén ez nem mindig tehető meg. Célszerűnek tűnik $\mu$ értelmezési tartományától megkövetelni, hogy ne vezessenek ki belőle a leggyakoribb halmazműveletek. Ezen meggondolások segítségével az alábbi fogalmakhoz jutunk.

**9.1.2. Definíció.** Az $X$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *$\sigma$-algebrá*nak nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(2) ha $A_i \in \mathcal{A}$ egy megszámlálható halmazrendszer, akkor $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Vegyük észre, hogy $\emptyset \in \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmaz*oknak nevezzük. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktér*nek, $\mu$-t pedig *mérték*nek nevezzük, ha $\mu$ az $\mathcal{A}$-n értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű $\sigma$-additív halmazfüggvény. Mértéktér egy részhalmazát *$\sigma$-véges*nek nevezzük, ha lefedhető megszámlálható sok véges mértékű mérhető halmazzal. A $\mu$ mértéket (vagy a mértékteret) *véges*nek nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$ és *$\sigma$-véges*nek, ha $X$ $\sigma$-véges. Ha $\mu(X) = 1$, akkor $\mu$-t *valószínűségi mérték*nek nevezzük. A mértékteret (vagy a mértéket) *teljes*nek nevezzük, ha bármely mérhető és nullmértékű halmaz minden részhalmaza is mérhető.

**9.1.3. Példa.** Legyen $X$ egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ az $X$ összes részhalmazainak rendszere, és $\mu(A)$ az $A$ elemeinek száma, $+\infty$, ha $A$-nak végtelen sok eleme van. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér; $\mu$-t *számláló mérték*nek nevezzük.

**9.1.4. Tétel.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbség és a megszámlálható metszetképzés, $\mu$ pedig $\sigma$-szubadditív, valamint*

(1) *ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \le \mu(B)$ (monotonitás); ha még az is teljesül, hogy $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$;*

(2) *mérhető halmazok bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ sorozatára*

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i);$$

(3) *mérhető halmazok bármely szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ sorozatára, ha $\mu(A_1) < \infty$, akkor*

$$\mu\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

A (2) és (3) tulajdonságokat szokás a *mérték folytonosságá*nak nevezni.

**Bizonyítás.** A

$$\cap_i A_i = X \setminus \left(\cup_i (X \setminus A_i)\right)$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Másrészt

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B).$$

A $\sigma$-szubadditivitás bizonyításához azt kell észrevenni, hogy ha $A \subset \cup_{i\in I} A_i$, $I \subset \mathbb{N}$, akkor $B_i = (A \cap A_i) \setminus (\cup_{j<i} A_j)$ jelöléssel $A = \cup_i B_i$ és a $B_i$-k diszjunktak. (1) azon múlik, hogy $A$ és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig $B$. (2) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a $B_i$-k diszjunktak, így

$$\begin{aligned}\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(3)-at megkapjuk, ha (1)-et és (2)-at alkalmazzuk a $B_i = A_1 \setminus A_i$ halmazokra. □

→ **9.1.5. Feladat [6].** Adjuk meg egy háromelemű halmazon az összes $\sigma$-algebrát.

→ **9.1.6. Feladat [7].** Adjunk példát háromelemű, nem teljes és nem is $\sigma$-véges mértéktérre.

**9.1.7. Feladat [8].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Bizonyítsuk be, hogy

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B), \quad \text{ha} \quad A, B \in \mathcal{A}$$

eltérés $\mathcal{A}$-n.

**9.1.8. Feladat [9].** Legyen $X$ tetszőleges halmaz, $f\colon X \to [0, \infty]$ tetszőleges függvény, $\mathcal{A}$ az $X$ összes részhalmazainak osztálya, és legyen

$$\mu(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) : \{x_1, \dots, x_n\} \subset A\right\},$$

ha $A \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

**9.1.9. Külső mérték, Carathéodory-feltétel.** Egy $X$ halmaz összes részhalmazán értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű és $\sigma$-szubadditív halmazfüggvényt *külső mérték*nek fogunk nevezni. Legyen $\mu$ külső mérték az $X$ halmazon. Egy $A \subset X$ halmazt *$\mu$-mérhető*nek nevezünk, ha

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \text{minden } T \subset X\text{-re.}$$

Mivel a $\leq$ mindig teljesül, elég a $\geq$ feltételt vizsgálni, ha $\mu(T) < \infty$. A definíciót az motiválja, hogy ha ki szeretnénk válogatni azokat a halmazokat, amelyeken $\mu$ $\sigma$-addditív, csak olyan halmazok jöhetnek szóba, amelyek elég sok halmazt „jól vágnak ketté”.

**9.1.10. Tétel.** *Legyen $\mu$ külső mérték $X$-en, és jelölje $\mathcal{A}$ a $\mu$-mérhető halmazok osztályát. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{A}})$ teljes mértéktér.*

Gyakran, nem teljesen korrekt módon, $\mu|_{\mathcal{A}}$ helyett csak $\mu$-t írunk.

**Bizonyítás.** Nyilvánvaló, hogy $\emptyset \in \mathcal{A}$. Ha $A$ $\mu$-mérhető, akkor

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$$

minden $T$-re, de $T \cap (X \setminus A) = T \setminus A$ és $T \setminus (X \setminus A) = T \cap A$ miatt ez azt jelenti, hogy $X \setminus A$ is $\mu$-mérhető. Ha most $A$ és $B$ $\mu$-mérhetőek, akkor

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \\ &= \mu(T \cap A) + \mu((T \setminus A) \cap B) + \mu((T \setminus A) \setminus B) \\ &\geq \mu(T \cap (A \cup B)) + \mu(T \setminus (A \cup B)), \end{aligned} \tag{1}$$

ha $T \subset X$, így $A \cup B$ is $\mu$-mérhető. Ebből indukcióval kapjuk, hogy $\mathcal{A}$ zárt a véges unió- és metszetképzésre. Az

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \dots$$

összefüggés szerint elég megszámlálható végtelen sok diszjunkt $\mu$-mérhető halmaz uniójáról megmutatni, hogy $\mu$-mérhető. Vegyük észre, hogy (1)-ben egyenlőség áll, és így (1)-ből következik, hogy ha $A$, $B$ diszjunktak, és $T \subset A \cup B$, akkor

$$\mu(T \cap (A \cup B)) = \mu(T \cap A) + \mu(T \cap B).$$

Ez nyilván tetszőleges $T \subset X$-re is érvényes marad. Ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt $\mu$-mérhető halmazok, akkor indukcióval

$$\mu(T \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(T \cap A_i). \tag{2}$$

Innen

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu(T \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{n} A_i)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)), \end{aligned}$$

amiből $n \to \infty$ határátmenettel

$$\mu(T) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T \cap A_i) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

és a külső mérték $\sigma$-szubadditivitása miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \cap (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) + \mu(T \setminus (\cup_{i=1}^{\infty} A_i)),$$

azaz az $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ halmaz $\mu$-mérhető.

Megmutatjuk, hogy ha $A_1, A_2, \dots$ diszjunkt, mérhető halmazok, akkor

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Vegyük észre, hogy minden $n$ természetes számra

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i).$$

Mivel (2) miatt $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, határátmenettel a szükséges egyenlőtlenségek közül a nem triviálisat kapjuk. Végül, ha $\mu(A) = 0$, akkor $T \cap A \subset A$ miatt $\mu(T \cap A) = 0$, így $T \setminus A \subset T$ miatt

$$\mu(T) \geq \mu(T \setminus A) = \mu(T \setminus A) + \mu(T \cap A),$$

azaz $A$ $\mu$-mérhető, amiből következik a teljesség. □

→ **9.1.11. Feladat [5].** Legyen $X$ tetszőleges halmaz, $\mu(A)$ legyen 0, ha $A$ üres, $X$ egyéb részhalmazaira pedig legyen 1. Mutassuk meg, hogy $\mu$ külső mérték, és keressük meg a $\mu$-mérhető halmazokat.

**9.1.12. Külső mérték konstruálása.** *Legyen $X$ egy halmaz, és $\nu$ az $X$ részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszerén értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű halmazfüggvény. Ha $B \subset X$, legyen $\mu(B)$ az összes $\sum_i \nu(A_i)$ megszámlálható összegek infimuma, ahol $A_i \in \mathcal{H}$ és $B \subset \cup_i A_i$. Ekkor $\mu$ külső mérték $X$-en.*

A $\mu$-t a *$\nu$-höz tartozó külső mérték*nek nevezzük.

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy a $B_j$ megszámlálható halmazrendszer (ahol az indexek pozitív természetes számok) lefedi a $B$ halmazt. Meg kell mutatnunk, hogy $\mu(B) \le \sum_j \mu(B_j)$. Ha a jobb oldalon álló összeg $+\infty$, akkor az egyenlőtlenség teljesül. Egyébként legyen $\varepsilon > 0$. Van olyan $A_{i,j}$ megszámlálható halmazrendszer, amely lefedi $B_j$-t, és amelyre

$$\sum_i \nu(A_{i,j}) \le \mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Mivel az összes $A_{i,j}$ együtt lefedi $B$-t,

$$\mu(B) \le \sum_j \sum_i \nu(A_{i,j}) \le \sum_j \left(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) \le \sum_j \mu(B_j) + \varepsilon.$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, az egyenlőtlenségnek $\varepsilon$ nélkül is fenn kell állnia. $\square$

**9.1.13. Tétel.** *Az előző tétel jelöléseivel, $\mu$ pontosan akkor kiterjesztése $\nu$-nek, ha az $\sigma$-szubadditív. Egy $B \subset X$ halmaz pontosan akkor $\mu$-mérhető halmaz, ha minden $A \in \mathcal{H}$-ra, amire $\nu(A) < +\infty$, fennáll, hogy*

$$\nu(A) \ge \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B).$$

Vegyük észre, hogy egy $\nu$ mértékből kiindulva, egy $\mu$ teljes mértékhez jutunk, amely kiterjesztése $\nu$-nek, ez a *természetes kiterjesztés*. Ebből látható, hogy ha mértékek helyett teljes mértékekkel, vagy külső mértékekkel dolgoznánk, az nem jelentené az általánosság lényeges megszorítását. Ráadásul külső mértékekkel dolgozni kényelmesebb is lenne. Hogy mégsem ezt tesszük, annak oka az, hogy ez ma még nem terjedt el általánosan.

**Bizonyítás.** Az első állítás triviális. A második állításnál $\mu(A) \le \nu(A)$ miatt a szükségesség nyilvánvaló. Az elégségesség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy ha $T \subset X$ és $\mu(T) < \infty$, akkor $\mu(T) \ge \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B)$. Legyen $\varepsilon > 0$ és $A_i$ olyan megszámlálható, $\mathcal{H}$-beli halmazokból álló rendszer, amely lefedi $T$-t, és amelyre $\mu(T)+\varepsilon \ge \sum_i \nu(A_i)$. Ekkor

$$\mu(T) + \varepsilon \ge \sum_i \nu(A_i) \ge \sum_i \mu(A_i \cap B) + \sum_i \mu(A_i \setminus B) \ge \mu(T \cap B) + \mu(T \setminus B).$$

Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, a bizonyítás kész. $\square$

→ **9.1.14. Feladat [6].** Az $X = \{1, 2, 3\}$ halmaz részhalmazaira legyen $\nu\{1\} = 1$, $\nu\{1, 2\} = 2$, $\nu\{2, 3\} = 5$, $\nu\{3\} = 2$, és $\nu\{1, 2, 3\} = 6$. Határozzuk meg a $\nu$-ből származó külső mértéket és a mérhető halmazokat.

**9.1.15. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $\mu$ külső mérték, $B \subset A$, a $B$ halmaz mérhető és $\mu(A) = \mu(B) < \infty$, akkor $A$ is mérhető.

**9.1.16. Feladat [8].** Legyen $\mu$ külső mérték $X$-en, $Y \subset X$ és $(\mu\lfloor Y)(A) = \mu(Y \cap A)$, ha $A \subset X$. Mutassuk meg, hogy $\mu\lfloor Y$ külső mérték $X$-en.

**9.1.17. Feladat [8].** Legyen $\mu$ külső mérték $X$-en, $f: X \to Y$ egy tetszőleges függvény, és $(f_{\#}\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B))$, ha $B \subset Y$. Mutassuk meg, hogy $f_{\#}\mu$ külső mérték $Y$-on.

**9.1.18. Borel-halmazok.** Legyen $\mu$ mérték az $X$ metrikus téren. Természetes dolog a mérték és a nyílt halmazok kapcsolatát vizsgálni. A legegyszerűbb kapcsolat az, ha a nyílt halmazok mind mérhetőek. A nyílt halmazok mérhetőségéből igen sok halmaz mérhetősége következik. Például mérhetőek a zárt halmazok, azok a halmazok, amelyek megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként állíthatók elő (ezeket $\mathcal{G}_\delta$*-halmaz*oknaknevezzük), azok a halmazok, amelyek megszámlálható sok zárt halmaz uniójaként állíthatók elő (ezeket $\mathcal{F}_\sigma$*-halmaz*oknaknevezzük), stb. Általában mindazok a halmazok mérhetőek, amelyek előállíthatók a nyílt halmazokból kiindulva, megszámlálható sok művelettel, ahol minden művelet komplementerképzés vagy unióképzés. Az ilyen halmazokat Borel-halmazoknak nevezzük. Pontosabban, $X$ *Borel-halmaz*ainak osztálya az összes, a nyílt halmazokat tartalmazó $\sigma$-algebrák metszete. Mivel $\sigma$-algebrák tetszőleges rendszerének a metszete is $\sigma$-algebra, a Borel-halmazok $\sigma$-algebrátalkotnak.

**9.1.19. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az irracionális számok halmaza $\mathcal{G}_\delta$-halmaz.

$\to$ **9.1.20. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}$-ben az alábbi halmazosztályok mindegyikére a generált $\sigma$-algebra a Borel-halmazok osztálya: nyílt intervallumok, kompakt intervallumok, racionális végpontú nyílt intervallumok, racionális végpontú kompakt intervallumok, $(-\infty, r)$, $r \in \mathbb{Q}$ alakú intervallumok. Adjunk hasonló példákat $\overline{\mathbb{R}}$-ban, $\mathbb{C}$-ben, $\mathbb{K}^n$-ben és más metrikus terekben.

**9.1.21. Radon-mértékek.** Egy $\mu$ mértéket egy metrikus téren *Radon-mérték*nek nevezzük, ha a nyílt halmazok mérhetőek, a kompakt halmazok mértéke véges, és

(1) minden $V$ nyílt halmazra

$$\mu(V) = \sup\{\mu(K): K \subset V,\ K \text{ kompakt}\} \quad (\textit{belső regularitás});$$

(2) minden $\mu$-mérhető $A$ halmazra

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V): A \subset V,\ V \text{ nyílt}\} \quad (\textit{külső regularitás}).$$

Az a feltétel, hogy a kompakt halmazok mértéke véges, azzal a feltétellel helyettesíthető, hogy a mérték *lokálisan véges*, azaz minden pontnak van olyan környezete, amelynek a mértéke véges. Valóban, ha a mérték lokálisan véges, akkor egy kompakt halmazt lefedve véges sok véges mértékű nyílt gömbbel, kapjuk, hogy véges mértékű. Megfordítva, ha a kompakt halmazok mértéke véges, akkor az egyelemű halmazokra alkalmazva (2)-t, kapjuk, hogy minden pontnak van véges mértékű környezete.

Ha $\mu$ Radon-mérték és egy $\mu$-mérhető $A$ halmaz véges mértékű, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $C \subset A$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. Először válasszunk olyan $V$ nyílt halmazt, amely tartalmazza $A$-t és amelyre $\mu(V \setminus A) + \varepsilon/2$, majd olyan $W$ nyílt halmazt, amely tartalmazza $V \setminus A$-t, és amelyre $\mu(W) < \varepsilon/2$, végül olyan $K \subset V$ kompakt halmazt, amelyre $\mu(V \setminus K) < \varepsilon/2$, és legyen $C = K \setminus W$. Nyilván $C \subset A$ és $\mu(A \setminus C) \le \mu(V \setminus K) + \mu(W) < \varepsilon$.

$\to$ **9.1.22. Feladat [6].** Mikor lesz a számláló mérték Radon-mérték egy $X$ metrikus téren?

**9.1.23. Feladat [6].** Legyen $X$ metrikus tér, $x_n$ az $X$ elemeiből álló sorozat, és $a_n$ egy nemnegatív tagú konvergens számsorozat. Ha $A \subset X$, legyen $\mu(A) = \sum_{x_n \in A} a_n$. Mutassuk meg, hogy $\mu$ Radon-mérték.

$\to$ **9.1.24. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy Radon-mérték természetes kiterjesztése is Radon-mérték.

**9.1.25. A Lebesgue-mérték.** Jelölje $\lambda^n$az $n$-dimenziós téglákon értelmezett $T \mapsto |T|$ halmazfüggvényhez tartozó külső mértéket. $\lambda^n$-et $n$-dimenziós *Lebesgue külső mérték*nek nevezzük. A $\lambda^n$-mérhető halmazokat $n$-dimenziós *Lebesgue-mérhető* halmazoknak, ezeken $\lambda^n$-et pedig *$n$-dimenziós Lebesgue-mérték*nek nevezzük.

**9.1.26. Tétel.** *A nullahalmazok azok az $A$ halmazok, amelyekre $\lambda^n(A) = 0$. Bármely $n$-dimenziós $T$ tégla Lebesgue-mérhető, és Lebesgue-mértéke $|T|$. A $\lambda^n$ mérték $\sigma$-véges Radon-mérték, és bármely halmaz külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek infimuma. Ha $a, b \in \mathbb{R}^n$ és a $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés a*

$$g(x) = (a_1 x_1 + b_1, a_2 x_2 + b_2, \ldots, a_n x_n + b_n)$$

*összefüggéssel van definiálva, ahol $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, akkor $A \subset \mathbb{R}^n$ esetén $\lambda^n(g(A)) = |a_1 a_2 \cdots a_n| \lambda^n(A)$, és ha $A$ mérhető, akkor $g(A)$ is.*

**Bizonyítás.** Az első állítás azonnal adódik a definícióból. Legyenek $T$ és $S$ téglák. Mivel $T$-t azon hipersíkokkal amelyeken $S$ oldallapjai fekszenek véges sok téglára osztva, $T \cap S$ ezen téglák egyike, $T \setminus S$ pedig a többi egyesítése, kapjuk, hogy $|T| \geq \lambda^n(T \cap S) + \lambda^n(T \setminus S)$, amiből következik, hogy a téglák mérhetőek.

Ha belátjuk, hogy a téglák mértéke $\sigma$-szubadditív, akkor abból következik, hogy a téglák Lebesgue-mértéke a mértékük, és mivel az egész tér megszámlálható sok tégla egyesítése, az is, hogy a Lebesgue-mérték $\sigma$-véges. Válasszunk egy megszámlálható $T_i$ lefedést a $T$ téglához (az indexek legyenek pozitív egészek). Először tegyük fel, hogy a lefedés véges. Osszuk fel a lefedő téglákat és a lefedett téglát is az összes olyan hipersíkokkal, amelyeken rajta van valamely tégla oldallapja. Mivel a lefedett tégla minden darabja szerepel a lefedő téglák darabjai között, kapjuk a szubadditivitást. Ha most a lefedés nem véges, akkor kicsit megnövelve a $T_i$ téglát, egy olyan $S_i$ téglával helyettesíthetjük, amelyre $\nu^n(S_i) \leq \nu^n(T_i) + \varepsilon/2^i$. Nyilván $T$-t lefedi az $S_i$ téglák belseje, és mivel $T$ kompakt, a lefedésből kiválasztható véges lefedés. Ebből $|T| \leq \sum_i |S_i|$, és így $|T| \leq \sum_i |T_i| + \varepsilon$. Ha $\varepsilon \downarrow 0$, kapjuk a $\sigma$-szubadditivitást.

A nyílt halmazok mérhetősége könnyen megkapható: bármely nyílt halmaz előáll az összes olyan benne lévő téglák egyesítéseként, melyek csúcspontjainak koordinátái mind racionálisak. Mivel megszámlálható sok ilyen tégla van, minden nyílt halmaz megszámlálható sok tégla egyesítése, így mérhető. A kompakt halmazok mértéke véges, mivel téglába foglalhatók. A fent leírt módon a lefedő téglákat kicsit nagyobb téglákkal helyettesítve és azok belsejét egyesítve minden $A$ halmazhoz kaphatunk egy $V \supset A$ nyílt halmazt, amelyre $\lambda^n(V) \leq 2\varepsilon + \lambda^n(A)$. Ha most $V$ tetszőleges nyílt halmaz, legyen

$$K_i = \{x\colon x \in V,\ |x| \leq i,\ d(x, \mathbb{R}^n \setminus V) \geq 1/i\}.$$

A $K_i$ halmazsorozat monoton növekedő, kompakt halmazokból áll, és egyesítése $V$, így a mérték folyonosságából kapjuk a belső regularitást.

Végül vegyük észre, hogy ha $T$ tégla, akkor $g(T)$ is, és

$$\lambda^n(g(T)) = |a_1 a_2 \cdots a_n| \lambda^n(T).$$

Mivel ha a $T_i$ téglák lefedik $A$-t, akkor a $g(T_i)$ téglák lefedik $g(A)$-t,

$$\lambda^n(g(A)) \leq |a_1 a_2 \cdots a_n| \lambda^n(A).$$

Az az eset, amikor az $a_i$-k valamelyike nulla, innen már triviális. Egyébként a másik irányú egyelőtlenséget úgy kapjuk, hogy a fenti egyenlőtlenséget alkalmazzuk $A$ helyett $g(A)$-ra és $g$ helyett $g^{-1}$-re. Mivel $A$ jól vágja ketté a $g^{-1}(T)$ halmazt, $g(A)$ jól vágja ketté a $T$ halmazt. □

→ **9.1.27. Feladat [0].** Határozzuk meg a racionális számok halmazának Lebesgue-mértékét.

→ **9.1.28. Feladat [3].** Határozzuk meg a sík azon pontjai halmazának Lebesgue-mértékét, amelyek egyik koordinátája racionális.

→ **9.1.29. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ nulla Lebesgue-mértékű részhalmazainak nincs belső pontja.

**9.1.30. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $[0, 1]$ minden egy Lebesgue külső mértékű részhalmaza sűrű $[0, 1]$-ben.

→ **9.1.31. Feladat: Cantor-halmaz [7].** Határozzuk meg azon $[0, 1]$-beli számok $C$ halmazának a Lebesgue-mértékét, amelyek felírhatók úgy hármas számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest! Mutassuk meg, hogy ez a felírás $C$ elemein egyértelmű!

→ **9.1.32. Feladat: Sierpiński-szőnyeg [7].** A Cantor-halmazt úgy is leírhatjuk, hogy a $[0, 1]$ középső egyharmadának bels‘ejét kivesszük (itt vannak azok a számok, amelyek felírása hármas számrendszerben az első helyen mindenképpen egyest tartalmaz), majd a visszamaradó két zárt intervallum középső egyharmadának belsejét kivesszük, stb. A visszamaradó halmaz (azaz a keletkező halmazok sorozatának metszete) a Cantor-halmaz. Ennek síkbeli megfelelője úgy keletkezik, hogy az zárt egységnégyzetet kilenc egybevágó kis négyzetre osztjuk, és a középsőnek a belsejét kivesszük, stb. A visszamaradó halmaz a Sierpiński-szőnyeg. Mennyi a síkbeli mértéke?

⋆ **9.1.33. Feladat: Cantor-függvény [8].** Ha $t = 2a_n/3^n$, $a_n \in \{0, 1\}$ a $C$ Cantor-halmaz egy elemének az egyértelmű felírása hármas számrendszerben, akkor legyen $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/2^n$. Terjesszük ki a $t \mapsto x$ leképezést $[0, 1] \setminus C$-re úgy, hogy a komplementer intervallumain legyen lineáris a két végpontban felvett értékek között. Mutassuk meg, hogy a kapott $f$ monoton növekedő, folytonos, $[0, 1]$-be képez, de már $f(C) = [0, 1]$!

⋆ **9.1.34. Feladat: Peano-görbe [10].** Ha $t = 2a_n/3^n$, $a_n \in \{0, 1\}$ a $C$ Cantor-halmaz egy elemének az egyértelmű felírása hármas számrendszerben, akkor legyen $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}/2^n$ és $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}/2^n$. Terjesszük ki a $t \mapsto (x, y)$ leképezést $[0, 1] \setminus C$-re úgy, hogy a komplementer intervallumain legyen lineáris a két végpontban felvett értékek között. Mutassuk meg, hogy a kapott $f$ folytonos, azaz görbe, ami $[0, 1]^2$-be képez, de már $f(C) = [0, 1]^2$! Módosítsuk a konstrukciót úgy, hogy $[0, 1]^k$-ra képezzen!

**9.1.35. Feladat: pozitív mértékű Cantor-halmaz [8].** A $[0,1]$ intervallum közepéből kiveszünk egy $1/4$ hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó két zárt intervallum közepéből kiveszünk egy-egy $1/4^2$ hosszúságú nyílt intervallumot, stb. Határozzuk meg a visszamaradó halmaz Lebesgue-mértékét. Mutassuk meg, hogy folytonosan és kölcsönösen egyértelműen leképezhető a Cantor-halmazra!

**9.1.36. Feladat [8].** Adjuk meg a számegyenes egy nulla Lebesgue-mértékű sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmazát!

**9.1.37. Nem mérhető halmaz létezése.** A kiválasztási axióma segítségével megmutatható, hogy létezik nem Lebesgue-mérhető halmaz. A kiválasztási axiómára épülő bizonyítások jellemzője, hogy „nem konstruktívak”; biztosítják valaminek a létezését, de nem adnak módszert annak megkonstruálására. Nem Lebesgue-mérhető halmaz létezésének a fenti bizonyítása tipikus példa. Mint R. Soloway megmutatta, ez a bizonyítás nem is végezhető el a kiválasztási axióma nélkül (a Zermelo–Fraenkel-axiómarendszerben). A „naiv halmazelmélet” szintjén [17] tárgyalja a kiválasztási axiómát és számos alkalmazását az analízisben. A szigorú axiomatikus tárgyaláshoz közelebb álló felépítés található a [16] könyvben.

**9.1.38. Feladat [9].** Legyen $A$ olyan zárt részhalmaza $[0,1]$-nek, amelynek nincs belső pontja, és $f(x) = \lambda([0,x] \setminus A)/\lambda([0,1] \setminus A)$, ha $x \in [0,1]$. Mutassuk meg, hogy $f$ a $[0,1]$ intervallumot önmagára képezi le, szigorúan monoton növekedő, folytonos, az inverze is folytonos, és $\lambda(f(A)) = 0$.

**9.1.39. Lebesgue–Stieltjes-mértékek.** Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, és tekintsük azon zárt intervallumok osztályát, amelyek $a, b$ végpontjai $g$-nek folytonossági pontjai, és legyen $\nu_g$ az egy ilyen intervallumhoz a $g(b) - g(a)$ számot rendelő függvény. A $\nu_g$-hez tartozó $\lambda_g$ külső mérték a $g$-hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes külső mérték*, a belőle származó mérték pedig a $g$-hez tartozó *Lebesgue–Stieltjes-mérték*.

A Lebesgue–Stieltjes-mértékek fontos szerepet játszanak a valószínűségszámításban. Magasabb dimenzióban is definiálhatók Lebesgue–Stieltjes-mértékek. Jelentőségük abban áll, hogy segítségükkel extenzív mennyiségek olyan eloszlásait is reprezentálhatjuk, amelyekben pontszerű és folytonosan eloszló részek vegyesen fordulnak elő.

**9.1.40. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel, egy halmaz pontosan akkor $g$-nullahalmaz, ha $\lambda_g$-mértéke nulla. A korlátos intervallumok Lebesgue–Stieltjes-mérhetőek és*

$$\lambda_g]a,b[ = g(b-) - g(a+), \quad \lambda_g]a,b] = g(b+) - g(a+),$$
$$\lambda_g[a,b[ = g(b-) - g(a-), \quad \lambda_g[a,b] = g(b+) - g(a-).$$

*A $\lambda_g$ mérték $\sigma$-véges Radon-mérték és bármely halmaz külső mértéke az őt lefedő nyílt halmazok mértékeinek infimuma.*

**Bizonyítás.** Hasonlóan eljárva, mint a Lebesgue-mérték esetében, mindent beláthatunk, de az intervallum mértékére vonatkozó eredmény csak arra az esetre adódik, amikor $a$ és $b$ folytonossági pontjai $g$-nek. Ha $a$ és $b$ tetszőlegesek, válasszunk olyan folytonossági pontokból álló sorozatokat, amelyekre $a_n \downarrow a$ és $b_n \uparrow b$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda_g]a,b[ &= \lambda_g(\cup_{n=1}^\infty [a_n, b_n]) = \lim_{n\to\infty} \lambda_g[a_n, b_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} (g(b_n) - g(a_n)) = g(b-) - g(a+).\end{aligned}$$

A többi összefüggés hasonlóan bizonyítható. □

→ **9.1.41. Feladat [5].** Határozzuk meg a $\lambda_\Theta$ Lebesgue–Stieltjes-mértéket, és a mérhető halmazokat, ha $\Theta$ a *Heaviside-függvény.* ($\lambda_\Theta$ a *Dirac-mérték.*)

**9.1.42. Feladat [9].** Legyen $x_n$ a racionális számok egy sorozatba rendezése, és legyen $g(x) = \sum_{x_n<x} 1/2^n$, ha $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy $g$ szigorúan monoton növekedő, balról folytonos, minden irracionális pontban folytonos és egyetlen racionális pontban sem folytonos. Határozzuk meg a $\lambda_g$ Lebesgue–Stieltjes-mértéket, és a mérhető halmazokat!

**9.1.43. Feladat [8].** Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy monoton növekedő függvény, $\lambda_g$ a hozzá tartozó Lebesgue–Stieltjes-mérték. Mutassuk meg, hogy $\lambda_g\{x\} = 0$ pontosan akkor, ha $g$ folytonos az $x$ pontban. Mutassuk meg, hogy van olyan sűrű $\mathcal{G}_\delta$-halmaz, amelynek $\lambda_g$-mértéke nulla!

**9.1.44. Feladat [7].** Legyenek $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvények. Mutassuk meg, hogy a $\lambda_g$ és a $\lambda_h$ Lebesgue–Stieltjes-mértékek pontosan akkor egyeznek meg, ha van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = g(x) + c$ egy sűrű halmazon!

⋆ **9.1.45. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy minden teljes Radon-mérték $\mathbb{R}$-en Lebesgue–Stieltjes-mérték!

**9.1.46. Geometriai mértékek.** A három dimenziós euklédeszi téren a Lebesgue-mérték a térfogat fogalmának általánosítása. Be lehet azonban vezetni olyan kétdimenziós mértéket az $\mathbb{R}^3$ téren, amely a felszínt adja, illetve olyan egydimenziós mértéket, amely ívek ívhosszát adja. Példaként tekintsük egy görbült felületdarab felszínének a meghatározását! Ha a felületdarabot kis részekre osztjuk, egy kis rész felszíne, ha „nem nagyon görbült” és „nem nagyon hosszúkás”, az átmérőjének négyzetével becsülhető. Két probléma lép fel. Az egyik a túlbecslés, ami abból adódik hogy a darabok nem elég „kerekek”. Ez kiküszöbölhető, ha a kis részek átmérői négyzetösszegeinek infimumát képezzük az összes lehetséges felosztásokra vagy lefedésekre, de szoroznunk kell egy konstanssal, az egységnyi átmérőjű körlap területével, mert „nagyjából kör alakú” darabokból készíthető a legtakarékosabb lefedés. A másik az alulbecslés, ami abból adódik, hogy a kis részek is még görbültek. Ezt úgy küszöbölhetjük ki, hogy csak egy adott $\delta$-nál kisebb átmérőjű darabokkal történő lefedéseket engedünk meg, majd $\delta$-val tartunk nullához, vagy ami ugyanaz, szuprémumot veszünk. Az általános esetben fellépő pozitív konstans $\boldsymbol{\alpha}(m)/2^m$, ahol $\boldsymbol{\alpha}(m)$ az $m$-dimenziós egység sugarú gömb Lebesgue-mértéke, ha $m$ pozitív egész.

Legyen tehát $(X, d)$ egy metrikus tér, $m \geq 0$, és

$$\boldsymbol{\alpha}(m) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^m}{\boldsymbol{\Gamma}(m/2+1)}.$$

(A $\boldsymbol{\Gamma}$ függvény a faktoriális általánosítása nem egész számokra: $\boldsymbol{\Gamma}(m) = (m-1)!$, ha $m$ pozitív egész szám. Értelmezését lásd később, a komplex függvénytannál. Meg fogjuk mutatni, hogy $\boldsymbol{\alpha}(m)$ minden $m \geq 0$-ra pozitív, és ha $m$ pozitív egész, akkor $\boldsymbol{\alpha}(m)$ az $\mathbb{R}^m$ tér 0 középpontú, 1 sugarú gömbjének $\lambda^m$-mértéke.) Az $X$ minden nem üres $A$ részhalmazára legyen

$$\nu^m(A) = \frac{\boldsymbol{\alpha}(m)}{2^m}\big(d(A)\big)^m.$$

Jelölje $\delta > 0$ esetén $\nu^m_\delta$ a $\nu^m$ leszűkítését a $\delta$-nál nem nagyobb átmérőjű halmazokra, $\chi^m_\delta$ pedig a $\nu^m_\delta$-hoz tartozó külső mértéket. Legyen $\chi^m(A) = \sup_{\delta>0} \chi^m_\delta(A)$. Megmutatjuk, hogy $\chi^m$ külső mérték. Legyen $A_i$ egy megszámlálható lefedése $A$-nak. Mivel $\chi_\delta^m$ külső mérték, $\chi_\delta^m(A) \leq \sum_i \chi_\delta^m(A_i)$. Először a jobb oldalon véve tagonként szuprémumot $\delta > 0$-ra, majd a bal oldalon, kapjuk, hogy $\chi^m$ is $\sigma$-szubadditív; $\chi^m$-et $m$-dimenziós *Hausdorff külső mérték*nek nevezzük, a belőle származó mértéket pedig $m$-dimenziós *Hausdorff-mérték*nek. Megmutatható, hogy a Borel-halmazok a Hausdorff-mértékre nézve mérhetőek. A Hausdorff-mérték a felszín képlet segítségével számítható ki. Ezzel általában az is eldönthető, hogy $\mathbb{R}^n$ egy adott részhalmaza $\chi^m$-mérhető-e, és következik belőle hogy $\mathbb{R}^n$-en $\chi^n$ megegyezik a $\lambda^n$ Lebesgue-mértékkel. Az integráltranszformációs formula azt is mutatja, hogy $\mathbb{R}^3$-ban $\chi^2$ a felszínt, $\chi^1$ pedig az ívhosszt adja.

A Hausdorff-mérték felhasználható arra is, hogy az $X$ metrikus tér egy $A$ részhalmazának a *Hausdorff-dimenzió*ját definiáljuk. Legyen

$$\dim(A) = \sup\{m\colon m \geq 0, \chi^m(A) > 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy a dimenzió nem csak egész lehet, a törtdimenziós halmazok a *fraktál*ok.

**9.1.47. Feladat [4].** Az előző definíció jelöléseivel, mutassuk meg, hogy ha $0 < \delta < \sigma$, akkor $\chi_\delta^m(A) \geq \chi_\sigma^m(A)$.

**9.1.48. Feladat [4].** Mutassuk meg, hogy $\chi^0$ a számláló mérték.

**9.1.49. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha egy $X$ metrikus tér egy $A$ részhalmazára $\chi^n(A) < \infty$ és $m > n$, akkor $\chi^m(A) = 0$.

**9.1.50. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $A$ nem üres, akkor

$$\dim(A) = \inf\{m \geq 0\colon \chi^m(A) = 0\},$$

és ha $A$ nem véges, akkor

$$\dim(A) = \sup\{m \geq 0\colon \chi^m(A) = \infty\}.$$

**9.1.51. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy izometrikus halmazok Hausdorff külső mértéke egyenlő!

**9.1.52. Majdnem mindenütt.** A mérhetőségnél gyakran, az integrálásnál mindig a nulla mértékű halmazok „elhanyagolhatóak". Ez indokolja az alábbi szóhasználat bevezetését. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Ha $P$ egy pontbeli tulajdonság (azaz $P(x)$ igaz vagy hamis lehet: $x \mapsto P(x)$ egy logikai függvény), akkor azt mondjuk, hogy $P$ *majdnem mindenütt* teljesül $X$-en, ha azon pontok halmaza, ahol $P$ nem teljesül, vagy nincs értelmezve, mérhető, és mértéke nulla. Például az hogy az $f$ és $g$ függvények majdnem mindenütt egyenlőek, azt jelenti, hogy az $\{x\colon x \in X, f(x) = g(x)\}$ halmaz komplementere mérhető és nullmértékű. Ezt a halmazt egyébként gyakran röviden, bár némileg pontatlanul $\{f = g\}$-vel jelöljük. Hasonlóan értjük az $\{f < g\}$, $\{f < a\}$, stb. jelöléseket is. Általánosan, gyakran röviden bár pontatlanul $\{P\}$ jelöli azon pontok halmazát, amelyekre a $P$ pontbeli tulajdonság értelmezve van és igaz.

**9.1.53. Lemma.** *Legyen $\mathcal{A}$ az $X$ halmaz részhalmazainak egy $\sigma$-algebrája, $Y$ tetszőleges halmaz, $f$ egy $\mathcal{A}$-beli halmazt $Y$-ba képező függvény. Az $Y$ azon $B$ részhalmazai, amelyekre $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, egy $\sigma$-algebrát alkotnak.*

**Bizonyítás.** A definíció alapján azonnal adódik. □

**9.1.54. Mérhető függvények.** Ahhoz, hogy a mértékelmélet eszközeivel egy függvényt kezelni tudjunk, szükséges, hogy a képtér sok részhalmazára azon pontok halmaza, amelyek képe ebben az adott halmazban van, kezelhető legyen a mértékelmélet eszközeivel. Például gyakran szükségünk lesz $\{f < a\} = f^{-1}[-\infty, a[$, $\{f \leq a\} = f^{-1}[-\infty, a]$, stb., típusú, úgynevezett „nívóhalmazok" mérhetőségére. Az előző lemma azt mutatja, hogy elég a képtér részhalmazainak egy szűk osztályára megkövetelni, hogy az inverz képe mérhető legyen. Ez motiválja a következő definíciót: ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $Y$ metrikus tér, egy $f \in X \to Y$ függvényt *mérhető*nek nevezünk, ha $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ az $Y$ minden $V$ nyílt részhalmazára. Ha $X$ egy metrikus tér, akkor az $f \in X \to Y$ függvényt *Borel-függvény*neknevezzük, ha $f^{-1}(V)$ Borel-halmaz az $Y$ minden $V$ nyílt részhalmazára. (Speciálisan, Borel-halmazon értelmezett folytonos függvény Borel-függvény.) A előző lemma mutatja, hogy a nyílt halmazok rendszere helyett más halmazrendszert is választhattunk volna, például az $f$ függvény pontosan akkor mérhető, ha $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ minden $V$ Borel-halmazra, és pontosan akkor Borel-függvény, ha $f^{-1}(V)$ Borel-halmaz minden $V$ Borel-halmazra. Vegyük észre azt is, hogy a függvény mérhetősége csak az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebrán múlik, de nem függ a mértéktől.

Ha $X$ az $A_i$ mérhető halmazok megszámlálható uniója, és az $A_i$ mérhető halmazon egy $f_i$ mérhető függvénnyel egyezik meg az $f$, akkor mérhető, mert

$$f^{-1}(V) = \cup_i (f^{-1}(V) \cap A_i) = \cup_i (f_i^{-1}(V) \cap A_i).$$

Speciálisan, teljes mértéktéren, ha egy függvény majdnem mindenütt egyenlő egy mérhető függvénnyel, akkor mérhető.

Egy függvényt *egyszerű függvény*nek nevezünk, ha az értékkészlete véges.

**9.1.55. Összetett függvény mérhetősége.** *Ha $f \in X \to Y$ mérhető és $g \in Y \to Z$ Borel-függvény, akkor $g \circ f$ mérhető.*

**Bizonyítás.** Ha $V$ nyílt halmaz, akkor $g^{-1}(V)$ Borel-halmaz, így $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ mérhető. □

**9.1.56. Mérhetőség és koordináta-függvények.** *Legyen $\mu$ mérték $X$-en. Egy $f \in X \to \mathbb{K}^n$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ függvény pontosan akkor mérhető, ha az $f_k$ függvények mind mérhetőek.*

**Bizonyítás.** Ha $f$ mérhető, akkor az $f_k = p_k \circ f$ koordináta-függvények is mérhetőek, mert a $p_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_k$ összefüggésekkel definiált projekciók folytonosak, így Borel-függvények. Megfordítva, ha az $f_k$ koordináta-függvények mérhetőek, akkor egy $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ Descartes-szorzat alakban előállítható nyílt halmazra $f^{-1}(V) = f_1^{-1}(V_1) \cap f_2^{-1}(V_2) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(V_n)$, így mérhető. Egy tetszőleges nyílt halmaz $\mathbb{K}^n$-ben előáll, mint megszámlálható sok olyan nyílt halmaz egyesítése, melyek mindegyike racionális végpontú nyílt intervallumok Descartes-szorzata. Mivel unió teljes inverz képe a teljes inverz képek uniója, bármely nyílt halmaz teljes inverz képe mérhető. □

**9.1.57. Következmény.** *Ha $f$ és $g$ bővített valós értékű mérhető függvények, $c$ bővített valós szám, akkor a $cf$, $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f + g$, $fg$ függvények mérhetőek.*

**Bizonyítás.** Az első három állítás abból következik, hogy Borel-függvénybe beírva egy mérhetőt, mérhető függvényt kapunk. A negyedik állítás abból adódik, hogy az $x \mapsto (f(x), g(x))$ leképezés mérhető, az $(y_1, y_2) \mapsto \max\{y_1, y_2\}$ leképezés pedig folytonos, így Borel-függvény. Az utolsó két állítás hasonlóan adódik. □

**9.1.58. Következmény.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f$ mérhető függvény $\mathbb{K}$-beli értékekkel, $g, h$ pedig mérhető függvények $\mathbb{K}^n$-beli értékekkel. Ekkor $fg$, $g+h$ és $\langle g, h\rangle$ mérhetőek.*

**Bizonyítás.** Az előző következmény bizonyítása használható. □

**9.1.59. Mérhetőség és konvergencia.** *Ha $\mu$ mérték $X$-en, $Y$ metrikus tér, $f_n\colon X \to Y$ mérhető függvények egy sorozata, és $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$-re, akkor $f$ is mérhető.*

**Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy ha $V$ nyílt részhalmaza $Y$-nak, akkor

$$f^{-1}(V) = \cup_{j=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} f_k^{-1}\{y\colon d(y, Y \setminus V) > 1/j\}.$$

Ebből már következik a bizonyítandó állítás, mivel $y \mapsto d(y, A)$ folytonos függvény, így az $\{y\colon d(y, Y \setminus V) > 1/j\}$ halmazok nyíltak, amiből a jobb oldalon mérhető halmaz áll.

Legyen $x \in f^{-1}(V)$, azaz tegyük fel, hogy $f(x) \in V$. Mivel $V$ nyílt, van olyan $j$, hogy $\mathbb{U}_{2/j}(f(x)) \subset V$. Mivel $f_k(x) \to f(x)$, van olyan $n$, hogy $k \geq n$ esetén $f(x)$ és $f_k(x)$ távolsága kisebb, mint $1/j$. Ekkor

$$d(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j,$$

amiből $x$ eleme a jobb oldalnak. Megfordítva, ha $x$ eleme a jobb oldalnak, akkor van olyan $j$ és $n$, hogy $k \geq n$ esetén $d(f_k(x), Y \setminus V) > 1/j$. Határátmenettel azt kapjuk, hogy $d(f(x), Y \setminus V) \geq 1/j$, amiből $f(x) \in V$. □

**9.1.60. Következmény.** *Ha $\mu$ mérték $X$-en, $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvények egy sorozata, akkor a*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

*függvények mérhetőek.fn n $f_n$fn n $f_n$sup fn up fn $f_n$inf fn nf fn $f_n$* □

**Bizonyítás.** A

$$\begin{aligned}
\sup_n f_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq k\leq n} f_k \\
\inf_n f_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{1\leq k\leq n} f_k \\
\limsup_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} f_k \\
\liminf_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} f_k
\end{aligned}$$

összefüggésekből következik. □

→ **9.1.61. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy az $\{f < a\}$, $\{f \leq a\}$, $\{f > a\}$, $\{f \geq a\}$ és $\{f = a\}$ halmazok mérhetőek, ha $f$ bővített valós értékű mérhető függvény, és $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Igaz-e a megfordítás?

**9.1.62. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy ha az $f_n$ valós értékű függvények mérhetőek, akkor azon pontok halmaza, ahol a függvénysorozatnak létezik a határértéke, mérhető.

**9.1.63. Mértékben való konvergencia.** A mérhető függvények körében a majdnem mindenütti konvergencia mellett a mértékben való konvergencia játszik fontos szerepet. Például mindkét konvergencia igen fontos a valószínűségszámításban.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Jelölje $\mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^n)$ az $X \to Y$-beli $\mu$-majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvények osztályát. Ha $f, g \in \mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^n)$, akkor $x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$ és így $x \mapsto \big|f(x) - g(x)\big|$ is mérhető. Ha $f, f_n \in \mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^n)$, akkor azt mondjuk, hogy $f_n$ *mértékben konvergál* $f$-hez, ha minden $\sigma > 0$-ra $\mu\big\{d(f_n, f) > \sigma\big\} \to 0$, ha $n \to \infty$.

Megmutatjuk, hogy a mértékben való konvergencia eltérésből származtatható. Legyen

$$d_\mu(f, g) = \inf\Big\{\varepsilon \mid \varepsilon \in \overline{\mathbb{R}}, \mu\{|f - g| > \varepsilon\} \leq \varepsilon\}\Big\}.$$

Teljesül, hogy

$$\mu\big\{|f - g| > d_\mu(f, g)\big\} \leq d_\mu(f, g), \tag{1}$$

azaz a $d_\mu(f, g)$ definíciójában a jobb oldalon szereplő halmaz tartalmazza a pontos alsó korlátját; valóban, legyen $\varepsilon = d_\mu(f, g)$ és válasszunk olyan $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon$ sorozatot, amelyre

$$\mu\big\{|f - g| > \varepsilon_n\big\} \leq \varepsilon_n.$$

A $\big\{|f - g| > \varepsilon_n\big\}$ halmazsorozat monoton növekedő és egyesítése $\big\{|f - g| > \varepsilon\big\}$, így a mérték folytonossága miatt

$$\mu\big\{|f - g| > \varepsilon\big\} = \lim_{n\to\infty} \mu\big\{|f - g| > \varepsilon_n\big\} \leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon,$$

ami a bizonyítandó állítás.

Megmutatjuk, hogy mu u $d_\mu d_\mu$ eltérés $\mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^n)$-en. Nyilvánvaló, hogy nemnegatív és szimmetrikus. A háromszög-egyenlőtlenség a nyilvánvaló

$$\big\{|f - h| > d_\mu(f, g) + d_\mu(g, h)\big\} \subset \big\{|f - g| > d_\mu(f, g)\big\} \cup \big\{|g - h| > d_\mu(g, h)\big\}$$

tartalmazásból és (1)-ből következik. (1)-ből az is következik, hogy $d_\mu(f, g) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f = g$ majdnem mindenütt.

Végül belátjuk, hogy mu u $d_\mu d_\mu(f_n, f) \to 0$ ekvivalens a mértékben való konvergenciával. Valóban, ha $f_n$ mértékben konvergál $f$-hez, akkor minden $\sigma > 0$-hoz van olyan $N$, hogy ha $n \geq N$, akkor $\mu\big\{|f_n - f| > \sigma\big\} \leq \sigma$, azaz $d_\mu(f_n, f) \leq \sigma$. Megfordítva, ha $n \geq N$ esetén $d_\mu(f_n, f) \leq \min\{\varepsilon, \sigma\}$, akkor (1) szerint

$$\mu\big\{|f_n - f| > \sigma\big\} \leq \mu\big\{|f_n - f| > \min\{\varepsilon, \sigma\}\big\} \leq \min\{\varepsilon, \sigma\} \leq \varepsilon.$$

**9.1.64. Jegorov tétele.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n \in \mathbb{L}^0(\mu, \mathbb{K}^m)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhető függvények. Ha az $f_n$ függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál $f$-hez, akkor minden $\delta > 0$-hoz van olyan $A$ mérhető részhalmaza $X$-nek, hogy $\mu(X \setminus A) < \delta$*

*és az $A$ halmazon a konvergencia egyenletes, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor*

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \quad \text{minden } x \in A\text{-ra.}$$

**Bizonyítás.** Legyen

$$A_{i,j} = \bigcup_{n=j}^{\infty} \{|f_n - f| \geq 1/i\},$$

ha $i$ és $j$ pozitív egészek. Az $A_{i,j}$ halmazok mérhetőek. Vegyük észre, hogy bármely rögzített $i$ esetén, ha egy $x \in X$-re $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, akkor $x \notin A_{i,j}$ valamely $j$-re, így $x \notin \cap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}$, amiből $\mu(\cap_{k=1}^{\infty} A_{i,k}) = 0$. Így a mérték folytonossága miatt minden $i$-re $\mu(A_{i,j}) \to 0$, ha $j \to \infty$. Válasszunk minden $i$-hez egy olyan $j_i$-t, amelyre $\mu(A_{i,j_i}) < \delta/2^i$, és álljon $A$ az $X$ összes olyan pontjaiból, amelyek nincsenek benne egyetlen $A_{i,j_i}$-ben sem. Ekkor

$$\mu(X \setminus A) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_{i,j_i}) < \delta.$$

Ha $\varepsilon > 0$ és $1/i < \varepsilon$, akkor bármely $x \in A$-ra $x \notin A_{i,j_i}$ miatt

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{1}{i} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n \geq j_i. \ \square$$

A következő tételekben a mértékben való és a majdnem mindenütti konvergencia kapcsolatával foglalkozunk.

**9.1.65. Lebesgue tétele.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n \in\in (\mu; \mathbb{K}^m)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhető függvények. Ha az $f_n$ függvénysorozat majdnem mindenütt konvergál $f$-hez, akkor $f_n$ mértékben is konvergál $f$-hez.*

**Bizonyítás.** Jegorov tétele szerint, minden $\varepsilon, \sigma > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor

$$\mu\big\{|f_n - f| > \sigma\big\} \leq \varepsilon. \ \square$$

**9.1.66. Tétel.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n \in \mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^m)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_\mu(f_n . f_{n+1}) < \infty,$$

*akkor $f_n$ mértékben és majdnem mindenütt konvergál egy $f \in \mathbb{L}^0(\mu; \mathbb{K}^m)$ függvényhez.*

**Bizonyítás.** Legyen

$$A_n = \big\{|f_{n_k} - f_n| \leq d_\mu(f_{+1}, f_n)\big\},$$

továbbá legyen $B_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ és $r_k = \sum_{n=k}^{\infty} d_\mu(f_n . f_{n+1})$. Ekkor

$$\mu(X \setminus A_n) \leq d_\mu(f_n, f_{n+1}), \qquad \mu(X \setminus B_k) \leq r_k,$$

$$\mu\left(X \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Ha $x \in B_k$, akkor

$$\sum_{n=k}^{\infty} \big|f_n(x) - f_{n+1}(x)\big| \le r_k < \infty,$$

így az $f_n(x)$ pontok Cauchy-sorozatot alkotnak $\mathbb{K}^m$-ben. Legyen ennek a határértéke $f(x)$. Továbbá

$$\big|f(x) - f_k(x)\big| \le \sum_{n=k}^{\infty} \big|f_n(x) - f_{n+1}(x)\big| \le r_k,$$

így $f_n(x) \to f(x)$ majdnem mindenütt. A többi pontban definiáljuk $f(x)$-et konstansnak, például nullának. Mivel

$$\mu\Big\{\big|f(x) - f_k(x)\big| < r_k\Big\} \le \mu(X \setminus B_k) \le r_k,$$

a konvergencia mértékben is fennáll. □

**9.1.67. Következmény.** *Az $\mathbb{L}^0(\mu, \mathbb{K}^m)$ tér teljes a $d_\mu$ eltéréssel.*

**Bizonyítás.** Egy $f_n$ Cauchy-sorozatból válasszunk ki olyan részsorozatot, amelyre $d_\mu(f_{n_k}, f_{n_{k+1}}) \le 1/2^k$. □

**9.1.68. Riesz-féle kiválasztási tétel.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, f_n \in \mathbb{L}^0(\mu, \mathbb{K}^m)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mérhető függvények. Ha $f_n$ mértékben konvergál $f$-hez, akkor $f_n$-nek van olyan $f_{n_k}$ részsorozata, amely majdnem mindenütt konvergál $f$-hez.*

**Bizonyítás.** Ugyanúgy következik, mint az előző következmény. □

⋆ **9.1.69. Feladat [7].** Legyenek az $f_n$ függvények $[0, 1]$-en a következőképpen definiálva: ha $n = 2^k + j$, $0 \le j < 2^k$, akkor legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \big[j/2^k, (j+1)/2^k\big], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $f_n$ mértékben tart az azonosan nulla függvényhez, de $f_n(x)$ egyetlen $x \in [0, 1]$-re sem konvergens.

⋆ **9.1.70. Feladat [9].** Keressünk olyan $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekből álló függvénysorozatot és olyan $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre $f_n$ pontonként konvergál $f$-hez, de a konvergencia egyetlen részintervallumon sem egyenletes.

⋆ **9.1.71. Feladat [6].** Adjunk meg olyan folytonos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekből álló függvénysorozatot, amely minden pontban monoton csökkenően az azonosan nulla függvényhez konvergál, de Lebesgue-mértékben nem.

**9.1.72. Definíció.** Legyenek $X$ és $Y$ halmazok. Az $f\colon X \to Y$ függvényt *egyszerű függvény*nek nevezzük, ha értékkészlete véges.

**9.1.73. Approximációs lemma.** *Legyen $\mu$ mérték $X$-en, $f\colon X \to [0, \infty]$ mérhető függvény. Ekkor létezik $X$-en értelmezett nemnegatív egyszerű mérhető függvények olyan $s_n$ monoton növekedő sorozata, amelyre $s_n(x) \uparrow f(x)$ minden $x \in X$-re. Az $s_n$ függvények választhatók racionális értékűeknek. Ha $f$ korlátos, a konvergencia egyenletes.*

**Bizonyítás.** Teljes indukcióval, legyen $s_0 \equiv 0$, és $s_n(x) = s_{n-1}(x) + 1/n$, ha $f(x) - s_{n-1}(x) \ge 1/n$, egyébként legyen $s_n(x) = s_{n-1}(x)$. Ha $f(x) = \infty$, akkor $s_n(x) \to \infty$. Ha $f(x) < \infty$, akkor végtelen sok $n$-re $s_n(x) = s_{n-1}(x)$, és minden ilyen $n$-re $f(x) - s_{n-1}(x) < 1/n$. □

## 9.2 Integrál

**9.2.1. Definíció.** Lebesgue eredeti gondolata az integrálással kapcsolatban az volt, hogy nem az értelmezési tartományt osztotta fel, hanem az értékkészletet. Eljárása nem érzékeny a szakadásokra és gyors oszcillációkra, viszont intervallumnál bonyolultabb halmazok hosszának (mértékének) ismeretére is szükség van. Nemnegatív függvények esetén legegyszerűbb alsó közelítésekkel dolgozni. Minden nemnegatív mérhető függvénynek tulajdonítható integrál.

Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és $f$ nemnegatív, bővített valós értékű, majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Az $f$

$$\int f \quad \text{vagy} \quad \int f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

módon jelölt *integrál*ját az összes

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$$

alakú *integrálközelítő összeg*ek pontos felső korlátjaként definiáljuk, ahol $A_1, \ldots, A_n$ diszjunkt mérhető részhalmazai $X$-nek, $y_1, \ldots, y_n$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq y_i$ minden $x \in A_i$-re $(i = 1, \ldots, n)$ (itt $0 \cdot \infty = 0$). Vegyük észre, hogy a szuprémum ugyanaz marad, ha csak azt követeljük meg, hogy $f(x) \geq y_i$ majdnem minden $x \in A_i$-re teljesüljön.

Ha $A$ mérhető részhalmaza $X$-nek, és $f$ az $A$-n majdnem mindenütt értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű függvény, akkor az

$$\int_A f \quad \text{vagy} \quad \int_A f\,d\mu \quad \text{vagy} \quad \int_A f(x)\,d\mu(x)$$

módon jelölt $A$ *halmaz feletti integrál*ját $f$-nek a $g(x) = f(x)$, ha $x \in A$, $g(x) = 0$, ha $x \in X \setminus A$ összefüggéssel definiált $g$ függvény $X$ feletti integráljaként definiáljuk (ha $g$ mérhető). Tételeinket általában az egész $X$ felett vett integrálokra fogjuk megfogalmazni, de a definíció alapján könnyen átvihetők egy mérhető $A$ halmaz feletti integrálokra is.

Megjegyezzük, hogy az „integrációs változó” kiírása általában csak akkor hasznos, ha $f$ többváltozós függvény. Az integrációs változó „kötött változó”, így az integrálon kívül szabadon használható. Ez a filozófia egyszerűsíti a jelölést.

**9.2.2. A nemnegatív függvények integráljának tulajdonságai.** *Tegyük fel, hogy $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f$ és $g$ majdnem mindenütt értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű mérhető függvények, $\alpha \geq 0$ valós szám. Ekkor*

(1) *ha $f \leq g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f \leq \int g$* (monotonitás)*;*

(2) *ha $f = g$ majdnem mindenütt, akkor $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$;*

(3) *$\alpha\mu\{f \geq \alpha\} \leq \int f\,d\mu$ (Csebisev-egyenlőtlenség; itt $0 \cdot \infty = 0$);*

(4) *ha $\int f < \infty$, akkor $f$ majdnem mindenütt véges;*

(5) *ha $\int f = 0$, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt;*

(6) $\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$ (pozitív homogenitás; *itt* $0\cdot\infty = 0$);

(7) *ha* $f$ *egyszerű függvény, amely az* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *értékeket veszi fel, akkor* $\int f = \sum_{i=1}^n y_i \mu\{f = y_i\}$ *(itt* $0\cdot\infty = 0$*).*

**Bizonyítás.** (1) triviális, (2) az (1)-ből következik. A Csebisev-egyenlőtlenség $y_1 = \alpha$, $A_1 = \{f \geq \alpha\}$ választással a definícióból következik. (4)-et úgy kapjuk, hogy $\alpha \in \mathbb{N}$-re, (5)-öt pedig, hogy $1/\alpha \in \mathbb{N}$-re alkalmazzuk (3)-at, és felhasználjuk a mérték folytonosságát. (6) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, vegyük észre, hogy ha $x \in A_i$ esetén $f(x) \geq y_i$, akkor $\alpha f(x) \geq \alpha y_i$, amiből bármely integrálközelítő összegre

$$\alpha \sum_{i=1} y_i \mu(A_i) \leq \int \alpha f.$$

A bal oldalon szuprémumot véve, kapjuk, hogy $\alpha \int f \leq \int \alpha f$. Most $f$ helyére $\alpha f$-et, $\alpha$ helyére $1/\alpha$-t helyettesítve, kapjuk az ellenkező irányú egyenlőtlenséget. (7) bizonyításához, ha $A_1, A_2, \dots, A_m$ diszjunkt mérhető halmazok, $z_1, z_2, \dots, z_m$ nemnegatív valós számok, és $f(x) \geq z_i$, ha $x \in A_i$, akkor

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m z_j \mu(A_j) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n z_j \mu(A_j \cap \{f = y_i\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_i \mu(A_j \cap \{f = y_i\}) \leq \sum_{i=1}^n y_i \mu\{f = y_i\},\end{aligned}$$

amiből

$$\int f \leq \sum_{i=1}^n y_i \mu\{f = y_i\}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség az integrál definíciója alapján nyilvánvaló. □

**9.2.3. Beppo Levi tétele.** *Ha* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* $f_n\colon X \to [0,\infty]$ *mérhető függvények egy monoton növekedő sorozata, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, d\mu(x) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, d\mu(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen

$$\sum_{i=1}^m y_i \mu(A_i)$$

a $\lim_{n\to\infty} f_n$ függvény egy integrálközelítő összege; feltehetjük, hogy $y_1, y_2, \dots, y_m$ pozitívak. Legyen $0 < t < 1$. Tekintsük az

$$A_{i,n} = A_i \cap \{f_n > t y_i\}$$

növekvő halmazsorozatot. Nyilván $\cup_{n=1}^\infty A_{i,n} = A_i$, így

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_{i,n}) = \mu(A_i).$$

Mivel
$$\int f_n \, d\mu \geq \sum_{i=1}^{m} t y_i \mu(A_{i,n}),$$
mindkét oldalon határértéket véve,
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geq t \sum_{i=1}^{m} y_i \mu(A_i).$$
Most $t \uparrow 1$ határértéket, majd a jobb oldalon szuprémumot véve, kapjuk az egyenlőség nem triviális felét. $\square$

**9.2.4. Fatou-lemma.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_n \colon X \to [0, \infty]$ mérhető függvények, akkor*
$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n(x) \, d\mu(x) \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu(x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Beppo Levi tétele szerint
$$\begin{aligned}\int \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu(x) &= \int \lim_{n\to\infty} g_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int g_n(x) \, d\mu(x) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu. \quad \square\end{aligned}$$

**9.2.5. Nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitása.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $I$ megszámlálható halmaz, és minden $i \in I$-re $f_i \colon X \to [0, \infty]$ mérhető függvény. Ekkor*
$$\sum_{i\in I} \int f_i = \int \Big( \sum_{i \in I} f_i \Big).$$

**Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $f$ és $g$ egyszerű függvények. Ekkor összegük is egyszerű függvény és
$$\begin{aligned}\int f + \int g &= \sum_i x_i \mu\{f = x_i\} + \sum_j y_j \mu\{g = y_j\} \\ &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \mu(\{f = x_i\} \cap \{g = y_j\}) \\ &= \sum_k z_k \sum_{x_i + y_j = z_k} \mu(\{f = x_i\} \cap \{g = y_j\}) \\ &= \sum_k z_k \mu\{f + g = z_k\} = \int (f+g).\end{aligned}$$

Most legyenek $f$ és $g$ tetszőlegesek, és válasszunk olyan egyszerű mérhető függvényekből álló $r_n$ illetve $s_n$ sorozatokat, amelyekre $r_n \uparrow f$ és $s_n \uparrow g$. Beppo Levi tételéből
$$\int f + \int g = \lim_{n\to\infty} \int r_n + \lim_{n\to\infty} \int s_n = \lim_{n\to\infty} \int (r_n + s_n) = \int (f+g).$$

Végül az általános eset bizonyításához feltehetjük, hogy $I \subset \mathbb{N}$. Ismét Beppo Levi tételét alkalmazva,

$$\int\Big(\sum_{i\in I} f_i\Big) = \lim_{n\to\infty}\int\Big(\sum_{i\le n, i\in I} f_i\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\le n, i\in I}\int f_i = \sum_{i\in I} f_i. \ \square$$

**9.2.6. Integrálható függvények.** Egy tetszőleges $X$ halmazon értelmezett bővített valós értékű függvényre definiáljuk a függvény $f^+ = \max\{f, 0\}$ *pozitív részét* illetve $f^- = \max\{-f, 0\}$ *negatív részét*. Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és az $f$ bővített valós értékű mérhető függvény majdnem mindenütt értelmezve van az $A \in \mathcal{A}$ halmazon, akkor definiáljuk az *$f$ integrálját az $A$ halmazon* az

$$\int_A f(x)\,d\mu(x) = \int_A f\,d\mu = \int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$$

a felett fx dmu| x felett fx dmu| x $_A f(x)(x)$a felett f dmu| felett f dmu| $_A f$összefüggéssel, ha a jobb oldalon álló különbség értelmezve van, azaz ha nem $\infty - \infty$ alakú. Nemnegatív függvényre az eddigi definíciót kapjuk vissza. Ha $\int_A f$ véges, akkor azt mondjuk, hogy *$f$ integrálható $A$-n.* A „létezik az integrál” és az „integrálható” fogalmak között hasonló kapcsolat van, mint a „létezik a határérték” és a „konvergens” fogalmak között. Az első esetben végtelen is megengedett, a második esetben nem. Az egész téren vett integrálra itt is használjuk a rövidebb $\int f = \int f\,d\mu = \int f(x)\,d\mu(x)$f ff dmu| dmu| ffx dmu| x x dmu| x $f(x)(x)$ jelölést.

**9.2.7. Bővített valós értékű függvények integráljának tulajdonságai.** *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g$ az $X$-en értelmezett, bővített valós értékű mérhető függvények.*

(1) *Ha $f = g$ majdnem mindenütt és $f$ integrálja létezik, akkor $\int g\,d\mu = \int f\,d\mu$;*

(2) *$f$ pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, és $\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu$;*

(3) *ha $\int f\,d\mu$ létezik és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\int(\alpha f)\,d\mu = \alpha\int f\,d\mu$ (*homogenitás*; itt $0\cdot\infty = 0\cdot(-\infty) = 0$);*

(4) *ha $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ értelmezve van, akkor $\int(f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu$ (*additivitás*);*

(5) *ha $f \le g$ és $\int f\,d\mu > -\infty$ vagy $\int g\,d\mu < \infty$, akkor $\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu$;*

(6) *ha $|f| \le g$ majdnem mindenütt és $g$ integrálható, akkor $f$ is integrálható (*majoráns kritérium*).*

**Bizonyítás.** (1) abból következik, hogy $f^+ = g^+$ és $f^- = g^-$ majdnem mindenütt. (2) következik abból, hogy $|f| = f^+ + f^-$. (3) triviális, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ és $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, így (3) a definícióból következik. Az $\alpha < 0$ eset erre az esetre vezethető vissza a $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ összefüggések felhasználásával. (5) az $f^+ \le g^+$ és $f^- \ge g^-$ egyenlőtlenségek következménye. (6) $\int f\,d\mu$ definíciójából triviális. Végül ha $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu \in \mathbb{R}$, akkor (4) az

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \tag{7}$$

összefüggés átrendezésével adódó

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

összefüggés mindkét oldalának integrálásával, majd visszarendezésével adódik. Ha

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \infty,$$

akkor a (7) összefüggésből $(f+g)^+ + f^- + g^- \geq f^+ + g^+$, így $\int (f+g)^+\,d\mu = \infty$, az $(f+g)^- = |f+g| - (f+g) \leq |f| + |g| - f - g = f^- + g^-$ egyenlőtlenségből viszont $\int (f+g)^-\,d\mu < \infty$. Hasonlóan kezelhető az $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = -\infty$ eset is. □

**9.2.8. Komplex és vektor értékű függvények integrálja.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$, az $f$ pedig az $A$-n majdnem mindenütt értelmezett mérhető függvény. Komplex értékű $f$ függvény $A$ feletti integrálját akkor definiáljuk, ha $\Re f$ és $\Im f$ integrálhatóak $A$ felett, az

$$\int_A f = \int_A \Re f + i \int_A \Im f$$

összefüggéssel. Egy $\mathbb{K}^n$-beli értékű $f = (f_1, \dots, f_n)$ függvény $A$ feletti integrálját pedig akkor definiáljuk, ha az $f_i$ koordináta-függvények integrálhatóak $A$ felett, az

$$\int_A f\,d\mu = \Big( \int_A f_1\,d\mu, \dots, \int_A f_n\,d\mu \Big)$$

összefüggéssel.

Komplex, illetve vektor értékű függvények integráljának tulajdonságai könnyen következnek a definícióból. Például $f$ akkor és csak akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, mert $|f_j| \leq |f| \leq \sum_{j=1}^n |f_j|$. Némi külön meggondolást igényel $\mathbb{K}^n$-beli értékű integrálható függvényre annak bizonyítása, hogy $\left|\int f\right| \leq \int |f|$. Feltehetjük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Legyen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ az $f$ integrálja. Ekkor a Cauchy-egyenlőtlenségből $\sum_{j=1}^n y_j f_j(x) \leq |y|\big|f(x)\big|$ majdnem mindenütt, amiből

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^n y_j \int f_j \leq |y| \int |f|.$$

Ebből adódik az állítás.

**9.2.9. Megjegyzés.** Integrálokra vonatkozó tételek bizonyításának általános módja a következő *approximációs eljárás*: Az állítást belátjuk mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire, ebből azonnal következik nemnegatív egyszerű függvényekre. Ezután Beppo Levi tételét használva nemnegatív függvényekre térünk át, majd az integrál definíciójának megfelelően haladunk tovább. Ezzel a módszerrel a tételek általában átvihetők vektor értékű függvényekre is.

**9.2.10. Lebesgue tétele.** *Ha $f_1, f_2, \dots$ majdnem mindenütt értelmezett, $\mathbb{K}^n$-beli értékű integrálható függvények az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktéren, $g$ nemnegatív integrálható függvény, $|f_n| \leq g$ majdnem mindenütt minden $n$-re és $f_n \to f$ majdnem mindenütt, akkor $\int |f_n - f|\,d\mu \to 0$ és $\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$.*

Ha a mértéktér nem lenne teljes, akkor $f$ mérhetőségét is fel kellene tenni.

**Bizonyítás.** Alkalmasan megváltoztatva a függvényeket nulla mértékű halmazon a $2g-|f_n-f|$ nemnegatív mérhető függvénysorozat pontonként a $2g$ függvényhez konvergál. A Fatou-lemma szerint

$$0 \geq \int 2g\,d\mu - \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f_n - f|)\,d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,d\mu \geq 0.$$

Mivel

$$\left| \int f_n\,d\mu - \int f\,d\mu \right| \leq \int |f_n - f|\,d\mu,$$

a bizonyítás kész. □

**9.2.11. Az integrál abszolút folytonossága.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és $f$ integrálható függvény, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \delta$ esetén $\int_A |f|\,d\mu < \varepsilon$.*

**Bizonyítás.** Válasszunk olyan $0 \leq s \leq |f|$ egyszerű függvényt, amelyre

$$\int (|f| - s)\,d\mu < \varepsilon/2.$$

Ha $K \in \mathbb{R}$, $s < K$, akkor $\delta = \varepsilon/(2K)$ választással

$$\int_A |f|\,d\mu = \int_A (|f| - s)\,d\mu + \int_A s\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \mu(A)K \leq \varepsilon. \ \square$$

**9.2.12. Az integrál $\sigma$-additivitása.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $A$ a diszjunkt, mérhető halmazokból álló $A_i$, $i = 1, 2, \dots$ halmazrendszer egyesítése, valamint $\int_A f\,d\mu$ létezik, akkor*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f\,d\mu.$$

**Bizonyítás.** Nemnegatív függvényekre az állítás a szumma és az integrál felcserélhetőségéből következik. Bővített valós értékű függvényekre azért teljesül, mert a pozitív és a negatív részre is teljesül. Innen az integrál definíciója szerint kapjuk tetszőleges integrálható függvényre.

**9.2.13. A Kurzweil-féle és a Lebesgue-integrál.** Ha a Lebesgue-mérték szerint integrálunk, akkor a *Lebesgue-integrál*t kapjuk. Hasonlóan, ha egy Lebesgue–Stieltjes-mérték szerint integrálunk, akkor a *Lebesgue–Stieltjes-integrál*t kapjuk. Megmutatható, hogy $\mathbb{R}^n$ egy zárt tégláján a Kurzweil-féle integrál általánosabb a Lebesgue-integrálnál. Van azonban néhány kellemetlen tulajdonsága, például ha elforgatunk egy függvényt, megváltozhat az integrálhatósága. Ezért inkább a Lebesgue-integrált fogjuk használni. A pontos kapcsolat egyszerű: egy valós értékű függvény pontosan akkor Lebesgue-integrálható egy téglán, ha abszolút integrálható, azaz ha $f$ és $|f|$ is integrálható Kurzweil szerint. Hasonló a helyzet egy monoton növekedő $g$ függvény szerinti $g$-integrálhatósággal egy $[a, b]$ intervallumon. Ha $g$-t kiterjesztjük $\mathbb{R}$-re úgy, hogy $x < a$ esetén legyen $g(a)$, $x > b$ esetén legyen $g(b)$, akkor egy valós értékű $f$ pontosan akkor Lebesgue–Stieltjes integrálható $\lambda_g$-re nézve az $[a, b]$-n, ha abszolút $g$-integrálható, azaz $f$ és $|f|$ is $g$-integrálható $[a, b]$-n. Ez utóbbi tény — egyáltalán nem egyszerű — bizonyítása megtalálható a [22] könyvben. A másik állítás bizonyítása hasonló.

A jelölések egyszerűsítése érdekében néha az $\int f(x)\,dx$, stb., jelölést fogjuk használni a „természetes” mérték, a Lebesgue-mérték szerinti integráláskor. Általánosabban, néha ezt a jelölést fogjuk használni, ha egy $m$-dimenziós halmazon az $m$-dimenziós Hausdorff-mérték szerint integrálunk; a „majdnem mindenütt” kitételt és a mérhetőséget is erre a mértékre értjük. Ha egyértelművé akarjuk tenni a jelölést, akkor kiírjuk a mértéket.

A számegyenesen, ha lényegtelen, hogy az intervallum végpontjai az integrációs tartományhoz tartoznak-e, akkor $a \leq b$ esetén használni fogjuk az $\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ és az $\int_b^a f(x)\,d\mu(x) = -\int_a^b f(x)\,d\mu(x)$ jelölést. Általában más betűt használunk a határok jelölésére, mint integrációs változónak, de ez nem szükségszerű, mert az integrációs változó „kötött változó”, így például $\int_a^t f(t)\,dt$ teljesen legális.

→ **9.2.14. Feladat [2].** Határozzuk meg $[0,1]$-en a racionális számok karakterisztikus függvényének Lebesgue-integrálját.

→ **9.2.15. Feladat [3].** Számítsuk ki egy függvény Dirac-mérték szerinti integrálját.

→ **9.2.16. Feladat [5].** Számítsuk ki egy függvény számláló mérték szerinti integrálját.

→ **9.2.17. Feladat [4].** Mennyi $\int_0^{2\pi} e^{ix}\,dx$?

→ **9.2.18. Feladat [5].** Legyen $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$, ha $x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$. Számítsuk ki $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ és $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ értékét.

→ **9.2.19. Feladat [6].** Számítsuk ki az $\int_0^1 x^\alpha\,dx$ és $\int_1^\infty x^\alpha\,dx$ integrálokat, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$.

→ **9.2.20. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy integrálható függvény egy $\sigma$-véges halmazon kívül nulla.

→ **9.2.21. Feladat [7].** Adjunk példát olyan függvénysorozatra, amelyre a Fatou-lemmában éles egyenlőtlenség teljesül. Lehet-e a függvénysorozat egyenletesen konvergens? Lehet-e a függvénysorozat korlátos, ha a mértéktér véges?

→ **9.2.22. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy Beppo Levi tétele nem marad igaz, ha $\leq$ helyett $\geq$ szerepel.

**9.2.23. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy ha egy integrálható bővített valós értékű $f$ függvényre $\int_A f = 0$ minden mérhető $A$ halmazra, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.

**9.2.24. Feladat [8].** Legyen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olyan Lebesgue-integrálható függvény, amelyre $\int_0^x f = 0$ minden $x \in [0,1]$-re. Mutassuk meg, hogy $f = 0$ majdnem mindenütt.

→ **9.2.25. Feladat [6].** Igazoljuk, hogy skalár értékű függvények körében egy korlátos és mérhető függvénynek minden integrálható függvénnyel való szorzata integrálható. Igaz-e a megfordítás?

**9.2.26. Feladat [8].** Adjunk példát olyan $f\colon ]0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényre, amelyre $\lim_{\delta\downarrow 0} \int_\delta^1 f(x)\,dx$ véges, de $f$ a $]0,1]$-en nem Lebesgue-integrálható.

**9.2.27. Feladat [10].** Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén létezik az $\int_0^1 x^\alpha \sin x^\beta \, dx$ Lebesgue-integrál, és mikor létezik a $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \sin x^\beta \, dx$ határérték?

⋆ **9.2.28. Feladat [10].** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér. Mutassuk meg, hogy a mérhető $\mathbb{K}^m$-beli értékű függvények között a

$$d(f,g) = \int \frac{d_{\mathbb{K}^m}(f,g)}{1 + d_{\mathbb{K}^m}(f,g)} \, d\mu$$

összefüggés egy eltérést ad meg, és a megfelelő konvergencia a mértékben való konvergencia.

→ **9.2.29. Feladat [5].** Adjunk példát olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos függvényre, amely $\lambda$-majdnem mindenütt egyenlő egy folytonos függvénnyel, de sehol sem folytonos.

→ **9.2.30. Feladat [5].** Adjunk példát olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amely $\lambda$-majdnem mindenütt folytonos, de nincs olyan folytonos függvény, amellyel $\lambda$-majdnem mindenütt egyenlő.

**9.2.31. Mértékterek szorzata.** Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek, és tekintsük az $A \times B \mapsto \mu(A)\nu(B)$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ halmazfüggvényt (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). Jelölje $\mu \times \nu$ az ehhez tartozó külső mértéket $X \times Y$-on, és $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a $\mu \times \nu$-mérhető halmazok osztályát. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mértékterek szorzatá*nak nevezzük.

**9.2.32. Fubini-tétel.** *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ teljes mértékterek. Ha $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, akkor az $A \times B$ halmaz $\mu \times \nu$-mérhető és $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ (itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$). Ha $f$ egy $\mu \times \nu$-mérhető függvény, amelynek $\mu \times \nu$-integrálja létezik és amely egy $\sigma$-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmazon kívül nulla, akkor az alábbi integrálok léteznek, és*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\, \mu \times \nu(x,y) &= \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \\ &= \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

⋆ **Bizonyítás.** Jelölje $\mathcal{F}$ az olyan $S \subset X \times Y$ halmazok osztályát, amelyeknek $\xi_S$ karakterisztikus függvényére a

$$\varrho(S) = \int_Y \int_X \xi_S(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

kétszeres integrál értelmezve van. Kétszer alkalmazva a nemnegatív függvények integráljának megszámlálható additivitását, illetve Lebesgue tételét, kapjuk, hogy

(1) ha $S_1, S_2, S_3, \ldots$ diszjunkt elemei $\mathcal{F}$-nek, akkor

$$\cup_{j=1}^\infty S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^\infty \varrho(S_j) = \varrho(\cup_{j=1}^\infty S_j);$$

(2) ha $S_1 \supset S_2 \supset S_3 \ldots$ egy $\mathcal{F}$-beli sorozat és $\varrho(S_1) < \infty$, akkor

$$\cap_{j=1}^{\infty} S_j \in \mathcal{F} \quad \text{és} \quad \lim_{j\to\infty} \varrho(S_j) = \varrho(\cap_{j=1}^{\infty} S_j).$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \{A \times B : A \ \mu\text{-mérhető},\ B \ \nu\text{-mérhető}\}, \\ \mathcal{P}_1 &= \{\cup_{i=1}^{\infty} S_i \colon S_i \in \mathcal{P}_0\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{\cap_{i=1}^{\infty} S_i \colon S_i \in \mathcal{P}_1\} \end{aligned}$$

halmazrendszereket, és vegyük észre, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$, akkor $\varrho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Innen $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{F}$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $A \times B \in \mathcal{P}_0$ és $C \times D \in \mathcal{P}_0$, akkor $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{P}_0$ és

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = \big((A \setminus C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B \setminus D)\big)$$

két diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmaz uniója. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_1$ minden tagja előállítható diszjunkt $\mathcal{P}_0$-beli halmazok uniójaként. Így $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{F}$. Két $\mathcal{P}_1$-beli halmaz metszete is $\mathcal{P}_1$-ben van. Így $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mathcal{P}_1$-beli halmazok egy csökkenő sorozatának a metszete.

Most megmutatjuk, hogy bármely $S \subset X \times Y$-ra

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\{\varrho(V) \colon S \subset V \in \mathcal{P}_1\},$$

és van olyan $W$ halmaz, hogy

$$S \subset W \in \mathcal{P}_2 \quad \text{és} \quad (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W).$$

Először is, ha $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2, A_3 \times B_3, \ldots$ a $\mathcal{P}_0$ osztályban vannak, és

$$S \subset V = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j,$$

akkor

$$\xi_V \le \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{A_j \times B_j},$$

amiből

$$\varrho(V) \le \sum_{j=1}^{\infty} \varrho(A_j \times B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j),$$

és egyenlőség teljesül, ha az $A_j \times B_j$ halmazok diszjunktak. Másodszor, a $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ esetben, választhatunk $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ halmazokat úgy, hogy $S \subset V_j \in \mathcal{P}_1$ és

$$(\mu \times \nu)(S) = \lim_{j\to\infty} \varrho(V_j)$$

teljesüljön. Végül, legyen $W = \cap_{j=1}^{\infty} V_j$, ha $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, ha pedig $(\mu \times \nu)(S) = \infty$, akkor legyen $W = X \times Y$.

Most (1) bizonyításához tegyük fel, hogy $A \times B \in \mathcal{P}_0$. Mivel

$$\mu(A)\nu(B) = \varrho(A \times B) \le \varrho(V)$$

minden $A \times B \subset V \in \mathcal{P}_1$-re, kapjuk, hogy $\mu(A)\nu(B) \leq (\mu \times \nu)(A \times B)$. A másik irányú egyenlőtlenség triviális. Továbbá, ha $T \subset X \times Y$, akkor $T \subset U \in \mathcal{P}_1$-ből $U \cap (A \times B)$ és $U \setminus (A \times B)$ diszjunkt $\mathcal{P}_1$-beli halmazok, így

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(T \cap (A \times B)) &+ (\mu \times \nu)(T \setminus (A \times B)) \\ &\leq \varrho(U \cap (A \times B)) + \varrho(U \setminus (A \times B)) = \varrho(U),\end{aligned}$$

amiből $U$-ra infimumot véve az $A \times B$ halmaz $\mu \times \nu$-mérhetősége adódik. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}_2$ minden eleme $\mu \times \nu$-mérhető. Ha most $(\mu \times \nu)(S) = 0$, akkor $S$ benne van valamely $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $\varrho(W) = 0$, innen $\varrho(S) = 0$.

Ha $(\mu \times \nu)(S) < \infty$ és az $S$ halmaz $\mu \times \nu$-mérhető, akkor $S$ benne van egy $W \in \mathcal{P}_2$ halmazban, amelyre $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(W) = \varrho(W)$, innen $(\mu \times \nu)(W \setminus S) = 0$. Így $\varrho(W \setminus S) = 0$,

$$\mu\{x\colon (x, y) \in S\} = \mu\{x\colon (x, y) \in W\}$$

teljesül $\nu$-majdnem minden $y \in Y$-ra. Ez azt jelenti, hogy

$$\varrho(S) = \varrho(W) = (\mu \times \nu)(S),$$

azaz az első egyenlőség teljesül $S$ karakterisztikus függvényére. Ugyanez teljesül, ha $S$ tetszőleges $\sigma$-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmaz. A második egyenlőség $\mu$ és $\nu$ szerepének felcserélésével kapható a $\sigma$-véges $\mu \times \nu$-mérhető halmazok karakterisztikus függvényeire. Végül az approximációs lemma és Beppo Levi tétele alapján kapjuk a tételt nemnegatív, az integrál definíciója alapján pedig tetszőleges függvényekre.

→ **9.2.33. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda^n$ és $\lambda^m$ szorzata $\lambda^{n+m}$.

→ **9.2.34. Feladat [7].** Legyen $\lambda$ a Lebesgue-mérték, $\mu$ pedig a számláló mérték $[0, 1]$-en. Mutassuk meg, hogy a $\delta_{x,y}$ Kronecker-delta $\mu \times \lambda$-mérhető, és határozzuk meg a Fubini-tételben szereplő integrálokat. Miért nem mond ellent az eredmény a Fubini-tételnek?

**9.2.35. Feladat [10].** Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy\, dx,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \big|f(x, y)\big|\, dx\, dy, \quad \int_0^1 \int_0^1 \big|f(x, y)\big|\, dy\, dx$$

integrálokat, ha

(1) $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$;

(2) $f(x, y) = 1/(x - 1/2)^3$, ha $0 < y < |x - 1/2|$, és 0 egyébként;

(3) $f(x, y) = (x - y)/(x^2 + y^2)^{3/2}$;

(4) $f(x, y) = 1/(1 - xy)^p$, ahol $p > 0$.

**9.2.36. Feladat: az integrál, mint görbe alatti terület [10].** Legyen $\lambda$ a Lebesgue-mérték $\mathbb{R}$-en, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy $\sigma$-véges mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ mérhető függvény, és

$$T_* = \big\{(x,t)\colon (x,t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \le t < f(x)\big\},$$

$$T^* = \big\{(x,t)\colon (x,t) \in X \times \mathbb{R}, 0 \le t \le f(x)\big\}.$$

Mutassuk meg, hogy a $T_*$ és $T^*$ halmazok $\mu \times \lambda$-mérhetőek, és

$$(\mu \times \lambda)(T_*) = (\mu \times \lambda)(T^*) = \int_X f\, d\mu.$$

(Lebesgue eredetileg a nemnegatív valós értékű függvények Lebesgue-integrálját görbe alatti területként definiálta.)

$\to$ **9.2.37. Feladat [6].** Fogalmazzuk meg pontosan, és igazoljuk a *Cavalieri-elv*et.

**9.2.38. Eloszlásfüggvény.** Ha $\mu$ véges mérték, akkor egy $\mu$-mérhető valós $g$ függvény *eloszlásfüggvény*én a

$$h(x) = \mu\{g < x\}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}$$

összefüggéssel definiált függvényt értjük.

**9.2.39. Integrál és eloszlásfüggvény.** *Legyen $\mu$ véges mérték, $g$ egy $\mu$-mérhető valós értékű függvény, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig Borel-függvény. Jelölje $g$ eloszlásfüggvényét $h$. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik, és*

$$\int_X f \circ g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_h.$$

A tétel nagyon fontos a valószínűségszámításban, mivel mutatja, hogy egy valószínűségi változó jellemzői (várható érték, szórás, momentumok, stb.) kifejezhetők az eloszlásával. Ha $f$ egy $[a, b[$ intervallum karakterisztikus függvénye, akkor

$$\int_X f \circ g\, d\mu = \mu(g^{-1}[a, b[) = \lambda_h[a, b[ = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_h,$$

és ebből approximációval kapjuk az általános esetet. Itt nem bizonyítjuk. A leggyakrabban alkalmazott $f(x) = x$ esetet könnyű szemléltetni, ha $X$ a $[0, \mu(X)]$ intervallum a Lebesgue-mértékkel: mivel $\int g$ csak a $g$ nívóhalmazainak mértékétől függ, de nem függ azok elhelyezkedésétől, a nívóhalmazokat jobbra eltolva, feltehetjük, hogy $g$ monoton növekedő. $\square$

## 9.3 Felületi integrál

*A Stokes-tétel különös sajátsága, hogy az egyedüli vele kapcsolatos nehézség a kimondásához szükséges fogalmak definícióinak bonyolultsága. E definíciók differenciálformákra, ezek deriváltjaira, integrációs tartományok határaira és irányítására vonatkoznak. Ha ezek a fogalmak már tisztázottak, akkor a tétel kimondása nagyon rövid és tömör, és bizonyítása kevés nehézséget okoz.*

*Walter Rudin (1978)*

Ez a klasszikus témakör a klasszikus fizika talán legszebb részének, a Maxwell-elméletnek az alapját képezi, de alkalmazásai átszövik a fizika különböző ágait, és fontos szerepet játszanak a matematika különböző ágaiban (például parciális differenciálegyenletek, numerikus analízis, topológia stb.) is. Elkerültem az egyszerűbb, de lényegében formális tárgyalásmódot, amely geometriai szempontból keveset mond, és lényegében a [45] könyv tárgyalásmódját követem, de nem Riemann-integrált használok, mert így az eredmények általánosabbak, az integrációs tartományok határára vonatkozó feltételek pedig könnyen ellenőrizhető és szemléletes lokális feltételek. Más változatokat például a [38] jegyzetből vagy Rudin [50] könyvéből ismerhet meg az olvasó. A divergenciatétel után részletesen tárgyaljuk a két- és háromdimenziós esetet, és csak ezután fogalmazzuk meg a Stokes-tétel általánosabb alakját.

**9.3.1. Felületek.** Egy $\mathbb{R}^m$-beli $n$ dimenziós *felület* alatt $\mathbb{R}^n$ valamely $D$ nyílt halmazának egy $g\colon D \to \mathbb{R}^m$ folytonos leképezését értjük. Ha $g$ Lipschitz-függvény, akkor *Lipschitz-felület*ről beszélünk. Ha $g$ folytonosan differenciálható és minden $x \in D$-re a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_n g(x)$$

vektorok lineárisan függetlenek (ez csak akkor lehetséges, ha $m \geq n$), akkor *sima felület*ről beszélünk.

Ha $G \subset \mathbb{R}^n$ egy másik nyílt halmaz, és $\varphi\colon G \to D$ egy kölcsönösen egyértelmű, inverzével együtt folytonosan differenciálható leképezése $G$-nek $D$-re, akkor a $g \circ \varphi$ függvényt a $g$ sima felület egy *ekvivalens előállítás*ának nevezzük.

**9.3.2. Felületek előállítási módjai.** Először kétdimenziós $\mathbb{R}^3$-beli felületekre szorítkozunk. Ha $g\colon D \to \mathbb{R}^3$ egy sima felület, $u \in D$, akkor ez az úgynevezett *Gauss-féle előállítás* koordinátánként kiírva

$$\begin{aligned} r_1 &= g_1(u_1, u_2) \\ r_2 &= g_2(u_1, u_2) \\ r_3 &= g_3(u_1, u_2) \end{aligned}$$

alakú. Az a feltétel, hogy $\partial_1 g(u)$ és $\partial_2 g(u)$ lineárisan függetlenek, úgy is kifejezhető, hogy a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1}(u) & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_2}(u) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u_1}(u) & \dfrac{\partial g_2}{\partial u_2}(u) \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial u_1}(u) & \dfrac{\partial g_3}{\partial u_2}(u) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2 minden $u$-ra. Ez azt jelenti, hogy lokálisan $u_1$ és $u_2$ kiküszöbölhető a fenti egyenletrendszerből (valamelyik két egyenletből kifejezve $u_1$-et és $u_2$-t, és beírva a harmadikba), és így $r = (r_1, r_2, r_3)$ valamelyik koordinátája kifejezhető a másik kettővel (*Euler–Monge-féle*vagy *explicit előállítás*). Ha például $r_3$ kifejezhető $r_1, r_2$-vel, akkor lokálisan egy $r_3 = f(r_1, r_2)$ alakú explicit előállításra térhetünk át. Természetesen egy explicit előállításról mindig könnyen visszatérhetünk a Gauss-féle előállításra.

Ha valamelyik parciális derivált nullától különböző, egy $F(r_1, r_2, r_3) = 0$ alakú egyenlet, ahol $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ és $F$ valós értékű, folytonosan differenciálható függvény, lokálisan egy sima felületet ad meg, mert az implicit függvény tétel szerint lokálisan áttérhetünk explicit előállításra.

Hasonló állítás igaz más dimenziókra is. Például egy $\mathbb{R}^3$-beli egydimenziós sima „felület”, azaz egy sima görbe esetén a Gauss-féle $r = g(t)$, $t \in D \subset \mathbb{R}^3$ előállítás részletesen kiírva

$$\begin{aligned} r_1 &= g_1(t) \\ r_2 &= g_2(t) \\ r_3 &= g_3(t) \end{aligned}$$

alakú. Ha $t \in D$, és így az érintővektor nem nulla, akkor lokálisan $t$ kiküszöbölhető, és $r_1, r_2, r_3$ közül az egyikkel kifejezhető a másik kettő, azaz explicit előállításra térhetünk át. Megint az implicit függvény tétel szerint egy $F_1(r_1, r_2, r_3) = 0$, $F_2(r_1, r_2, r_3) = 0$ alakú egyenletrendszer, ahol $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ és $F_1, F_2$ valós értékű, folytonosan differenciálható függvények, valamint a

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial r_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial r_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial r_3} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial r_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial r_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial r_2} \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2, lokálisan egy sima egydimenziós felületet, azaz sima görbét ad meg, mert lokálisan áttérhetünk explicit előállításra.

**9.3.3. Felületi normális, érintősík, felületi görbék.** Ha $r \colon D \to \mathbb{R}^3$ egy kétdimenziós sima felület, $u \in D$, akkor a $\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)$ vektort *felületi normális*nak, az

$$n(u) = \frac{\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)}{\left|\partial_1 r(u) \times \partial_2 r(u)\right|}$$

vektort pedig *felületi normális egységvektor*nak fogjuk nevezni. Legtöbbször nem írjuk ki a változótól való függést. Világos, hogy $\partial_1 r$, $\partial_2 r$ és $n$ egy (pozitív irányítású) bázist alkotnak. Az $r(u)$ ponton átmenő, $\langle p - r(u), n(u)\rangle = 0$, $p \in \mathbb{R}^3$ egyenletű síkot $r(u)$-beli [vagy $r(u)$-n átmenő] *érintősík*nak nevezzük. Ez az $r(u)$ pont körül elsőrendben közelíti a felületdarabot.

Egy $r \circ u$ alakban előállítható görbét, ahol $u \colon [a, b] \to D$ egy görbe, *felületi görbé*nek fogunk nevezni. Ha $u = (u_1, u_2)$ folytonosan differenciálható, akkor a felületi görbe is, és érintővektora

$$(r \circ u)' = u_1' \partial_1 r + u_2' \partial_2 r,$$

azaz egy, az $r\big(u(t)\big)$ pontból kiinduló, az érintősíkban haladó vektor. Felületi görbék például az úgynevezett paramétervonalak, amelyeknek egyenlete $u_1(t) = t$, $u_2$ konstans, illetve $u_1$ konstans, $u_2(t) = t$.

**9.3.4. Definíció.** Az $\mathbb{R}^n$-beli $m$-dimenziós felületek felszíne a Hausdorff-mértékük. A felszín kiszámítására vontkozó képlethez szükségünk lesz két jelölésre.

Ha $V$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek és a $g \colon V \to \mathbb{R}^n$ függvény differenciálható $x$-ben, akkor legyen

$$Jg(x) = \sqrt{\det\big(g'(x)^* g'(x)\big)}, \quad \text{ha} \quad m \le n,$$

és

$$Jg(x) = \sqrt{\det\big(g'(x) g'(x)^*\big)}, \quad \text{ha} \quad m \ge n.$$

Ha $m = n$, akkor mindkét esetben $Jg(x) = \left|\det g'(x)\right|$.

Ha $X$ és $Y$ halmazok, egy $g\colon X \to Y$ függvény *multiplicitás*án azt az $\mathbb{M}_g\colon Y \to [0, \infty]$ függvényt értjük, amelynek értéke egy $y \in Y$ helyen $g^{-1}(y)$ elemeinek száma. Ez lehet esetleg $\infty$ is.

**9.3.5. Rademacher tétele.** *Legyen $V \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz és legyen $g\colon V \to \mathbb{R}^m$ lokálisan Lipschitz-függvény. Ekkor $g$ majdnem mindenütt differenciálható és a deriváltja mérhető.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**9.3.6. Felszín képlet.** *Legyen $m \le n$, $V$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, azaz tegyük fel, hogy minden pontnak van olyan környezete, amelyen a függvény Lipschitz. Ha $A \subset V$ egy $\lambda^m$-mérhető halmaz, akkor a $g(A)$ halmaz $\chi^m$-mérhető és*

$$\int_A Jg(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{M}_{g|_A}(y)\, d\chi^m(y).$$

A tételt nem bizonyítjuk, de vizsgáljuk meg a

$$Jg(x)^2 = \det\big(g'(x)^* \cdot g'(x)\big) = \begin{vmatrix} \langle \partial_1 g(x), \partial_1 g(x)\rangle & \dots & \langle \partial_1 g(x), \partial_m g(x)\rangle \\ \langle \partial_2 g(x), \partial_1 g(x)\rangle & \dots & \langle \partial_2 g(x), \partial_m g(x)\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \partial_n g(x), \partial_1 g(x)\rangle & \dots & \langle \partial_m g(x), \partial_m g(x)\rangle \end{vmatrix}$$

szám geometriai jelentését. Az $\mathbb{R}^n$-beli

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_m g(x)$$

vektorokból álló vektorrendszert az általuk kifeszített altér ortogonális komplementerének egy ortonormált bázisával kiegészítve, a kapott vektorrendszernek a determinánsa (a szokásos bázisra vonatkoztatva) nem más, mint a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_m g(x)$$

vektorok által az $\mathbb{R}^n$ térben kifeszített paralelepipedon (előjeles) $m$ dimenziós térfogata. Ha ezen kibővített vektorrendszer szokásos bázisban vett mátrixát balról szorozzuk a transzponáltjával, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amelynek az $m \times m$-es sarokminora a fenti determináns, a többi főátlóbeli elem 1, minden más elem pedig nulla. Így a fenti determináns nemnegatív, és geometriai jelentése a $\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \dots, \partial_m g(x)$ vektorok által az $\mathbb{R}^n$ térben kifeszített paralelepipedon $m$ dimenziós térfogatának a négyzete. Ha $A \subset V$ mérhető halmaz és $g$ kölcsönösen egyértelmű $A$-n, akkor a jobb oldalon a multiplicitás $g(A)$-n 1, egyébként 0, tehát azt kapjuk, hogy az $F = g(A)$ felület $\chi^m$-mérhető és $m$ dimenziós mértékét a felszín képlettel számíthatjuk ki. A tétel mögött az a heurisztika áll, hogy egy $\mathbb{R}^m$-beli „végtelen kicsiny” tégla, amelynek egyik csúcspontja $x$, oldalai pedig $dx_1, \dots, dx_m$, képe a $g$ leképezésnél egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli $m$ dimenziós paralelepipedon, amelynek oldalai $\partial_1 g(x)\, dx_1, \dots, \partial_m g(x)\, dx_m$, és így $m$ dimenziós felszíne $J(g)(x)\, dx_1 \cdots dx_m$. Azt is látjuk, hogy a felszín— mivel a Hausdorff-mérték — nem függ a felületdarab előállításától. □

**9.3.7. Példák.** A tétel jobb megértéséhez vizsgáljunk meg néhány példát a három dimenziós térben, azaz ha $n = 3$.

Ha $m = 1$, és $F$ egy $g$ egyszerű sima görbe értékkészlete, akkor $J(g)(x) = \left|g'(x)\right|$, így azt kapjuk, hogy $\chi^1(F)$ a görbe hossza.

Ha $m = 2$, akkor

$$\begin{aligned}
J(g)(x) &= \sqrt{\det\begin{pmatrix} \langle \partial_1 g(x), \partial_1 g(x)\rangle & \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x)\rangle \\ \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x)\rangle & \langle \partial_2 g(x), \partial_2 g(x)\rangle \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{\left|\partial_1 g(x)\right|^2\left|\partial_2 g(x)\right|^2 - \langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x)\rangle^2} \\
&= \left|\partial_1 g(x)\right|\left|\partial_2 g(x)\right|\sqrt{1-\left(\frac{\langle \partial_1 g(x), \partial_2 g(x)\rangle}{\left|\partial_1 g(x)\right|\left|\partial_2 g(x)\right|}\right)^2} \\
&= \left|\partial_1 g(x)\right|\left|\partial_2 g(x)\right|\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \left|\partial_1 g(x)\right|\left|\partial_2 g(x)\right|\left|\sin\alpha\right| \\
&= \left|\partial_1 g \times \partial_2 g\right|,
\end{aligned}$$

ahol

$$\cos\alpha = \left\langle \frac{\partial_1 g(x)}{\left|\partial_1 g(x)\right|}, \frac{\partial_2 g(x)}{\left|\partial_2 g(x)\right|} \right\rangle,$$

azaz $\alpha$ a $\partial_1 g(x)$ és $\partial_2 g(x)$ érintővektorok által bezárt szög. Így $J(g)(x)$ geometriai jelentése a $g(x)$-beli érintővektorok által kifeszített paralelogramma területe. „Végtelen kicsíny” $dx_1$ és $dx_2$ esetén $Jg(x)\,dx_1\,dx_2$ egy „végtelen kicsiny” érintő paralelogramma, „érintőpikkely”.

Hasonlóan $m = 3$ esetén $J(g)(x) = \left|\det g'(x)\right|$ geometriai jelentése a

$$\partial_1 g(x), \partial_2 g(x), \partial_3 g(x)$$

érintővektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Ha $m = n$ és $g$ az identikus leképezés, akkor azt kapjuk, hogy $\lambda^n(A) = \chi^n(A)$.

**9.3.8. Példa: forgásfelület felszíne.** Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ egy mindenütt pozitív, folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg az ezen függvény grafikonjának az $x$ tengely körüli forgatásával kapott $F$ forgásfelület felszínét. A felület egy előállítása: $x = u$, $y = f(u)\cos v$, $z = f(u)\sin v$, $a \le u \le b$, $0 \le v < 2\pi$. Ebből

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'(u)\cos v & -f(u)\sin v \\ f'(u)\sin v & f(u)\cos v \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$Jg(u, v) = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 + f'(u)^2 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{vmatrix}} = f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2},$$

és így

$$\chi^2(F) = \int_a^b \int_0^{2\pi} f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\,dv\,du = 2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + f'(u)^2}\,du.$$

**9.3.9. Integráltranszformációs formula.** *Legyen $m \le n$, $V$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény, $A \subset V$ egy $\lambda^m$-mérhető halmaz, és $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ egy $\chi^m$-mérhető függvény. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$\int_A f(g(x))\,Jg(x)\,d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathbb{M}_{g|_A}(y)\,d\chi^m(y).$$

A tételt nem bizonyítjuk. Ez az integrálszámítás talán leggyakrabban alkalmazott formulája görbe hossza szerinti és felszín szerinti integrálok kiszámítására, helyettesítéses integrálásra. Gyakran $g$ kölcsönösen egyértelmű $A$-n. Ekkor a jobb oldal $\int_{g(A)} f(y)\,d\chi^m(y)$, tehát egy felszín szerinti integrál. Mivel a Hausdorff-mérték szerinti integrál, nem függ a felület előállításától.

Igen gyakran használjuk az $m = n$ esetet is, a helyettesítéses integrálást. Ekkor $Jg(x)$ a $\det g'(x)$ mennyiség abszolút értéke. A $\det g'(x)$ mennyiség a

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

mátrix determinánsa, hagyományos jelölése

$$\frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

szokásos elnevezése pedig *Jacobi-determináns.* Szemléletes jelentése a $\partial_1 g, \partial_2 g, \ldots, \partial_n g$ vektorok által kifeszített paralelepipedon (előjeles) térfogata. A tétel szemléletes jelentése, hogy egy olyan végtelen kicsiny $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ oldalhosszakkal rendelkező tégla, amelynek egyik csúcsa az $x$ pont, az $y = g(x)$ helyettesítéskor egy olyan paralelepipedonba megy át, amelynek élei az $y = g(x)$ pontból induló

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1, \frac{\partial g}{\partial x_2}\,dx_2, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\,dy_n$$

vektorok.

**9.3.10. Példák: polár-, henger- és gömbi koordináták.** Forgásszimmetrikus síkbeli problémáknál az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$ összefüggésekkel polárkoordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \le 0$, $y = 0$ félegyenes kivételével az egész síkra, inverzével együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

A $z$ tengelyre forgásszimmetrikus térbeli problémáknál az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $-\infty < z < \infty$ összefüggésekkel hengerkoordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \le 0$, $y = 0$, $z \in \mathbb{R}$

félsík kivételével az egész térre, az inverzével együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Gömbszimmetrikus térbeli problémáknál a földi koordinátázásnak megfelelő

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta,$$

$$0 < r < +\infty, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\pi/2 < \vartheta < \pi/2$$

összefüggésekkel gömbi koordinátákra érdemes áttérni. A leképezés kölcsönösen egyértelműen képez le az $x \le 0$, $y = 0$, $-\infty < z < +\infty$ félsík kivételével az egész térre, az inverzével együtt folytonosan differenciálható, a Jacobi-determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta.$$

(Ha az $x = r\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$, $0 < r < +\infty$, $-\pi < \varphi < \pi$, $0 < \vartheta < \pi$ koordinátázást használjuk, akkor $r^2\sin\vartheta$ adódik.)

**9.3.11. Példa.** Egy $R$ sugarú, origó középpontú gömb $z$ tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka gömbi koordinátákra áttérve:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^4\cos^3\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta \, d\vartheta \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^R r^4 \, dr = \frac{8\pi}{15}R^5. \end{aligned}$$

$\to$ **9.3.12. Feladat [5].** Számítsuk ki egy ellipszis területét!

$\to$ **9.3.13. Feladat [6].** Számítsuk ki egy ellipszoid térfogatát!

$\to$ **9.3.14. Feladat [5].** Határozzuk meg a $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ csavarvonal ívhosszát!

$\to$ **9.3.15. Feladat [5].** Határozzuk meg a $t \mapsto (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ görbe ívhosszát!

$\to$ **9.3.16. Feladat [7].** Számítsuk ki a gömb felszínét!

$\to$ **9.3.17. Feladat [8].** Az $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy$ integrált polárkoordinátákban is kiszámítva, vezessük le az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$ összefüggést!

**9.3.18. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi függvények integrálját a megadott halmazon:

(1) $\sqrt{x^2+y^2}$, $x, y > 0$, $x^2+y^2 \le x$;

(2) $\sin(x^2+y^2)$, $\pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2$;

(3) $|xyz|$, $x^2+y^2/4+z^2/9 \le 1$.

**9.3.19. Feladat [8].** Határozzuk meg a következő halmazok súlypontját:

(1) $r \le R$, $\alpha \le \varphi \le \beta$;

(2) $r \le 1+\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

**9.3.20. Feladat [7].** Bizonyítsuk be a Guldin-szabályt: Egy forgástest térfogata a görbe alatti terület szorozva a súlypont pályájának hosszával. $\square$

**9.3.21. Feladat [6].** Legyen $A = [a, b] \times [c, d]$, $0 < a < b$, $0 < c < d$, és $f(x, y) = (y^2/x\sqrt{xy})$. Számítsuk ki $f(A)$ területét!

$\to$ **9.3.22. Feladat [5].** Határozzuk meg a $z = xy$ nyeregfelület $x, y \ge 0$, $x^2+y^2 \le R^2$ negyedkör fölé eső darabjának a felszínét!

**9.3.23. Feladat [6].** Mekkora erővel vonzza az origóban lévő $m$ tömeget az $x^2+y^2 = r^2$, $y \ge 0$ félköríven egyenletesen eloszló $M$ tömeg?

**9.3.24. Feladat [7].** Milyen erős mágneses teret létesít az 1 m átmérőjű, kör alakú vezetőben folyó 1 A erősségű áram a kör középpontjában?

**9.3.25. Feladat [8].** Az $x^2+y^2+z^2 = r^2$, $z \ge 0$ félgömb felületén egyenletesen eloszló $Q$ töltés milyen erővel vonzza az origóban lévő, $q$ nagyságú, ellenkező előjelű töltést?

**9.3.26. Kofelszín képlet.** *Legyen $V$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek, $m \ge n$, $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ lokálisan Lipschitz-függvény. Bármely $\lambda^m$-mérhető $A$ részhalmazára $V$-nek*

$$\int_A Jg(x)\,d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi^{m-n}(A \cap g^{-1}\{y\})\,d\lambda^n(y).$$

A tételt nem bizonyítjuk. A formula a felszín képlet kiterjesztése $m \ge n$-re. Az $m = n$ esetben ugyanazt kapjuk. $\square$

**9.3.27. Lokálisan Lipschitz határú halmazok.** Tételeinket olyan $\mathbb{R}^n$-beli halmazokra tudjuk majd bizonyítani, amelyeknek a határa „elfogadhatóan jó”. Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ halmazra azt mondjuk, hogy *határa lokálisan Lipschitz*, ha a $\partial G$ határ minden $x$ pontjához van egy azt tartalmazó $n-1$ dimenziós $F$ felület, hogy egy megfelelően választott (ortonormált bázishoz tartozó) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ lokális koordináta-rendszerben az $F$ felület előállítható egy Lipschitz-függvénnyel is; az $F$ párhuzamos eltoltjai $G$-ben, illetve $G$-n kívül vannak. Pontosabban fogalmazva, az $x \in \partial G$ ponthoz, hogy ha $b_1, \ldots, b_n$ a megfelelő ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben, és ebben a bázisban $x$ koordinátái $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor az

$x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ pontnak $\mathbb{R}^{n-1}$-ben létezik olyan $U_r(x')$ környezete, egy azon értelmezett valós értékű $\varphi$ Lipschitz-függvény, és egy $\varepsilon > 0$ szám, hogy az

$$\xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \cdots + \xi_{n-1} b_{n-1} + (\gamma + \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})) b_n$$

vektor $\gamma = 0$ esetén $G$ határán, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén $G$ külsejében, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén pedig $G$ belsejében van minden $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in U_r(x')$-re.

**9.3.28. Külső normális.** Legyen $A$ egy mérhető részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Az $A$ *Lebesgue-sűrűség*e az $x$ pontban

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{\lambda^n\big(A \cap \mathbb{B}_r(x)\big)}{\lambda^n\big(\mathbb{B}_r(x)\big)},$$

ha létezik. Ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $u$ egy egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben, azt mondjuk, hogy $u$ a *külső normális*a $A$-nak $x$-ben, ha az

$$\big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y \notin A, \langle y - x, u\rangle < 0\big\} \quad \text{és} \quad \big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y \in A, \langle y - x, u\rangle > 0\big\}$$

halmazok Lebesgue-sűrűsége$x$-ben nulla. A külső normális szemléletes jelentése, hogy „az $A$ határán az $x$ pontban a halmazból kifelé mutat és merőleges a határra". Ha az $A$ halmaznak az $x$ pontban létezik külső normálisa, akkor az egyértelmű: Valóban, ha $u$ és $v$ két különböző külső normális lenne, akkor $u - v$ benne lenne a

$$C = \big\{y \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, u\rangle > 0 \quad \text{és} \quad \langle y, v\rangle < 0\big\}$$

nyílt kúpban. Így az $x + C$ halmaz nem üres, Lebesgue-sűrűsége $x$-ben pozitív, de

$$x + C \subset \big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y \in A, \langle y - x, u\rangle > 0\big\} \cup \big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y \notin A, \langle y - x, v\rangle < 0\big\},$$

ami ellentmondás. Ha létezik külső normálisa $A$-nak az $x$ pontban, akkor azt x a a $(x, A)\mathbf{n}(x, A)$-val jelöljük. Világos, hogy $A$-nak sem a belső, sem a külső pontjaiban nem létezhet külső normális, csak az $A$ határpontjaiban. Gyakran $\mathbf{n}(x, A)$ helyett csak $\mathbf{n}(x)$-et, esetleg csak $\mathbf{n}$-et írunk.

A következő lemma segít a külső normális kiszámításában, ha a határ Monge-féle (vagyis explicit) előállítása adott.

**9.3.29. Lemma.** *Legyen valamely $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ortonormált bázisban a $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz határának egy darabja a $\varphi$ Lipschitz-leképezés grafikonjaként megadva, pontosabban, tegyük fel, hogy $\varphi$ az $\mathbb{R}^{n-1}$ egy nyílt $D$ részhalmazát képezi $\mathbb{R}$-be úgy, hogy valamely $\varepsilon > 0$-ra*

$$\psi_\gamma(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto x_1 b_1 + \cdots + x_{n-1} b_{n-1} + (\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \gamma) b_n$$

*$\gamma = 0$ esetén $D$-t $\partial G$-ba, $-\varepsilon < \gamma < 0$ esetén $G$ belsejébe, $0 < \gamma < \varepsilon$ esetén pedig $G$ külsejébe képezi. Ekkor minden olyan $x' \in D$ pontra, amelyben $\varphi$ differenciálható, $x = \psi_0(x') \in \partial G$-ben létezik a $G$ külső normálisa és $v(x') = b_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{x_i}(x') b_i$ jelöléssel $\mathbf{n}(x) = v(x')/\big|v(x')\big|$.*

A lemmát nem bizonyítjuk. $\square$

**9.3.30. Megjegyzés.** Ha a határ egy darabja mint elemi felületdarab, Gauss-féle (vagyis paraméteres) $g\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ alakban adott, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $u \in D$, és $x = g(u)$, akkor olyan $b_1, b_2, \dots, b_n$ ortonormált bázist válasszunk $\mathbb{R}^n$-ben, amelynek első $n-1$ vektora ugyanazt az alteret feszíti ki, mint a $\partial_j g(u)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$ vektorok. Ha az $x$-nek erre a bázisra vonatkozó koordinátái $x_1, x_2, \dots, x_n$, akkor $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ kifejezhető $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$-el, és a felületnek egy ekvivalens

$$\psi_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) b_n$$

explicit előállítása adható. Mivel $\psi_0'(x')$ értékkészlete megegyezik $g'(u)$ értékkészletével, $\nabla\varphi(x') = 0$, tehát $\mathbf{n}(x)$, ha létezik, $\pm b_n$. Például ha $n = 3$, akkor a külső normális, ha létezik,

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\partial_1 g(u) \times \partial_2 g(u)}{|\partial_1 g(u) \times \partial_2 g(u)|} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{n}(x) = \frac{\partial_2 g(u) \times \partial_1 g(u)}{|\partial_2 g(u) \times \partial_1 g(u)|}.$$

Ha a külső normálist így számítjuk, akkor létezését és a helyes előjelet más, például geometriai meggondolások alapján kell eldönteni.

**9.3.31. Divergencia.** Ha $f$ egy vektormező $\mathbb{R}^n$ egy részhalmazán, amely differenciálható az $x$ pontban, akkor $f$ *divergenciá*ját az $x$ pontban a

$$(\operatorname{div} f)(x) = (\operatorname{Tr} f')(x)$$

összefüggéssel értelmezzük.Emlékeztetünk rá, hogy egy $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációra $\operatorname{Tr}(A)$ a $\lambda \mapsto \det(A - \lambda\mathbb{I})$ karakterisztikus polinom gyökeinek multiplicitással vett összege. Akármilyen bázisban felírva $A$ mátrixát, a gyökök és együtthatók közötti összefüggésből adódik, hogy $\operatorname{Tr}(A)$ az $A$ mátrixának főátlójában álló számok összege, és nem függ a bázis választásától. Ebből következik, hogy ha $f$ és $g$ is vektormező és mindkettő differenciálható $x$-ben, akkor $\operatorname{div}(f+g)(x) = \operatorname{div} f(x) + \operatorname{div} g(x)$.

A divergencia fizikai jelentésének megértéséhez tekintsünk egy

$$T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

téglát. Ha $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ folytonosan differenciálható vektormező valamely, a téglát tartalmazó nyílt halmazon, akkor $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ jelöléssel

$$\int_{a_1}^{b_1} \partial_1 f_1(x_1, x')\, dx_1 = f_1(b_1, x') - f_1(a_1, x').$$

Jelölje $\mathbf{n}(x)$ a $T$ tégla valamely oldallapjának egy pontjában a külső normálist, és $n_i(x)$ ennek $i$-edik koordinátáját. Ennek segítségével a jobb oldal

$$n_1(b_1, x') f_1(b_1, x') + n_1(a_1, x') f_1(a_1, x')$$

alakba írható. Mindkét oldalt integrálva $x'$ szerint, azt kapjuk, hogy

$$\int_T \partial_1 f_1(x)\, dx = \int_{\partial T} n_1(x) f_1(x)\, dx;$$

az integrálást az $\{x\colon x_1 = a_1\}$ és $\{x\colon x_1 = b_1\}$ oldalakról azért terjeszthetjük ki a tégla határára, mert a többi lapon $n_1(x)$ nulla. Hasonlóan járva el a többi $\partial_i f_i$-vel is, és összegezve $i$-re, azt kapjuk, hogy

$$\int_T (\operatorname{div} f)(x)\,dx = \int_{\partial T} \langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle\,dx.$$

Formulánk a divergenciatétel speciális esete. Az általános változatot lásd később.

Az $f$ vektormezőre $\langle f, \mathbf{n}\rangle$ az $f$ normális irányú komponense. Ennek felületi integrálja a vektormező által jellemzett áramlásban a felületen időegység alatt átáramló mennyiség, a vektormezőnek az adott felületre vonatkozó *fluxus*a. A fenti integrálban a jobb oldal fizikai jelentése tehát a $T$ téglából időegység alatt kiáramló mennyiség (a beáramlást negatív kiáramlásnak tekintve). Összehúzva $T$-t egy pontra, azt kapjuk, hogy $\operatorname{div} f$ fizikai jelentése az $f$ vektormező azon pontbeli forrásintenzitása.

**9.3.32. Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-skalármező, $e$ pedig egy rögzített vektor. Ekkor*

$$\int_G f_e(x)\,dx = \int_{\partial G} f(x)\langle e, \mathbf{n}(x)\rangle\,dx,$$

*ahol $f_e$ az $f$-nek az $e$ irány menti deriváltja.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**9.3.33. Divergenciatétel.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-vektormező. Ekkor*

$$\int_G \operatorname{div} f = \int_{\partial G} \langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle\,dx.$$

**Bizonyítás.** Általánosabban, ha fennáll a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel állítása egy korlátos nyílt halmazra, amely határának van (véges) felszíne, valamint egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bázis vektoraira, akkor abból már következik a divergenciatétel, és a divergenciatételből következik a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel.

Valóban, tegyük fel, hogy a divergenciatétel teljesül, és legyen $f(x) = g(x)e$, ahol $g$ egy skalármező, $e$ pedig a rögzített vektor. Az $e = 0$ eset triviális. Egy olyan bázisban írva fel $f'$ mátrixát, amelynek egyik bázisvektora $e$, kapjuk a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tételt $g$-re.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel teljesül minden skalármezőre, és egy bázis $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektoraira. Írjuk fel $f(x)$-et skalár értékű függvényekkel $\sum_i f_i(x)e_i$ alakban. Ha $\partial_{e_j} f_i$ jelöli az $f_i$ függvény $e_j$ irány menti deriváltját, akkor a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tételből azt kapjuk, hogy

$$\int_G \partial_{e_j} f_i(x)\,dx = \int_{\partial G} f_i(x)\langle e_j, \mathbf{n}(x)\rangle\,dx$$

teljesül, ahol a $\partial_{e_j} f_i(x)$ számok $f'(x)$ mátrixának elemei az $e_1, \ldots, e_n$ bázisban. A $j = i$ választással, összegezve $i$-re a bal oldalon $\sum_{i=1}^n \partial_{e_i} f_i(x)$ integrálja áll, ami nem más, mint $(\operatorname{div} f)(x)$ integrálja, míg a jobb oldalon álló integrandus $\langle f(x), \mathbf{n}(x)\rangle$. □

**9.3.34. Gradienstétel.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-skalármező. Ekkor*

$$\int_G \operatorname{grad} f = \int_{\partial G} f(x)\mathbf{n}(x)\,dx.$$

**Bizonyítás.** Legyen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ szokásos bázisa. Mindkét oldalnak ebben a bázisban vett megfelelő koordinátái megegyeznek a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel szerint. $\square$

**9.3.35. Rotáció.** Legyen $v$ az $\mathbb{R}^3$ valamely részhalmazán értelmezett vektormező. Ha $v$ differenciálható értelmezési tartománya valamely $x$ pontjában, akkor értelmezzük $v$ *rotáció*ját az $x$ pontban. Legyenek $v_1, v_2, v_3$ a $v$ koordinátafüggvényei a standard $e_1, e_2, e_3$ bázisban. Legyen

$$\operatorname{rot} v = (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2)\, e_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3)\, e_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\, e_3.$$

A rotáció definíciója könnyebben megjegyezhető a $\operatorname{rot} v = \nabla \times v$ formális felírás segítségével, ahol a $\nabla$ szimbólum a $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ „differenciáloperátort” jelenti. Ez a szimbolikus jelölés egyébként $\mathbb{R}^n$-re is kiterjeszthető: $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$. Ezzel a szimbolikus jelöléssel $\operatorname{div} v = \langle \nabla, v \rangle$, és ha $f$ egy skalármező, akkor a gradiense $\nabla f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_n f)$, valamint a $\Delta$ *Laplace-operátor* szimbolikusan $\langle \nabla, \nabla \rangle$, röviden $\nabla^2$ alakba írható. [Definíció szerint, $(\Delta f)(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f(x)$, ha $f$ kétszer differenciálható $x$-ben. Vektor értékű függvényre a Laplace-operátort koordinátánként alkalmazzuk.] Ezek a szimbolikus összefüggések megkönnyítik a definíciók és tételek megjegyzését.

**9.3.36. Rotációtétel.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz, és $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^3$ Lipschitz-vektormező. Ekkor*

$$\int_G \operatorname{rot} f = \int_{\partial G} \mathbf{n}(x) \times f(x)\,dx.$$

**Bizonyítás.** Legyen $e_1, e_2, e_3$ az $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisa. Mindkét oldalnak ebben a bázisban vett megfelelő koordinátái megegyeznek a Gauss–Green–Osztrogradszkij-tétel szerint. $\square$

**9.3.37. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett elég sima $a$ és $b$ skalár, illetve $c$ és $d$ vektormezőkre teljesülnek az alábbi összefüggések. Írjuk fel mindegyiket a $\nabla$ operátor segítségével is.

(1) $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$;

(2) $\operatorname{div}(ac) = \langle \nabla a, c \rangle + a \operatorname{div} c$;

(3) $\operatorname{rot}(ac) = \nabla a \times c + a \operatorname{rot} c$;

(4) $\operatorname{div}(c \times d) = \langle d, \operatorname{rot} c \rangle - \langle c, \operatorname{rot} d \rangle$;

(5) $\operatorname{rot} \nabla a = 0$;

(6) $\operatorname{div} \operatorname{rot} c = 0$;

(7) $\operatorname{div} \nabla a = \Delta a$;

(8) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} c = \nabla \operatorname{div} c - \Delta c$;

(9) $\operatorname{grad} \operatorname{div} c = \Delta c + \operatorname{rot} \operatorname{rot} c$.

**9.3.38. Feladat [8].** Az előző feladat jelöléseivel, számoljuk ki az alábbi kifejezéseket:

(1) $\nabla\langle c, d\rangle$;

(2) $\operatorname{rot}(c \times d)$.

**9.3.39. Feladat [8].** A divergencia-tétel alkalmazásával alakítsuk át a következő integrálokat. Itt a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az $S$ lokálisan Lipschitz felület, és a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái) $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

(1)

$$\iint_S \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dS;$$

(2)

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS;$$

(3)

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\cos\gamma\, dS.$$

→ **9.3.40. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az $S$ lokálisan Lipschitz felület, akkor a $|V|$ térfogatra

$$|V| = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS,$$

ahol $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ a külső normális iránykoszinuszai (koordinátái).

→ **9.3.41. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az $S$ lokálisan Lipschitz felület, akkor tetszőleges rögzített $\mathbf{l}$ irányra

$$\iint_S \cos(\mathbf{n}, \mathbf{l})\, dS = 0.$$

→ **9.3.42. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy ha a $V \subset \mathbb{R}^3$ korlátos nyílt halmaz határa az $S$ lokálisan Lipschitz felület, $\mathbf{r}$ a rögzített $(x, y, z)$ pontból a $(\xi, \eta, \zeta)$ pontba mutató vektor, amelynek hosszát $r$ jelöli, akkor

$$\iiint_V \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}\, dV = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})\, dS.$$

→ **9.3.43. Feladat [8].** A jelölések megegyeznek az előző feladat jelöléseivel. Számítsuk ki az alábbi Gauss-integrált, ha $(x, y, z)$ a $V$ halmaz belsejében, illetve külsejében van:

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r^2}\, dS.$$

→ **9.3.44. Feladat [8].** A $V$ testet teljesen folyadékba mártjuk. Pascal törvényéből kiindulva bizonyítsuk be Arkhimédész törvényét.

**9.3.45. Irányítás.** Az egyváltozós integráltranszformációs formulánál láttuk, hogy az irányításra is érdemes tekintettel lenni. A számegyenes irányítása annyit jelent, hogy kijelöljük egy nem nulla elemét. Mindazok a számok, amelyek egymás pozitív konstansszorosai, ugyanazt az irányítást jelölik ki. Nyilván kétféle irányítás van, pozitív és negatív.

A sík esetén az irányítás egy $(b_1, b_2)$ rendezett vektorpár kijelölését jelenti, amelyek bázist alkotnak. Egy másik $(b_1', b_2')$ bázis akkor definiálja ugyanazt az irányítást, ha az egyik bázis folytonosan átdeformálható a másikba bázisokon keresztül. Itt is két irányítás van, amelyeket a sík esetén is szokás pozitívnak és negatívnak nevezni, éspedig a standard $(e_1, e_2)$ bázissal ekvivalens irányítást nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. Nem nehéz megmutatni, hogy a $(b_1, b_2)$ irányítás $\det(b_1, b_2)$ előjele.

Hasonló a fogalom háromdimenziós térben, itt szokás jobb-, illetve balsodrású koordináta-rendszerről beszélni. Itt is megmutatható, hogy kétféle irányítás van. Az egyik a standard bázissal ekvivalens irányítás, ezt nevezzük pozitívnak, a másikat negatívnak. A $(b_1, b_2, b_3)$ bázis által defininált irányítás itt is $\det(b_1, b_2, b_3)$ előjele.

Ennek megfelelően, $\mathbb{R}^n$-ben egy $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ bázis *irányításá*t úgy definiáljuk, hogy legyen $\operatorname{sgn}(\det(b_1, b_2, \ldots, b_n))$. Világos, hogy a standard bázis irányítása pozitív, és bármely bázis irányítása az ellentettjére változik, ha két bázisvektort felcserélünk, illetve ha valamelyik bázisvektort az ellentettjével helyettesítjük.

**9.3.46. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy bázisa akkor és csak akkor pozitív irányítású, ha folytonosan átdeformálható a standard bázisba bázisokon keresztül. (Definiáljuk pontosan bázisok folytonos deformációját egymásba.)

**9.3.47. Green-tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor létezik egyszerű zárt Lipschitz-pályák egy $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ sorozata, amelyek értékkészlete $\partial D$ egy diszjunkt lefedése úgy, hogy $1 \le k \le m$-re és majdnem minden $t$-re $\mathbf{n}(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t)$ pozitív irányítású ortogonális bázisa $\mathbb{R}^2$-nek, azaz „a $\gamma_k$ pályán haladva $D$ belseje balra esik". Bármely ilyen pályasorozatra és $f\colon \overline{D} \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ Lipschitz-vektormezőre*

$$\int_D (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} \langle f(x), dx \rangle.$$

A tétel második része lényegében a divergenciatétel kétdimenziós változatának átfogalmazása.

A tételt nem bizonyítjuk. □

**9.3.48. Következmény.**

$$\lambda^2(D) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} x_1\, dx_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} -x_2\, dx_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1. \ \square$$

→ **9.3.49. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével alakítsuk át az

$$\oint_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)\, dy$$

integrált, ahol a $C$ egyszerű zárt sima pálya az $S$ korlátos tartományt határolja.

→ **9.3.50. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_K (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$$

integrált, ahol a $K$ háromszögpálya az $(1,1)$, $(3,2)$, $(2,5)$ csúcsú háromszöget határolja.

→ **9.3.51. Feladat [7].** A Green-tétel segítségével számítsuk ki az

$$\oint_C xy^2\,dy - x^2y\,dx$$

integrált, ahol a $C$ egyszerű zárt sima pálya értékkészlete az $x^2+y^2=a^2$ körvonal.

→ **9.3.52. Feladat [8].** Számítsuk ki az

$$\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

integrált, ahol a $C$ egyszerű zárt sima pálya értékkészlete egy tartomány határa, amelynek az origó nincs a határán.

**9.3.53. Stokes tétele.** *Legyen $D\subset\mathbb{R}^2$ és $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ ugyanaz, mint a Green-tételben, továbbá legyen $x$ egy $\overline{D}$-at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}^3$-beli értékű kölcsönösen egyértelmű folytonosan differenciálható függvény, $f$ pedig egy $x(\overline{D})$-at tartalmazó nyílt halmazon értelmezett folytonosan differenciálható vektormező. Legyen $n$ a $x$ értékkészletén az*

$$n(x(s)) = \frac{\partial_1 x(s)\times\partial_2 x(s)}{\left|\partial_1 x(s)\times\partial_2 x(s)\right|},$$

*ha $\partial_1 x(s)\times\partial_2 x(s)\neq 0$, egyébként $n(x(s))=0$ összefüggéssel értelmezett normálvektormező. Ekkor*

$$\int_{x(G)} \langle \operatorname{rot} f, n\rangle = \sum_i \int_{x\circ\gamma_i} \langle f(y),\, dy\rangle.$$

A tételt nem bizonyítjuk. □

→ **9.3.54. Feladat [9].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

pálya menti integrált, ahol $C$ az $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ körpálya az $x$ tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal. Eredményünket ellenőrizzük az integrál közvetlen kiszámításával.

→ **9.3.55. Feladat [8].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$$

pálya menti integrált, ahol $C$ az $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $0\le t\le\pi$ ellipszis.

→ **9.3.56. Feladat [8].** A Stokes-tétel alkalmazásával számítsuk ki az

$$\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

pálya menti integrált, ahol $C$ az $x^2+y^2=a^2$, $x/a+z/h=1$ $(a>0,\ h>0)$ ellipszis az $x$ tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási iránnyal.

⋆ **9.3.57. Differenciálformák.** A következő oldalon a séma a vektoranalízis klasszikus differenciáloperátorait és tételeit foglalja össze, a teljesség kedvéért az egydimenziós esettel kezdve.

Mint látjuk, az egész történet a Newton–Leibniz-formulával kezdődik, mely szerint egy szakaszon integrálva egy függvény deriváltját, az eredmény a felső és alsó végpontokban vett függvényértékek különbsége.

Vegyük észre, hogy a felső sorokban mezők, és közöttük ható differenciáloperátorok állnak. Az alsó sorokban mindig $\vec{\partial}$ irányított határt képzünk. A középső sorban álló tételek sémája: ha a tétel felett álló differenciáloperátor hat egy mezőre, és a kapott mezőt integráljuk az alatta álló irányított alakzat felett, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az alakzat irányított határa felett integrálnánk az eredeti mezőt. Ezt az általános sémát szeretnénk átvinni tetszőleges dimenzióra.

Az alsó sor általánosításával könnyű dolgunk van. A görbék fogalmát véve alapul, $k$ dimenziós felület, vagy röviden $k$-felület alatt egy $k$ dimenziós $G$ nyílt halmazon értelmezett $\psi$ folytonos függvénynek egy $D\subset G$ korlátos mérhető halmazra vett megszorítását fogjuk érteni. Ugyanúgy, mint a görbéknél, itt is magát a leképezést fogjuk felületnek nevezni, nem az értékkészletét, mert az irányításra is szükség van, és ezt a leképezés adja, átvive az értelmezési tartomány természetes irányítását. Mint a görbéknél, itt is legtöbbször feltesszük, hogy $\psi$ differenciálható, vagy legalábbis Lipschitz, és $D$-ről is gyakran feltesszük, hogy $\partial D$ lokálisan Lipschitz. Az irányított határt úgy fogjuk képezni, mint a Stokes-tételnél tettük: a $D$ határát irányítja a külső normális, és az irányított határ képzésénél olyan $k-1$ felületet keresünk, amelynek irányítása ezzel összhangban van.

Nehezebb megtalálni, hogy mit integráljunk a $k$-felületeinken. A kiindulópontot a görbe menti integrál adhatja. Itt láttuk, hogy vektormező helyett jobb kovektormezőt integrálni, azaz lineáris funkcionál (vagy operátor) értékű függvényt. Egy vektormezőhöz aztán a belső szorzat vagy a vektori szorzat segítségével, vagy más módon hozzárendelhetünk egy kovektormezőt. A görbe menti integrál definiálásakor (a felosztások használatánál) kihasználtuk a valós számok rendezését. A $k$-felület feletti integráloknál ezt nem tehetjük meg, ezért hasznosabb a görbe menti integrál kiszámítására szolgáló

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt,$$

ha $\operatorname{dmn}\gamma=[a,b]$ összefüggés jobb oldalát alapul venni. Ez megtehető, ha $\gamma$ Lipschitz-függvény, a $k$-felületeknél is ezt fogjuk feltenni; integrálfogalmunk így is elég általános lesz. A jobb oldalon az $f(\gamma(t))$ lineáris funkcionált (vagy operátort) alkalmazzuk a $\gamma'(t)$ vektorra, és az így kapott értéket, ami $t$ függvénye, integráljuk.

Vegyük közelebbről szemügyre a háromdimenziós esetet. A Stokes-tételben egy

$$\int_F \langle g,n\rangle$$

$$\dim = 1$$

$$\text{skalár „mező”} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \text{skalár „mező”}$$

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

$$\text{pontok} \xleftarrow{\vec{\partial}} \text{szakaszok}$$

$$\dim = 2$$

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\nabla} & \begin{array}{l}\text{vektor-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{f \mapsto \begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} & \begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} \\
 & \begin{array}{l}\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle \\ = f(\gamma(b)) \\ -f(\gamma(a))\end{array} & & \begin{array}{l}\text{Green-}\\ \text{tétel}\end{array} & \\
\text{pontok} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \text{görbék} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \begin{array}{l}\text{2 dim.}\\ \text{halmaz}\end{array}
\end{array}$$

$$\dim = 3$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\nabla} & \begin{array}{l}\text{vektor-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\text{rot}} & \begin{array}{l}\text{vektor-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\text{div}} & \begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} \\
 & \begin{array}{l}\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle \\ = f(\gamma(b)) \\ -f(\gamma(a))\end{array} & & \begin{array}{l}\text{Stokes-}\\ \text{tétel}\end{array} & & \begin{array}{l}\text{Gauss-}\\ \text{tétel}\end{array} & \\
\text{pontok} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \text{görbék} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \begin{array}{l}\text{irányított}\\ \text{felületek}\end{array} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \begin{array}{l}\text{3 dim.}\\ \text{halmaz}\end{array}
\end{array}$$

$$\dim = n$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\nabla} & \begin{array}{l}\text{vektor-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{?} & \dots & \xrightarrow{?} & \begin{array}{l}\text{vektor-}\\ \text{mező}\end{array} & \xrightarrow{\text{div}} & \begin{array}{l}\text{skalár-}\\ \text{mező}\end{array} \\
 & \begin{array}{l}\int_\gamma \langle \nabla f, d\gamma \rangle \\ = f(\gamma(b)) \\ -f(\gamma(a))\end{array} & & ? & \dots & ? & & \begin{array}{l}\text{Gauss-}\\ \text{tétel}\end{array} & \\
\text{pontok} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \text{görbék} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \dots & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \begin{array}{l}n-1\\ \text{dim.}\\ \text{ir. fel.}\end{array} & \xleftarrow{\vec{\partial}} & \begin{array}{l}n \text{ dim.}\\ \text{halmaz}\end{array}
\end{array}$$

típusú integrál szerepel, ahol $F$ egy kétdimenziós alakzat, amit az $n$ normálvektor „irányít”, $g$ pedig egy vektormező. Az $F$-et egy $\gamma\colon D \to \mathbb{R}^3$ 2-felület értékkészleteként előállítva, a fenti integrál

$$\int_D \Big\langle g(\gamma(s)), \partial_1\gamma(s) \times \partial_2\gamma(s) \Big\rangle \, ds$$

alakba írható. Így tulajdonképpen a $g$ vektormezőhöz a vegyes szorzat segítségével egy bilineáris formát rendeltünk, és ezt alkalmazzuk a $\partial_1\gamma(s)$ és $\partial_2\gamma(s)$ vektorokra. A bilineáris forma alternáló, a vegyes szorzat tulajdonságai miatt. Ennek megfelelően egy $k$-felületen egy értékként $k$-lineáris alternáló formákat felvevő függvényt kell integrálnunk. A differenciáloperátor az úgynevezett külső deriválás lesz: értéke egy pontban a differenciálból képzett alternáló forma.

⋆ **9.3.58. Segédtétel.** *Tegyük fel, hogy $n > 1$ és $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelynek határa lokálisan Lipschitz. Ekkor van olyan $\mathbb{R}^{n-1}$ valamely $D$ korlátos nyílt részhalmazán értelmezett Lipschitz-függvény, és olyan $B \subset D$ mérhető halmaz, hogy $\psi|B$ kölcsönösen egyértelmű, értékkészlete $\partial G$, majdnem minden $y \in \operatorname{dmn}(\psi)$-re*

$$\mathbf{n}(\psi(y)),\ \partial_1\psi(y),\ \partial_2\psi(y),\ \ldots,\ \partial_{n-1}\psi(y)$$

*pozitív irányítású bázisa $\mathbb{R}^n$-nek és $\mathbf{n}(\psi(y))$ merőleges a*

$$\partial_i\psi(y), \quad i = 1, \ldots, n-1$$

*érintővektorokra. Minden ilyen $\psi$-re és $B$-re, és minden $\chi^{n-1}$-integrálható $f\colon \partial G \to \mathbb{R}^n$ függvényre*

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n}\rangle = \int_B \det\Big(f(\psi(y)), \partial_1\psi(y), \ldots, \partial_{n-1}\psi(y)\Big)\, dy.$$

A segédtételt nem bizonyítjuk. □

⋆ **9.3.59. Multilineáris formák.** Legyen $V$ vektortér $\mathbb{R}$ felett. Emlékeztetünk rá, hogy egy $f\colon V^m \to \mathbb{R}$, minden változójában lineáris (multilineáris, $m$-lineáris) leképezést *$m$-lineáris funkcionál*nak vagy *$m$-lineáris formá*nak, röviden *$m$-formá*nak neveztünk. Az összes $m$-formák lineáris teret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Az 1-formák a $f\colon V \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, a $V'$ duális tér elemei. A 0-formák definíció szerint $\mathbb{R}$ elemei. Egy példa $m$-formára a következő: Legyen $\omega_1, \ldots, \omega_m \in V'$. Ekkor az

$$(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m)(v_1, v_2, \ldots, v_m) = \prod_{i=1}^{m} \omega_i(v_i)$$

tenzorszorzat egy $m$-formát definiál $V$-n. (Tudjuk, hogy nem minden $m$-forma áll elő ilyen alakban.)

Tudjuk, hogy az $m$-formák tere $n^m$-dimenziós. Megmutatjuk, hogy ha $\omega_1, \ldots, \omega_n$ a $V'$ egy bázisa, akkor az

$$\omega_{j_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{j_m}, \qquad 1 \le j_1, \ldots, j_m \le n$$

$m$-formák bázist alkotnak. Válasszunk olyan $e_1, \dots, e_n$ bázist $V$-ben, amelyre $\omega_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (Kronecker-delta). Ekkor bármely $f$ $m$-formára

$$f = \sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_m}) \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m},$$

mert a bal és jobb oldal minden $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor $m$-esen egybeesik. Másrészt, ha egy

$$\sum_{1 \le j_1, \dots, j_m \le n} \alpha_{j_1, \dots, j_m} \omega_{j_1} \otimes \dots \otimes \omega_{j_m}$$

lineáris kombináció nulla, akkor minden $\alpha_{j_1, \dots, j_m}$ együttható nulla. Valóban, ha valamelyik $\alpha_{k_1, \dots, k_m}$ nem nulla, akkor a lineáris kombináció az $(e_{k_1}, \dots, e_{k_m})$ vektor $m$-esen nem a nulla értéket veszi fel.

Az $m$-formák két speciális fajtája különösen fontos: a szimmetrikus és az alternáló formák.

Jelölje $S_m$ az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz összes permutációinak csoportját. Egy $f$ $m$-formát *szimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$-re és $\sigma \in S_m$-re

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = f(v_1, \dots, v_m).$$

A szimmetrikus $m$-formák egy alterét alkotják az $m$-formák terének. Bármely $f$ $m$-formából képezhetünk egy $S(f)$ szimmetrikus $m$-formát az

$$S(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $S(f)$ szimmetrikus $m$-forma és az $S$ leképezés lineáris. Ha $f$ maga szimmetrikus volt, akkor $S(f) = m!f$. Emlékeztetünk rá, hogy egy skalár értékű függvény $m$-edik deriváltja egy szimmetrikus $m$-forma.

Számunkra most még fontosabbak lesznek az alternáló formák. Egy $f$ $m$-formát *alternáló*nak vagy *antiszimmetrikus*nak nevezünk, ha bármely $v_1, \dots, v_m \in V$ és $\sigma \in S_m$ esetén

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_1, \dots, v_m);$$

itt $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$, ahol $\varepsilon(\sigma)$ az inverziók száma a $\sigma$ permutációban. [Ismert, hogy $\sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$ az $S_m$ csoport szorzástartó leképezése a $\{-1, 1\}$ multiplikatív csoportba.] Egy alternáló forma előjelet vált, ha bármely két változóját megcseréljük, ugyanis a megfelelő $\sigma$ permutációra $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$. Megfordítva, ha egy $m$-forma bármely két szomszédos változóját megcserélve előjelet vált, akkor alternáló, mert ilyen cserékkel bármely permutáció előállítható. Ha $f$ alternáló forma, és $v_i = v_j$ valamely $i \ne j$-re, akkor $f(v_1, \dots, v_m) = 0$, mert ezt a két változót megcserélve, az érték ugyanaz marad, de előjelet is kell váltania. Az alternáló $m$-formák is egy alterét alkotják az $m$-formák terének. Itt is bármely $f$ $m$-formából képezhető egy $A(f)$ alternáló $m$-forma az

$$A(f)(v_1, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(m)})$$

definícióval. Könnyű látni, hogy $A(f)$ tényleg alternáló $m$-forma, és az $A$ leképezés lineáris. Ha $f$ maga alternáló volt, akkor $A(f) = m!f$.

Ha $\omega_1, \ldots, \omega_m \in V'$, akkor legyen

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_m = A(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \cdots \otimes \omega_m).$$

Ezeknek az úgynevezett *külső szorzat*oknak az értékei kifejezhetők determinánsok segítségével: Ha $v_1, \ldots, v_m \in V$ egy tetszőleges vektorrendszer, akkor

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m)(v_1, \ldots, v_m) &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega_{\sigma(1)}(v_1) \cdots \omega_{\sigma(m)}(v_m) \\ &= \det\Big(\big(\omega_j(v_i)\big)_{i,j=1}^m\Big).\end{aligned}$$

Véges dimenziós $V$ esetén megadjuk az alternáló $m$-formák terének egy bázisát. Legyen $\omega_1, \ldots, \omega_n$ a $V'$ egy bázisa. Bármely $1 \le j_1, \ldots, j_m \le n$ indexrendszer esetén képezhetjük az $\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_m}$ alternáló $m$-formákat. Ezek kifeszítik az alternáló $m$-formák alterét, de nyilván nem függetlenek, hiszen egyrészt a $j_1, j_2, \ldots, j_m$ bármely permutációjához ugyanaz az $m$-forma vagy az ellentettje tartozik, másrészt ha két index megegyezik, akkor a megfelelő $m$-forma nulla. Ha azonban az összes

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_m}, \qquad 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$$

alternáló $m$-formákat tekintjük, akkor ezek bázist alkotnak. Csak a lineáris függetlenséget kell megmutatnunk. Ez hasonlóan adódik, mint a nem alternáló esetben.

$\rightarrow\star$ **9.3.60. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy minden 2-forma egyértelműen előállítható egy alternáló és egy szimmetrikus forma összegeként. Igaz-e ez $m$-formákra?

$\rightarrow\star$ **9.3.61. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy egy $f$ $m$-forma akkor és csak akkor alternáló, ha az alábbi feltételek közül valamelyik fennáll:

(1) minden páratlan $\sigma$ permutációra és $v_1, \ldots, v_m$-re

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = -f(v_1, \ldots, v_m);$$

(2) minden $\sigma$ transzpozícióra és $v_1, \ldots, v_m$-re

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = -f(v_1, \ldots, v_m);$$

(3) $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$, ha a $v_i$-k közül legalább kettő megegyezik.

$\rightarrow\star$ **9.3.62. Feladat [5].** Legyen $f$ alternáló $m$-forma. Mutassuk meg, hogy ha

$$v_1, \ldots, v_m$$

lineárisan függőek, akkor $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$.

$\rightarrow\star$ **9.3.63. Feladat [8].** Ha $V$ valós $n$ dimenziós vektortér, hány dimenziós a $V$ feletti alternáló $m$-lineáris formák tere?

⋆ **9.3.64. Feladat[6].** Ha $V$ valós $n$ dimenziós vektortér, hány dimenziós a $V$ feletti szimmetrikus $m$-lineáris formák tere?

⋆ **9.3.65. Külső szorzat.** Emlékeztetünk rá, hogy ha $V$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett, és $f\colon V^k \to \mathbb{R}$, $g\colon V^l \to \mathbb{R}$ multilineáris leképezések, akkor az $f \otimes g$ *tenzorszorzat*ukat az

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = f(v_1, \ldots, v_k)g(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

összefüggéssel értelmeztük. Világos, hogy a tenzorszorzás asszociatív, és mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve.

Egy $(k, l)$-*keverés* alatt az $\{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l\}$ halmaz egy olyan permutációját értjük, amely monoton növekedő az

$$\{1, \ldots, k\} \quad \text{és} \quad \{k+1, \ldots, k+l\}$$

részhalmazokon. Az összes $(k, l)$-keverések halmazát jelölje $S(k, l)$. Ha most $f$ és $g$ alternáló formák, akkor az $f \wedge g$ *külső szorzat*ukat az

$$\begin{aligned}&(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})\\ &\quad= \sum_{\sigma \in S(k,l)} \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})\end{aligned}$$

összefüggéssel definiáljuk. Vegyük észre, hogy

$$f \wedge g = \frac{1}{k!l!} A(f \otimes g),$$

így $f \wedge g$ egy alternáló $(k + l)$-forma. Ebből az összefüggésből következik, hogy a külső szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra. Megmutatjuk, hogy asszociatív is. Ehhez azt kell először belátnunk, hogy ha $f$ egy $k$-forma, $g$ pedig egy $l$-forma, akkor $A\big(A(f) \otimes g\big) = k!A(f \otimes g)$ és $A\big(f \otimes A(g)\big) = l!A(f \otimes g)$. Definíció szerint

$$\begin{aligned}&A\big(A(f) \otimes g\big)\\ &=\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Big( \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}(\tau) f(v_{\sigma(\tau(1))}, \ldots, v_{\sigma(\tau(k))}) \Big) g\big(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}\big).\end{aligned}$$

Jelölje $\tau' \in S_{k+l}$ azt a permutációt, amelyre $\tau'(i) = \tau(i)$, ha $1 \le i \le k$ és $\tau'(i) = i$, ha $k < i \le k + l$. Ezzel a jelöléssel

$$\begin{aligned}&A\big(A(f) \otimes g\big)\\ &=\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau') f\big(v_{\sigma\circ\tau'(1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\tau'(k)}\big) g\big(v_{\sigma\circ\tau'(k+1)}, \ldots, v_{\sigma\circ\tau'(k+l)}\big).\end{aligned}$$

Mivel $S_{k+l}$ minden permutációja pontosan $k!$-féleképpen áll elő $\sigma \circ \tau'$, $\sigma \in S_{k+l}$, $\tau \in S_k$ alakban, a jobb oldal $k!A(f \otimes g)$. A másik összefüggés hasonlóan látható be.

Ezt felhasználva, a külső szorzás asszociativitása adódik a tenzorszorzás asszociativitásából, mivel ha $h$ meg egy $m$-forma, akkor

$$(f \wedge g) \wedge h = \frac{1}{m!(k+l)!} A((f \wedge g) \otimes h) = \frac{1}{m!(k+l)!} A\Big(\frac{1}{k!l!} A(f \otimes g) \otimes h\Big)$$
$$= \frac{1}{k!l!m!} A(f \otimes g \otimes h) = f \wedge (g \wedge h).$$

⋆ **9.3.66. Definíció.** Valamely $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett, értékként $\mathbb{R}^n$ feletti alternáló $m$-formákat felvevő függvényt *$m$-edrendű differenciálformá*nak nevezünk. Mivel az alternáló $m$-formák tere (véges dimenziós) normált tér, beszélhetünk a differenciálformák integrálhatóságáról, folytonosságáról, differenciálhatóságáról stb. Hogy a differenciálforma elnevezést megértsük, tekintsünk az $\mathbb{R}^n$ egy $D$ nyílt részhalmazán egy $x\colon D \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelynek deriváltja minden pontban invertálható. Az $x$ úgy tekinthető, mint egy görbevonalú koordinátázás. Ha $x = (x_1, \ldots, x_n)$, azaz $x_i$ az $x$ függvény $i$-edik koordinátafüggvénye, akkor az $x_i$ differenciáljának hagyományos jelölése $dx_i$. Bármely $y \in D$ pontra a $dx_1(y), \ldots, dx_n(y)$ 1-formák egy bázis alkotnak az 1-formák terében, így bármely $y \in D$-re a

$$dx_{j_1}(y) \wedge \ldots \wedge dx_{j_m}(y), \qquad 1 \le j_1 < \ldots < j_m \le m$$

$m$-formák bázist alkotnak az $m$-formák terében. Bármely $m$-edrendű $\omega$ differenciálforma $D$-n felírható

$$\omega(y) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_m \le m} \omega_{j_1,\ldots,j_m}(y) dx_{j_1}(y) \wedge \ldots \wedge dx_{j_m}(y)$$

alakban $\omega_{j_1,\ldots,j_m}$ valós értékű együttható-függvényekkel. Innen ered a differenciálforma elnevezés. Leggyakrabban a szokásos koordinátázást használjuk ($x$ az identikus leképezés), ekkor $dx_i$ nem függ $y$-tól.

Legyen $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, és tegyük fel, hogy $G$ nyílt, $D$ pedig korlátos mérhető halmaz. Legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ egy Lipschitz-függvény, $f$ pedig egy $m$-edrendű korlátos Baire-differenciálforma $\gamma(D)$-n. Legyen

$$\int_{\gamma|D} f = \int_D f(\gamma(t)) \partial_1 \gamma(t) \partial_2 \gamma(t) \ldots \partial_m \gamma(t)\, dt.$$

Differenciálformák integráljának egyszerű tulajdonságai (pl. additív, homogén stb.) azonnal következnek a definícióból. Az alábbi tétel mutatja, hogy az integrál nem függ a paraméterezéstől.

⋆ **9.3.67. Tétel.** *Tegyük fel, hogy $n \ge m > 0$, $D \subset G \subset \mathbb{R}^m$, $G$ nyílt, $D$ pedig korlátos és mérhető. Legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-függvény. Tegyük fel, hogy adott egy másik, $H \subset \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, ennek egy $E \subset H$ korlátos mérhető részhalmaza, és egy $\psi\colon H \to G$ Lipschitz-függvény, amely $E$-t $D$-re képezi le kölcsönösen egyértelműen. Legyen $f$ korlátos $m$-edrendű Borel-differenciálforma $\gamma(D)$-n. Ha $\psi'$ determinánsa majdnem mindenütt pozitív ($\psi$ „irányítástartó”), akkor $\int_{\gamma\circ\psi|E} f = \int_{\gamma|D} f$, ha pedig majdnem mindenütt negatív ($\psi$ „irányításfordító”), akkor $\int_{\gamma\circ\psi|E} f = -\int_{\gamma|D} f$.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

⋆ **9.3.68. Külső derivált.** Ha $m > 0$ és az $(m-1)$-edrendű $f$ differenciálforma differenciálható az $x$ pontban, akkor az $x$-beli *külső deriváltját* a

$$df(x)(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} f'(x)(v_i)(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m)$$

összefüggéssel értelmezzük. Az $x$-beli külső derivált alternáló $m$-forma, mert bármely két szomszédos változóját felcserélve előjelet vált. Így $x \mapsto df(x)$ egy $m$-edrendű differenciálforma.

⋆ **9.3.69. Poincaré–Stokes-tétel.** *Legyen $n \geq m-1 > 0$, $D \subset \overline{D} \subset G \subset \mathbb{R}^m$, $D$ és $G$ korlátos nyílt halmazok, tegyük fel, hogy $D$ határa lokálisan Lipschitz, legyen $\gamma\colon G \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény, és legyen $B$ és $\psi$ az előző segédtétel szerinti halmaz és függvény, a „$D$* irányított határa*”. Ekkor bármely, a $\gamma(\overline{D})$ egy nyílt környezetén értelmezett $f$ folytonosan differenciálható $(m-1)$-formára*

$$\int_{\gamma|D} df = \int_{\gamma\circ\psi|B} f.$$

A tételt nem bizonyítjuk. □

→⋆ **9.3.70. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy ha

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_m}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m},$$

ahol $x_1, \ldots, x_n$ a szokásos koordináták, akkor

$$d\omega(x) = \sum_{i_0=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \partial_{i_0} \omega_{i_1,\ldots,i_m}(x)\, dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}.$$

→⋆ **9.3.71. Feladat [12].** Legyen $f$ az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett skalármező, $g$ pedig az $\mathbb{R}^3$ egy nyílt részhalmazán értelmezett vektormező.

(1) Határozzuk meg az $f$ külső deriváltját. Mi a kapcsolata $\nabla f$-fel?

(2) Határozzuk meg a $\tilde{g}(x)(v) = \langle g(x), v \rangle$ összefüggéssel értelmezett 1-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés $g$ rotációjával?

(3) Határozzuk meg $\tilde{g}(x)(v, w) = \langle g(x), v \times w \rangle$ összefüggéssel értelmezett 2-forma külső deriváltját. Mi az összefüggés $g$ divergenciájával?

→⋆ **9.3.72. Feladat [9].** Mi a kapcsolat a Newton–Leibniz-formula és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→⋆ **9.3.73. Feladat [9].** Mi a kapcsolat az $\int_\gamma \operatorname{grad} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ összefüggés és a Poincaré–Stokes-tétel között?

→⋆ **9.3.74. Feladat [10].** Vezessük le a Green-tételt a Poincaré–Stokes-tételből!

→⋆ **9.3.75. Feladat [10].** Vezessük le a Stokes-tételt a Poincaré–Stokes-tételből!

→⋆ **9.3.76. Feladat [10].** Vezessük le a divergencia-tételt a Poincaré–Stokes-tételből!

## 9.4 $\mathbb{L}^p$-terek

**9.4.1. $\mathbb{L}^p$-terek.** Legyen $\mu$ mérték és $f$ egy $\mathbb{K}$-beli értékű mérhető függvény. Ha $1 \le p < \infty$, legyen

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (\text{itt } \infty^{1/p} = \infty),$$

és legyen

$$\|f\|_\infty = \inf\{a: a \ge 0, \mu\{|f| > a\} = 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy $|f| \le \|f\|_\infty$ majdnem mindenütt, mert az $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ halmaz a nullmértékű $\{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}$ halmazok egyesítése. Jelölje $\mathbb{L}^p(\mu;\mathbb{K})$, vagy rövidebben $\mathbb{L}^p$, $1 \le p \le \infty$ azon $\mathbb{K}$-beli értékű mérhető függvények osztályát, amelyekre $\|f\|_p < \infty$. Világos, hogy $\|f\|_p \ge 0$, és nulla csak akkor lehet, ha $f = 0$ majdnem mindenütt, továbbá $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$, ha $\alpha \in \mathbb{K}$ és $f \in \mathbb{L}^p$. A következő tétel azt mutatja, hogy $\| \ \|_p$ félnorma $\mathbb{L}^p$-n, és a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva, $\mathbb{L}^p$ normált tér.

Ha a természetes mérték szerint integrálunk, akkor gyakran az $\mathbb{L}^p(X;\mathbb{K})$ jelölést fogjuk használni.

**9.4.2. Minkowski-egyenlőtlenség.** *Ha $\mu$ mérték, $f$ és $g$ pedig $\mu$-mérhető $\mathbb{K}$-beli értékű függvények, és $1 \le p \le \infty$, akkor*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Bizonyítás.** Ha a jobb oldal $\infty$, nincs mit bizonyítani. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}y + \frac{v}{u+v}z\right)^p \le \frac{u}{u+v}y^p + \frac{v}{u+v}z^p,$$

ha $u, v, y, z \ge 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = \big|f(x)\big|/\|f\|_p$, $z = \big|g(x)\big|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int \big(|f| + |g|\big)^p \, d\mu \le 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség. □

**9.4.3. Riesz–Fischer-tétel.** *$\mathbb{L}^p(\mu)$ teljes.*

⋆ **Bizonyítás.** Az 8.1.99 tétel szerint azt kell megmutatnunk, hogy ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_p = \alpha < \infty,$$

akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor konvergens. Legyen

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{és} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Ekkor $\|y_n\|_p \le \alpha$. Legyen $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$, ekkor $p = \infty$ esetén $|y| \le \alpha$ majdnem mindenütt, így $\|y\|_p \le \alpha$, ha pedig $1 \le p < \infty$, akkor $\int y_n^p \, d\mu \le \alpha^p$, és Beppo Levi tétele szerint

$$\int y^p \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} y_n^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int y_n^p \, d\mu \le \alpha^p.$$

Ez azt jelenti, hogy $y$ majdnem mindenütt véges, azaz a $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ sor majdnem mindenütt konvergens. Ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ sor is majdnem mindenütt konvergens, összege legyen az $x$ függvény. Megmutatjuk, hogy $x \in \mathbb{L}^p$ és $\|s_n - x\|_p \to 0$. A $p = \infty$ esetben ez azonnal adódik az $\|s_n - x\|_p \le \|y_n - y\|_p$ becslésből. Az $1 \le p < \infty$ esetben az

$$|s_n - x|^p = \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \Big|^p \le \Big( \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \Big)^p \le y^p$$

egyenlőtlenség miatt, amely majdnem mindenütt teljesül, $s_n - x \in \mathbb{L}^p$, azaz $x = s_n - (s_n - x) \in \mathbb{L}^p$. Lebesgue tétele miatt

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - x\|_p = \lim_{n\to\infty} \Big( \int |s_n - x|^p \, d\mu \Big)^{1/p} = \Big( \int \lim_{n\to\infty} |s_n - x|^p \, d\mu \Big)^{1/p} = 0.$$

**9.4.4. Az $\mathbb{L}^2$-tér.** Legyen $\mu$ mérték. Ha $f, g \in \mathbb{L}^2(\mu)$, akkor

$$4f\overline{g} = (f + \overline{g})^2 - (f - \overline{g})^2$$

miatt $f\overline{g}$ integrálható. Legyen

$$\langle f, g \rangle = \int f\overline{g} \, d\mu.$$

Ezzel a belső szorzattal $\mathbb{L}^2$ belső szorzat tér, ha a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítjuk. A belső szorzatból $\mathbb{L}^2$ szokásos normája származik, így $\mathbb{L}^2$ Hilbert-tér.

Néha előfordul, hogy egy pozitív valós értékű integrálható $\varrho$ függvény, a *súlyfüggvény* segítségével értelmezzük a belső szorzatot:

$$\langle f, g \rangle = \int f\overline{g}\varrho \, d\mu.$$

(Ilyenkor az $\mathbb{L}^2(\varrho\mu; \mathbb{K})$, illetve ha $\mu$ a természetes mérték, akkor az $\mathbb{L}^2(\varrho; \mathbb{K})$ jelölést használjuk.) Ez ugyanazt adja, mint ha a $\mu$ helyett a

$$\nu(A) = \int_A \varrho \, d\mu, \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A}$$

mérték szerint integrálnánk, vagy ha az $f$ függvény helyett az $f\sqrt{\varrho}$ függvényt tekintenénk, azaz nincs szó valódi általánosításról.

Tétel. Ha $1 \le p < +\infty$, akkor az $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$ tér szeparábilis: a racionális végpontú nyílt intervallumok Descartes-szorzata karakterisztikus függvényeinek racionális együtthatós (vagy racionális valós és képzetes részű együtthatós) lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak.

$\star$ **Bizonyítás.** Valós és képzetes részt, majd pozitív és negatív részt véve, végül az approximációs lemmát használva, elég megmutatnunk, hogy egy véges mértékű mérhető $A$ halmaz karakterisztikus függvénye approximálható ilyen lineáris kombinációval. Legyen $\varepsilon > 0$, és válasszunk egy téglákkal való $A \subset \cup_j T_j$, $j \in \mathbb{N}$ megszámlálható lefedést, amelyre $\sum_j \lambda^n(T_j) < \lambda^n(A) + \varepsilon$. Kicsit megnövelve a téglákat elérhetjük, hogy oldalaik végpontjai racionális számok legyenek, és az egyenlőtlenség még mindig fennálljon. Válasszunk olyan $k$-t, amelyre $\sum_{j>k} \lambda^n(T_j) < \varepsilon$. Ekkor

$$\int \left(\xi_A - \xi_{\cup_{j\le k} T_j}\right)^+ \le \int \left(\sum_j \xi_{T_j} - \sum_{j\le k} \xi_{T_j}\right) = \sum_{j>k} \int \xi_{T_j} < \varepsilon$$

és

$$\int \left(\xi_A - \xi_{\cup_{j\le k} T_j}\right)^- = \int \left(\xi_{\cup_{j\le k} T_j} - \xi_A\right)^+ \le \int \left(\sum_j \xi_{T_j} - \xi_A\right) < \varepsilon,$$

így $\left\|\xi_A - \xi_{\cup_{j\le k} T_j}\right\|_p < 2\varepsilon$. Az, hogy $\xi_{\cup_{j\le k} T_j}$ — lényegében — véges sok diszjunkt tégla belseje karakterisztikus függvényének az összege, teljes indukcióval következik: $k = 1$-re igaz, és ha $k-1$-re igaz, akkor $T_k$ és rendre az összes előző tégla különbségét felírjuk téglák diszjunkt belseje és egy nullahalmaz egyesítéseként.

**9.4.5. Megjegyzés.** Észrevehetjük, hogy a 9.4.1-9.4.5 definíciók és tételek nem az $f$, hanem az $|f|$ függvény tulajdonságain múlnak, így ezeket minden nehézség nélkül átvihetjük $\mathbb{K}^m$-beli értékű mérhető függvényekre is, az abszolút érték helyett mindenütt normát használva. Az $(f, g) \mapsto \int \langle f(x), g(x)\rangle \, d\mu(x)$ belső szorzattal az $\mathbb{L}^2(\mu; \mathbb{K}^m)$ tér Hilbert-tér.

$\rightarrow$ **9.4.6. Feladat [8].** Legyen $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\mu$ a számláló mérték. Vizsgáljuk meg az $\mathbb{L}^p(\mu)$-tereket ebben az esetben. Az $n = 2$ esetben vázoljuk az egységgömböt.

$\rightarrow$ **9.4.7. Feladat [8].** Ha $X = \mathbb{N}$ és $\mu$ a számláló mérték, $\mathbb{L}^p(\mu)$ a hagyományosan $\mathbb{l}^p$-vel jelölt tér. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat a $\mathbb{l}^p$ terekben, hogy konvergensek-e, és mi a határértékük ($x_n$-ben $n$ nem nulla tag van):

(1) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0, \ldots)$;

(2) $x_n = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$;

(3) $x_n = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n, 0, 0, \ldots)$;

(4) $x_n = (1/n^\alpha, 1/n^\alpha, \ldots, 1/n^\alpha, 0, 0, \ldots)$.

$\rightarrow$ **9.4.8. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy azok a sorozatok, amelyeknek valamilyen (a sorozattól függő) indextől kezdve minden tagja nulla, sűrű alteret alkotnak az $\mathbb{l}^p$, $1 \le p < \infty$ térben.

**9.4.9. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy ha a nemnegatív tagú $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $\sum \sqrt{a_n}/n$ is konvergens!

**9.4.10. Feladat [9].** Adjunk meg bázist a $\mathbb{l}^p$, $1 \le p < \infty$ térben!

**9.4.11. Feladat [8].** Tekintsük azon valós $x = (x_1, x_2, \ldots)$ számsorozatok halmazát, amelyekre $|x_n| \le 1/n$ minden $n$-re! Ez a *Hilbert-kocka*. Mutassuk meg, hogy kompakt részhalmaza a (valós) $\mathbb{l}^2$ térnek, de sűrű alteret generál benne!

⋆ **9.4.12. Feladat [9].** Módosítsuk a Peano-görbe konstrukcióját úgy, hogy a Hilbert-kockára képezzen!

**9.4.13. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{l}^\infty$ nem szeparábilis!

→ **9.4.14. Feladat [8].** Zárt alteret alkotnak-e $\mathbb{l}^\infty$-ben a konvergens, illetve a nullsorozatok? (A nullsorozatokat, illetve a konvergens sorozatokat $\mathbb{l}^\infty$ altereként fogjuk tekinteni. Ezen terek szokásos jelölése $\mathbf{c}_0$ illetve $\mathbf{c}$.)

**9.4.15. Feladat [7].** Adjunk meg bázist a nullsorozatok terében!

**9.4.16. Feladat [8].** Adjunk meg bázist a konvergens sorozatok terében!

→ **9.4.17. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy véges mérték esetén $\mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^q$, ha $1 \leq q < p \leq \infty$, és $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$, ha $f$ mérhető, skalár értékű függvény!Mutassuk meg, hogy ha a mérték a Lebesgue-mérték $[0,1]$-en, akkor a tartalmazás valódi!

→ **9.4.18. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbf{l}^q \subset \mathbb{l}^p$, ha $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

→ **9.4.19. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathbb{L}^q(\mathbb{R}^n)$, ha $p \neq q$.

⋆ **9.4.20. Feladat [8].** Adjunk példát $\mathbb{L}^1[0,1]$-ben olyan korlátos sorozatra, amely nem konvergens, de majdnem mindenütt nullához tart!

⋆ **9.4.21. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$ esetén esetén $\mathbb{L}^p(\mu)$ normája általában nem származik belső szorzatból!

**9.4.22. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy egy $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt intervallumon az $(f,g) \mapsto \int_a^b f\overline{g}$ belső szorzattal a folytonos függvények belső szorzat teret alkotnak, de az nem teljes.

**9.4.23. Feladat [3].** Mi az $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ térben a páros függvények alterének ortogonális komplementere?

**9.4.24. Definíció.** Ha $f$ és $g$ Lebesgue-mérhető komplex értékű függvények $\mathbb{R}^n$-en, akkor $f$ és $g$ *konvolúció*ját az

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy$$

összefüggéssel értelmezzük minden olyan $x \in \mathbb{R}^n$ pontban, ahol a jobb oldali integrál létezik. Az $x - y$ helyére új változót írva, adódik, hogy $f * g = g * f$, azaz a konvolúció kommutatív. Továbbá, ha $x \notin \operatorname{spt}(f) + \operatorname{spt}(g)$, akkor nincs olyan $y \in \mathbb{R}^n$, amelyre $g(y) \neq 0$ és $f(x-y) \neq 0$, így $(f * g)(x) = 0$.

**9.4.25. Tétel.** *A konvolúcióval, mint szorzással $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ kommutatív gyűrű és a skalárszorzás felcserélhető a konvolúcióval, továbbá $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

**Bizonyítás.** A Fubini-tételt és helyettesítést használva, minden tulajdonság vizsgálata egyszerű számolás. □

**9.4.26. Közelítő egységek.** Megmutatható, hogy az $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n)$ algebrában nincs egységelem. Lehet azonban közelítő egységeket találni. Ha $\omega$ egy nemnegatív integrálható függvény, amelynek 1 az integrálja, akkor az $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$ függvények $\varepsilon \downarrow 0$ esetén egy egységet közelítenek. Ha $\omega$ sima függvény, akkor az így kapott közelítő egységet simításra használhatjuk fel. Egy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz kompakt tartóju és végtelen sokszor differenciálható függvényeinek terét $\mathcal{D}(G)$-vel fogjuk jelölni. Ezek a függvények fontos szerepet játszanak a disztribúcióknál. Megadunk egy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-beli függvényt. Az $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^{-1/x}$, ha $x > 0$, $\varphi(x) = 0$, ha $x \leq 0$ összefüggéssel definiált függvény monoton növekedő és akárhányszor differenciálható. Legyen $\omega(x) = c\varphi(1-|x|^2)$, ahol a $c$ konstanst úgy választjuk, hogy $\int \omega = 1$ teljesüljön. Az $\omega$ tartója a zárt egységgömb.

**9.4.27. Simítási tétel.** *Legyen $\omega$ egy nemnegatív integrálható függvény $\mathbb{R}^n$-en, amelyre $\int \omega = 1$, és legyen $\omega_\varepsilon(x) = \omega(x/\varepsilon)/\varepsilon^n$, ha $\varepsilon > 0$.*

(1) *Ha $1 \leq p < \infty$ és $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$, akkor $\|f * \omega_\varepsilon - f\|_p \to 0$ amint $\varepsilon \downarrow 0$.*

*Ha $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ és $f$ lokálisan integrálható $\mathbb{R}^n$-en, akkor*

(2) *$f * \omega_{\varepsilon_k} \to f$ majdnem mindenütt, ha $\varepsilon_k \downarrow 0$;*

(3) *ha $f$ folytonos egy $G$ nyílt halmazon, akkor az $f * \omega_{\varepsilon_k} \to f$, $\varepsilon_k \downarrow 0$ konvergencia a $G$-n lokálisan egyenletes;*

(4) *$f * \omega_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ minden $\varepsilon > 0$-ra és $\partial^\alpha(f * \omega_\varepsilon) = f * \partial^\alpha \omega_\varepsilon$ minden $\alpha$ multiindexre;*

(5) *ha $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\varepsilon > 0$, az $f$ függvény lokálisan Lipschitz a $G + \operatorname{spt} \omega_\varepsilon$ halmazon, akkor $|\alpha| = 1$ esetén $\partial^\alpha(f * \omega_\varepsilon) = (\partial^\alpha f) * \omega_\varepsilon$.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**9.4.28. Tétel.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $1 \leq p < \infty$. Ekkor $\mathcal{D}(G)$ sűrű $\mathbb{L}^p(G)$-ben.*

**Bizonyítás.** Legyen $f \in \mathbb{L}^p(G)$, $\delta > 0$ és álljon $G_k$ a $G$ azon elemeiből, amelyek hossza nem nagyobb $k$-nál, és legalább $1/k$ távolságra vannak $G$ komplementerétől. Jelölje $f_k$ azt a függvényt, amely $G_k$-n megegyezik $f$-fel, azon kívül nulla. Lebesgue tétele szerint elég nagy $k$-ra $\|f - f_k\|_p < \delta$. A simítási tétel szerint van olyan $\varepsilon > 0$, hogy $\|f - f_k * \omega_\varepsilon\|_p < \delta$.
□

## 9.5 Valószínűségszámítás

**9.5.1. Valószínűségszámítás.** A mértékelmélet egyik legfontosabb alkalmazási területe a *valószínűségszámítás*. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező* egy véges mértéktér, amelyre $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. A Táblázat „miniszótára” rámutat a valószínűségszámítási és mértékelméleti fogalmak kapcsolatára.

Ez a paragrafus a valószínűségszámítás alapjaival foglalkozik.

**9.5.2. Valószínűségi mező.** Az $\Omega$ halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *eseményalgebrá*nak nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;

(3) ha $A_i \in \mathcal{A}$ $\quad (i = 1, 2, \ldots)$, akkor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

| Valószínűségszámítás | Mértékelmélet |
|---|---|
| $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező | $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér |
| $\Omega$ eseménytér | $X$ alaphalmaz |
| $\omega \in \Omega$ elemi esemény | $x \in X$ pont |
| $A \in \mathcal{A}$ esemény | $A \in \mathcal{A}$ mérhető |
| $\emptyset$ lehetetlen esemény | $\emptyset$ |
| $\Omega$ biztos esemény | $X$ |
| $\mathbb{P}$ valószínűség, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ | $\mu$ mérték |
| függetlenség | mértékterek szorzata |
| majdnem biztosan | majdnem mindenütt |
| valószínűségi változó | mérhető függvény |
| stochasztikusan konvergens | mértékben konvergens |
| $\mathbb{E}$ várható érték | integrál, átlag |
| véges szórású | négyzetesen integrálható |
| korrelálatlan | ortogonális |
| klasszikus valószínűség | számláló mérték |
| geometriai valószínűség | Hausdorff-mérték |
| karakterisztikus függvény | Fourier-transzformált |

Táblázat: miniszótár a valószínűségszámításhoz

Az $\Omega$ elemeit *elemi esemény*eknek, $\mathcal{A}$ elemeit *esemény*eknek nevezzük. Az $\emptyset$ a *lehetetlen esemény*, az $\Omega$ pedig a *biztos esemény.* Az $\Omega \setminus A$ esemény az $A$ esemény *ellentett*je, amit gyakran $A'$-vel jelölünk. Ha két esemény diszjunkt, akkor *kizáró esemény*eknek nevezzük őket; *teljes eseményrendszer* alatt eseményeknek egy olyan sorozatát értjük, amelyek páronként kizárják egymást, és egyesítésük a biztos esemény. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ hármast *valószínűségi mező*nek, $\mathbb{P}$-et pedig *valószínűség*nek nevezzük, ha $\mathbb{P}$ az eseményeken értelmezett, $[0, 1]$-be képező függvény, amelyre

(4) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(5) ha az $A_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots$ események páronként kizáróak, akkor

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \qquad (\sigma\text{-additivitás}).$$

Események uniója helyett szokás az *összeg*ükről, metszete helyett pedig a *szorzat*ukról beszélni, és a megfelelő $+$ illetve $\cdot$ jelöléseket használni.

Mint látjuk, a valószínűségi mező egy általánosabb fogalomnak, a mértéktérnek speciális esete. A $\mu$ mérték egy $[0, +\infty]$-be képező függvény, amelyre (5) teljesül; (4) helyett azt kötjük ki, hogy $\mu(\emptyset) = 0$, mert (4) hiányában ez nem adódik (5)-ből.

**9.5.3. Klasszikus valószínűségi mező.** Ha $\Omega$ véges halmaz, $\mathcal{A}$ az $\Omega$ összes részhalmazaiból áll, és minden elemi esemény valószínűsége egyforma, akkor *klasszikus valószínűségi mező*ről beszélünk. Ekkor egy $A$ esemény valószínűségét megkapjuk, ha $A$ elemeinek számát (a „kedvező esetek száma”) osztjuk $\Omega$ elemeinek számával (az „összes esetek száma”).

Abból, hogy $\Omega$ véges halmaz, még nem következik, hogy minden elemi esemény valószínűsége egyforma. (Például szabálytalan érmével, rajzszeggel, szeggel vagy ólmozott kockával dobunk, fiú vagy lány születik, stb.)

**9.5.4. Példa.** Kockadobásnál hat elemi esemény van, tehát

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Események például: „páros számot dobni”, „háromnál kisebbet dobni” stb. Ha az elemi események valószínűsége egyforma, akkor ezek valószínűsége 1/2, 1/3 stb.

**9.5.5. Geometriai valószínűségek.** Gyakran $\Omega$ az $\mathbb{R}^n$ egy részhalmaza, az események $\Omega$ mérhető részhalmazai, a valószínűség pedig a Lebesgue-mérték (vagy valamilyen geometriai mérték) konstansszorosa. Ilyen esetekben *geometriai valószínűség*ről beszélünk.

**9.5.6. Példa.** Bekötött szemmel 30 cm átmérőjű, kör alakú céltáblára lövünk, amíg el nem találjuk. Mi a valószínűsége, hogy tízest lőttünk, ha a tízes kör átmérője 3 cm? A területek arányából adódik a valószínűség, vagyis 0,01 lesz.

**9.5.7. Feladat [8].** Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy racionális számot találunk el.

**9.5.8. Feladat [6].** Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az egységnégyzetből egy olyan pontot találunk el, amelynek egyik koordinátája racionális.

**9.5.9. Feladat [8].** Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy olyan számot találunk el, amely felírható úgy hármas számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest.

**9.5.10. Feladat [5].** A $[0, 1]$ intervallum közepéből kiveszünk egy 1/4 hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó két zárt intervallum közepéből kiveszünk egy-egy $1/4^2$ hosszúságú nyílt intervallumot stb. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumból egy olyan számot találunk el, amely a visszamaradó halmazban van.

A következő két tételt ismerjük a mértékelméletből.

**9.5.11. Tétel.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Ekkor események különbsége, véges vagy végtelen sorozatának az uniója és metszete is esemény.*

$\star$ **Bizonyítás.**

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

miatt $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a véges unióképzés. Most a

$$\bigcap_i A_i = \Big(\bigcup_i A_i')\Big)'$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Végül $A \setminus B = A \cap B'$ miatt $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbségképzés. $\square$

**9.5.12. Tétel.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező. Ekkor*

(1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;

(2) *események bármely véges, páronként diszjunkt rendszerére*

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \qquad \textit{(additivitás)};$$

(3) *ha* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, *akkor* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ *(monotonitás), és* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;

(4) *események bármely (véges vagy végtelen) sorozatára*

$$\mathbb{P}\left(\cup_i A_i\right) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i) \qquad \textit{($\sigma$-szubadditivitás)};$$

(5) *események bármely bővülő* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *sorozatára*

$$\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i);$$

(6) *események bármely szűkülő* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *sorozatára*

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Az (5) és (6) tulajdonságokat szokás a *valószínűség folytonosságá*nak nevezni.

⋆ **Bizonyítás.** (1) következik abból, hogy

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots .$$

(2) következik (1)-ből és a definícióból, $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$ választással. (3) azon múlik, hogy $A$ és $B \setminus A$ diszjunktak, uniójuk pedig $B$. (4) bizonyításához azt kell észrevenni, hogy $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus (\cup_{j<i} A_j)$, ha $i > 1$ jelöléssel $\cup_i A_i = \cup_i B_i$ és a $B_i$-k diszjunktak. (5) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a $B_i$-k diszjunktak, így

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

(6)-öt megkapjuk, ha (3)-at és (5)-öt alkalmazzuk a $B_i = A_i'$ halmazokra. □

**9.5.13. Feltételes valószínűség.** Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $A$, $B$ események, $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Az $A$ esemény $B$-re vonatkozó *feltételes valószínűség*én a

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

számot értjük. Nyilván $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$, ez a *valószínűségek szorzási szabálya.* Ha $B_1, B_2, \ldots$ egy teljes eseményrendszer, $\mathbb{P}(B_k) > 0$ minden $k$-ra, és $A$ egy esemény, akkor

$$\mathbb{P}(A) = \sum_k \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k),$$

ez a *teljes valószínűség tétele.* Ha még $\mathbb{P}(A) > 0$ is teljesül, akkor

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)},$$

ez a *Bayes-tétel.*

**9.5.14. Függetlenség.** Egy valószínűségi mező $A_i$ eseményeit *független*nek nevezzük, ha különböző $i_1, i_2, \ldots, i_n$ indexek esetén

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Az $A_i$ eseményeket *páronként független*nek nevezzük, ha bármely kettő közülük független.

**9.5.15. Feladat [4].** Kockadobásnál határozzuk meg annak valószínűségét, hogy háromnál nagyobbat dobtunk, feltéve, hogy páros számot dobtunk.

**9.5.16. Feladat [4].** Két különböző szabályos pénzdarabot feldobunk. A megfelelő elemi valószínűségi mezőben adjunk meg három olyan eseményt, amelyek páronként függetlenek, de nem függetlenek.

**9.5.17. Feladat [5].** Mi a valószínűbb, az, hogy egy szabályos kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk, vagy az, hogy két kockával 24-szer dobva, legalább egyszer két hatost dobunk?

**9.5.18. Feladat [6].** Péter pénzét három borítékban tartja. Az elsőben két ötszázas, a másodikban egy ötszázas és egy ezres, a harmadikban egy ötszázas és három ezres van. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választva egy borítékot és abból egy bankjegyet, az ezres lesz?

**9.5.19. Feladat [5].** Egy városban ugyanannyi férfi él, mint nő. 100 férfiből 5, míg 10 000 nőből 25 színvak. Egy színvak kartonját kiválasztva, az milyen valószínűséggel lesz nő?

**9.5.20. Majdnem biztosan.** Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy valószínűségi mező. Ha $T$ egy, az elemi eseményeken értelmezett tulajdonság (igaz–hamis értékű függvény), akkor gyakran fogjuk azt mondani, hogy $T$ *majdnem biztosan* vagy *egy valószínűséggel* teljesül $\Omega$-n. Ez azt jelenti, hogy azon elemi események halmaza, ahol $T$ nem teljesül, vagy nincs értelmezve, esemény, és valószínűsége nulla. Például az, hogy az $f$ és $g$ függvények majdnem biztosan egyenlőek $\Omega$-n, azt jelenti, hogy az $\{\omega \colon \omega \in \Omega, f(\omega) = g(\omega)\}$ halmaz komplementere esemény és nulla valószínűségű. Ezt a halmazt egyébként — ugyanúgy, mint a mértékelméletben — gyakran röviden, bár némileg pontatlanul $\{f = g\}$-vel jelöljük. Hasonlóan értjük az $\{f < g\}$, $\{f < a\}$ stb. jelöléseket is.

**9.5.21. Valószínűségi változó.** Egy $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező $\Omega$ alaphalmazán értelmezett, valós értékű $\xi$ függvényt akkor nevezünk *valószínűségi változó*nak, ha minden $x \in \mathbb{R}$-re értelmezve van az

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\}$$

függvény, a $\xi$ valószínűségi változó $F$ *eloszlásfüggvény*e vagy *eloszlás*a, azaz ha $\{\xi < x\}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re esemény (azokban az esetekben, amikor az $\Omega$ minden részhalmaza $\mathcal{A}$-ban van, ez semmilyen megszorítást nem jelent, egyébként pedig egy gyenge feltétel, a gyakorlatban előforduló $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekre mindig teljesül; megfelel a $\xi$ m;rhetőségének). Egy $\Omega$-n értelmezett, $\mathbb{R}^k$-beli értékű (azaz vektorértékű) $\xi$ függvényt akkor nevezünk *valószínűségi változó*nak, ha a $\xi_j$ koordinátafüggvényei valószínűségi változók; ennek az *eloszlásfüggvény*ét vagy *eloszlás*át az

$$F(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{\xi_j < x_j, j = 1, 2, \ldots, k\}, \quad \text{ha} \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$$

összefüggéssel értelmezzük. Ha az $A$ eseményre $\mathbb{P}(A) > 0$, akkor a $\xi$ valószínűségi változónak az $A$-ra vonatkozó *feltételes eloszlásfüggvény*e az

$$F_A(x) = \mathbb{P}\{\xi < x|A\}$$

függvény.

**9.5.22. Baire-függvények.** Az $\mathbb{R}^k$-n értelmezett $\mathbb{R}^n$-be képező függvények azon osztályainak metszete, amelyek tartalmazzák a folytonos függvényeket és nem vezet ki belőlük a pontonkénti konvergencia, a *Baire-függvény*ek osztálya. Ez egy nagyon bő osztály, az összes olyan függvények osztálya, amelyek a „folytonos függvényekből pontonkénti konvergenciával elérhetőek"; minden, a gyakorlatban előforduló függvény ide tartozik. A *Baire-halmaz*ok $\mathbb{R}^k$-ban azok a halmazok, amelyeknek karakterisztikus függvénye Baire-függvény; ez nagyon széles halmazosztály, minden, a gyakorlatban előforduló halmaz ide tartozik. Megmutatható, hogy a Baire-függvények osztálya megegyezik a Borel-függvények osztályával, így a Baire-halmazok osztálya megegyezik a Borel-halmazok osztályával.

**9.5.23. Tétel.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$ egy valószínűségi változó, $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ pedig Baire-függvény. Ekkor a $g(\xi)$ összetett függvény is valószínűségi változó.*

A tétel egy már tanult mértékelméleti tétel átfogalmazása. $\square$

**9.5.24. Következmény.** *Ha $\xi$ és $\eta$ valós értékű valószínűségi változók, $c \in \mathbb{R}$, akkor az $\xi + c$, $c\xi$, $|\xi|$, $1/\xi$, $\xi + \eta$, $\xi\eta$, $\max\{\xi, \eta\}$, $\min\{\xi, \eta\}$ függvények — ha mindenütt értelmezve vannak — valós értékű valószínűségi változók.* $\square$

**9.5.25. Tétel.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $\xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$ pedig valószínűségi változók egy sorozata. Ha minden $\omega \in \Omega$-ra $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$, akkor a $\xi$ függvény is valószínűségi változó.*

A tétel egy már tanult mértékelméleti tétel átfogalmazása. $\square$

**9.5.26. Példa.** Az, hogy kockával hányat dobtunk, valószínűségi változó. Az is valószínűségi változó, ha az annyiadik prímszámot tekintjük eredménynek, ez az előző függvénye.

**9.5.27. Példa.** Hogy céltáblára lőve vagy dartsban dobva hány pontot értünk el, valószínűségi változó. (Mindenkinél más a valószínűségi mező, és persze attól is függ, hogy hova célzunk!)

**9.5.28. Tétel.** *Egy valós értékű valószínűségi változó $F$ eloszlásfüggvénye monoton növekedő, balról folytonos, és*

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

**Bizonyítás.** Következik a valószínűség monotonitásából és folytonosságából. $\square$

**9.5.29. Megjegyzés.** Hasonlóan egy valószínűségi változó egyik koordinátájának vagy néhány koordinátájának az eloszlásfüggvényét megkaphatjuk, ha a többi koordinátával tartunk végtelenhez.

**9.5.30. Medián, kvantilis és kvartilisek.** Legyen egy valós értékű valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F$. Ha $0 < q < 1$, akkor az a legnagyobb $x$ valós szám, amelyre $F(x) \leq q$, a valószínűségi változó *q-kvantilis*e. A $q = 1/2$-hez tartozó kvantilis a *medián*, a $q = 1/3$ és $q = 2/3$ értékekhez tartozó kvantilisek a *tercilis*ek, a $q = 1/4$, $q = 3/4$ értékekhez tartozó kvantilisek a *kvartilis*ek, a $q = k/10$ értékekhez tartozó kvantilisek a *decilis*ek stb.

**9.5.31. Diszkrét valószínűségi változók.** Ha egy valószínűségi változó által felvett értékek sorozatba rendezhetőek (felsorolhatóak), akkor változó *diszkrét valószínűségi változó*nak nevezzük.

**9.5.32. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke.** Legyen $\xi$ valós értékű diszkrét valószínűségi változó, vegye fel a $x_1, x_2, \ldots$ értékeket $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel. Azt mondjuk, hogy $\xi$-nek létezik *várható érték*e, ha a

$$\sum_i p_i x_i$$

sor abszolút konvergens (ilyenkor az összeg nem függ az összeadás sorrendjétől). Ezt az értéket $\mathbb{E}(\xi)$-vel jelöljük. Mértékelméleti ismereteink alapján könnyen következik, hogy ez $\int \xi \, dP$.

**9.5.33. Segédtétel.** *Tegyük fel, hogy az $\eta \leq \zeta$ diszkrét valószínűségi változóknak létezik várható értéke. Ekkor $\mathbb{E}(\eta) \leq \mathbb{E}(\zeta)$. Tegyük fel, hogy a $\xi$ valószínűségi változóhoz léteznek olyan $\eta$ és $\zeta$ diszkrét valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értéke és amelyekre $\eta \leq \xi \leq \zeta$. Ekkor pontosan egy olyan $\mathbb{E}(\xi)$ valós szám létezik, amelyre $\mathbb{E}(\eta) \leq \mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\zeta)$ minden olyan $\eta, \zeta$ diszkrét valószínűségi változóra, amelyre $\eta \leq \xi \leq \zeta$.*

$\star$ **Bizonyítás.** Mivel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\eta) &= \sum_i y_i \mathbb{P}\{\eta = y_i\} = \sum_i \sum_j y_i \mathbb{P}\{\eta = y_i, \zeta = z_j\} \leq \sum_i \sum_j z_j \mathbb{P}\{\eta = y_i, \zeta = z_j\} \\
&= \sum_j \sum_i z_j \mathbb{P}\{\eta = y_j, \zeta = z_j\} = \sum_j z_j \mathbb{P}\{\zeta = z_j\} = \mathbb{E}(\zeta),
\end{aligned}$$

kapjuk az első állítást. Innen következik, hogy létezik a második állításban szereplő tulajdonságú $\mathbb{E}(\xi)$ szám. Az $[y_i, z_j]$ intervallumot $\varepsilon > 0$-nál kisebb részekre osztva, kapjuk, hogy csak egy.

**9.5.34. Várható érték.** Egy $\xi$ valós értékű valószínűségi változó *várható érték*ét az előző lemma feltételeinek teljesülése esetén az egyértelműen létező $\mathbb{E}(\xi)$ számot értjük. (Diszkrét valószínűségi változó esetén visszakapjuk az eredeti definíciót.) Ha $\xi$ egy $\mathbb{R}^k$-beli értékű vektor valószínűségi változó, akkor legyen

$$\mathbb{E}(\xi) = y, \quad \text{ahol} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_k), \quad y_j = \mathbb{E}(\xi_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

ha minden $\xi_j$ koordinátának létezik várható értéke. A várható értékre az $\mathbb{M}(\xi)$ jelölés is szokásos. Könnyű megmutatni, hogy ez nem más, mint $\int \xi \, dP$.

Fontos tudni, hogy egy valószínűségi változó várható értéke csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ; ez közvetlenül belátható a definíció alapján. A valószínűségi változó bármely Baire-függvényének a várható értéke is csak az eloszlásfüggvényétől függ. A valós értékű valószínűségi változó esetén ez az alábbi tételből következik.

⋆ **9.5.35. Tétel.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi$ *pedig* $\Omega$*-n értelmezett valós értékű valószínűségi változó* $F$ *eloszlásfüggvénnyel,* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Baire-függvény. Ekkor* $\mathbb{E}(g(\xi))$ *pontosan akkor létezik, ha* $g$ *abszolút integrálható* $F$*-re nézve és*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF(x).$$

**Bizonyítás.** Következik az általánosabb 9.2.39 tételből. □

**9.5.36. Tétel: a várható érték tulajdonságai.** *Legyen* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi$ *és* $\eta$ *az* $\Omega$*-n értelmezett valószínűségi változók, és* $c \in \mathbb{R}$*.*

(1) *Ha* $\xi$ *csak az* $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ *értékeket veszi fel és* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *tetszőleges függvény, akkor* $g(\xi)$*-nek pontosan akkor van várható értéke, ha az alábbi sor abszolút konvergens, és ekkor*
$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_i \mathbb{P}\{\xi = x_i\} g(x_i);$$

(2) $\xi$*-nek pontosan akkor létezik várható értéke, ha* $|\xi|$*-nek, és* $\big|\mathbb{E}(\xi)\big| \le \mathbb{E}(|\xi|)$*;*

(4) *ha* $\mathbb{E}(|\xi|) = 0$*, akkor* $\xi = 0$ *majdnem biztosan;*

(5) *ha* $|\xi| \le \eta$ *és* $\eta$*-nak van várható értéke, akkor* $\xi$*-nek is;*

(6) *ha* $\xi = \eta$ *majdnem biztosan és* $\mathbb{E}(\xi)$ *létezik, akkor* $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta)$*;*

(7) *ha* $\mathbb{E}(\xi)$ *létezik, akkor* $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}(\xi)$*;*

(8) *ha* $\mathbb{E}(\xi)$ *és* $\mathbb{E}(\eta)$ *léteznek, akkor* $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi) + \mathbb{E}(\eta)$*.*

⋆ **Bizonyítás.** Diszkrét valószínűségi változókra az állítások közvetlenül kiszámolhatók, az általános eset pedig a definíció alapján, diszkrét valószínűségi változókkal való közelítéssel kapható. □

**9.5.37. Markov-egyenlőtlenség.** *Legyen a* $\xi$ *nemnegatív valószínűségi változó várható értéke* $E$*. Ekkor minden* $\lambda > 0$ *valós számra*

$$\mathbb{P}\big\{\xi \ge E\lambda\big\} \le 1/\lambda.$$

**Bizonyítás.** Ellenkező esetben legyen $\eta$ az a valószínűségi változó, amelynek értéke $\lambda$, ha $\xi \ge E\lambda$ és 0 egyébként. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi) \ge \mathbb{E}(\eta) = E\lambda \mathbb{P}\big\{\xi \ge E\lambda\big\} > E,$$

ami ellentmondás. □

**9.5.38. Szórás.** Egy $\xi$ valós értékű valószínűségi változó *szórásnégyzet*e

$$\mathbb{E}\Big(\big(\xi - \mathbb{E}(\xi)\big)^2\Big),$$

a $\mathbb{D}(\xi)$ *szórás*a pedig ennek négyzetgyöke. Nyilván $\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi)$ (a két oldal egyszerre létezik), mivel

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \mathbb{E}\Big(\big(\xi - \mathbb{E}(\xi)\big)^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\xi^2 - 2\mathbb{E}(\xi)\xi + \mathbb{E}^2(\xi)\Big) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi).$$

Innen az is következik, hogy ha $\mathbb{D}(\xi)$ létezik, $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{D}(a\xi + b) = |a|\mathbb{D}(\xi)$, mivel

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^2(a\xi + b) &= \mathbb{E}((a\xi + b)^2) - \mathbb{E}^2(a\xi + b) = a^2\mathbb{E}(\xi^2) + 2ab\mathbb{E}(\xi) + b^2 - \big(a\mathbb{E}(\xi) + b\big)^2 \\ &= a^2\big(\mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi)\big).\end{aligned}$$

**9.5.39. Momentumok.** Egy $\xi$ valós értékű valószínűségi változó $k$-adik *momentum*a $\mathbb{E}(\xi^k)$ (ha létezik), $k = 1, 2, \ldots$.

**9.5.40. Csebisev-egyenlőtlenség.** *Legyen a $\xi$ valószínűségi változó várható értéke $E$, szórása pedig $D$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ valós számra*

$$\mathbb{P}\{|\xi - E| \geq D/\varepsilon\} \leq \varepsilon^2.$$

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk a $|\xi - E|^2$ valószínűségi változóra a Markov-egyenlőtlenséget $\lambda = 1/\varepsilon^2$ választással. □

**9.5.41. Feladat [5].** Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának, illetve minimumának várható értéke, illetve szórása?

**9.5.42. Feladat [5].** Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, még kétszer dobunk, ha írás, még egyszer. Mennyi a fejek számának várható értéke és szórása?

**9.5.43. Karakterisztikus eloszlás.** Ha egy $p$ valószínűségű esemény bekövetkezik, legyen az úgynevezett *karakterisztikus valószínűségi változó* értéke 1, egyébként 0. Ennek az eloszlásának, az úgynevezett *karakterisztikus eloszlás*nak a várható értéke $p$, a szórásnégyzete $p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = p(1-p)$.

**9.5.44. Példa.** Tegyük fel, hogy $n$ kulcsunk van, és a sötétben véletlen sorrendben próbáljuk bele a zárba. Mennyi a valószínűsége, hogy a $k$-adik kulcs nyitja a zárat? Az első kulcs $n$-féle lehet, a második $n-1$-féle stb., az utolsó már csak egyféle. Az elemi események száma $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Feltesszük, hogy minden elemi esemény valószínűsége ugyananannyi. Ha a „jó” kulcs a $k$-adik, akkor a többi $(n-1)!$ sorrendben lehet, így a valószínűség $(n-1)!/n! = 1/n$.

**9.5.45. Diszkrét egyenletes eloszlás.** Ha egy $\xi$ valószínűségi változó egyforma, $1/n$ valószínűséggel veszi fel az $1, 2, \ldots, n$ értékeket, akkor azt mondjuk, hogy eloszlás *diszkrét egyenletes eloszlás*ú. Várható értéke nyilván

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

A szórás kiszámításához szükségünk van a $\sum_{k=1}^{n} k^2$ összeg értékére. Teljes indukcióval könnyen adódik, hogy ez $n(n+1)(2n+1)/6$, így

$$\mathbb{D}^2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

**9.5.46. Példa.** Egy rajzszeget dobálunk fel, $p$ valószínűséggel $(0 < p < 1)$ esik a lapjára. Mennyi a valószínűsége, hogy $n$ dobásból éppen $k$-szor esik így? Összesen $2^n$ elemi esemény (lehetséges eredménysorozat) van, ha egy sorozatban $k$-szor esett lapjára a rajzszeg, akkor a sorozat valószínűsége $p^k(1-p)^{n-k}$. Ilyen sorozat annyi van, ahányféleképpen $n$ helyből ki lehet választani $k$ helyet. Rendezzük sorba a helyeket, és válasszuk az első $k$ helyet. Összesen $n!$ sorrend van, de ugyanazt a $k$ darabot választjuk, ha az utolsó $n-k$ darab tetszőleges sorrendben van, azaz $n!/(n-k)! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ esetben választjuk ugyanazt a $k$ helyet. Mivel ezek sorrendje sem számít, az $n$ helyből $k$ darabot

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

-féleképpen választhatunk ki. Így a keresett valószínűség

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

**9.5.47. Binomiális eloszlás.** Egy $\xi$ valószínűségi változót $n$-edrendű, $p$ paraméterű $(0 < p < 1)$ *binomiális eloszlás*únak nevezünk, ha a $k = 0, 1, \ldots, n$ értékeket veszi fel rendre

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

valószínűséggel. Ilyen eloszlás lép fel például visszatevéses mintavételnél. Megmutatjuk, hogy várható értéke $np$, szórása $\sqrt{np(1-p)}$.

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np.$$

Hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2,$$

ahonnan

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = n(n-1)p^2 + np.$$

Innen

$$\mathbb{D}^2(\xi) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

**9.5.48. Példa: visszatevés nélküli mintavétel.** Egy urnában $N$ golyó van, ebből $K$ fehér. Kihúzunk $n$ golyót visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy $k$ darab lesz fehér? Egy elemi esemény az, hogy $N$ golyóból kiválasztunk $n$ darabot. A kedvező esetek azok, amikor a $K$ golyóból $k$ darabot, a többi $N-K$-ból pedig $n-k$ darabot választottunk. Így a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

**9.5.49. Hipergeometrikus eloszlás.** A $\xi$ valószínűségi változó *hipergeometrikus eloszlás*ú, ha értékei a $k = 0, 1, \ldots, n$ számok, és a $k$ értéket

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $0 < n \le \min(K, N-K)$ és $K < N$. Megmutatjuk, hogy várható értéke $Kn/N$, szórása pedig

$$\sqrt{n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}.$$

Valóban,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= n\frac{K}{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\dfrac{(K-1)\cdots(K-k+1)}{(k-1)!}\cdot\dfrac{(N-K)\cdots(N-K-n+k+1)}{(n-k)!}}{\dfrac{(N-1)\cdots(N-n+1)}{(n-1)!}} \\
&= n\frac{K}{N}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{\ell}\cdot\binom{(N-1)-(K-1)}{(n-1)-\ell}}{\binom{N-1}{n-1}} = n\frac{K}{N}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)},$$

ahonnan

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\frac{\binom{K}{k}\cdot\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)} + n\frac{K}{N}.$$

Innen

$$\mathbb{D}^2(\xi) = n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)} + n\frac{K}{N} - n^2\frac{K^2}{N^2} = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

Nyilván ha $N$ nagy $n$-hez képest, akkor a visszatevés nem nagyon befolyásolja a valószínűségeket, így a hipergeometrikus eloszlás közelíthető a binomiálissal.

**9.5.50. Példa.** 10 kg kalácsot sütünk, a kalácsba 1 000 darab mazsolát teszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 10 dkg-os szeletben $k$ darab mazsola van? A valószínűséget kiszámíthatjuk a bimomiális eloszlás segítségével, de $n$ kellemetlenül nagy, 1 000, míg a $p$ valószínűség kellemetlenül kicsi: 0,01. Nyilván nem sokat változik a valószínűség, ha 100 kg kalácsot készítünk 10 000 darab mazsolával, így tulajdonképpen az

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

valószínűség határértéke érdekel bennünket rögzített $k$-ra, amikor $n \to \infty$ és $p \to 0$, de úgy, hogy közben $np = \lambda$ rögzített érték:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Így tényleg egy eloszlást kaptunk, mert

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

**9.5.51. Poisson-eloszlás.** Egy $\xi$ valószínűségi változó *Poisson-eloszlás*ú $\lambda$ paraméterrel, ha a $k = 0, 1, \ldots$ értékeket

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $\lambda > 0$ pozitív állandó. Megmutatjuk, hogy várható értéke $\lambda$, szórása $\sqrt{\lambda}$. Valóban,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda$$

és hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2,$$

ahonnan $\mathbb{E}(\xi) = \lambda$, $\mathbb{E}(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda$, tehát $\mathbb{D}^2(\xi) = \lambda$.

**9.5.52. Példa.** Egy rajzszeget dobálunk fel, $p$ valószínűséggel $(0 < p < 1)$ esik a lapjára. Addig dobunk, amíg a lapjára nem esik. Annak a valószínűsége, hogy ez éppen a $k$-adik dobásnál következik be, $p(1-p)^{k-1}$. Annak a valószínűsége, hogy még a $k$-adik dobásnál sem esik a lapjára, $(1-p)^k \to 0$, ha $k \to \infty$, úgyhogy annak a valószínűsége, hogy ez soha nem következik be, 0. (Itt abban célszerű megállapodni, hogy $0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 = 0$.)

**9.5.53. Geometriai eloszlás.** Ha $0 < p < 1$ és egy $\xi$ valószínűségi változó a $k = 1, 2, \ldots$ értékeket $p(1-p)^{k-1}$ valószínűséggel ( a $+\infty$ értéket pedig 0 valószínűséggel) veszi fel, *geometriai eloszlás*únak nevezzük. A nevét onnan kapta, hogy a valószínűségek mértani (geometriai) sort alkotnak, amelynek összege 1. Ilyen eloszlásnál a várható érték $1/p$, a szórás pedig $\sqrt{1-p}/p$. Valóban, az

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$

összefüggést differenciálva, majd szorozva $p$-vel, $x = 1 - p$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Kétszer differenciálva $x$ szerint, majd szorozva $x$-szel és $p$-vel, $x = 1 - p$ helyettesítéssel

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} = \frac{2p(1-p)}{p^3}.$$

Innen

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} = \frac{2p(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2},$$

amiből $\mathbb{D}^2(\xi) = (2-p)/p^2 - 1/p^2 = (1-p)/p^2$.

⋆ **9.5.54. Feladat [10].** Egy szabályos érmét addig dobunk fel, amíg egymás után két fejet dobunk. Mennyi a dobások számának várható értéke? És ha addig dobunk, amíg fejre írás jön?

**9.5.55. Feladat [5].** Egy vegyi anyaggal kezelve 20 kísérleti állatot, 10-nél jött létre (nem látható) elváltozás. Ha 10-et kiválasztunk és felboncolunk, milyen valószínűséggel fogunk 0, 1, … 9, 10 egyednél elváltozást tapasztalni?

**9.5.56. Feladat [6].** Egy üzemben tízen egymástól függetlenül használnak 1 kW-os kéziszerszámot. Mindenki átlagosan 12-szer 1 percet használja óránként a gépét. Ha a hálózat 7 kW-ot bír el, akkor az időnek hány százalékában lép fel túlterhelés?

**9.5.57. Feladat [6].** Rutherford 2608 alkalommal 7,5 s-ig észlelt rádioaktív bomlást. Alkalmanként 3,87 bomlást észlelt átlagosan. Várhatóan hány alkalommal észlelt 0, 1, 2, …, 9, $\geq$10 bomlást?

**9.5.58. Definíció.** Legyen egy $\mathbb{R}^k$-beli értékű $\xi$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F$. Ha létezik olyan $f\colon \mathbb{R}^k \to [0, \infty[$ függvény, amelyre

$$F(x) = F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, t_2, \ldots, t_k)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k$$

minden $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$-ra, akkor azt mondjuk, hogy $f$ a $\xi$ *sűrűségfüggvénye*. Megmutatható, hogy ekkor $F_{x_1 x_2 \ldots x_k}(x) = f(x)$ majdnem mindenütt (azaz a valós esetben $F'(x) = f(x)$). Az ilyen valószínűségi változókat *abszolút folytonos*nak, vagy (hibásan, de elterjedten) *folytonos*nak nevezzük. (Diszkrét valószínűségi változónak sohasem létezik sűrűségfüggvénye.)

Ha a sűrűségfüggvény folytonos, és valamely pontban lokális maximuma van, akkor azt a pontot az eloszlás *módusz*ának nevezzük. Több módusz is lehet, két módusz esetén például *bimodális eloszlás*ról, stb., beszélünk.

**9.5.59. Sűrűségfüggvény és várható érték.** *Ha az $\mathbb{R}^n$-beli értékű $\xi$-nek létezik az $f$ sűrűségfüggvénye, és $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ egy tetszőleges Baire-függvény, akkor $\mathbb{E}(g(\xi))$ pontosan akkor létezik, ha az alábbi integrál abszolút konvergens, és*

$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\, dx.$$

⋆ **Bizonyítás.** Következik a [21] könyv általánosabb 9.2.2 tételéből. □

**9.5.60. Egyenletes eloszlás.** A $\xi$ valószínűségi változó az $[a, b]$ intervallumon $(a < b)$ *egyenletes eloszlás*ú, ha sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{b-a}, \quad \text{ha} \quad a < x < b, \qquad 0 \quad \text{egyébként.}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke $(a+b)/2$, szórása pedig $(b-a)/(2\sqrt{3})$, mert

$$\mathbb{E}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^2-a^2}{2},$$

és

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3}.$$

**9.5.61. Feladat [3].** Határozzuk meg az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

**9.5.62. Exponenciális eloszlás.** A $\xi$ valószínűségi változót $\lambda$ paraméterű *exponenciális eloszlás*únak nevezzük akkor, ha sűrűségfüggvénye

$$\lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{ha} \quad x > 0, \qquad 0 \quad \text{egyébként.}$$

Itt $\lambda > 0$. Várható értéke $1/\lambda$, és szórása is $1/\lambda$, amint az integrálással könnyen adódik.

**9.5.63. Feladat [3].** Határozzuk meg az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét.

**9.5.64. Feladat [8].** Alkatrészek, készülékek meghibásodásáig eltelt idő, illetve a két meghibásodás közötti idő legtöbbször exponenciális eloszlást követ. Ha egy készüléknél ezen idő várható értéke, az MTBF 1000 óra, határozzuk meg, hogy mennyi a valószínűsége, hogy a készülék 500 óráig, 1000 óráig, 2000 óráig hibátlanul működik. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy a készülék még $t$ ideig hibátlanul működik, feltéve, hogy $T$ ideig már hibátlanul mőködött, nem függ $T$-től.

**9.5.65. Normális eloszlás.** Az $(m, \sigma)$ paraméterű *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Itt $m$ tetszőleges, $\sigma$ pedig pozitív konstans. Látni fogjuk, hogy az eloszlás várható értéke $m$, szórása pedig $\sigma$. Az $F$ eloszlásfüggvény kifejezhető a 0 várható értékű, 1 szórású eloszlás *standard normális eloszlás* $\Phi$ eloszlásfüggvényével, amelynek sűrűségfüggvénye $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, éspedig

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right);$$

valóban, az $y = (x-m)/\sigma$ helyettesítéssel

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}\, dx == \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-y^2/2}\, dy = \Phi(y) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Meg kell mutatnunk, hogy $\Phi$ eloszlásfüggvény, ebből már következik, hogy $\Phi((x-m)/\sigma))$ is az. Az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

integrál kiszámításához tekintsük az

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx\, dy = I^2$$

integrált és térjünk át polár koordinátákra:

$$I^2 = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} re^{-r^2/2}\, dr = 2\pi.$$

A standard normális eloszlás várható értéke nyilván 0, mert a sűrűségfüggvénye páros, a második momentuma pedig parciális integrálással könnyen számolhatóan 1. Mivel ha $\eta$ standard normális eloszlású, akkor $\xi = \sigma\eta + m$ eloszlásfüggvénye

$$\mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{\sigma\eta + m < x\} = \mathbb{P}\{\eta < (x-m)/\sigma\} = \Phi((x-m)/\sigma)),$$

kapjuk az általános esetet is.

Megjegyezzük, hogy a sűrűségfüggvény párossága miatt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, speciálisan $\Phi(0) = 1/2$. Elég tehát $x > 0$ esetén ismerni $\Phi(x)$ értékét. Mivel a $\Phi$ függvény nem írható fel elemi függvényekkel, értékét rendszerint táblázatból vesszük, vagy a

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$$

integrálba beírva az exponenciális függvény sorát, a tagonkénti integrálással kapott sorból számítjuk. Nagy pozitív $x$-ekre hasznosabb az

$$1 - \Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} + \cdots + (-1)^k \frac{1\cdot 3 \cdots (2k-1)}{x^{2k+1}}\Big)$$

közelítés, amely páros $k$ esetén felső, páratlan $k$ esetén alsó becslést ad.

**9.5.66. Feladat [5].** Egy mérés eredmény normális eloszlású 0,1 szórással, várható értéke a mérendő mennyiség. Mennyi a valószínűsége, hogy a mérés hibája nagyobb, mint 0,3?

**9.5.67. Valószínűségi változók függetlensége.** A $\xi_i$ valószínűségi változókat *páronként függetlennek*, illetve *függetlennek* nevezzük, ha a $\{\xi_i < x_i\}$ események bármilyen $x_i$-k esetén páronként függetlenek, illetve függetlenek. Más szavakkal a függetlenség azt jelenti, hogy az együttes eloszlásfüggvény az egyes eloszlásfüggvények szorzata. Ebből következik, hogy ha van együttes sűrűségfüggvény, akkor az egyes valószínűségi változóknak is van sűrűségfüggvénye, és a közös sűrűségfüggvény az egyes sűrűségfüggvények szorzata. Megmutatható, hogy ha a $\xi_i$-k függetlenek, illetve páronként függetlenek, akkor tetszőleges $g_i$ Baire-függvényekre a $g_i(\xi_i)$ valószínűségi változók is függetlenek, illetve páronként függetlenek.

**9.5.68. Tétel.** *Ha $\xi$ és $\eta$ valós értékű független valószínűségi változók, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$.*

$\star$ **Bizonyítás.** Diszkrét valószínűségi változókra közvetlen számolással adódik a tétel. Ha $\xi$ nemnegatív, akkor a $\{k\varepsilon \leq \xi < (k+1)\varepsilon\}$ eseményekre vonatkozó feltételes eloszlásfüggvények segítségével kapott alsó és felső becslésből adódik $\varepsilon \downarrow 0$ határátmenettel. Végül ha $\xi$ tetszőleges, akkor írjuk fel $\xi^+ - \xi^-$ alakban. $\square$

**9.5.69. Kovariancia és korrelációs együttható.** Legyenek $\xi$ és $\eta$ valós értékű valószínűségi változók, amelyeknek létezik szórása. Ekkor $\mathbb{D}^2(\xi+\eta)$ is létezik, mert $(\xi+\eta)^2 = \xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 \leq 2(\xi^2+\eta^2)$, és

$$\mathbb{D}^2(\xi+\eta) = \mathbb{E}\Big(\big(\xi - \mathbb{E}(\xi) + \eta - \mathbb{E}(\eta)\big)^2\Big) = \mathbb{D}^2(\xi) + \mathbb{D}^2(\eta) + 2\mathbb{E}\Big(\big(\xi - \mathbb{E}(\xi)\big)\big(\eta - \mathbb{E}(\eta)\big)\Big).$$

Az itt megjelenő

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{E}\Big(\big(\xi - \mathbb{E}(\xi)\big)\big(\eta - \mathbb{E}(\eta)\big)\Big) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\eta)$$

*kovarianciát* a „függetlenségtől való eltérés” mértékéül használhatjuk. Az előző tétel szerint független valószínűségi változók kovarianciája nulla, így szórásnégyzeteik összeadódnak. A megfordítás nem igaz: még az is előfordulhat, hogy $\eta$ a $\xi$ függvénye és mégis nulla a kovariancia, legyen például $\xi$ az a valószínűségi változó, amely a $-2$, $-1$, $1$, $2$ értékeket $1/4$ valószínűséggel veszi fel, és legyen $\eta$ a négyzete. Ha $\eta = \xi$, akkor $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \mathbb{D}^2(\xi)$, ha $\eta = -\xi$, akkor $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -\mathbb{D}^2(\xi)$.

Megmutatjuk, hogy a kovarianciára

$$\big|\operatorname{cov}(\xi,\eta)\big| \leq \mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta);$$

valóban, a $\xi_0 = \xi - \mathbb{E}(\xi)$ és $\eta_0 = \eta - \mathbb{E}(\eta)$ valószínűségi változókra minden $\lambda$ valós számra

$$0 \leq \mathbb{E}\big((\eta_0 - \lambda\xi_0)^2\big) = \mathbb{E}(\eta_0^2) - 2\lambda\mathbb{E}(\eta_0\xi_0) + \lambda^2\mathbb{E}(\xi_0^2) = \mathbb{D}^2(\eta) + 2\lambda\operatorname{cov}(\xi,\eta) + \lambda^2\mathbb{D}^2(\xi),$$

innen a polinom diszkriminánsa nem lehet pozitív, tehát

$$\operatorname{cov}^2(\xi,\eta) \leq \mathbb{D}^2(\eta)\mathbb{D}^2(\xi).$$

Ennek alapján, ha $\mathbb{D}(\xi) > 0$ és $\mathbb{D}(\eta) > 0$, akkor célszerű bevezetni a

$$\operatorname{cor}(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\mathbb{D}(\xi)\mathbb{D}(\eta)}$$

*korrelációs együtthatót*, amelynek értéke a $[-1,1]$ intervallumba esik. Megjegyezzük, hogy könnyen láthatóan $a\xi + b$ és $c\eta + d$ korrelációs együtthatója megegyezik $\xi$ és $\eta$ korrelációs együtthatójával, ha $ac > 0$.

**9.5.70. Regresszió.** Ha a $\xi$, $\eta$ valós értékű valószínűségi változóknak létezik a szórása, megkérdezhetjük, hogy mely $a$, $b$ valós számokra lesz $\mathbb{E}\big((\eta - a\xi - b)^2\big)$ minimális? Mivel

$$\mathbb{E}\big((\eta - a\xi - b)^2\big) = \mathbb{E}(\eta^2) - 2a\mathbb{E}(\xi\eta) - 2b\mathbb{E}(\eta) + a^2\mathbb{E}(\xi^2) + 2ab\mathbb{E}(\xi) + b^2,$$

a minimumot akkor kapjuk, ha

$$-2\mathbb{E}(\xi\eta) + 2a\mathbb{E}(\xi^2) + 2b\mathbb{E}(\xi) = 0 \quad \text{és} \quad -2\mathbb{E}(\eta) + 2a\mathbb{E}(\xi) + 2b = 0.$$

Ha $\mathbb{D}(\xi) \neq 0$, akkor azt kapjuk, hogy a minimum

$$a = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}^2(\xi)}, \quad b = \mathbb{E}(\xi) - a\mathbb{E}(\eta)$$

esetén adódik. Az $y = ax + b$ egyenest az $\eta$-nak $\xi$-re vonatkozó *regressziós egyenes*ének nevezzük. Hasonlóan kezelhető az a kérdés, amikor egy $g(x, a_1, \dots, a_m)$ paraméteres görbeseregből keressük azt a görbét, amelyre $\mathbb{E}\big((\eta - g(\xi, a_1, \dots, a_n))^2\big)$ minimális, ilyenkor *regressziós görbé*ről beszélünk. Általánosabban, lehet $\xi$ vektor értékű is, ekkor a lineáris esetben *regressziós sík*ról, az általános esetben *regressziós felület*ről beszélünk.

Ha azt kérdezzük, hogy az összes valós értékű Baire-függvények közül melyik az a függvény, amelyre $\mathbb{E}\big((\eta - g(\xi))^2\big)$ minimális, akkor a válasz, hogy ezt a $g(x) = \mathbb{E}(\eta|\xi = x)$ feltételes várható érték adja, ez az $\eta$-nak $\xi$-re vonatkozó *regressziós függvény*e; ha a $(\xi, \eta)$ pár diszkrét valószínűségi változó, akkor a feltételes eloszlásfüggvény azokon az $x$ helyeken van értelmezve, amelyekre $\mathbb{P}\{\xi = x\} > 0$, ha pedig a $(\xi, \eta)$ pár eloszlásának van egy $h(x, y)$ közös sűrűségfüggvénye, akkor a feltételes eloszláshoz tartozó feltételes sűrűségfüggvény

$$g(y|\xi = x) = \frac{h(x, y)}{f(x)}, \quad \text{ha} \quad f(x) > 0,$$

ahol $f$ a $\xi$ sűrűségfüggvénye, azaz $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)\, dy$.

**9.5.71. Tétel.** *Legyenek $\eta$ és $\zeta$ független valószínűségi változók, amelyek sűrűségfüggvénye $g$, illetve $h$. Ekkor a $\xi = \eta + \zeta$ valószínűségi változónak is van sűrűségfüggvénye, amelyre $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x - y)\, dy$ majdnem mindenütt.*

**Bizonyítás.** Legyen $b(y, z) = 1$, ha $y + z < x$, és nulla egyébként. A $b(\eta, \zeta)$ várható értéke a $\xi$ eloszlásfüggvényének az $x$ helyen felvett értéke, így

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(y, z)g(y)h(z)\, dz\, dy.$$

Innen $z = t - y$ helyettesítéssel

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(y, t - y)g(y)h(t - y)\, dt\, dy.$$

Felhasználva $b$ definícióját,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(t - y)\, dy\, dt.$$

Innen létezik az $f$ sűrűségfüggvény és majdnem mindenütt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(x-y)\,dy. \ \square$$

**9.5.72. A $\chi^2$-eloszlás.** Ha $n$ darab független, standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetét összeadjuk, kapjuk az $n$ *szabadságfokú* $\chi^2$*-eloszlás*t. Megmutatjuk, hogy ennek a sűrűségfüggvénye

$$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\boldsymbol{\Gamma}(n/2)}, \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad \text{és} \quad 0 \ \text{ egyébként.}$$

Azt is megmutatjuk, hogy a várható értéke $n$, szórása pedig $\sqrt{2n}$. Megjegyezzük, hogy a $\boldsymbol{\Gamma}$ függvény értékei a $\boldsymbol{\Gamma}(z+1) = z\boldsymbol{\Gamma}(z)$ összefüggés segítségével $\boldsymbol{\Gamma}(1) = 1$ és $\boldsymbol{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}$ ismeretében a szükséges helyeken kiszámíthatók.

Ha a $\xi_i$ valószínűségi változók standard normális eloszlásúak, akkor a négyzetük eloszlásfüggvénye $\mathbb{P}\{\xi_i^2 < x\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{x} < \xi_i < \sqrt{x}\}$, ha $x > 0$ és 0 egyébként. A $\xi_i^2$ (szintén független) valószínűségi változók várható értéke a $\xi_i$ szórásnégyzete, azaz 1, a szórásnégyzetük pedig $\xi_i$ negyedik momentuma segítségével kiszámítható, értéke 2. Így csak a sűrűségfüggvényre vonatkozó állítást kell megmutatnunk. Mivel

$$F(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}),$$

a sűrűségfüggvény

$$\Phi'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + \Phi'(-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}},$$

ami az állítás az $n = 1$ esetben. Az általános esetet indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $n-1$ tagú $\eta$ összegre igaz az állítás és legyen $\zeta = \xi_n^2$. Az előző tétel szerint a sűrűségfüggvény értéke az $x$ helyen $y = tx$ helyettesítéssel

$$\int_0^x \frac{y^{(n-1)/2-1}e^{-y/2}}{2^{(n-1)/2}\boldsymbol{\Gamma}((n-1)/2)} \frac{(x-y)^{-1/2}e^{-(x-y)/2}}{2^{1/2}\boldsymbol{\Gamma}(1/2)}\,dy$$
$$= \frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\boldsymbol{\Gamma}((n-1)/2)\boldsymbol{\Gamma}(1/2)} \int_0^1 t^{(n-1)/2-1}t^{-1/2}\,dt.$$

Az integrál a $\boldsymbol{\Gamma}$ függvény tulajdonságait kihasználva kiszámolható, és kapjuk az eredményt, vagy egyszerűbben, abból, hogy sűrűségfüggvényt kell kapnunk, a $\boldsymbol{\Gamma}$ függvény definícióját felhasználva adódik a helyes konstans.

**9.5.73. A Student-eloszlás.** Ha $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor

$$\eta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}}$$

eloszlása az $n$ szabadságfokú *Student-eloszlás*. Hasonlóan, mint az előző pontban, megmutathatjuk, hogy ennek a sűrűségfüggvénye

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\boldsymbol{\Gamma}(n/2)(1+x^2)^{(n+1)/2}}.$$

Az $n = 1$ esetben az eloszlásnak nincs várható értéke, egyébként a várható értéke 0. Az $n \le 2$ esetben az eloszlásnak nincs szórása, egyébként a szórás $1/\sqrt{n-2}$.

**9.5.74. Az F-eloszlás.** Ha $\xi$ illetve $\eta$ független, $m$ illetve $n$ szabadsági fokú $\chi^2$-eloszlású, akkor hányadosuk $(m, n)$ szabadsági fokú $F$-*eloszlású*; ennek sűrűségfüggvénye (hasonlóan, mint az előző pontokban, adódik, hogy)

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}((m+n)/2)}{\boldsymbol{\Gamma}(m/2)\boldsymbol{\Gamma}(n/2)} \frac{x^{m/2-1}}{(1+x)^{(m+n)/2}}, \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad \text{és} \quad 0 \ \text{ egyébként.}$$

**9.5.75. Feladat [6].** Adjunk példát páronként független, de nem független valószínűségi változókra.

⋆ **9.5.76. Feladat [10].** Hasonlítsuk össze a 3 szabadságfokú $\chi^2$-eloszlás sűrűségfüggvényét egy nemesgáz atomjainak energiaeloszlását leíró függvénnyel! Mi a magyarázat?

**9.5.77. A nagy számok gyenge törvénye.** *Legyenek a* $\xi_k$, $k = 1, 2, \dots$ *valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és páronként függetlenek* $E$ *várható értékkel. Ekkor minden* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - E\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A tételnek az a speciális esete, amikor a $\xi_k$-k független karakterisztikus eloszlások, következik a Csebisev-egyenlőtlenségből is; ezt fedezték fel legelőször.

⋆ **Bizonyítás.** Lásd Rényi [46], VI, 3§, 4. tétel.

**9.5.78. A nagy számok erős törvénye.** *Legyenek a* $\xi_k$, $k = 1, 2, \dots$ *valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek* $E$ *várható értékkel. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = E\right\} = 1.$$

⋆ **Bizonyítás.** Lásd Rényi [46], VI, 7§, 3. tétel.

**9.5.79. Centrális határeloszlás tétel.** *Legyenek a* $\xi_k$, $k = 1, 2, \dots$ *valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek nem nulla szórással. Legyen továbbá*

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad \text{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbb{E}(\eta_n)}{\mathbb{D}(\eta_n)}.$$

*Jelölje* $F_n$ *a* $\zeta_n$ *eloszlásfüggvényét, ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}.$$

⋆ **Bizonyítás.** Lásd Rényi [46], VIII, 1§, 1. tétel.

**9.5.80. Moivre–Laplace-tétel.** Ez a tétel a centrális határeloszlás tételnek a független karakterisztikus eloszlások összegére, azaz a binomiális eloszlásra vonatkozó speciális esete (ezt fedezték fel először.)

**9.5.81. Feladat [9].** Egy pénzérmét 10 000-szer feldobva, 5400-szor kaptunk fejet. Szabályos-e az érme?

⋆ **9.5.82. Feladat [10].** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, $[0,1]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad \text{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbb{E}(\eta_n)}{\mathbb{D}(\eta_n)}.$$

Mennyi $\mathbb{D}(\eta_{12})$ és $\mathbb{E}(\eta_{12})$ ? Ábrázoljuk $\zeta_1$, $\zeta_2$ és $\zeta_3$, valamint a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét!

⋆ **9.5.83. Feladat: szimuláció, Monte–Carlo módszerek [19].** Számos olyan természeti folyamat van, amelynek a lefolyását különböző véletlen tényezők befolyásolják. Ilyen folyamatok jellemzőinek pontos meghatározása gyakran nem megoldható, de jó közelítéseket kaphatunk *szimulációval*. Példaként a láncreakciót szimulálva, határozzuk meg egy $Pu^{239}$ gömb kritikus sugarát!

⋆ **9.5.84. Mátrixjátékok.** A játékelméletben vizsgált legegyszerűbb játékban két játékos van, mindkettőnek véges sok *stratégiá*ja vagy *tiszta stratégiá*ja van. Az első és a második stratégiáit is megszámozzuk: $1, 2, \ldots, m$ illetve $1, 2, \ldots, n$. Ha az első játékos az $i$-edik, a második a $j$-edik stratégiáját választja, akkor a második fizet az elsőnek $a_{i,j}$ összeget (ami persze negatív is lehet). Az $a = (a_{i,j})_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$ mátrixot a *játék mátrixá*nak nevezzük.

Lehetőségeinket kibővítjük, ha *kevert stratégiát* használunk; ezeket Neumann János vezette be. Ez az első játékosnál azt jelenti, hogy egy $m$ tagú valószínűségi eloszlást választ, és annak megfelelően véletlenszerűen választja meg stratégiáját. Ha az $y$ eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az $y'a$ sormátrix $j$-edik koordinátája jelenti nyereményének várható értékét, ha a második játékos a $j$-edik stratégiáját választotta. Ezen sormátrix koordinátáinak minimumát szeretné maximalizálni, azaz ha $b$ és $c$ egy $m$ illetve $n$ hosszú oszlopmátrix, amelynek minden koordinátája 1, akkor célja $\beta \to \max$, az $y'a \geq \beta c'$, $y \geq 0$ és $b'y = 1$ feltételek mellett; utóbbi azt fejezi ki, hogy $y$ valószínűségeloszlás, koordinátáinak összege 1. A feladatnak vannak megengedett megoldásai, például az egységvektorok: ezek a tiszta stratégiáknak felelnek meg. Célszerű, ha a mátrix minden eleme pozitív. Ezt könnyen elérhetjük, ha minden eleméhez hozzáadunk egy elég nagy $d$ számot. Jelölje az így kapott mátrixot $\overline{a}$. Persze, ekkor a nyeremények is $d$-vel megnőnek, és $\overline{\beta} = \beta + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\overline{\beta} \to \max, \quad b'y = 1, \quad \overline{a}'y \geq \overline{\beta}c, \quad y \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy már a tiszta stratégiákra is $\overline{\beta} > 0$. Az $\overline{y} = y/\overline{\beta}$ jelöléssel a feladat

$$b'\overline{y} = 1/\overline{\beta} \to \min, \quad \overline{a}'\overline{y} \geq c, \quad \overline{y} \geq 0.$$

Teljesen hasonlóan, ha a második játékos az $x$ eloszlást választja, amit oszlopmátrixnak írunk, akkor az $ax$ oszlopmátrix koordinátáinak maximumát szeretné minimalizálni, azaz célja $\alpha \to \min$, az $ax \leq \alpha b$, $x \geq 0$ és $c'x = 1$ feltételek mellett. Most is a feladatnak vannak megengedett megoldásai, például a tiszta stratégiák. A $\overline{\alpha} = \alpha + d$ jelöléssel problémánk alakja

$$\overline{\alpha} \to \min, \quad c'x = 1, \quad \overline{a}x \leq \overline{\alpha}b, \quad x \geq 0.$$

Mivel $\overline{a}$ minden eleme pozitív, bármely megengedett stratégiára $\overline{\alpha} > 0$. Az $\overline{x} = x/\overline{\alpha}$ jelöléssel a feladat

$$c'\overline{x} = 1/\overline{\alpha} \to \max, \quad \overline{a}\overline{x} \leq b, \quad \overline{x} \geq 0.$$

Egy duál-primál feladatpárt kaptunk, amely például a szimplex módszerrel megoldható.

⋆ **9.5.85. Neumann nyeregpont tétele.** *Az előző pont jelöléseivel, mármely mátrixjátékhoz vannak olyan $x_0$, $y_0$ optimális kevert stratégiák, hogy bármely $x$, $y$ kevert stratégiákra $y'ax_0 \le y_0'ax_0 \le y_0'ax$. Az optimális stratégiákhoz tartozó $\alpha$, $\beta$ értékekre $\alpha = y_0'ax_0 = \beta$.*

Az optimális kevert stratégiák általában nem egyértelműek. Az $y_0'ax_0$ érték a *játék értéke*; a tétel szerint az első játékos ennél nagyobb nyereséget nem tud elérni, ha a második valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza, és a második ennél kisebb értéket nem tud elérni, ha az első játékos valamelyik optimális kevert stratégiáját játsza.

**Bizonyítás.** Az előző pont szerint írjuk át a játékot egy duál-primál feladatpárrá. Mivel a primál feladat megengedett $\overline{x}$ megoldásainak halmaza korlátos, hiszen egy megengedett megoldás egyetlen koordinátája sem lehet nagyobb, mint $\overline{a}$ elemei minimumának a reciproka, a megengedett megoldások halmaza kompakt. Így a primál feladatnak van optimális $\overline{x}_0$ megoldása. Alkalmazva a lineáris programozás fő tételét kapjuk, hogy a duál feladatnak is van egy $\overline{y}_0$ optimális megoldása, és $\overline{x}_0, \overline{y}_0$ nyeregpontja az $L(\overline{x}, \overline{y}) = c'\overline{x} + b'\overline{y} - \overline{y}'\overline{ax}$ Lagrange-függvénynek, azaz $L(\overline{x}, \overline{y}_0) \le L(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \le L(\overline{x}_0, \overline{y})$ és $1/\overline{\alpha}_0 = 1/\overline{\beta}_0 = L(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = \overline{y}_0'\overline{ax}_0$. Innen $c'\overline{x} + b'\overline{y}_0 - \overline{y}_0'\overline{ax} \le 1/\overline{\beta}_0$, tehát $1/\overline{\alpha} - y_0'\overline{a}x/(\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}_0) \le 0$, ahonnan $\overline{\beta}_0 \le y_0'\overline{a}x$. Mivel $1/\overline{\alpha}_0 = \overline{y}_0'\overline{ax}_0 = y_0'\overline{a}x_0/(\overline{\alpha}_0 \cdot \overline{\beta}_0)$, egyrészt $\overline{\beta}_0 = y_0'\overline{a}x_0$, amiből levonva $d$-t, $\beta = y_0'ax_0$, másrészt $y_0'\overline{a}x_0 \le y_0'\overline{a}x$, amiből levonva $d$-t, kapjuk az egyik egyenlőtlenséget. A másik egyenlőség és egyenlőtlenség hasonlóan adódik. □

## 9.6 Statisztika

**9.6.1. Minta, statisztika.** *Statisztikai mintán* független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sorozatát értjük. *Statisztiká*nak nevezzük a mintaelemek bármely Baire-függvényét.

**9.6.2. Az empirikus eloszlásfüggvény.** Az $F(x)$ eloszlású valószínűségi változókból álló $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintához legyen

$$F_n(x) = \sum_{\xi_k < x} \frac{1}{n},$$

a minta *empirikus eloszlásfüggvény*e. Ha

$$\Delta_n = \sup_x \bigl|F_n(x) - F(x)\bigr|,$$

az eloszlásfüggvény és az empirikus eloszlásfüggvény távolsága, akkor megmutatható, hogy

$$\mathbb{P}\{\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0\} = 1.$$

Ez a *matematikai statisztika alaptétele.* (Lásd Rényi [46], VI, 8§, 1. tétel.)

**9.6.3. Hisztogram.** A hisztogram a sűrűségfüggvény közelítésére használható. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a minta, és a számegyenesen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ osztópontokat választunk, akkor a *hisztogram*

$$f_n(x) = \sum_{t_{i-1} \leq \xi_k < t_i} \frac{1}{n(t_i - t_{i-1})}, \quad \text{ha} \quad t_{i-1} \leq x < t_i.$$

Az osztópontok helytelen választása, túl sok vagy túl kevés osztópont használata a közelítést erősen lerontja, ezért több különböző osztópontrendszerrel is érdemes próbálkozni. Egy ökölszabály az osztópontok megválasztásához: osszuk az empirikus eloszlásfüggvényhez tartozó alsó és felső kvartilis közötti részt $\sqrt[3]{n}/2$ egyenlő részre, és ezzel a lépésközzel folytassuk a beosztást mindkét irányba. Megmutatható, hogy megfelelő feltételek mellett ennek a lépésköznek egy (1-hez közeli) konstansszorosa esetén közelíti a hisztogram a sűrűségfüggvényt $\mathbb{L}^2$-ben a legjobban. □

**9.6.4. Becslések.** Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai mintánk $F_\vartheta(x)$ eloszlású, és a $\vartheta$ paramétert nem ismerjük, közelítésére egy alkalmas $\tilde{\vartheta}_n$ statisztikát használhatunk. Ezt az eljárást nevezzük *becslés*nek. A jó becsléstől elvárjuk, hogy *torzítatlan* legyen, azaz $\mathbb{E}(\tilde{\vartheta}_n) = \vartheta$ teljesüljön, valamint hogy *konzisztens* legyen, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{D}(\tilde{\vartheta}_n) = 0$$

teljesüljön. Kívánatos, hogy a $\mathbb{D}(\tilde{\vartheta}_n)$ szórás minél kisebb legyen.

Példaként tekintsük a várható érték becslését. A

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

*átlag* a várható értéknek torzítatlan és konzisztens becslése.

Másik példaként vizsgáljuk a szórásnégyzet becslését. Az

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \bar{\xi})^2$$

*empirikus szórásnégyzet* a szórásnégyzetnek nem torzítatlan becslése, mert mint nem nehéz kiszámolni, $\mathbb{E}(s^2) = (n-1)/n$. Torzítatlan és konzisztens becslés viszont az

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \bar{\xi})^2$$

*korrigált empirikus szórásnégyzet.* (Megjegyezzük, hogy a szórásra ennek a négyzetgyöke nem torzítatlan becslés!)

**9.6.5. Konfidencia-intervallumok.** Gyakran arra van inkább szükségünk, hogy a $\vartheta$ valós paraméterhez és egy adott $\varepsilon > 0$-hoz a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta segítségével olyan $\tilde{\vartheta}_1$ és $\tilde{\vartheta}_2$ statisztikákat adjunk meg, hogy

$$\mathbb{P}(\tilde{\vartheta}_1 < \vartheta < \tilde{\vartheta}_2) > 1 - \varepsilon$$

teljesüljön. A $]\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2[$ intervallumot *konfidencia-intervallum*nak nevezzük.

Például ha tudjuk, hogy a mintaelemek normális eloszlásúak ismert $\sigma$ szórással, de ismeretlen $m$ várható értékkel (a legtöbbször ez a helyzet méréseknél), akkor a várható értékre szerkeszthetünk konfidencia-intervallumot. Az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

valószínűségi változó standard normális eloszlású lesz, így meghatározható olyan $u_\varepsilon$ szám, amelyre

$$\mathbb{P}\{|u| \leq u_\varepsilon\} = 1 - \varepsilon = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1.$$

Ebből

$$\mathbb{P}\left\{|\bar{\xi} - m| \leq u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\left\{\bar{\xi} - u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{\xi} + u_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \varepsilon.$$

**9.6.6. Hipotézisvizsgálat.** A hipotézisvizsgálatnál valamely adott $H_0$ *hipotézis* fennállásáról kell döntenünk. Az egyéb lehetséges eseteket a $H_1$ *ellenhipotézis*ben gyűjtjük össze. A rendelkezésre álló adatok alapján egy *próbastatisztiká*t készítünk, és megvizsgáljuk, hogy ennek értéke egy $T_0$ *elfogadási tartomány*ba esik-e, vagy ennek komplementerébe, a *kritikus tartomány*ba. Ha a próbastatisztika az elfogadási tartományba esik, a $H_0$ hipotézist elfogadjuk, egyébként elvetjük. Az egész eljárást *próbá*nak nevezzük. Kétféle hibát követhetünk el. Ha a $H_0$ hipotézis fennáll, mégis elvetjük, akkor *elsőfajú hibá*ról, ha pedig a $H_1$ ellenhipotézis áll fenn, és hipotézisünket mégis elfogadjuk, akkor *másodfajú hibá*ról beszélünk. A hibák nagyságát elsősorban az elfogadási tartomány megválasztásával befolyásolhatjuk. Az elsőfajú hiba valószínűségének csökkentésével a másodfajú hiba valószínűsége általában nő, és viszont. Természetesen a próbastatisztika helyes megválasztása is befolyásolja az eredményt. Ha $\varepsilon > 0$-hoz úgy választottuk az elfogadási tartományt, hogy az elsőfajú hiba $1 - \varepsilon$ valószínűségű legyen, akkor a hipotézis elfogadása esetén azt mondjuk, hogy *az eltérés* $1 - \varepsilon$ *szinten nem szignifikáns*, egyébként pedig *szignifikáns*. Az elfogadási tartományt a próba statisztika ismert eloszlása alapján, rendszerint az $\varepsilon/2$-kvantilis és az $1 - \varepsilon/2$ kvantilis közötti intervallumnak választjuk. Ha egy mintánk van, és a hipotézis az, hogy a mintaelemek valamilyen adott eloszlásúak, akkor *egymintás próbá*ról, ha pedig két mintánk van, és a hipotézis az, hogy a két minta eloszlása, vagy a két eloszlás valamilyen paramétere megegyezik, akkor *kétmintás próbá*ról beszélünk.

**9.6.7. Paraméteres próbák.** Ezeknél a próbáknál az eloszlásfüggvénynek csak egy vagy néhány paramétere ismeretlen. Néhány példát mutatunk be.

Az *egymintás u-próba* esetén tudjuk, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintaelemek normális eloszlásúak ismert $\sigma$ szórással. Hipotézisünk az, hogy az $m$ várható érték egy $m_0$ adott érték, ellenhipotézisünk pedig, hogy $m \neq m_0$. A hipotézis fennállása esetén az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

próbastatisztika standard normális eloszlású. Adott $\varepsilon > 0$ esetén az $u_\varepsilon$ értéket úgy választva, hogy

$$\Phi(u_\varepsilon) - \Phi(-u_\varepsilon) = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1 = 1 - \varepsilon$$

legyen, $]-u_\varepsilon, u_\varepsilon[$ az elfogadási tartomány.

*Kétmintás u-próba*akkor használható, ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ mintánk normális eloszlású ismert $\sigma_1$, az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ mintánk pedig normális eloszlású ismert $\sigma_2$ szórással, hipotézisünk, hogy az eloszlások várható értékei megegyeznek, ellenhipotézisünk pedig, hogy nem. A hipotézis fennállása esetén az

$$u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}$$

próbastatisztika standard normális eloszlású, így ismét a fenti elfogadási tartomány használható.

Az *F-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen és esetleg különböző várható értékű $\xi_0, \ldots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \ldots, \eta_n$ minták szórása azonos-e. Ha igen, az $f = ms_\xi^{*2}/(ns_\eta^{*2})$ statisztika $(m, n)$ paraméterű F eloszlású.

Az *egymintás t-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen szórású $\xi_0, \ldots, \xi_n$ minta várható értéke adott $m$ érték-e? Ha igen, a

$$t = \frac{(\bar{\xi} - m)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} s^{*2}}$$

statisztika $n$ szabadsági fokú Student-eloszlású.

A *kétmintás t-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen de, egyforma szórású $\xi_0, \ldots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \ldots, \eta_n$ minták várható értéke azonos-e. Ha igen, a

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{ms_\xi^{*2} + ns_\eta^{*2}}} \sqrt{\frac{(m+1)(n+1)(m+n)}{m+n+2}}$$

statisztika $m + n$ paraméterű Student-eloszlású.

A *Welch-próba* annak vizsgálatára alkalmas, hogy a normális eloszlású, ismeretlen szórású $\xi_0, \ldots, \xi_m$ illetve $\eta_0, \ldots, \eta_n$ minták várható értéke azonos-e? Ha igen, a

$$t = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{s_\xi^2/(m+1) + s_\eta^2/(n+1)}}$$

statisztika közelítőleg $f$ paraméterű Student-eloszlású; itt

$$\frac{1}{f} = \frac{c^2}{n} + \frac{(1-c)^2}{m}, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{s_\eta^2/n}{s_\xi^2/m + s_\eta^2/n}.$$

**9.6.8. Nemparaméteres próbák.** Paraméteres próbák csak bizonyos eloszlások (például normális eloszlás, illetve exponenciális eloszlás) esetén konstruálhatók. Általánosabban használhatók a nemparaméteres próbák. Kettőt mutatunk be.

A *Kolmogorov-próba* annak a hipotézisnek az ellenőrzésére használható, hogy mintánk eloszlásfüggvénye egy adott folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvény-e. Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvény bármilyen más folytonos eloszlásfüggvény. A próba azon alapul, hogy az empirikus eloszlásfüggvénynél említett $\Delta_n$ mennyiség $\sqrt{n}$-szeresének eloszlása a hipotézis fennállása esetén nem függ $F(x)$-től, sőt, a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\sqrt{n}\Delta_n < t\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2t^2}$$

összefüggés szerint már kb. $n = 30$-tól az $n$-től való függéstől is eltekinthetünk.

A *Kolmogorov–Szmirnov-próba* a Kolmogorov-próba kétmintás megfelelője. Annak a hipotézisnek a vizsgálatára alkalmas, hogy a folytonos eloszlásokból származó két mintánk $F(x)$, illetve $G(x)$ eloszlásfüggvénye megegyezik-e. Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvények folytonosak, de nem egyeznek meg. A próbastatisztika

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\Delta_{n,m}, \quad \text{ahol} \quad \Delta_{n,m} = \sup_x \bigl|F_n(x) - G_m(x)\bigr|.$$

Ennek eloszlása nem függ $F$-től és $G$-től, határeloszlása ugyanaz, mint $\sqrt{n}\Delta_n$-é, és a határeloszlás használható $n, m \geq 30$ esetén.

**9.6.9. A $\chi^2$-próba.** Igen sok célra, például illeszkedés- és függetlenségvizsgálatra használható nem paraméteres próba. Alapgondolata, hogy ha $A_1, A_2, \dots, A_r$ egy teljes eseményrendszer, és teljesül az a hipotézis, hogy az $A_i$ esemény valószínűsége $p_i > 0$, továbbá $n$ független kísérletet végezve $\nu_i$ az $A_i$ esemény bekövetkezéseinek száma, akkor a

$$\kappa = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

próbastatisztika jó közelítéssel $r-1$ szabadságfokú $\chi^2$ eloszlást követ. A jó közelítéshez általában az szükséges, hogy az $np_i$ értékek 10-nél nagyobbak legyenek. A próba akkor is használható, ha a $p_i$ valószínűségek meghatározásához $s$ darab, a mintából számított becslést használtunk fel, de ekkor a $\chi^2$-eloszlás szabadságfoka $r - s - 1$.

**9.6.10. A legkisebb négyzetek módszere.** Ha $(\xi, \eta)$ egy vektor valószínűségi változó, amelynek első koordinátája maga is lehet vektor, akkor egy

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$$

minta birtokában szeretnénk meghatározni egy paraméteres seregből az $a$ paramétervektor azon értékét, amelyre a megfelelő regressziós görbe, felület stb. a legjobban illeszkedik, azaz

$$\mathbb{E}\Bigl(\bigl(\eta - g(\xi, a)\bigr)^2\Bigr)$$

minimális. Az $a$ paramétervektort a

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\bigl(\eta - g(\xi, a)\bigr)^2 \to \min.$$

minimumfeladat megoldásaként kapjuk, ahol a $w_i$-k szabadon választott pozitív súlyok. Ez az eljárás elméletileg ugyan csak akkor megalapozott, ha $\xi$ nem is valószínűségi változó, hanem értékét mi választhatjuk meg, de az általános esetben is használják. A súlyokat

$\eta$ négyzetének ingadozásával fordítottan arányosnak érdemes választani, azaz a legjobb választás az, ha $w_i$ az $\eta$ adott $\xi_i$ érték mellett vett szórásnégyzetének reciproka.

Ha $\xi$ valós értékű, és az $y = ax + b$ regressziós egyenes paramétereit becsüljük így, akkor $a$-ra a $c/s_\xi^{*2}$ becslést, $b$-re az $\overline{\eta} - \overline{\xi}c/s_\xi^{*2}$ becslést kapjuk, ahol

$$c = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})(\eta_i - \overline{\eta})$$

az *empirikus kovariancia*. A korrelációs együttható becslésére az $r = c/(s_\xi^* s_\eta^*)$ együttható *empirikus korrelációs együttható* használható.

**9.6.11. Feladat [6].** Egy fizikai mennyiséget mértünk, és az alábbi eredményeket kaptuk: 12,15; 12,33; 10,94; 10,25; 9,80; 12,90; 12,04; 11,45; 9,64; 11,20; 9,78; 10,89; 11,22; 11,91; 10,78; 10,04; 10,35; 11,32; 9,18; 11,36; 10,40; 10,89; 11,50; 11,26; 11,95; 9,28; 11,11; 10,34; 11,12; 9,71. Ábrázoljuk az empirikus eloszlásfüggvényt! Készítsünk hisztogramot! Becsüljük meg a várható értéket és a szórást! Feltételezve, hogy a minta normális eloszlású 1 szórással, készítsünk konfidencia-intervallumot a várható értékre, és 95%-os szinten döntsük el azt a hipotézist, hogy a várható érték 11,2.

**9.6.12. Feladat [6].** Egy másik laboratóriumban az előző feladatban szereplő fizikai mennyiség mérésekor az alábbi értékeket kaptuk: 10,62; 13,10; 12,40; 9,80; 10,31; 9,25; 10,87; 9,93; 9,72; 12,34; 11,77; 13,23; 9,20; 10,11; 11,66; 10,79; 11,06; 12,71; 10,89; 11,19; 10,93; 10,17; 11,97; 9,14; 11,76; 11,60; 9,14; 10,56; 11,57; 12,53. Tudjuk, hogy ezek az adatok is normális eloszlásúak, de szórásuk 1,2. Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy a két minta átlaga megegyezik?

**9.6.13. Feladat [6].** Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy az előző feladatban szereplő minta normális eloszlású 11,2 várható értékkel és 1,2 szórással? Hát az, hogy a két előző feladatban szereplő minták egyforma eloszlásúak?

**9.6.14. Feladat [6].** Egy kockát 600-szor feldobva, rendre 92, 87, 91, 101, 86, 143 esetben kaptuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ellentmond-e ez 95%-os szinten annak, hogy a kocka szabályos?

$\star$ **9.6.15. Feladat [16].** Készítsünk programot a megismert becslésekre és próbákra! Használjunk adatbázis-kezelőt!

# 10

# Fourier-elmélet

*Isten volt az első, aki Fourier-analízist művelt, amikor a fülünkbe beépített egy Fourier-analizátort.*

*William R. Wade (1985)*

## 10.1 Fourier-sorok

*A trigonometrikus sorok elméletének kiinduló pontjául egy mechanikai probléma körül kialakult vita tekinthető, amely a XVII. század közepén d'Alembert, Euler és Daniel Bernoulli között folyt le. Ez a probléma a* rezgő húr problémája *volt: a két végén kifeszített, l hosszúságú homogén rezgő húr alakjának meghatározása egy tetszés szerinti t időpontban, feltételezve, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez. ... Bernoulli arra a következtetésre jutott, hogy a*

$$\sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a}{l}(t-\beta_n)$$

*összegfüggvények szolgáltatják a rezgésprobléma általános megoldását. Bár az összegfüggvényről csak véges sok tag esetén evidens, hogy az $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ differenciálegyenlet megoldása, az akkori közfelfogás szerint nem kételkedett abban, hogy végtelen sok tag esetén is hasonló a helyzet. Euler kétségbevonta Bernoulli állítását. Ellentmondást látott ugyanis abban, hogy a $t = 0$ kezdeti pillanatban a megoldás szerint a húr alakját a*

$$\sum_n \left(a_n \cos \frac{n\pi a}{l}\beta_n\right) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

*trigonometrikus sor adja meg, holott a húr kezdeti alakja nem csak „functio continua", hanem például törtvonal-alak is lehet. Márpedig az Euler előtt lehetetlennek látszott, hogy egy ilyen „tetszőleges", „mechanikai" görbe, amelynek egyes darabjai között semmi szerves kapcsolat sincs, egész menetében ugyanazzal a trigonometrikus sorral legyen kifejezhető. ...*
*Új lendületet kapott a probléma Fourier-nak a hővezetés elméletével foglalkozó, 1807-től kezdve közölt dolgozatai révén, amelyeket a szerző 1822-ben megjelent „Théorie analytique de la chaleur" című híres műve foglalt össze. E dolgozatokban újra felmerül tetszőleges függvények trigonometrikus sorokkal való előállításának kérdése; Fourier — hasonlóképpen mint Bernoulli — azt állítja, hogy ilyen előállítás lehetséges. ...*
*Fourier eredményei, melyeket e feltevés alapján nyert, olyan nagyszámúak, jelentősek, és a tapasztalattal egyezőek voltak, hogy — félretéve Euler, d'Alembert és Lagrange ellenvéleményét — a század legkiválóbb matematikusai most már nem a feltevés elvetésére, hanem bizonyítására feszítették meg erejüket.*

*Szőkefalvi-Nagy Béla (1951)*

**10.1.1. Általánosított Pitagorasz-tétel.** *Legyen $x_n$ egy (véges vagy végtelen) ortogonális sorozat egy $X$ belső szorzat térben. Ha $x = \sum_n x_n$, akkor $\langle x, x_n\rangle = \|x_n\|^2$ és $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$, így $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$. Ha $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$, akkor a $\sum_n x_n$ sor részletösszegei Cauchy-sorozatot alkotnak, így ha $X$ Hilbert-tér, akkor a feltétel elégséges is $\sum_n x_n$ konvergenciájához.*

**Bizonyítás.** Véges rendszerre $\langle x, x\rangle$ illetve $\langle x, x_n\rangle$ kiszámolásával adódik az érdemi állítás. Egyébként, ha $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ és $n > m$, akkor

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|^2,$$

így $\sum_{n=1}^\infty x_n$ és $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$ részletösszegei egyszerre alkotnak Cauchy-sorozatot. Mivel $\big|\|x\| - \|s_n\|\big| \le \|x - s_n\|$ és $\|s_n\| \to \|x\|$,

$$\big|\|x\|^2 - \|s_n\|^2\big| = (\|x\| + \|s_n\|)\big|\|x\| - \|s_n\|\big| \to 0,$$

azaz

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Végül, ha $n < m$, akkor

$$\begin{aligned}\big|\langle x, x_n\rangle - \|x_n\|^2\big| &= \big|\langle x, x_n\rangle - \langle s_m, x_n\rangle\big| = \big|\langle x - s_m, x_n\rangle\big| \\ &\le \|x - s_m\|\|x_n\| \to 0, \quad \text{ha} \quad m \to \infty. \ \square\end{aligned}$$

**10.1.2. Fourier-sor.** Legyen $x_n$ egy ortonormált sorozat egy $X$ belső szorzat térben, és $x \in X$. A $\sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ sor az $x$ *Fourier-sor*a.

**10.1.3. Tétel.** *Legyen $x_n$ egy ortonormált sorozat az $X$ Hilbert-térben. Minden $x \in X$-re a $\sum_k \langle x, x_k\rangle x_k$ sor konvergál $X$-ben egy $y \in X$ elemhez, és $x - y$ ortogonális minden $x_k$-ra.*

**Bizonyítás.** A Bessel-egyenlőtlenségből

$$\sum_{k=1}^{n} \big\|\langle x, x_k\rangle x_k\big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \big|\langle x, x_k\rangle\big|^2 \le \|x\|^2,$$

így a Pitagorasz-tétel második feléből következik a sor konvergenciája. Ha $s_n$ az $n$-edik részletösszeg, akkor $k \le n \to \infty$ esetén

$$\begin{aligned}\big|\langle x - y, x_k\rangle\big| &\le \big|\langle x - s_n, x_k\rangle\big| + \big|\langle s_n - y, x_k\rangle\big| \\ &\le \Big|\langle x, x_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x_k\rangle\Big| + \|s_n - y\|\|x_k\| \\ &= \|s_n - y\|\|x_k\| \to 0. \ \square\end{aligned}$$

Tetszőleges ortonormált rendszer esetén általában nem minden elem Fourier-sora konvergál az elemhez. Például $x_1$-et elhagyva a rendszerből, $x = x_1$-nek a maradék rendszerre vonatkozó Fourier-együtthatói mind nullák lesznek, így $y = 0$. A következő tétel azzal foglalkozik, hogy mikor konvergál minden elem Fourier-sora az adott elemhez.

**10.1.4. Tétel.** *Legyen $X$ belső szorzat tér. Egy $x_n$ ortonormált sorozatra a következők ekvivalensek:*

(1) *minden $x \in X$-re $x = \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$, tehát minden elem Fourier-sora konvergál és az adott elemhez;*

(2) *minden $x \in X$-re $\|x\|^2 = \sum_n \big|\langle x, x_n \rangle\big|^2$ (ez a* Parseval-egyenlőség*);*

(3) *minden $x, y \in X$-re*

$$\langle x, y \rangle = \sum_n \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}$$

*(ez az* általánosított Parseval-egyenlőség*);*

(4) *minden $x \in X$ pontosan egyféleképpen írható fel $x = \sum_n \alpha_n x_n$ $(\alpha_n \in \mathbb{K})$ alakban;*

(5) *az $x_n$-ek véges lineáris kombinációi sűrű halmazt alkotnak $X$-ben, mint normált térben.*

Ha ezek a tulajdonságok fennállnak, akkor az ortonormált sorozatot *zárt*nak nevezzük, mert (5) szerint lineáris kombinációi halmazának a lezártja az egész $X$.

**Bizonyítás.** Ha (1) teljesül, legyen $s_n$ az $x$, az $r_n$ pedig az $y$ Fourier-sorának $n$-edik részletösszege. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left|\langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle \overline{\langle y, x_k \rangle}\right| &= \big|\langle x, y \rangle - \langle s_n, r_n \rangle\big| \\
&\le \big|\langle x, y \rangle - \langle s_n, y \rangle\big| + \big|\langle s_n, y \rangle - \langle s_n, r_n \rangle\big| \\
&\le \|x - s_n\|\|y\| + \|s_n\|\|r_n - y\| \to 0,
\end{aligned}$$

azaz teljesül (3). Ennek speciális esete (2). Másrészt vegyük észre, hogy

$$\langle x, s_n \rangle = \left\langle x, \textstyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, x_k \rangle} \langle x, x_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \big|\langle x, x_k \rangle\big|^2 = \|s_n\|^2,$$

így (2)-ből

$$\|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, s_n \rangle - \overline{\langle x, s_n \rangle} + \|s_n\|^2 = \|x\|^2 - \|s_n\|^2 \to 0,$$

azaz (1) teljesül, tehát (1), (2) és (3) ekvivalensek. (1)-ből nyilván következik, hogy minden $x$ előállítható $\sum_n \alpha_n x_n$ alakban, a Pitagorasz-tételt alkalmazva két előállítás különbségére pedig kapjuk, hogy az előállítás egyértelmű, így teljesül (4). Triviális, hogy (4)-ből következik (5). Ha (5) teljesül, válasszunk egy olyan $y$-t, amelyre $\|x - y\| < \varepsilon$ és $y$ az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ lineáris kombinációja. Ha $n \ge m$, a legjobb lineáris approximációról szóló tétel szerint azt kapjuk, hogy $\|x - s_n\| \le \|x - y\| < \varepsilon$. Tehát (1) teljesül. □

**10.1.5. Definíció.** Egy $X$ belső szorzat tér egy $x_n$ sorozatát *teljes*nek nevezzük, ha nem bővíthető minden $x_n$-re ortogonális normált elemmel, azaz ha egyedül a 0 elem ortogonális minden $x_n$-re, vagy másként fogalmazva, az $x_n$-ek halmazának ortogonális komplementere $\{0\}$. Ha az $x_n$ ortonormált sorozat zárt, akkor az előző tételből (1) miatt teljes is. A megfordítás nem minden belső szorzat térben igaz, de Hilbert-térben igen, mivel ott $x - \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$ egy előző tétel szerint ortogonális minden $x_k$-ra, tehát csak nulla lehet.

**10.1.6. Klasszikus Fourier-sorok.** A $[0,1]$-en értelmezett komplex értékű négyzetesen integrálható függvények belső szorzat terében az

$$x \mapsto e^{2\pi ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvények ortonormált rendszert alkotnak, az úgynevezett *trigonometrikus rendszert*. Első célunk lesz megmutatni, hogy ez a rendszer zárt, tehát teljes. Egy $[0,1]$-en négyzetesen integrálható függvény *klasszikus Fourier-sora* vagy röviden *Fourier-sora* a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx}$$

sor, ahol

$$c_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Szokás azt írni, hogy

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikx},$$

ahol a $\sim$ jel azt fejezi ki, hogy a jobb oldalon álló sor $f$ Fourier-sora. A részletösszegekre bevezetve az

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx}$$

jelölést, a zártság miatt 10.1.4(1) alapján azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \left|f(x) - s_n(x)\right|^2 dx \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A Parseval-egyenlőség itteni alakja

$$\int_0^1 \left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Vegyük észre, hogy a Bessel-egyenlőtlenségből $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, amiből következik, hogy $|c_k|^2 \to 0$, így $c_k \to 0$, ha $|k| \to \infty$. Mivel az $x \mapsto e^{2\pi ikx}$ függvények periodikusak 1 szerint, a $[0,1]$ helyett bármilyen más, 1 hosszúságú intervallumot is használhatunk.

Jóval általánosabban olyan $f$ függvényt is tekinthetünk, amely 1 szerint periodikus, és $[0,1]$-en $\lambda$-integrálható, mert a Fourier-együtthatók ekkor is képezhetők. A továbbiakban ilyen feltételek mellett fogjuk vizsgálni $f$ klasszikus Fourier-sorát.

Ha az $f$ függvény $2l$ szerint periodikus ($l > 0$), akkor az $x \mapsto e^{\pi ikx/l}$ teljes ortogonális, de nem feltétlenül normált függvényrendszert tekinthetjük, a Fourier-sort

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\pi ikx/l}$$

alakban írhatjuk

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\pi i k x/l} \, dx$$

együtthatókkal és

$$s_n(f, x) = s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\pi i k x/l}$$

részletösszegekkel. Szokás a fenti *komplex alak*ról az Euler-féle összefüggéssel *valós alak*ra vagy másnéven *trigonometrikus alak*ra áttérni:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \Big), \\ s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \Big), \end{aligned}$$

ahol $a_0 = 2c_0$ és $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = ic_k - ic_{-k}$, ha $k > 0$. (Egyébként a valamely $n$-re

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \Big),$$

$(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K})$ alakban előállítható függvényeket *trigonometrikus polinom*oknak nevezzük.) A $c_k$-khoz hasonlóan az $a_k$, $b_k$ együtthatók is kifejezhetők közvetlenül integrálokkal:

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Négyzetesen integrálható függvényre a Parseval-egyenlőség alakja most:

$$\frac{1}{l} \|f\|^2 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \, dx = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

A valós alak előnye, hogy világosan mutatja, ha $f$ valós értékű függvény, akkor az $a_k$, $b_k$ számok, és így az $s_n$ részletösszegek is valósak, ha $f$ páros függvény, akkor a $b_k$, ha pedig páratlan függvény, akkor az $a_k$ együtthatók mind nullák. Ha csak valós értékű függvényekkel kívánunk foglalkozni, akkor is legtöbbször ezt az alakot célszerű használni. A komplex alak előnye, hogy egyszerűbb, jobban mutatja a Fourier-transzformációval való kapcsolatot és az általánosítási lehetőségeket. Ezért általában a komplex alakot fogjuk használni.

Néha a $]0, l[$-en értelmezett függvényt akarunk sin-sor vagy cos-sor alakjában felírni. Ezt megtehetjük, ha előbb kiterjesztjük $]-l, l[$-re páratlan, illetve páros függvénnyé, majd $2l$ szerint periodikus függvénnyé.

Végül megjegyezzük, hogy sok könyv csak az $l = \pi$ esetet tárgyalja.

**10.1.7. Példák.** (1) Az 1 szerint periodikus $f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x \bmod 1$ függvényre (fűrészfogjel),

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k\pi},$$

mivel 1/2-et levonva páratlan függvényt kapunk és

$$\begin{aligned} b_k &= 4\int_0^{1/2} (x - 1/2) \sin 2k\pi x \, dx \\ &= -2\left[-\frac{\cos 2k\pi x}{2k\pi}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} 4x \sin 2k\pi x \, dx \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} + \left[-\frac{2x\cos 2k\pi x}{k\pi}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{2\cos 2k\pi x}{k\pi} \, dx \\ &= -\frac{1}{k\pi} + \left[-\frac{\sin 2k\pi x}{k^2\pi^2}\right]_0^{1/2} = -\frac{1}{k\pi}. \end{aligned}$$

A Parseval-egyenlőségből

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ahonnan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(2) Azon $2\pi$ szerint periodikus $f$ függvényre, amelyre $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ha $|x| < \pi$ (négyszögjel),

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

mivel

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{k\pi}, & \text{ha } k \text{ páratlan}, \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros}. \end{cases}$$

A Parseval-egyenlőségből

$$2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

ahonnan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(3) Legyen $f(x)$ az $x$ távolsága a legközelebbi egésztől (háromszögjel). Az 1 szerint periodikus $f$ függvényre

$$f(x) \sim \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(4k+2)\pi x}{(2k+1)^2},$$

mivel

$$a_0 = 4\int_0^{1/2} x\,dx = \frac{1}{2}$$

és $k > 0$ esetén

$$\begin{aligned}
a_k &= 4\int_0^{1/2} x\cos 2k\pi x\,dx \\
&= 4\left[x\frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}\right]_0^{1/2} - \frac{4}{2k\pi}\int_0^{\pi} \sin 2k\pi x\,dx \\
&= \frac{1}{\pi^2 k^2}\left[\cos 2k\pi x\right]_0^{1/2} = \begin{cases} -1/(\pi^2 k^2), & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros.} \end{cases}
\end{aligned}$$

A Parseval-egyenlőségből

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{24} \quad \text{és innen} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{2\pi^4}{45}.$$

**10.1.8. Tétel.** *Ha az $f$, illetve $f^*$ függvények 1 szerint periodikusak, a $[0,1]$-en abszolút integrálhatóak, Fourier-együtthatóik $c_k$ illetve $c_k^*$, és $c \in \mathbb{C}$, akkor*

(1) *az $f \equiv c$ függvény Fourier-együtthatói $c_0 = c$ és $c_k = 0$, ha $k \neq 0$;*

(2) *a $cf$ függvény Fourier-együtthatói $cc_k$;*

(3) *az $f + f^*$ függvény Fourier-együtthatói $c_k + c_k^*$;*

(4) *ha $f^* = \overline{f}$, akkor $c_k^* = \overline{c_{-k}}$;*

(5) *ha $f(x+\alpha) = f^*(x)$, akkor $c_k^* = c_k e^{2\pi i k\alpha}$;*

(6) *ha $f^*(x) = \int_0^x f$, akkor $2\pi i k c_k^* = c_k - c_0$.*

**Bizonyítás.** (1)–(5) egyszerű számolás. (6) parciális integrálással adódik az integrálfüggvényekre vonatkozó változatot használva. □

**10.1.9. Következmény.** *Ha $f$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor Fourier-sora egyenletesen konvergál.*

**Bizonyítás.** Legyenek $f$, $f'$, $f''$ Fourier-együtthatói rendre $c_k$, $c_k'$, $c_k''$. Mivel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k''|^2 \leq \int_0^1 |f''|^2 < \infty,$$

a $c_k''$ számok abszolút értéke valamely $K$ korlát alatt marad. Mivel $c_0' = \int_0^1 f' = f(1) - f(0)$,

$$c_k = \frac{c_k'}{2\pi i k} = \frac{c_k'' - c_0''}{-4\pi^2 k^2},$$

ha $k \neq 0$, azt kapjuk, hogy $|c_k e^{2\pi i k x}| \leq 2K/(4\pi^2 k^2)$, ha $k \neq 0$, így a Weierstrass-kritérium alkalmazható.

**10.1.10. Weierstrass második approximációs tétele.** *Egy $2\ell$ szerint periódikus $\mathbb{K}$-beli értékű folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető $2\ell$ szerint periódikus $\mathbb{K}$-beli értékű trigonometrikus polinomokkal.*

**Bizonyítás.** Elég megmutatnunk, hogy $f$ egyenletesen közelíthető kétszer folytonosan differenciálható függvénnyel, mert az közelíthető a Fourier-sorának részletösszegeivel. Válasszunk $\varepsilon > 0$-hoz $\delta > 0$-t, amelyre $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$, ha $|x - y| < \delta$, és legyen $g$ olyan függvény, amely egy $\delta$-nál finomabb beosztásra a $[x_{j-1}, x_j]$ szakaszon $f(x_{j-1})$ és $f(x_j)$ közötti értékeket vesz fel, például legyen

$$g(x) = f(x_{j-1}) + c_j \int_{x_{j-1}}^{x} (t - x_{j-1})^2 (t - x_j)^2 \, dt, \quad \text{ha } x_{j-1} \le x \le x_j,$$

alkalmas $c_j$-vel. Ekkor $\left|f(x) - g(x)\right| < \varepsilon$, ha $x_{j-1} \le x \le x_j$. □

**10.1.11. Lemma.** *A*

$$T_n(x) = \cos n \arccos x \quad \textit{és} \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin \arccos x}, \quad x \in [-1, 1]$$

*függvények polinomok, az úgynevezett első- és másodfajú* Csebisev-polinomok.

**Bizonyítás.** A $T$-re $n = 0$ és $n = 1$ esetén, az $U$-ra $n = 0$ esetén az állítás világos. Egyébként

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin \arccos x} = x \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin \arccos x} + \cos(n \arccos x) \\ &= x U_{n-1}(x) + T_n(x) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \arccos x) = x \cos((n-1)\arccos x) - \sin((n-1)\arccos x) \sin \arccos x \\ &= x T_{n-1}(x) - \frac{\sin((n-1)\arccos x)}{\sin \arccos x}(1 - \cos^2 \arccos x) \\ &= x T_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)(1 - x^2). \ \square \end{aligned}$$

**10.1.12. Weierstrass első approximációs tétele.** *Egy $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető polinomokkal.*

**Bizonyítás.** Elég $[-1, 1]$-re bizonyítani. Tekintsük a $2\pi$ szerint periódikus, folytonos és páros $g(t) = f(\cos t)$ függvényt. Hasonlóan eljárva, mint az előző tétel bizonyításában, ezt a függvényt közelíthetjük $\varepsilon$ hibával egy kétszer folytonosan differenciálható függvénnyel. Az origóra szimmetrikus beosztást választva a közelítő függvény is $2\pi$ szerint periódikus és páros lesz, így a Fourier-sora tiszta koszinusz sor, és egy alkalmas

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt$$

részletösszege $2\varepsilon$ hibával megközelíti $g$-t. A $t = \arccos x$ helyettesítéssel kapott polinom $2\varepsilon$ hibával közelíti $[-1, 1]$-en $f$-et. □

⋆ **10.1.13. Megjegyzés.** Megmutatható, hogy $[-1,1]$-en bármely $T_n$-nel azonos fokszámú és főegyütthatójú $P$ polinomra $\|P\| \geq \|T_n\|$, ha $n > 0$. Így egy elég jó $n$-ed fokú polinomközelítés fokszámát úgy érdemes csökkenteni, hogy levonjuk belőle a $T_n$ egy alkalmas konstansszorosát. A lépés ismételhető. A kezdeti közelítés Taylor-polinomként, vagy a következő tétel — amit nem bizonyítunk — alkalmazásával kapható.

⋆ **10.1.14. Tétel.** *Legyen $f$ folytonos, valós értékű függvény $[-1,1]$-en. Ha $P$ a $\cos(\pi(2k-1)/(2n))$, $k = 1, 2, \dots, n$ alappontokhoz (ezek $T_n$ gyökei) tartozó Lagrange interpolációs polinom, akkor $n \leq 20$ esetén hibája legfeljebb négyszer, $n \leq 100$ esetén hibája legfeljebb ötször akkora, mint bármely, az $f$-et közelítő legfeljebb $n$-ed fokú polinom hibája.* □

**10.1.15. Feladat [5].** Határozzunk meg $\sin x/x$-et $[-\pi/2, \pi/2]$-n 0,01-nél kisebb hibával közelítő legfeljebb másodfokú polinomot!

**10.1.16. Feladat [8].** Határozzunk meg $2^x$-et $[0,1]$-en 0,001-nél kisebb hibával közelítő polinomot!

**10.1.17. Feladat [16].** Tervezzünk adott pontosságú számítógépre a négy alapművelet segítségével sin, cos, exp, ln és arctg lehető legpontosabb kiszámítására alkalmas programot!

⋆ **10.1.18. Unicitási tétel.** *Ha $f \in \mathbb{L}^1[0,1]$ Fourier-együtthatói nullák, akkor $f = 0$ majdnem mindenütt.*

Az állítást azért nevezik unicitási tételnek, mert két függvény különbségére alkalmazva, azt kapjuk, hogy Fourier-együtthatóik csak akkor egyezhetnek meg, ha a két függvény majdnem mindenütt egyenlő.

**Bizonyítás.** Legyen $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ekkor $F$ folytonos, és majdnem mindenütt $f$ a deriváltja. Mivel $c_0 = 0$, $F$ is 1 szerint periodikus. Alkalmas konstanst hozzáadva $F$-hez, elérhetjük, hogy $F$ Fourier-együtthatói is mind nullák legyenek. Weierstrass második approximációs tétele szerint van olyan $T$ trigonometrikus polinom, amelyre $\|F-T\| \leq \varepsilon^2$, és így $\|F-T\|_2^2 \leq \varepsilon^2$. Legyen $T$ foka $n$. Mivel a $\|\ \|_2$-normában a Fourier-sor részletösszegei approximálják legjobban $F$-et, $\|F-s_n\|_2 \leq \varepsilon$. De $s_n$ nulla, így $\|F\|_2 \leq \varepsilon$. Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, $\|F\|_2 = 0$. Mivel $F$ folytonos, $F \equiv 0$, így $f$ majdnem mindenütt nulla.

**10.1.19. Következmény.** *A trigonometrikus rendszer teljes.*

**Bizonyítás.** $\mathbb{L}^2[0,1] \subset \mathbb{L}^1[0,1]$. □

A továbbiakban Fourier-sorok pontonkénti konvergenciájával fogunk foglalkozni. A bizonyítások $s_n - f$ zárt alakban való előállításán és az alábbi lemmán múlnak.

**10.1.20. Riemann–Lebesgue-lemma.** *Ha $f\colon ]a,b[ \to \mathbb{C}$ véges vagy végtelen intervallumon abszolút integrálható, akkor $a \leq c \leq d \leq b$ esetén az*

$$\int_c^d f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

*$\omega$-nak folytonos függvénye, amely eltűnik a végtelenben, sőt, $c, d$-ben egyenletesen, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\Omega$, hogy ha $|\omega| > \Omega$, akkor az integrál abszolút értéke minden $c, d$-re kisebb, mint $\varepsilon$.*

Az állítás az $e^{i\omega t}$ függvény helyett a $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ függvényekre is igaz marad, mert ezek kifejezhetők $e^{i\omega t}$-vel és $e^{-i\omega t}$-vel.

**Bizonyítás.** Ha $f$ egy $I$ véges intervallum karakterisztikus függvénye, jelölje $\gamma, \delta$ az $I$ és a $]c, d[$ metszetének végpontjait (ha a metszet üres, legyen $\gamma = \delta$). Mivel

$$\int_c^d f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_\gamma^\delta e^{i\omega t}\,dt = \frac{e^{i\omega\delta} - e^{i\omega\gamma}}{i\omega},$$

ebben az esetben teljesül az állítás. Innen véges intervallumok karakterisztikus függvényeinek lineáris kombinációira is teljesül. Tudjuk, hogy ezek sűrű halmazt alkotnak $\mathbb{L}^1]a, b[$-ben. Ha $f$ abszolút integrálható, $\varepsilon > 0$, legyen $g$ egy ilyen lineáris kombináció, amelyre

$$\int_a^b \bigl|f(t) - g(t)\bigr|\,dt < \varepsilon.$$

Az

$$\int_c^d f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_c^d \bigl(f(t) - g(t)\bigr)e^{i\omega t}\,dt + \int_c^d g(t)e^{i\omega t}\,dt$$

felbontásból, mivel a jobb oldali első integrál abszolút értéke legfeljebb $\varepsilon$, a bal oldali integrál egyenletesen közelíthető folytonos függvényekkel, másrészt, mivel a jobb oldali második integrál $[c, d]$-ben egyenletesen nullához tart, a bal oldali integrál kisebb, mint $2\varepsilon$, ha $|\omega|$ elég nagy. $\square$

**10.1.21. Dirichlet-formula.** *Legyen $f$ komplex értékű, 1 szerint periodikus, $[0, 1]$-en abszolút integrálható függvény. Ekkor a*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi ikt}$$

*jelöléssel*

$$s_n(f, x) = s_n(x) = \int_0^{1/2} \bigl(f(x + t) + f(x - t)\bigr)D_n(t)\,dt$$

*és*

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} \bigl(f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)\bigr)D_n(t)\,dt,$$

*továbbá*

$$D_n(t) = \frac{\sin(2n + 1)\pi t}{\sin \pi t}, \quad \text{ha} \quad \sin \pi t \neq 0.$$

Itt $D_n$ az úgynevezett *Dirichlet-féle magfüggvény*, amely mint a definíciójából látható, páros és 1 szerint periodikus.

**Bizonyítás.** A $D_n$ magfüggvény másik alakja a

$$\begin{aligned} D_n(t)\sin\pi t &= \sin\pi t\left(1+\sum_{k=1}^{n} 2\cos 2\pi kt\right) \\ &= \sin\pi t + \sum_{k=1}^{n}(\sin(2k+1)\pi t - \sin(2k-1)\pi t) = \sin(2n+1)\pi t \end{aligned}$$

összefüggésből kapható.

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2\pi ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\int_0^1 f(t)e^{2\pi ik(x-t)}\,dt = \int_0^1 f(t)D_n(x-t)\,dt \\ &= \int_{-x}^{1-x} f(x+u)D_n(u)\,du = \int_0^1 f(x+u)D_n(u)\,du \\ &= \int_0^{1/2} f(x+u)D_n(u)\,du + \int_{1/2}^{1} f(x+u)D_n(u)\,du \\ &= \int_0^{1/2}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

Tagonkénti integrálással

$$\int_0^{1/2} D_n(t)\,dt = \frac{1}{2},$$

így

$$f(x) = \int_0^{1/2} 2f(x)D_n(t)\,dt,$$

amiből

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))D_n(t)\,dt. \ \square$$

**10.1.22. Dini-kritérium.** *Az előző tétel feltételei mellett, ha $x \in \mathbb{R}$ és a*

$$t \mapsto \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}$$

*függvény a $t = 0$ pont egy környezetében Lebesgue-integrálható, akkor $s_n(x) \to f(x)$, amint $n \to \infty$.*

**Bizonyítás.**

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}\,\frac{t}{\sin\pi t}\sin(2n+1)\pi t\,dt,$$

és a szorzat első tényezője integrálható, a második korlátos, tehát az első két tényező szorzata is integrálható. A $[0, 1/2]$ intervallumon kívül nullát integrálva, alkalmazhatjuk a Riemann–Lebesgue-lemmát. $\square$

**10.1.23. Következmény: Lipschitz-kritérium.** *Ha van olyan $0 < \alpha \le 1$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $t = 0$ valamely környezetében*

$$\bigl|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\bigr| \le c|t|^{\alpha},$$

*akkor $s_n(x) \to f(x)$.*

**Bizonyítás.** $t \mapsto c|t|^{\alpha-1}$ integrálható. □

**10.1.24. Következmény.** *Ha léteznek és végesek az $f(x+)$ és $f(x-)$ jobb és bal oldali határértékek, továbbá léteznek és végesek a*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \quad \lim_{t\uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-)}{t}$$

*határértékek, azaz léteznek a jobb és bal oldali félérintők, akkor*

$$s_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

*Speciálisan, ha létezik $f'(x)$, akkor $s_n(x) \to f(x)$.*

**Bizonyítás.** Legyen

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

ekkor $t = 0$ egy környezetében

$$\bigl|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\bigr| \le c|t|. \ \square$$

**10.1.25. Példa.** Azon $2\pi$ szerint periodikus $f$ függvényre, amelyre $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, ha $|x| < \pi$ (négyszögjel),

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1},$$

és a Fourier-sor mindenütt konvergens. Az $x = \pi/2$ helyettesítéssel

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots.$$

⋆ **10.1.26. Lemma.** *Minden $n \in \mathbb{N}$-re és $0 \le x \le 1/2$-re $\int_0^x D_n(t)\,dt$ értéke nemnegatív és legfeljebb 1.*

**Bizonyítás.** A $D_n$ függvény zérushelyei $x_k = k/(2n+1)$, $k = 1, 2\ldots, 2n+1$ a $[0, 1/2]$-ben. Legyen $x_0 = 0$. Ezek között a pontok között $D_n$ váltakozva pozitív és negatív előjelű. Mivel $t \mapsto \sin \pi t$ monoton növekedő,

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \bigl|D_n(t)\bigr|\,dt \ge \int_{x_k}^{x} \bigl|D_n(t)\bigr|\,dt,$$

ha $x_k \le x \le x_{k+1}$. Ugyanúgy, mint az alternáló sorokra vonatkozó tétel bizonyításában, kapjuk, hogy a tételben szereplő integrál nemnegatív és legfeljebb annyi, mint $\int_0^{x_1} D_n(t)\,dt$. Mivel $\lim_{t\downarrow 0} D_n(t) = 2n+1$, és $D_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\pi t$ deriváltja $x_0$ és $x_1$ között negatív, ez az érték kisebb, mint 1. □

**10.1.27. Dirichlet–Jordan-tétel.** *Ha az 1 szerint periodikus, $[0,1]$-en Lebesgue-integrálható $f$ függvény az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon korlátos változású, akkor minden $x \in ]a,b[$-re*

$$s_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

*Ha $f$ folytonos $]a,b[$-ben, akkor a konvergencia minden $[c,d] \subset ]a,b[$ intervallumon egyenletes.*

$\star$ **Bizonyítás.** Elég a tételt a $b - a < 1$ esetre bizonyítani, mert az általános esetben lefedhetjük az $[a,b]$-t 1-nél rövidebb intervallumokkal. Mivel Jordan felbontási tétele szerint $[a,b]$-n két monoton növekedő függvény különbségeként írhatjuk fel $f$-et, amelyek folytonosak $]a,b[$ minden olyan pontjában, ahol $f$ folytonos, és ezeket kiegészíthetjük 1 szerint periódikus, $[0,1]$-en abszolút integrálható függvényekké, amelyek különbsége $f$, elég a tételt a monoton növekedő esetre bizonyítani. Azt is feltehetjük, hogy $2f(x) = f(x+) + f(x-)$, ha $x \in ]a,b[$.

Az első állítás bizonyításához legyen $\varepsilon > 0$ és írjuk fel a Dirichlet-formulát

$$s_n(x) - f(x) = \int_0^{1/2} (f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-))D_n(t)\,dt$$

alakban. Az integrált két részre fogjuk bontani. A 0-tól $0 < \eta < 1/2$-ig terjedő rész becsléséhez tegyük fel, hogy $x + \eta < b$, és a $t \mapsto f(x+t) - f(x+)$ függvényt a nullában határértékével, azaz nullának értelmezve, alkalmazzuk az integrálszámítás középértéktételét:

$$\int_0^{\eta} (f(x+t) - f(x+))D_n(t)\,dt = (f(x+t) - f(x+)) \int_{\tau}^{\eta} D_n(t)\,dt,$$

ahol $0 \le \tau \le \eta$. Mivel az előző lemma szerint a jobb oldali integrál két olyan integrál különbsége, amelyek mindegyike ($n$-től függetlenül) legfeljebb 2, ha $\eta$ elég kicsi, akkor a jobb oldali integrál abszolút értéke legfeljebb $\varepsilon/4$. A $t$ helyére $-t$-t helyettesítve és felhasználva, hogy $D_n$ páros, hasonlóan kapjuk, hogy ha $\eta$ elég kicsi, akkor

$$\int_0^{\eta} (f(x-t) - f(x-))D_n(t)\,dt$$

abszolút értéke is legfeljebb $\varepsilon/4$.

Az

$$(1) \qquad \int_{\eta}^{1/2} (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)\,dt - (f(x+) + f(x-)) \int_{\eta}^{1/2} D_n(t)\,dt$$

integrálok közül a Riemann–Lebesgue-lemma szerint a második tart nullához, ha $n \to +\infty$. Helyettesítéssel

$$\int_{\eta}^{1/2} f(x+t) \sin(2n+1)\pi t$$

$$= \int_{x+\eta}^{x+1/2} f(t)(\sin(2n+1)\pi t \cos(2n+1)\pi x - \cos(2n+1)\pi t \sin(2n+1)\pi x)\,dt.$$

Elég az $x \in [0,1]$ esetet tekinteni. Ugyancsak a Riemann–Lebesgue-lemma szerint ez az integrál $x$-ben egyenletesen tart nullához, mivel a határok $[0,3/2]$ elemei. Ugyanez igaz $f(x+t)$ helyett $f(x-t)$-vel. Végül az (1)-beli első integrál abszolút értéke ezen integrálok összege abszolút értékének legfeljebb $1/\sin(\eta\pi)$-szerese, így elég nagy $n$-re $x$-ben egyenletesen (1) abszolút értéke kisebb, mint $\varepsilon/2$.

A második állítás bizonyításához csak azt kell észrevenni, hogy $f$ az $[a+\delta, b-\delta]$ intervallumon $\delta > 0$-ra egyenletesen folytonos, így a 0-tól $\eta$-ig vett integrálok egyenletesen válnak kicsivé, ha $x \in [a+2\delta, b-2\delta]$. □

**10.1.28. Következmény: Riemann-féle lokalizációs tétel.** *Ha az $f$ és $f^*$ függvények 1 szerint periodikusak, $[0,1]$-en abszolút integrálhatóak, és az $[a,b]$ intervallumon megegyeznek, $s_n$ illetve $s_n^*$ pedig Fourier-soraik részletösszegei, akkor $x \in\, ]a,b[$-re $s_n(x) - s_n^*(x) \to 0$, amint $n \to \infty$, és a konvergencia minden $[a+\delta, b-\delta]$, $\delta > 0$ részintervallumon egyenletes.*

**Bizonyítás.** Az $]a,b[$-n $f - f^* = 0$. □

**10.1.29. Többdimenziós Fourier-sorok.** $\mathbb{L}^2([0,1]^n)$-ben az $x \mapsto e^{2\pi i\langle k,x\rangle}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ függvényrendszer teljes ortonormált rendszer. Bármely $\mathbb{L}^1[0,1]^n$ függvénynek képezhető az $n$-dimenziós Fourier-sora. Affin transzformációval bármely paralellepipedonra áttérhetünk. Ez fontos kristályrácsok vizsgálatánál.

**10.1.30. Klasszikus ortogonális polinomok.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy (nem feltétlenül korlátos) intervallum és $\varrho\colon I \to \mathbb{R}$ egy pozitív integrálható függvény; a $\varrho$ függvényt a továbbiakban *súlyfüggvény*nek fogjuk nevezni. Jelölje $\mathbb{L}^2(\varrho)$ azon függvények halmazát, amelyekre $f\sqrt{\varrho} \in \mathbb{L}^2(I)$. Az $f, g\colon I \to \mathbb{K}$ függvények ($\varrho$-val képzett) *belső szorzat*án az

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\varrho(x)\,dx$$

integrált értjük; ez megfelel az $f\sqrt{\varrho}$ és $g\sqrt{\varrho}$ függvények $\mathbb{L}^2(I)$-beli belső szorzatának. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást különböző intervallumokon különböző súlyfüggvények mellett a hatványfüggvények $1, x, x^2, \ldots$ sorozatára alkalmazva, ortonormált polinomrendszereket kaphatunk. Az alábbiakban egy táblázatban foglaltuk össze az ortogonális polinomrendszerek tulajdonságait. A felsorolt polinomrendszerek mind zártak a $\varrho$-ra nézve *négyzetesen integrálható* függvények $\mathbb{L}^2(\varrho)$ terében. A bizonyításokat lásd a [20] könyvben.

Megjegyezzük, hogy az ortogonális polinomok legtöbbször nem normált, csak ortogonális rendszer alakjában használatosak. Definíciójuknak a Rodriques-formula tekinthető. A $\varphi_n\colon ]a,b[\, \to \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = \alpha_n x^n + \beta_n x^{n-1} + \cdots$, $n = 0,1,2,\ldots$ ortogonális polinomrendszer *generátorfüggvény*én egy olyan kétváltozós $G$ függvény értendő, amely $]a,b[\, \times \{0\}$ egy $D$ környezetén van értelmezve, és amelyre

$$G(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) z^n, \quad \text{ha} \quad (x,z) \in D.$$

A polinomok az

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\varphi_{n+1}(x) = (x - \lambda_n)\varphi_n(x) - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\delta_n\varphi_{n-1}(x)$$

| Név | Jel | Halmaz | Súlyfüggvény |
| --- | --- | --- | --- |
| Jacobi ($\alpha, \beta > -1$) | $P_n^{(\alpha,\beta)}$ | $(-1, 1)$ | $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ |
| Ultra-szferikus ($\alpha > -1$) | ${}^{(\alpha)}P_n$ | $(-1, 1)$ | $(1-x^2)^\alpha$ |
| Legendre | $P_n$ | $(-1, 1)$ | $1$ |
| Csebisev | $T_n$ | $(-1, 1)$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ |
| Csebisev, másodfajú | $U_n$ | $(-1, 1)$ | $\sqrt{1-x^2}$ |
| Laguerre, általános ($\alpha > -1$) | ${}^{(\alpha)}L_n$ | $(0, \infty)$ | $x^\alpha e^{-x}$ |
| Laguerre | $L_n$ | $(0, \infty)$ | $e^{-x}$ |
| Hermite | $H_n$ | $(-\infty, \infty)$ | $e^{-x^2}$ |

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

rekurzív formulából számolhatók, ahol

$$\delta_n = \frac{\|\varphi\|^2}{\|\varphi_{n-1}\|^2}, \quad \lambda_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n} - \frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}}. \square$$

| Jel | Rodrigues-formula | Normanégyzet |
|---|---|---|
| $P_n^{(\alpha,\beta)}$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}$ $\cdot \frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right)$ | $\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)}$ $\cdot \frac{\mathbf{\Gamma}(n+\alpha+1)\mathbf{\Gamma}(n+\beta+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)\mathbf{\Gamma}(n+\alpha+\beta+1)}$ |
| ${}^{(\alpha)}P_n$ | $P_n^{(\alpha,\alpha)}$ | $\frac{2^{2\alpha+1}}{(2n+2\alpha+1)}$ $\cdot \frac{\mathbf{\Gamma}^2(n+\alpha+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)\mathbf{\Gamma}(n+2\alpha+1)}$ |
| $P_n$ | ${}^{(0)}P_n$ | $\frac{2}{(2n+1)}$ |
| $T_n$ | $\cos n \arccos x = c_n \cdot {}^{(-1/2)}P_n(x)$ $c_0 = 1,\ c_n = \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n-1}{n}}$ | $\pi,$ ha $n = 0,$ $\frac{\pi}{2},$ ha $n > 0$ |
| $U_n$ | $\frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sin(\arccos x)} =$ $\frac{2^{2n}}{\binom{2n+1}{n}} \cdot {}^{(1/2)}P_n(x)$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| ${}^{(\alpha)}L_n$ | $\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$ | $\mathbf{\Gamma}(\alpha+1)\binom{\alpha+n}{n}$ |
| $L_n$ | ${}^{(0)}L_n$ | 1 |
| $H_n$ | $\frac{(-1)^n}{n!}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ | $\frac{2^n}{n!}\sqrt{\pi}$ |

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

→ **10.1.31. Feladat [6].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben a páros függvények halmazának ortogonális komplementerét.

→ **10.1.32. Feladat [5].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben a $t \mapsto e^t$ függvényt legjobban approximáló elsőfokú polinomot.

| Jel | Főegyüttható | Következő együttható |
|---|---|---|
| $P_n^{(\alpha,\beta)}$ | $\dfrac{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)2^n n!}$ | $\dfrac{n(\alpha-\beta)\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+2n)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+\beta+n+1)2^n n!}$ |
| ${}^{(\alpha)}P_n$ | $\dfrac{\mathbf{\Gamma}(2\alpha+2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(2\alpha+n+1)2^n n!}$ | 0 |
| $P_n$ | $\dfrac{\mathbf{\Gamma}(2n+1)}{\mathbf{\Gamma}(n+1)2^n n!}$ | 0 |
| $T_n$ | $1, \quad \text{ha} \quad n=0,$<br>$2^{n-1}, \quad \text{ha} \quad n>0$ | 0 |
| $U_n$ | $2^n$ | 0 |
| ${}^{(\alpha)}L_n$ | $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ | $\dfrac{(n+\alpha)(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ |
| $L_n$ | $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ | $\dfrac{n(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$ |
| $H_n$ | $\dfrac{2^n}{n!}$ | 0 |

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

→ **10.1.33. Feladat [7].** Ortogonalizáljuk $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben az 1, $x$, $x^2$ függvényrendszert.

**10.1.34. Feladat [8].** Ortonormáljuk $\mathbb{L}^2[-1,1]$-ben az $1, x, x^2$ függvényrendszert.

**10.1.35. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi távolságokat:

| Jel | Differenciálegyenlet | Generátorfüggvény |
|---|---|---|
| $P_n^{(\alpha,\beta)}$ | $(x^2-1)y''$ $+((\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta)y'$ $-n(\alpha+\beta+n+1)y=0$ | $\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ $\cdot\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}$ $\cdot\left(1+z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\beta}$ |
| ${}^{(\alpha)}P_n$ | $(x^2-1)y''$ $+(2\alpha+2)xy'$ $-n(2\alpha+n+1)y=0$ | $\frac{2^{\alpha}}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ $\cdot\left(1-z+\sqrt{1-2xz+z^2}\right)^{-\alpha}$ |
| $P_n$ | $(x^2-1)y''+2xy'$ $-n(n+1)y=0$ | $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ |
| $T_n$ | $(x^2-1)y''+xy'$ $-n^2y=0$ | $\frac{1-xz}{1-2xz+z^2}$ |
| $U_n$ | $(x^2-1)y''+3xy'$ $-n(n+2)y=0$ | $\frac{1}{1-2xz+z^2}$ |
| ${}^{(\alpha)}L_n$ | $xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0$ | $(1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-xz(1-z)}$ |
| $L_n$ | $xy''+(1-x)y'+ny=0$ | $(1-z)^{-1}e^{-xz(1-z)}$ |
| $H_n$ | $y''-2xy'+2ny=0$ | $e^{z(2x-z)}$ |

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

(1) $x$ távolsága $x^2, x^3$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;
(2) 1 távolsága $\sin x, \cos x$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[-\pi,\pi]$-ben;
(3) $x^3$ távolsága $1, x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben;
(4) $x^3$ távolsága $x, x^2$ lineáris burkától $\mathbb{L}^2[0,1]$-ben.

| Egyéb összefüggések |
|---|
| $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \dfrac{\mathbf{\Gamma}(\alpha+n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha+n-k+1)} \dfrac{\mathbf{\Gamma}(\beta+n+1)}{\mathbf{\Gamma}(\beta+k+1)} (x-1)^{n-k}(x+1)^k,$ <br> $\dfrac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$ |
| ${}^{(k)}P_n(x) = 2^k \dfrac{(n+k)!}{(n+2k)!} \dfrac{d^k}{dx^k} {}^{(0)}P_{n+k}(x)$ |
| $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{2n-2k}{n} \binom{n}{k} x^{n-2k}$ <br> $= \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + i\sqrt{1-x^2} \cos t\right)^n dt$ |
| $T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \dfrac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} x^{n-2k}$ <br> $= \dfrac{1}{2}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n$ |
| $\dfrac{d}{dx} T_n(x) = nU_{n-1}(x),$ <br> $T_n(x) = xT_{n-1}(x) - (1-x^2)U_{n-2}(x),$ <br> $U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x)$ |
| ${}^{(\alpha)}L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \binom{n+\alpha}{k} x^{n-k},$ <br> $\dfrac{d}{dx} {}^{(\alpha)}L_n(x) = -{}^{(\alpha+1)}L_{n-1}(x)$ |
| $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \binom{n}{k} x^{n-k}$ |
| $\dfrac{d}{dx} H_n(x) = 2H_{n-1}(x)$ |

Táblázat: klasszikus ortogonális polinomok

→ **10.1.36. Feladat [10].** Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|;$

(2) $\sin^4 x;$

(3) $\operatorname{sgn}(\cos x)$;

(4) $(1-a^2)/(1-2a\cos x+a^2)$, $|a|<1$;

(5) $(1-a\cos x)/(1-2a\cos x+a^2)$, $|a|<1$;

(6) $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor$;

(7) $\lfloor 4x\rfloor - 3\lfloor 2x\rfloor + 2\lfloor x\rfloor$;

(8) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \, dx$;

(9) $x \mapsto \int_0^x \lfloor 4x\rfloor - 3\lfloor 2x\rfloor + 2\lfloor x\rfloor \, dx$;

(10) $\ln\big|\sin(x/2)\big|$.

Mely pontokban konvergens a Fourier-sor és mi az összege?

**10.1.37. Feladat [8].** Határozzuk meg az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sorát $]-\pi,\pi[$-n és vizsgáljuk meg a konvergenciáját:

(1) $xe^{x^2}$;

(2) $\operatorname{sgn}(x)(\pi-|x|)$;

(3) $x(\pi-|x|)$;

(4) $x^2$;

(5) $\big(\pi-\operatorname{sgn}(x)\big)^2$;

(6) $\operatorname{sgn}(x)\cos x$;

(7) $\big(1+\operatorname{sgn}(x)\big)\sin x$;

(8) $\cos ax$;

(9) $\sin ax$.

**10.1.38. Feladat [8].** Az alábbi függvények (klasszikus) Fourier-sora $]-\pi,\pi[$-n mely pontokban konvergens és mi az összege:

(1) $x\sin(1/x)$;

(2) $\sin(x)/x$.

**10.1.39. Feladat [7].** Legyen a $2\pi$ szerint periodikus $f$ függvény $[-\delta,\delta]$-n 1, egyébként 0 ($0<\delta<\pi$). Határozzuk meg a Fourier-sorát! Igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi-\delta}{2}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)^2}{n^2\delta} = \frac{\pi-\delta}{2}.$$

$\to$ **10.1.40. Feladat [7].** Határozzuk meg az egyenáramú komponens és a harmadik felharmonikus amplitúdójának arányát egyutas egyenirányításnál!

$\to$ **10.1.41. Feladat [7].** Határozzuk meg, hogy az egyenáramú komponens hanyadrészét adja a teljesítménynek kétutas egyenirányításnál!

→ **10.1.42. Feladat [7].** Szimmetrikus fűrészfog-feszültség integrálásával szinuszos jelalakot közelítünk. Határozzuk meg, hogy az alapharmonikus a teljes teljesítmény hanyadrészét képviseli!

**10.1.43. Feladat [9].** Hogyan változik egy gitárhang felharmonikus tartalma, attól függően, hogy a húrt hol pendítjük meg?

**10.1.44. Feladat [9].** Ortonormáljuk a megadott függvényrendszert a megadott súlyfüggvényre a megadott intervallumon:

(1) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty[$;

(2) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$;

(3) $1, x, x^2$, $\varrho(x) = \sin \pi x$, $x \in [0, 1]$.

# 10.2 Fourier-transzformáció

**10.2.1. A Fourier-sor és a Fourier-transzformáció kapcsolata.** A $]-\ell, \ell[$-en

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) e^{-\pi i n t/\ell} \, dt.$$

Ha bevezetjük az

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} \, dt$$

Fourier-transzformáltat, akkor azt kapjuk, hogy ha $\ell$ nagy, akkor

$$c_n \approx \frac{1}{2\ell} \widehat{f}\Big(\frac{n}{2\ell}\Big),$$

tehát

$$f(t) \approx \sum_n c_n e^{\pi i t n/\ell} \approx \sum_n \frac{1}{2\ell} \widehat{f}\Big(\frac{n}{2\ell}\Big) e^{\pi i t n/\ell} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\,\nu,$$

ez a Fourier-féle inverziós formula. A Parseval-egyenlőségből az adódik, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 \approx \int_{\ell}^{\ell} |f|^2 = 2\ell \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \frac{1}{2\ell} \Big| \widehat{f}\Big(\frac{n}{2\ell}\Big) \Big|^2 \approx \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}|^2.$$

**10.2.2. Fourier-transzformáció.** Ha $f$ az $\mathbb{R}$ valamely részhalmazán értelmezett függvény, és $x \in \mathbb{R}$, $0 \neq s \in \mathbb{R}$, akkor legyen az $f$ függvény $\tau_x f$ *eltolt*ja, $\sigma_s(f)$ *összehúzás*a és $\check{f}$ *megfordítás*a a

$$(\tau_x f)(t) = f(t - x), \quad \sigma_s(f)(t) = f(t/s) \quad \text{illetve} \quad \check{f}(t) = f(-t)$$

összefüggéssel értelmezve. Ha $\nu \in \mathbb{R}$, legyen $\mathbf{e}_\nu$ az

$$\mathbf{e}_\nu(t) = e^{2\pi i \nu t}, \quad \text{ha} \quad t \in \mathbb{R}$$

összefüggéssel definiálva. Ezeket a függvényeket *karakter*eknek nevezzük. A karakterek eleget tesznek az

$$\mathbf{e}_\nu(x+y) = \mathbf{e}_\nu(x)\mathbf{e}_\nu(y), \quad \text{ha} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

függvényegyenletnek, így $\mathbb{R}$ additív csoportját az egységnyi abszolút értékű komplex számok multiplikatív csoportjába képező folytonos homomorfizmusok. Nyilván $\overline{\mathbf{e}}_\nu = \mathbf{e}_{-\nu}$.

Egy $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ függvény *Fourier-transzformált*ját az

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\mathbf{e}}_\nu(t)\,dt$$

összefüggéssel értelmezzük. Megjegyezzük, hogy sok könyv az

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \int f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

függvényt, vagy ennek $1/(2\pi)$ illetve $1/\sqrt{2\pi}$-szeresét nevezi Fourier-transzformáltnak. Ennél a jelölésnél $\omega$ fizikai jelentése körfrekvencia, míg a mi jelölésünknél $\nu$ frekvencia. A Fourier-transzformált egyszerű kapcsolatban van az $s \mapsto \int f(t)e^{-st}\,dt$ *Laplace-transzformált*tal is, hiszen:

$$\hat{f}\left(\frac{s}{2\pi i}\right) = \int f(t)e^{-st}\,dt.$$

Nyilván

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos 2\pi\nu t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin 2\pi\nu t\,dt.$$

A jobb oldali első integrál az $f$ *koszinusz transzformált*ját, a második pedig az $f$ *szinusz transzformált*ját definiálja. Nyilván, ha $f$ páratlan függvény, akkor a koszinusz, ha pedig páros függvény, akkor a szinusz transzformált azonosan nulla. Mivel az $f$ függvény az $(f+\check{f})/2$ páros és az $(f-\check{f})/2$ páratlan függvények összege, a koszinusz transzformáltat csak páros, a szinusz transzformáltat csak páratlan függvény esetén célszerű használni, és ekkor

$$\nu \mapsto 2\int_0^\infty f(t)\cos 2\pi\nu t\,dt \quad \text{illetve} \quad \nu \mapsto 2\int_0^\infty f(t)\sin 2\pi\nu t\,dt$$

alakba írhatók. A definícióból látszik, hogy a koszinusz transzformált páros, a szinusz transzformált pedig páratlan függvény, így értékeiket elég nemnegatív $\nu$-re ismerni. Előnyük, hogy valós értékű függvények esetén valósak. Mivel a fentiek alapján kifejezhetők $f$ és $\check{f}$ Fourier-transzformáltjaival, a továbbiakban nem foglalkozunk velük.

A definícióból azonnal következik, hogy a Fourier-transzformáció lineáris leképezés és

(1) $|\hat{f}| \le \|f\|_1$;

(2) $\overline{\hat{f}} = \check{\bar{\hat{f}}}$ (konjugálás);

(3) $(\tau_x f)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\hat{f}$ (eltolás);

(4) $(\mathbf{e}_x f)\hat{} = \tau_x\hat{f}$ (modulálás);

(5) $(\sigma_s(f))\hat{}= |s|\sigma_{1/s}(\hat{f})$ (nyújtás);

(6) $\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$ (a Fourier-transzformáció áthelyezése).

Egy metrikus téren értelmezett, skalár értékű $h$ függvényre azt mondjuk, hogy *eltűnik a végtelenben*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $K$ kompakt halmaz, hogy $|f| < \varepsilon$ a $K$ komplementerén.

A Fourier-transzformált nevezetes tulajdonsága, hogy eltűnik a végtelenben.

**10.2.3. Tétel.** *Ha $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R};\mathbb{C})$ és minden $n \leq m$ esetén $f^{(n)}$ integrálható, akkor $\nu \mapsto \hat{f}(\nu)|\nu|^m$ eltűnik a végtelenben, és $f^{(n)}$ Fourier-transzformáltja a $\nu \mapsto (2\pi i\nu)^n\hat{f}(\nu)$ függvény.*

Az állítást nem nehéz megjegyezni: $f^{(n)}$ Fourier-transzformáltját felírva és formálisan parciálisan integrálva ez az összefüggés adódik.

**Bizonyítás.** Elég a első deriváltat vizsgálnunk, mert az általános eset teljes indukcióval adódik. Mivel $f'$ integrálható,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt,$$

így léteznek a

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) \quad \text{és} \quad \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

határértékek. Ezek a határértékek csak nullák lehetnek, mivel $t \mapsto f(t)$ integrálható. Így parciális integrálással minden $n > 0$-ra

$$\int_{-n}^{n} e^{-2\pi i\nu t} f'(t)\,dt = \left[e^{-2\pi i\nu t} f(t)\right]_{-n}^{n} + 2\pi i\nu \int_{-n}^{n} e^{-2\pi i\nu t} f(t)\,dt,$$

amiből Lebesgue tételét felhasználva határátmenettel

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\nu t} f'(t)\,dt = 2\pi i\nu \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\nu t} f(t)\,dt. \ \square$$

**10.2.4. Tétel.** *Legyen $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, és tegyük fel, hogy valamely $m \in \mathbb{N}$-re a $t \mapsto f(t)|t|^m$ függvény integrálható. Ekkor az $\hat{f}$ függvény $m$-szer folytonosan differenciálható és minden $n \leq m$-re $\hat{f}^{(n)}$ a*

$$t \mapsto (-2\pi i t)^n f(t)$$

*függvény Fourier-transzformáltja.*

Az állítást nem nehéz megjegyezni. A Fourier-transzformáltat felírva, és formálisan az integráljel mögött differenciálva, ez az összefüggés adódik.

**Bizonyítás.** Elég az első deriváltat vizsgálnunk, mert az általános eset teljes indukcióval adódik.

$$\frac{\hat{f}(\nu+\varepsilon)-\hat{f}(\nu)}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i t f(t) e^{-2\pi i \nu t} \frac{e^{-2\pi i t\varepsilon}-1}{-2\pi i t\varepsilon}\, dt.$$

A $t \mapsto tf(t)$ függvény integrálható. Felhasználva, hogy az

$$x \mapsto \frac{e^{-ix}-1}{-ix}$$

függvény korlátos $\mathbb{R}$-en, és 1-hez tart, ha $x \to 0$, Lebesgue tétele szerint $\hat{f}'$ létezik és

$$\hat{f}'(\nu) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi i t f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt. \ \square$$

**10.2.5. Tétel.** *Ha $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $(f*g)\hat{} = \hat{f}\hat{g}$.*

**Bizonyítás.** A Fubini-tételt felhasználva, minden $\nu \in \mathbb{R}$-re

$$\begin{aligned}(f*g)\hat{}(\nu) &= \int (f*g)\mathbf{e}_{-\nu} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\nu t} \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)\,dx\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_{\mathbb{R}} f(t-x) e^{-2\pi i \nu t}\,dt\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i\nu(x+y)}\,dy\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i\nu x} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \nu y}\,dy\,dx. \ \square\end{aligned}$$

**10.2.6. Lemma.** *A $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$, ha $t \in \mathbb{R}$ függvény Fourier-transzformáltja önmaga.*

**Bizonyítás.** Differenciálással kapjuk, hogy $\varphi'(t)+2\pi t\varphi(t) = 0$. Mivel $\hat{\varphi}$ is ugyanennek a differenciálegyenletnek tesz eleget, és $\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(t)\,dt = 1 = \varphi(0)$, a $\hat{\varphi}/\varphi$ hányados a nulla helyen 1 és a deriváltja azonosan nulla. $\square$

**10.2.7. Inverziós tétel.** *Ha $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, akkor $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ majdnem mindenütt.*

**Bizonyítás.** Az előző lemmában szereplő $\varphi$ függvénnyel legyen $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t/\varepsilon)/\varepsilon$. Ekkor

$$\begin{aligned}(f*\varphi_\varepsilon)(x) &= \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\,dy = \int f(x-y)\varphi(y/\varepsilon)/\varepsilon\,dy \\ &= \int f(x-y) \int \varphi(\varepsilon t) e^{-2\pi i y t}\,dt\,dy \\ &= \int \varphi(\varepsilon t) \int f(u) e^{-2\pi i t(x-u)}\,du\,dt \\ &= \int \varphi(\varepsilon t)\hat{f}(-t) e^{-2\pi i t x}\,dt = \int \varphi(\varepsilon\nu)\hat{f}(\nu) e^{-2\pi i\nu(-x)} d\,\nu.\end{aligned}$$

Egy $\varepsilon_k \downarrow 0$ sorozatra, mivel $\varphi(\varepsilon_k \nu) \to 1$, amint $k \to \infty$, Lebesgue tétele szerint a jobb oldal $\hat{\hat{f}}(-x)$-hez konvergál. Az $f_k = f * \varphi_{\varepsilon_k}$ jelöléssel, mivel a simitási tétel szerint $f_k \to f$ az $\mathbb{L}^1$ térben, a Fatou-lemmából

$$\int \left|(\hat{\hat{f}})\check{\ } - f\right| \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_k - f| = 0,$$

így $f = (\hat{\hat{f}})\check{\ }$ majdnem mindenütt. □

**10.2.8. Unicitási tétel.** *Ha $f, g \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ és $\hat{f} = \hat{g}$, akkor $f = g$ majdnem mindenütt.*

**Bizonyítás.** Mivel $(f - g)\hat{\ } = \hat{f} - \hat{g} = 0$, az előző tétel szerint $f = g$ majdnem mindenütt. □

**10.2.9. Tétel.** *Legyen $\mathcal{F}$ azon függények halmaza, amelyekre $f, \hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Az $f \mapsto \hat{f}$ Fourier-transzformáció kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{F}$-nek önmagára. Ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor $fg \in \mathcal{F}$, $f * g \in \mathcal{F}$, $(f * g)\hat{\ } = \hat{f}\hat{g}$, és $(fg)\hat{\ } = \hat{f} * \hat{g}$.*

**Bizonyítás.** Az inverziós tételből következik, hogy

$$f = \check{\check{f}} = (\check{f})\hat{\ } = \hat{\hat{\hat{f}}},$$

azaz a Fourier-transzformáció $\mathcal{F}$-et $\mathcal{F}$-re képezi le. Ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor az inverziós tétel szerint $g$ korlátos és folytonos, így $fg \in \mathbb{L}^1$ és $\hat{f}\hat{g} \in \mathbb{L}^1$, azaz $fg \in \mathcal{F}$ és $\hat{f}\hat{g} \in \mathcal{F}$. Azt már láttuk, hogy $(f*g)\hat{\ } = \hat{f}\hat{g} \in \mathcal{F}$. Alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, kapjuk, hogy $f * g \in \mathcal{F}$. Végül

$$(\hat{f} * \hat{g})\hat{\ } = \hat{\hat{f}}\hat{\hat{g}} = \check{f}\check{g} = (fg)\check{\ } = (fg)\hat{\hat{\hat{\ }}},$$

így mindkét oldalra alkalmazva a Fourier-transzformáció harmadik hatványát, $(fg)\hat{\ } = \hat{f} * \hat{g}$. □

**10.2.10. Plancherel-tétel.** *Egy és csak egy olyan lineáris és belső szorzat tartó leképezése létezik $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$-nek önmagára, amely az előző tételben szereplő $\mathcal{F}$-en megegyezik a Fourier-transzformációval.*

**Bizonyítás.** Ha $f \in \mathcal{F}$, akkor $f$ korlátos és folytonos, így $f\overline{f} = |f|^2$ integrálható, azaz $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Ha $f, g \in \mathcal{F}$, akkor a Fourier-transzformáció áthelyezésével $\int \hat{f}\,\overline{\hat{g}} = \int f\overline{g}$. Ebből $f \mapsto \hat{f}$ belső szorzat tartó leképezése $\mathcal{F}$-nek önmagára. Ha megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}$ sűrű $\mathbb{L}^2$-ben, ez a leképezés pontosan egyféleképpen terjeszthető ki egy $\mathbb{L}^2$-t önmagára képező izometriává. A simítási tétel után megmutattuk, hogy a kompakt tartójú $\mathcal{C}^\infty$-függvények sűrűek $\mathbb{L}^2$-ben. Ezek $\mathcal{F}$-ben vannak, hiszen egy kétszer folytonosan differenciálható $f$ függvény $\nu \mapsto \hat{f}(\nu)$ Fourier-transzformáltja $\nu^2$-tel, és így $1 + \nu^2$-tel szorozva is eltűnik a végtelenben, tehát abszolút értékben majorálja a $\nu \mapsto 1/(1 + \nu^2)$ integrálható függvény egy konstansszorosa. □

**10.2.11. Megjegyzés.** Ha $f \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, akkor kérdés, hogy az előző tétel által definiált transzformáció megegyezik-e az $\mathbb{L}^1$-beli Fourier-transzformációval? Legyen $f_n = f\xi_{[-n,n]}$. A simítási tétel szerint, az ottani jelölésekkel, ha $\omega$ kompakt tartójú $\mathcal{C}^\infty$-függvény, akkor — az előző bizonyítás szerint — $f_n * \omega_\varepsilon \in \mathcal{F}$ és $\varepsilon \downarrow 0$ esetén ezek a függvények $\mathbb{L}^1$-ben és $\mathbb{L}^2$-ben is $f_n$-hez tartanak. Innen a Fourier-transzformáltjuk egyenletesen tart $\hat{f}_n$-höz, és $\mathbb{L}^2$-ben is konvergens. Részsorozatra áttérve kapjuk, hogy $\hat{f}_n$ majdnem mindenütt megegyezik a Plancherel-tétel szerinti transzformálttal. Ha most $n \to +\infty$, akkor ugyanezzel a gondolatmenettel kapjuk, hogy $\hat{f}$ majdnem mindenütt megegyezik a Plancherel-tétel szerinti transzformálttal. Ennek alapján jogosan használhatjuk az utóbbira is az $\hat{f}$ jelölést. Akkor is ezt a jelölést fogjuk használni, ha csak $f \in \mathbb{L}^2$ teljesül. Mivel ekkor is $f_n \in \mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$, azt kapjuk, hogy a

$$\hat{f}_n(\nu) = \int_{-n}^{n} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt$$

függvényekre $\hat{f}_n \to \hat{f}$ az $\mathbb{L}^2$-térben, egy részsorozatra pedig majdnem mindenütt. Határátmenettel kapjuk, hogy az $\mathbb{L}^2$-beli Fourier-transzformáltra is érvényben maradnak az $\mathbb{L}^1$-beli transzformált definíciójánál felsorolt (2)–(6) tulajdonságok, valamint az inverziós tétel. Az unicitás benne van a Plancherel-tételben. A szorzat Fourier-transzformáltjára

$$\begin{aligned}(fg)\hat{}\,(\nu) &= \langle \mathbf{e}_{-\nu}f, \bar{g}\,\rangle = \big\langle (\mathbf{e}_{-\nu}f)\hat{}\,, \hat{\bar{g}}\,\big\rangle = \big\langle \tau_{-\nu}\hat{f}, \check{\hat{\bar{g}}}\,\big\rangle = \big\langle (\tau_{-\nu}\hat{f})\check{}\,, \hat{\bar{g}}\,\big\rangle \\ &= \int \hat{f}(\nu - x)\hat{g}(x)\,dx = (\hat{f} * \hat{g})(\nu).\end{aligned}$$

Innen

$$f * g = \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} * \hat{\hat{\hat{\hat{g}}}} = (\hat{\hat{\hat{f}}}\hat{\hat{\hat{g}}})\hat{}\,, \quad \text{ahonnan} \quad (f * g)\hat{} = (\check{\hat{f}} * \check{\hat{g}})\check{} = \hat{f}\hat{g},$$

tehát a konvolúció és a szorzat Fourier-transzformáltjára tanult tételek is érvényben maradnak.

**10.2.12. Többdimenziós Fourier-transzformáció.** Ha $\nu \in \mathbb{R}^k$, akkor legyen $\mathbf{e}_\nu$ az

$$\mathbf{e}_\nu(x) = e^{2\pi i\langle \nu, x\rangle}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}^k$$

összefüggéssel definiálva. Ezeket a függvényeket most is *karakter*eknek nevezzük. Egy $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^k; \mathbb{C})$ függvény $k$-dimenziós *Fourier-transzformált*ját az

$$\hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\bar{\mathbf{e}}_\nu(x)\,dx$$

összefüggéssel értelmezzük. Ez tulajdonképpen nem más, mint a változónként egymás után képzett Fourier-transzformált, így nem meglepő, hogy hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy dimenzióban.

**10.2.13. Feladat [7].** Határozzuk meg $[-1, 1]$ karakterisztikus függvényének Fourier-transzformáltját. Mutassuk meg, hogy nincs $\mathbb{L}^1$-ben, bár az impropriusz integrálja létezik!

**10.2.14. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sin(ax)/x\right)^2 = a\pi$.

**10.2.15. Feladat [7].** Legyen $f(x) = \cos(x)$, ha $|x| \leq \pi/2$, és nulla egyébként. Határozzuk meg a Fourier-transzformáltját!

**10.2.16. Feladat [7].** Legyen $f(x) = 1 + \cos(x)$, ha $|x| \leq \pi$, és nulla egyébként. Határozzuk meg a Fourier-transzformáltját!

**10.2.17. Feladat [7].** Legyen $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Határozzuk meg a Fourier-transzformáltját és a normanégyzetét!

# 11

# Komplex függvénytan

*A legrövidebb út két valós igazság között a komplexben vezet.*

*Jacques Hadamard*

Miután Euler felfedezte az exponenciális függvény és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolatot, megkezdődött a komplex függvénytan diadalútja. Laplace a Fourier-transzformáltat a változó komplex értékeire is kiterjeszti, ezzel a komplex függvénytan erős eszköz lesz (és mindmáig az marad) a matematikusok, fizikusok és mérnökök kezében. A komplex számok fogalmát Gauss tisztázza véglegesen, és bebizonyítja az algebra alaptételét. Ruffini (1765–1822) és Abel (1802–1829) bebizonyítják a négynél magasabb fokú általános algebrai egyenletek gyökjelekkel való megoldhatatlanságát. Munkájukban Euler és Lagrange ötleteit is használják, akik az egyenletek megoldóképlete és a gyökök permutációi közötti kapcsolatot felfedezték és vizsgálták. A kérdéskört a zseniális Galois (1811–1832) tisztázta, akinek gondolatai ma is élénken hatnak. Közben Cauchy bebizonyította a komplex függvénytan legfontosabb tételeit (integráltétel, reziduumtétel stb.). A komplex függvénytan harmóniája elbűvölte a matematikusokat. A zseniális Riemann a komplex függvénytan és a matematika többi ága, például a topológia között mély kapcsolatokat tárt fel, gondolatainak hatása napjainkig tart. A komplex számok és függvények alkalmazása ma igen széles körű. A számtalan matematikai alkalmazás mellett olyan egyszerű példáktól, mint a komplex impedanciák használata a mérnöki gyakorlatban, az első repülőgépszárny tervezésén (Zsukovszkij-profil) keresztül egészen a mai fizikai térelméletekig számtalan hivatkozás lehetséges.

Itt a hangsúly az elmélet legegyszerűbb, de hatékony eszközöket nyújtó tárgyalásán van. Először tisztázzuk az analitikus függvények alapvető tulajdonságait. A görbe menti integrálnál tanult tételekből kapjuk a Cauchy-féle alaptételt, abból pedig a komplex függvénytan holomorf és meromorf függvényekkel kapcsolatos alapvető eredményeit. Mellőztem a Riemann-felületek fogalmát, de a Riemann-féle számgömb és a törtlineáris leképezések szerepelnek.

## 11.1 Holomorf függvények

*Riemann megmutatta nekünk, hogy a bizonyításokhoz könnyebben eljuthatunk gondolatokkal, mint hosszú számításokkal.*

*David Hilbert (1897)*

**11.1.1. Definíció.** *Komplex függvény* alatt a komplex számok testének valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvényt fogunk érteni. (A komplex függvénytan legtöbb tétele érvényben marad $\mathbb{C}^n$-beli értékű függvényekre is. Az összes definíciót, tételt és bizonyítást úgy fogalmaztuk, hogy változatlanul érvényes, ha komplex függvény alatt a komplex sík valamely részhalmazát $\mathbb{C}^n$-be leképező függvényt értünk, és a hatványsor definíciójában azt tesszük fel, hogy az együtthatók $\mathbb{C}^n$ elemei. Ha csak komplex értékű függvényekre gondolunk, akkor azt kifejezetten mondani fogjuk.)

Ismerjük a komplex számokat, komplex szám argumentumát és trigonometrikus alakját. A komplex függvények folytonosságáról, differenciálhatóságáról, sorok konvergenciájáról és abszolút konvergenciájáról is tanultunk már. Ismertek a hatványsor, konvergenciasugár, konvergenciatartomány, sorok és hatványsorok szorzata, analitikusság, exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvények és tulajdonságaik, hatványsorok differenciálása és integrálása, Taylor-tétel, komplex logaritmus, komplex szám komplex kitevős hatványa.

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy halmaz, és $f$ egy $D$-n értelmezett komplex függvény. Ha $f$ a $D$ minden pontjában differenciálható (persze ekkor $D$ nyílt), akkor azt mondjuk, hogy $f$ *holomorf* $D$-n. Ha egy függvény az egész síkon holomorf, akkor *egész függvény*nek nevezzük. Ha $f$ holomorf $D$-n és $f' = g$, akkor azt is mondjuk, hogy $f$ a $g$ *primitív függvény*e.

Emlékeztetünk rá, hogy az $f$ komplex függvény pontosan akkor differenciálható $c$-ben, ha $\varepsilon(z,c) = f(z) - f(c) - (z-c)f'(c)$ jelöléssel $\varepsilon(z,c)/(z-c) \to 0$, ha $z \to c$ (5.1.16 segédtétel). Így egy differenciálható komplex változós, komplex értékű függvény, ha egy pontban a deriváltja nem nulla, akkor lokálisan egy komplex számmal (a deriválttal) való szorzással közelíthető, tehát a pont egy környezetében közelítőleg egy nagyítás (vagy kicsinyítés) és egy forgatás összetétele, azaz lokálisan körüljárási irány és szögtartó (konform).

$\star$ **11.1.2. Megjegyzés.** A komplex függvénytan egyik legfontosabb és legmeglepőbb tétele szerint minden holomorf függvény analitikus (ez nagyon eltér a valós változós esettől: ott még végtelen sokszor differenciálható függvény sem analitikus, és még az sem biztos, hogy a derivált függvény folytonos). Bár ennek az eredménynek a bizonyításához csak később jutunk el, ismerete segít jobban megérteni a tételeket és kiválasztani a legrövidebb bizonyításokat.

Néhány állítást analitikus függvényekre bizonyítunk be. További analitikus függvényekre vonatkozó állítások is bizonyíthatók, például, hogy analitikus függvények hányadosa is analitikus (ha a nevező nem nulla), analitikus függvények összetétele is analitikus stb. Mindezekre az állításokra azonban nem lesz szükség, mert a komplex analitikus függvényekről kiderül, hogy megegyeznek a holomorf függvényekkel, amelyekre a fentiek triviálisan fennállnak, a valós analitikus függvényeket pedig hatványsorukkal kiterjeszthetjük a komplex sík egy nyílt részhalmazára, és az analitikus folytatás elve szerint (lásd alább) ez a kiterjesztés lényegében egyértelmű.

$\to$ **11.1.3. Feladat [7].** Ábrázoljuk a komplex exponenciális függvényt!

**11.1.4. Az inverz függvény differenciálási szabálya komplexben.** *Ha $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ folytonosan differenciálható függvény, $f'(c) \neq 0$, akkor van olyan a $c$ pontot tartalmazó $U$ nyílt halmazt, amelyet $f$ egy $V$ nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le és $V$-n az $f$ inverze is differenciálható. Ha $x \in U$, $y = f(x)$, akkor*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

**Bizonyítás.** Az állítás az $n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ speciális esete a $\mathbb{K}^n$-beli inverz függvény tételnek. $\square$

**11.1.5. Következmény.** *Ha $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ és $w \in \mathbb{C}$, akkor $\ln' z = 1/z$ és $z \mapsto z^w$ deriváltja $z \mapsto wz^{w-1}$.*

**Bizonyítás.**
$$\ln'(z) = \frac{1}{\exp'(\ln z)} = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}$$
és
$$(z^w)' = \big(\exp(w \ln z)\big)' = \exp(w \ln z)\frac{w}{z} = wz^{w-1}. \ \square$$

**11.1.6. Tétel.** *A $\Re(z) = x$, $\Im(z) = y$, $\Re(c) = a$, $\Im(c) = b$ jelölésekkel, a $z \mapsto f(z)$ komplex függvény pontosan akkor differenciálható a $c$ pontban, ha mint kétváltozós valós függvény differenciálható az $(a, b)$ pontban és $f_x(a, b) + if_y(a, b) = 0$ is teljesül. Ekkor $f'(c) = f_x(a, b)$.*

Az $f_x(a, b) + if_y(a, b) = 0$ feltételt gyakran formálisan a $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ alakban írják, mert $x = (z+\overline{z})/2$, $y = (z-\overline{z})/(2i)$ felhasználásával formálisan (mintha $z$ és $\overline{z}$ függetlenek lennének)
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

**Bizonyítás.** Feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Az $f$ mint komplex függvény akkor differenciálható, ha egy lineáris rész és egy maradéktag összegeként írható, úgy, hogy a maradéktag $|z|$-kel osztva is nullához tart, ha $z \to 0$. Ekkor $f$, mint kétváltozós valós függvény is differenciálható, mert komplex lineáris függvény valós lineáris is.

Megfordítva, ha $f$ differenciálható, mint kétváltozós valós függvény, akkor felírható egy maradéktag, amely még $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$-kel osztva is nullához tart, és egy lineáris rész összegeként. A lineáris rész
$$(x, y) \mapsto f_x x + f_y y = (f_x - if_y)\frac{z}{2} + (f_x + if_y)\frac{\overline{z}}{2}.$$
Ennek az összegnek az első tagja komplex lineáris $z$-ben, de ha $f_x + if_y \neq 0$, akkor második nem; valóban, a komplex homogenitás nem teljesül: legyen $z = 1$ és $z = i$. Így $f$ pontosan akkor differenciálható, mint komplex függvény, ha $f_x + if_y = 0$, és ekkor $-if_y = f_x$ miatt deriváltja $z \mapsto f_x z$. $\square$

**11.1.7. Cauchy–Riemann-egyenletek.** Ha $u$ és $v$ kétváltozós valós értékű valós függvények úgy, hogy
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$
akkor az előző tétel úgy fogalmazható, hogy az $f$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható a $c$ pontban, ha $u$ és $v$ differenciálhatóak $(a, b)$-ben, továbbá fennállnak az $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$ Cauchy–Riemann-egyenletek; ekkor
$$f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b).$$
Egy differenciálható kétdimenziós vektormező tehát pontosan akkor felel meg komplex differenciálható függvénynek, ha a derivált mátrixa az $f'(c)$ komplex számmal való szorzás mátrixa, azaz ha
$$\begin{pmatrix} u_x(a, b) & u_y(a, b) \\ v_x(a, b) & v_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re f'(c) & -\Im f'(c) \\ \Im f'(c) & \Re f'(c) \end{pmatrix}.$$

A Cauchy–Riemann-egyenletek geometriai jelentése, hogy $\nabla v$ a $\nabla u$-nak $\pi/2$-vel való elforgatásával kapható. Innen $u$ és $v$ szintvonalai merőlegesek egymásra, mert a szintvonalak merőlegesek a gradiensekre.

**11.1.8. A zérushelyek izoláltságának elve.** *Ha az*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

*hatványsor konvergenciatartománya nem üres (azaz az $R$ konvergenciasugár pozitív), pontjaiban $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$, és nem minden $a_n$ nulla, akkor van olyan $0 < r < R$, hogy $0 < |z-c| < r$ esetén $f(z) \neq 0$.*

**Bizonyítás.** Legyen $k$ az a legkisebb természetes szám, amelyre $a_k \neq 0$. Ekkor $f(z) = (z-c)^k g(z)$, ahol

$$g(z) = a_k + a_{k+1}(z-c) + a_{k+2}(z-c)^2 + \cdots;$$

a $g$ sora pontosan azokban a $z$ pontokban konvergens, amelyekben $f$ sora. Mivel $g$ folytonos és $g(c) = a_k \neq 0$, van olyan $r > 0$, hogy $g(z) \neq 0$, ha $|z-c| < r$. $\square$

**11.1.9. Az analitikus folytatás elve.** *Legyen $D \subset \mathbb{K}$ egy tartomány, $f, g$ analitikus függvények $D$-n, amelyek $D$ egy végtelen kompakt részhalmazán megegyeznek. Ekkor $f(z) = g(z)$ minden $z \in D$-re.*

**Bizonyítás.** Ha $z, z_n \in D$, $z_n \neq z$, $z_n \to z$ és $f(z_n) = g(z_n)$, akkor $z$ nem izolált zérushelye $f - g$-nek, így $f$ és $g$ megegyeznek $z$ egy egész környezetén. Az

$$\{z \in D \colon f(z) = g(z)\}$$

halmaz tehát nyílt és nem üres. Mivel $f$ és $g$ folytonossága miatt az $\{z \in D \colon f(z) \neq g(z)\}$ halmaz is nyílt, az utóbbi üres kell legyen. $\square$

**11.1.10. A nyílt leképezések tétele.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f \colon D \to \mathbb{C}$ analitikus függvény. Ha $f$ nem konstans, akkor $f$* nyílt leképezés, *azaz nyílt halmaz képe nyílt, és $f(D)$ tartomány, továbbá pontosan akkor létezik olyan környezete $c$-nek, amelyet $f$ az $f(c)$ egy környezetét tartalmazó nyílt halmazra kölcsönösen egyértelműen képez le, ha $f'(c) \neq 0$.*

**Bizonyítás.** Ha $f(u), f(v) \in D$ és $\gamma$ egy $D$-beli görbe, amelynek kezdőpontja $u$, végpontja $v$, akkor $f \circ \gamma$ egy $f(D)$-beli görbe, amelynek kezdőpontja $f(u)$, végpontja $f(v)$. Ha még megmutatjuk, hogy bármely $c \in D$-nek van olyan környezete, amelynek $f$ általi képe tartalmazza $f(c)$ egy környezetét, kapjuk, hogy $f$ nyílt leképezés és így $f(D)$ tartomány. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $c = 0$ és $f(c) = 0$. Mivel az analitikus folytatás elve szerint $f$ nem lehet lokálisan konstans, az origó egy környezetében felírható

$$z \mapsto z^m(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots) = a_m z^m h(z)$$

alakban, ahol $h$ egy hatványsor összege, $h(0) = 1$. Ha $A = a_m^{1/m}$, akkor az origó egy környezetében

$$f(z) = \left(Az\big(h(z)\big)^{1/m}\right)^m,$$

és $z \mapsto Az\big(h(z)\big)^{1/m}$ deriváltja az origóban $A \neq 0$. Az inverz függvény tétel szerint ez a leképezés — így $f$ is — nyílt leképezés. Ezt felhasználva kapjuk, hogy az $f$ pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű a 0 egy környezetében, ha $m = 1$. $\square$

**11.1.11. Következmény: Maximumelv.** *Legyen $f\colon D \to \mathbb{C}$ analitikus a $D \subset \mathbb{C}$ tartományon. Ha $|f|$-nek van lokális maximuma $D$-ben, akkor $f$ konstans.*

**Bizonyítás.** Ellenkező esetben $f$ a $c$ lokális maximumhely egy környezetét $f(c)$ egy környezetét tartalmazó halmazra képezné le, ami ellentmondás. $\square$

→ **11.1.12. Feladat [2].** Ha $z \in \mathbb{C}$ és $0 < k \in \mathbb{N}$, határozzuk meg mindazokat a $w$ komplex számokat, amelyekre $w^k = z$. Mi ezek kapcsolata $z^{1/k}$-val?

→ **11.1.13. Feladat [1].** A $\sin z/z$, $(1-\cos z)/z^2$, $(e^z-1)/z$, $\ln(1+z)/z$ függvényeket hatványsor segítségével értelmezzük ott is, ahol a nevező eltűnik!

→ **11.1.14. Feladat [5].** Differenciálhatóak-e a $z \mapsto \overline{z}$, $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|$, $z \mapsto |z|^2$, $z \mapsto ze^{\overline{z}}$ függvények?

→ **11.1.15. Feladat [5].** Van-e $z^k$-nak primitív függvénye ($k \in \mathbb{Z}$)?

→ **11.1.16. Feladat [1].** Igaz-e, hogy $\ln(zw) = \ln z + \ln w$, ha $z, w \neq 0$?

→ **11.1.17. Feladat [5].** Határozzuk meg az alábbi leképezések értelmezési tartományát, értékkészletét, inverzét:

(1) $z \mapsto az$;

(2) $z \mapsto b + z$;

(3) $z \mapsto 1/z$;

(4) $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ (leképezés *törtlineáris leképezés*).

Adjuk meg az (1), (2), (3) típusú leképezések geometriai jelentését. Bizonyítsuk be, hogy a törtlineáris leképezések (1), (2) és (3) típusú leképezések összetevésével állíthatók elő!

**11.1.18. Feladat [6].** A $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ komplex számok *kettősviszony*a a

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \bigg/ \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

szám. Bizonyítsuk be, hogy törtlineáris leképezés megőrzi a kettősviszonyt!

**11.1.19. Feladat [7].** Az előző feladat felhasználásával bizonyítsuk be, hogy ha $z_1$, $z_2$, $z_3$, valamint $w_1$, $w_2$, $w_3$ különböző komplex számok, akkor pontosan egy olyan törtlineáris $z \mapsto w$ leképezés van, amelynél $z_1$, $z_2$, $z_3$ képe rendre $w_1$, $w_2$, $w_3$.

**11.1.20. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy a $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ komplex számok kettősviszonya akkor és csak akkor valós, ha egy körön, vagy egy egyenesen vannak, így törtlineáris leképezés „körtartó”!

**11.1.21. Riemann-felületek.** Törtlineáris leképezések vizsgálatánál érdemes a bővített komplex számokat tekinteni. Ekkor a $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ leképezésnél $-d/c$ képe $\infty$, és a $\infty$ képe $a/c$. Az így kiegészített komplex síkot gyakran *Riemann-féle számgömb*nek nevezzük. A Riemann-féle számgömb sok más esetben is hasznos, és más, „többrétű” leképezések vizsgálatánál a komplex sík más általánosításai, úgynevezett *Riemann-felület*ek is fontos szerepet játszanak. Mivel ezen kérdések elegáns tárgyalása a komplex differenciálható sokaságok segítségével oldható meg, itt nem foglalkozunk velük.

**11.1.22. Feladat [14].** Egy pontnak egy *körre vett tükörkép*e az a pont, amely a kör középpontjából induló, az adott ponton átmenő félegyenesen van, és a középponttól vett távolságának valamint az adott pont középponttól vett távolságának a szorzata a kör sugarának négyzete. (A középpont tükörképe a $\infty$.) Bizonyítsuk be, hogy a $C$ körre $w$ pontosan akkor a $z$ tükörképe, ha minden, a $z$-n és $w$-n átmenő kör merőleges $C$-re! Mutassuk meg, hogy törtlineáris leképezésnél a $C$-re tükrös pontpárok képe a $C$ képére tükrös!

**11.1.23. Feladat [6].** Határozzuk meg egy törtlineáris leképezés fixpontjait!

**11.1.24. Feladat [8].** Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek a felső félsíkot az egységkörlapra képezik le!

**11.1.25. Feladat [8].** Keressünk törtlineáris leképezéseket, amelyek az egységkörlapot önmagára képezik le! Határozzuk meg az összes ilyen törtlineáris leképezést!

→ **11.1.26. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto (z + 1/z)/2$ függvényt!

→ **11.1.27. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto z^a$, $a \in \mathbb{C}$ függvényt!

→ **11.1.28. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket! Inverzeik rendre arcsin, arccos, arctg, arsh, arch, arth:

(1) $\sin z$, $|\Re(z)| < \pi/2$;

(2) $\cos z$, $0 < \Re(z) < \pi$;

(3) $\operatorname{tg} z$, $|\Re(z)| < \pi/2$;

(4) $\operatorname{sh} z$, $|\Im(z)| < \pi/2$;

(5) $\chi z$, $0 < \Im(z) < \pi$;

(6) $\operatorname{th} z$, $|\Im(z)| < \pi/2$.

**11.1.29. Feladat [9].** Vizsgáljuk meg a $\operatorname{cosec} = 1/\sin$ függvényt a $|\Re(z)| < \pi/2$, $z \neq 0$ halmazon!

**11.1.30. Feladat [10].** Vizsgáljuk a $z \mapsto z/(1-z)^2$ *Koebe-függvény*t az egységkörön!

**11.1.31. Cauchy-féle alaptétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy nyílt halmaz, $f$ egy holomorf függvény $D$-n. Ha a $\gamma_0$ és $\gamma_1$ zárt pályák $D$-ben homotópok, akkor*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

**Bizonyítás.** Ez a fontos tétel a mi felépítésünkben következik a 8.4.39 tételből és a bizonyítás lényegét tartalmazó 8.4.42 megjegyzésből. □

**11.1.32. Tétel.** *Legyen $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ egy pálya, és $f$ egy $\gamma(I)$-n folytonos komplex függvény. Ekkor a*

$$g(z) = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

*összefüggéssel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-n definiált függvény analitikus. Pontosabban, minden $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pontra az*

$$a_n = \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw$$

*együtthatókkal képzett $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ hatványsor konvergens minden $c$ középpontú $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-ben fekvő $D$ nyílt körlapon, és összege $g$.*

**Bizonyítás.** Ha $r$ az $c$ és $\gamma(I)$ távolsága, és $|z-c| \le qr$, ahol $0 < q < 1$, akkor minden $w \in \gamma(I)$-re

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-c)(1-(z-c)/(w-c))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}},$$

amiből

$$\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}.$$

Ha $\bigl|f(w)\bigr| \le M$ a $\gamma(I)$-n, akkor

$$\left|\frac{f(w)(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}}\right| \le \frac{M}{r} q^n,$$

így a sor egyenletesen konvergens $\gamma(I)$-n. Tagonkénti integrálással

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

és a jobb oldali sor $|z-c| \le qr$ esetén konvergens. □

**11.1.33. Előkészítő példa.** Legyen $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, és $\gamma(t) = c + e^{2\pi i n t}$, $t \in [0,1]$. Ekkor

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-c} = \int_0^1 \frac{2\pi i n e^{2\pi i n t}}{e^{2\pi i n t}}\, dt = 2\pi i n,$$

azaz az integrál megadja, hogy a körpálya (előjelesen) hányszor kerüli meg a középpontot.

**11.1.34. Definíció.** Ha egy $c$ középpontú körpályával $\mathbb{C}\setminus\{c\}$-ben homotóp pályát, vagy ez utóbbival ekvivalens pályát veszünk, az is ugyanannyiszor kerüli meg a $c$ pontot. Mivel a fenti integrál ilyen pályára való átéréssel a Cauchy-féle alaptétel szerint nem változik, az előző példa lehetőséget ad arra, hogy definiáljuk egy zárt pályának egy pontra vonatkozó *körüljárási szám*át, idegen szóval indexét. Legyen $c \in \mathbb{C}$ és $\gamma$ egy zárt pálya $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben. A *$\gamma$ pálya $c$ pontra vonatkozó indexét* a

$$\operatorname{ind}(c, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-c}$$

összefüggéssel definiáljuk. A következő tétel azt mutatja, hogy a definíció alapjául szolgáló észrevételnek a megfordítása is igaz. A bizonyításhoz azonban szükségünk lesz egy lemmára.

⋆ **11.1.35. Lemma.** *Legyen $D \subset \mathbb{K}^n$ nyílt halmaz és $\gamma\colon [a,b] \to D$ egy zárt görbe. Ekkor létezik olyan $\delta$ szakaszonként lineáris pálya, amely homotóp $\gamma$-val $D$-ben.*

**Bizonyítás.** Mivel $B = \gamma([a,b])$ kompakt, van olyan $r > 0$, hogy a $B$ zárt $r$-környezete $D$-ben van. Mivel $\gamma$ egyenletesen folytonos, van olyan $\eta > 0$, hogy $|t - t'| \le \eta$ esetén $\bigl|\gamma(t) - \gamma(t')\bigr| < r$. Legyen $a = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = b$ egy $\eta$-nál finomabb beosztása $[a,b]$-nek, és legyen a $\gamma$ szakaszonként lineáris közelítése a

$$\delta(t) = \gamma(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})), \quad \text{ha} \quad t_{j-1} \le t \le t_j$$

pálya, továbbá legyen a homotópiát definiáló leképezés $\varphi(t,\xi) = \xi\delta(t) + (1-\xi)\gamma(t)$. Ekkor $t_{j-1} \le t \le t_j$, $1 \le j \le n$, $0 \le \xi \le 1$ esetén $\varphi(t,\xi)$ a $\gamma(t_j)$ körüli $r$ sugarú nyílt gömbben van. □

**11.1.36. Tétel.** *Ha $\gamma\colon I \to \mathbb{C}$ egy zárt pálya és $c \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$, akkor* $\operatorname{ind}(c,\gamma)$ *egész. Ha $n = \operatorname{ind}(c,\gamma)$, akkor $\gamma$ egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben a $t \mapsto e^{2\pi int}$, $t \in [0,1]$ körpályával homotóp pályával ekvivalens. Ha $D \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ egy tartomány, akkor $c \mapsto \operatorname{ind}(c,\gamma)$ konstans $D$-n. Ha $\gamma(I)$ benne van egy $B$ egyszeresen összefüggő tartományban, akkor ez a konstans nulla $\mathbb{C} \setminus B$-n.*

⋆ **Bizonyítás.** Ekvivalens pályával helyettesítve $\gamma$-t, feltehetjük, hogy a $[0,1]$ intervallumon van értelmezve. Az előző lemma szerint azt is feltehetjük, hogy $\gamma$ szakaszonként sima. Legyen

$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - c}\, ds \quad \text{és} \quad h(t) = (\gamma(t) - c)e^{-g(t)},$$

ha $0 \le t \le 1$. Ekkor $g(1) = 2\pi in$, a $h$ szakaszonként sima, és véges sok pont kivételével

$$h'(t) = \gamma'(t)e^{-g(t)} + (\gamma(t) - c)e^{-g(t)}\frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - c} = 0,$$

így $h$ konstans. Ebből, $h(0) = \gamma(0) - c$ miatt,

$$e^{g(t)} = \frac{\gamma(t) - c}{\gamma(0) - c}.$$

Mivel $\gamma(1) = \gamma(0)$, $\exp\bigl(g(1)\bigr) = 1$, amiből $n$, a körüljárási szám, egész. Vegyük észre, hogy

$$(t,\xi) \mapsto c + \bigl(\gamma(0) - c\bigr)e^{(1-\xi)g(t) + \xi t g(1)}$$

egy $\mathbb{C} \setminus \{c\}$-beli homotópiája $\gamma$-nak a $t \mapsto c + \bigl(\gamma(0) - c\bigr)e^{2\pi int}$ körpályába.

Mivel az integrállal adott $c \mapsto \operatorname{ind}(c,\gamma)$ leképezés analitikus, folytonos is. Mivel $D$ összefüggő, $\operatorname{ind}(c,\gamma)$ pedig csak egész értéket vehet fel, csak konstans lehet. Végül, ha $\gamma(I)$ benne van valamely $B$ egyszeresen összefüggő tartományban, és $c \in \mathbb{C} \setminus B$, akkor $\gamma$ összehúzható $B \subset \mathbb{C} \setminus \{c\}$-ben, így $\operatorname{ind}(c,\gamma) = 0$. □

**11.1.37. Feladat [7].** Adjunk meg olyan $\gamma$ pályát, amelyre minden $k$ természetes számhoz van olyan $z$ pont, hogy $\operatorname{ind}(z,\gamma) = k$.

→ **11.1.38. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx$$

integrált! [Integráljuk az $(e^{iz}-1)/(2iz)$ függvényt a 0 középpontú, $R$ sugarú körlap felső fele körül.]

→ **11.1.39. Feladat [8].** Számítsuk ki a

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos x^2\,dx, \qquad \lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin x^2\,dx$$

*Fresnel-féle integrál*okat! (Integráljuk az $e^{-z^2}$ függvényt egy 0, $R$, $Re^{\pi i/4}$ csúcsú, $R$ sugarú körcikk körül.)

⋆ **11.1.40. Feladat [9].** Legyen $\gamma$ egy pálya, $g$ holomorf komplex értékű függvény $\gamma$ értékkészletének egy környezetén, $f$ pedig folytonos komplex függvény $g\circ\gamma$ értékkészletén. Bizonyítsuk be a helyettesítéses integrálásra vonatkozó alábbi formulát:

$$\int_\gamma f(g(z))g'(z)\,dz = \int_{g\circ\gamma} f(w)\,dw.$$

**11.1.41. Tétel.** *Egy $D\subset\mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf $f$ függvény analitikus $D$-n. Ha $c\in D$, akkor az $f$ függvény $c$ körüli hatványsora konvergens minden $c$ középpontú $D$-beli nyílt körlapon.*

**Bizonyítás.** Válasszunk olyan $r>0$ számot, amelyre a $c$ középpontú $r$ sugarú zárt körlap benne van $D$-ben. Legyen $|z-c|<r$ és

$$g(w)=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}, \quad \text{ha} \quad w\neq z.$$

Legyen $\gamma_h(t)=hc+(1-h)z+hre^{it}$, ha $0\le t\le 2\pi$ és $0<h\le 1$. Megmutatjuk, hogy $\int_{\gamma_1} g(w)\,dw=0$. Nyilván $\gamma_h$ homotóp $\gamma_1$-gyel $D\setminus\{z\}$-ben, ha $0<h\le 1$, így

$$\int_{\gamma_h} g(w)\,dw=\int_{\gamma_1} g(w)\,dw,$$

mivel $g$ differenciálható $D\setminus\{z\}$-ben. Másrészt ha $h$ elég kicsi, akkor

$$\left|\int_{\gamma_h} g(w)\,dw\right| \le \Big(\big|f'(z)\big|+1\Big)2\pi hr\to 0,$$

mert $g(w)\to f'(z)$, ha $w\to z$. Ebből

$$0=\int_{\gamma_1} g(w)\,dw=\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw-\int_{\gamma_1}\frac{f(z)}{w-z}\,dw,$$

azaz

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw, \quad \text{ha} \quad |z-c|<r,$$

amiből a 11.1.32 tétel miatt következik az állítás. □

**11.1.42. Cauchy-féle integrálformulák.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egy egyszeresen összefüggő tartomány, és $f$ holomorf $D$-n. Ha $\gamma\colon I \to D$ egy zárt pálya, akkor minden $z \in D \setminus \gamma(I)$-re és $n \in \mathbb{N}$-re*

$$\operatorname{ind}(z,\gamma) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

A tétel leggyakrabban az $\operatorname{ind}(z,\gamma) = \pm 1$ esetben fogjuk használni.

**Bizonyítás.** Először legyen $n = 0$. A tétel azon múlik, hogy az integrálás áthelyezhető egy, a $z$ pont kis környezetében lévő, az eredetivel homotóp pályára, és erre az integrál $\approx f(z) \int dw/(w-z)$, de kényelmesebb ugyanúgy, mint az előző bizonyításban, egy segédfüggvénnyel dolgozni, ami lényegében most is az ottani segédfüggvény. Legyen

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad \text{ha} \quad w \neq z \quad \text{és} \quad g(z) = f'(z).$$

Egy $z$-hez elég közeli $w$-re

$$f(w) = f(z) + (w-z) f'(z) + \frac{(w-z)^2}{2!} f''(z) + \cdots,$$

így

$$g(w) = f'(z) + \frac{w-z}{2} f''(z) + \cdots,$$

tehát $g$ hatványsor összegfüggvénye $z$ közelében, így differenciálható $D$-n. A Cauchy-féle alaptételből, hasonlóan, mint az előző bizonyításban,

$$0 = \int_\gamma g(w)\, dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_\gamma \frac{dw}{w-z},$$

amiből következik az $n = 0$ eset. Az általános eset abból következik, hogy a

$$z \mapsto \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

függvény analitikus $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$-n, és egy analitikus függvény hatványsorának együtthatói kifejezhetők a deriváltakkal (lényegében a differenciálás és az integrálás felcserélhető), lásd a 11.1.32 tételt. □

**11.1.43. Morera tétele.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $f$ folytonos komplex függvény $D$-n. Ha minden $\gamma$ háromszög-pályára, amelynek értékkészlete az általa határolt háromszöglappal együtt $D$-ben van, $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$, akkor $f$ holomorf $D$-n.*

**Bizonyítás.** Az $f$-nek lokálisan van primitív függvénye, amely analitikus, így $f$ is analitikus. □

**11.1.44. Cauchy-egyenlőtlenségek.** *Tegyük fel, hogy $f$ holomorf a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon, $w \in D$, és az $w$ középpontú, $r > 0$ sugarú zárt $B$ körlap $D$-ben van. Ekkor $\left|f^{(n)}(w)\right| \leq Mn!/r^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ahol $M = \sup\left\{|f(z)| \colon z \in \partial B\right\}$.*

**Bizonyítás.** Legyen $\gamma(t) = w + re^{it}$, ha $0 \le t \le 2\pi$. Ekkor az előző tétel szerint

$$\left|f^{(n)}(w)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}. \ \square$$

**11.1.45. Liouville tétele.** *Legyen $f$ egy egész függvény. Ha $f$ korlátos, akkor konstans.*

**Bizonyítás.** Ha $|f| \le M$, $w \in \mathbb{C}$ és $r > 0$, akkor $\left|f'(w)\right| \le M/r \to 0$, ha $r \to \infty$. Így $f'(w) = 0$ mindenütt. $\square$

**11.1.46. Az algebra alaptétele.** *Minden legalább elsőfokú komplex polinomnak van zérushelye.*

**Bizonyítás.** Ellenkező esetben a $p$ polinom reciproka, $1/p$ egész függvény. Mivel ha $p$ foka $n$, akkor a

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|p(z)\right|/|z|^n$$

határérték véges, $\left|p(z)\right| \to \infty$, $1/\left|p(z)\right| \to 0$, ha $|z| \to \infty$. Így $1/p$ korlátos, tehát konstans. Mivel csak nulla lehet, ellentmondást kaptunk. $\square$

**11.1.47. Megjegyzés.** Polinomok gyöktényezős alakjának az általánosítása egész függvények Weierstrass-féle előállítása végtelen szorzatként. Lásd részletesebben Szőkefalvi-Nagy [54] jegyzetét.

**11.1.48. Feladat [7].** Határozzuk meg az arsh függvény MacLaurin-sorát!

⋆ **11.1.49. Schwarz-lemma.** *Legyen $f$ a nyílt komplex egységkörlap önmagába való analitikus leképezése, amelyre $f(0) = 0$. Ekkor $\left|f(z)\right| \le |z|$, és ha valamely $z \ne 0$ pontban egyenlőség teljesül, akkor $f(z) = cz$ (és persze $|c| = 1$).*

**Bizonyítás.** Az $f$ felírható $f(z) = zg(z)$ alakban, és $g$ is analitikus. Ha $0 < r < 1$, akkor $|z| = r$ esetén $\left|g(z)\right| \le 1/r$. A maximumelv miatt $\left|g(z)\right| \le 1/r$ teljesül $|z| \le r$ esetén is. Ebből $r \uparrow 1$ határátmenettel $|g| \le 1$ az egész nyílt körlapon, amiből kapjuk az egyenlőtlenséget. Ha valahol egyenlőség teljesül, akkor ott $|g|$-nek lokális maximuma van, így a maximumelv szerint konstans. $\square$

**11.1.50. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, és $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorf. Ha $u$, $v$ valós értékűek, és $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, akkor $u$ és $v$* harmonikusak *$D$-n, azaz $\Delta u \equiv 0$ és $\Delta v \equiv 0$.*

**Bizonyítás.** Az $f$ végtelen sokszor differenciálható, így $u$ és $v$ is végtelen sokszor differenciálhatóak. A Cauchy–Riemann-egyenletekből

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}, \quad u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy},$$

amiből a vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt $\Delta u = \Delta v = 0$. $\square$

**11.1.51. Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz, $u\colon D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Azt mondjuk, hogy $v$ az $u$ *harmonikus társa* $D$-n, ha $v\colon D \to \mathbb{R}$ és

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

holomorf $D$-n. Vegyük észre, hogy ekkor $-if(x+iy) = v(x,y) - iu(x,y)$, azaz ha $u$-nak $v$, akkor $v$-nek $-u$ harmonikus társa.

**11.1.52. Tétel.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $u: D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény. Ekkor $u$-nak létezik $D$-n harmonikus társa.*

A bizonyítás konstruktív, így a harmonikus társ meg is kereshető.

**Bizonyítás.** Legyen $g(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$. Ekkor $g$ holomorf, mert fennállnak az $u_{xx} = -u_{yy}$, $u_{xy} = u_{yx}$ Cauchy–Riemann-egyenletek, tehát $g$-nek van primitív függvénye. Legyen $G$ a $g$ egy primitív függvénye, és $G(x+iy) = w(x,y) + iv(x,y)$. Ekkor $v$ és $w$ végtelen sokszor differenciálhatóak, és $w_x = u_x$, $w_y = u_y$, vagyis $w - u$ konstans. Így

$$f(x+iy) = G(x+iy) - \big(w(x,y) - u(x,y)\big) = u(x,y) + iv(x,y)$$

holomorf. □

**11.1.53. Konform ekvivalencia.** Legyenek $D, E \subset \mathbb{C}$ tartományok. Azt mondjuk, hogy $f$ *konform leképezés*e $D$-nek $E$-re, ha $f$ homeomorfizmusa $D$-nek $E$-re, és $f$, $f^{-1}$ holomorfak. Ha létezik konform leképezése $D$-nek $E$-re, akkor azt mondjuk, hogy $D$ és $E$ *konform ekvivalens*ek.

Tartományok konform ekvivalenciáját gyakran használjuk arra, hogy az egyik tartomány ismert harmonikus függvényeivel harmonikus függvényeket „gyártsunk” a másik tartományon. Ilyenkor fontos az is, hogy a konform leképezés folytatható-e folytonosan a tartományok határára is? Erről durván azt mondhatjuk, hogy a konform leképezés „igyekszik annyira folytonos lenni a határon, amennyire csak lehet”. Részletesebben lásd Petruska [42] jegyzetét.

A Liouville-tételből következik, hogy az egész komplex sík nem képezhető le konform módon egy korlátos tartományra. A következő tétel azonban mutatja, hogy az egyszeresen összefüggő tartományok csak két ekvivalenciaosztályt alkotnak. Nem egyszeresen összefüggő tartományok körében a helyzet bonyolultabb.

**11.1.54. Riemann tétele.** *Ha $D, E \subset \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartományok, akkor konform ekvivalensek.*

**Bizonyítás.** Megtalálható Szőkefalvi-Nagy [54] jegyzetében. □

**11.1.55. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy az $\ln(x^2 + y^2)$ harmonikus függvénynek nincs harmonikus társa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$-n!

**11.1.56. Feladat [8].** Keressük meg az alábbi függvények harmonikus társát:

(1) $x^2 - y^2 + 2x$;

(2) $e^x \cos y$;

(3) $\sin x \cosh y$.

→ **11.1.57. Feladat [8].** Egy síkbeli potenciálelméleti problémához tartozó *komplex potenciál*on egy olyan holomorf, komplex értékű függvényt értünk, amelynek képzetes része a potenciál. A potenciál szintvonalai az ekvipotenciális vonalak, a valós rész szintvonalai az erővonalak. Például $ki \ln z$ (ahol $k$ valós konstans) egy ponttöltés komplex potenciálja $\mathbb{C} \setminus \{x : x \le 0\}$-n. [Ez egy, a komplex síkra merőleges, végtelen hosszú vonaltöltés potenciáljának a keresztmetszete. Ha a vonal menti töltéssűrűség $q$, akkor a konstans $k = -q/(2\pi\varepsilon)$, ahol $\varepsilon$ a dielektromos állandó. Ha a $w = f(z)$ függvény a $z$ sík egy részhalmazát a $w$ sík egy részhalmazába viszi át, amin a komplex potenciál $w \mapsto p(w)$, akkor a $z$ síkban a megfelelő potenciál $z \mapsto p(f(z))$.] Ebből kiindulva, keressük meg ellenkező előjelű, egyenlő nagyságú töltések esetén a komplex potenciált az alábbi esetekben:

(1) két ponttöltés;

(2) egy körvezető és egy ponttöltés;

(3) két körvezető.

→ **11.1.58. Feladat [11].** Határozzuk meg a hőáramlást excentrikus csövek között, stacionárius esetben!

→ **11.1.59. Feladat [10].** Vizsgáljuk meg a $z \mapsto z + e^z$, $|\Im(z)| \leq \pi$ függvényt! Ezen függvény felhasználásával határozzuk meg egy „félsík kondenzátor" erőterét a kondenzátor szélén!

→ **11.1.60. Feladat [11].** Határozzuk meg két, egy síkban lévő, párhuzamos félsíkból álló kondenzátor erőterét!

→ **11.1.61. Feladat: Zsukovszkij-profil [10].**

(1) Vizsgáljuk meg a $z \mapsto (z-1)/(z+1)$, $z \mapsto z^2$ leképezéseket, és a $z \mapsto (z-2)/(z+2)$ leképezés inverzét!

(2) Számoljuk ki a fenti leképezések összetételét!

(3) Mi a képe a fenti leképezések összetételénél egy, a $-1$ és $1$ pontokon átmenő $C$ kör külsejének?

(4) Vizsgáljuk meg egy, a $C$ kört az 1 pontban érintő, nála nagyobb $C^*$ kör képét! (Zsukovszkij-profil. Kiszámolható a körülötte vett potenciálos áramlás, így a felhajtóerő is.)

**11.1.62. Feladat [10].** Képezzük le konform módon az alábbi tartományokat a nyílt egységkörre:

(1) $\{z\colon \Re(z) > 0, \Im(z) > 0\}$;

(2) $\mathbb{C} \setminus \{x\colon x \geq 0\}$;

(3) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \setminus [x, 1]$, ahol $-1 < x < 1$;

(4) $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} \setminus ([-1, -x] \cup [x, 1])$, ahol $0 < x < 1$;

(5) $\{z\colon \Im(z) > 0\} \setminus i[0, 1]$;

(6) $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, x] \cup [y, \infty[)$, ahol $x < 0 < y$;

(5) $\{z\colon -\pi < \Im(z) < \pi\} \setminus ]-\infty, 0]$.

⋆ **11.1.63. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy a nyílt egységkörlap önmagára való konform leképezései törtlineáris leképezések! [Először az $f(0) = 0$ esetre mutassuk meg, hogy $f(z) = cz$. Az általános esetben az origó képét vigyük vissza egy törtlineáris leképezéssel az origóba.]

⋆ **11.1.64. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy két, $\mathbb{C}$-től különböző egyszeresen összefüggő tartomány között létezik olyan konform ekvivalencia, amely egy adott pontot egy adott pontba visz, és ott a derivált adott argumentumú. Mutassuk meg, hogy ilyen mellékfeltételek mellett a konform leképezés már egyértelmű. (Vezessük vissza a problémát a nyílt egységkörlap önmagára történő leképezéseinek vizsgálatára.)

⋆ **11.1.65. Weierstrass tétele.** *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmazon holomorf függvények $f_n$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozata a $D$-n* lokálisan egyenletesen *konvergál az $f\colon D \to \mathbb{C}$ függvényhez, azaz minden pontnak van olyan környezete, amin a konvergencia egyenletes. Ekkor $f$ is holomorf, és $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ is teljesül minden $k \in \mathbb{N}^+$-ra a $D$-n lokálisan egyenletesen.*

**Bizonyítás.** Mivel $D$ minden pontjának van kompakt környezete, a lokálisan egyenletes konvergencia ekvivalens azzal, hogy a konvergencia a kompakt halmazokon egyenletes. Legyen $c \in D$, és válasszunk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre a $c$ középpontú, $r$ sugarú zárt körlap $D$-ben van. Legyen $\gamma(t) = c + re^{it}$, ha $0 \leq t \leq 2\pi$. Ekkor $|z - c| < r$ esetén

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{w - z}\, dw.$$

Rögzítve $z$-t, $\gamma$ értékkészletén

$$\frac{f_n(w)}{w - z} \to \frac{f(w)}{w - z}$$

egyenletesen, amiből

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

azaz $f$ analitikus.

Most legyen $C$ kompakt részhalmaza $D$-nek, és válasszunk olyan $r > 0$-t és $B \subset D$ kompakt halmazt, amelyre $B$ a $C$ minden pontjának $r$ sugarú zárt környezetét tartalmazza. Ha $z \in C$, akkor $z$ benne valamelyik ilyen környezetben, így a Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$\left|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| \leq \sup\Big\{\left|f_n(w) - f(w)\right|\colon w \in B\Big\} k!/r^k \to 0,$$

ha $n \to \infty$. □

**11.1.66. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy a $\zeta$ függvény analitikus a $\Re(z) > 1$ félsíkon!

## 11.2 Meromorf függvények

*A legtöbb magasabb matematikai fogalom, így a komplex számok, algebrák, lineáris operátorok, Borel-halmazok — e felsorolást szinte vég nélkül folytathatnánk — fogalmát úgy alkották meg, hogy azok alkalmas anyagként szolgáljanak, melyen a matematikus bemutathatja leleményességét és érzékét az elvont szépség iránt. ...*

*A komplex számok különösen találó példát szolgáltatnak a mondottakra. Semmiféle tapasztalat nem követeli, hogy e mennyiségeket bevezessük. Valóban, ha megkérdezünk egy matematikust, hogy indokolja meg érdeklődését a komplex számok iránt, rá fog mutatni — némi méltatlankodással hangjában — az egyenletek, a hatványsorok s általában az analitikus függvények elméletének sok szép tételére, melyek megfogalmazását a komplex számok bevezetése tette lehetővé. A matematikus nem hajlandó arra, hogy feladja érdeklődését szellemének e legszebb teljesítményei iránt.*

*Wigner Jenő (1959)*

**11.2.1. Laurent-sor.** *Legyen* $0 \le r < R \le \infty$, $c \in \mathbb{C}$, *és tegyük fel, hogy* $f$ *holomorf a* $D = \{z \colon r < |z-c| < R\}$ *körgyűrűn. Ekkor* $f$ *előállítható*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}$$

*alakban. Az első hatványsor konvergens* $|z-c| < R$ *esetén, a második függvénysor pedig* $|z-c| > r$ *esetén, így a körgyűrűn mindkettő konvergens. Az* $a_n$ *együtthatók egyértelműen meghatározottak és minden* $D$*-beli zárt* $\gamma$ *pályára*

$$\operatorname{ind}(c,\gamma) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw. \tag{1}$$

Az előállítást, nem teljesen korrekt módon,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

alakban is szokás írni.

⋆ **Bizonyítás.** Legyenek $z \in D$, $r', R' \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek úgy, hogy

$$r < r' < |z-c| < R' < R$$

teljesüljön, és legyen először

$$\gamma(t) = c + r' e^{it}, \quad \Gamma(t) = c + R' e^{it}, \quad \text{ha} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Mivel $\gamma$ és $\Gamma$ homotópok $D$-ben, és a

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w-z}, & \text{ha } w \ne z, \\ f'(z), & \text{ha } w = z, \end{cases}$$

függvény holomorf $D$-n,

$$\int_\gamma g(w)\, dw = \int_\Gamma g(w)\, dw,$$

azaz

$$\int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}\, dw,$$

amiből $\operatorname{ind}(z,\gamma) = 0$, $\operatorname{ind}(z,\Gamma) = 1$ miatt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \tag{2}$$

Mivel

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-c)-(z-c)} = \frac{1}{(w-c)\big(1-(z-c)/(w-c)\big)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}},$$

és a jobb oldali sor egyenletesen konvergens, ha $|w-c|=R'$, (2)-ben az első integrál

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw=\int_{n=0}^{\infty}(z-c)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\,dw=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$$

alakba írható. Hasonlóan,

$$-\frac{1}{w-z}=\frac{1}{z-w}=\frac{1}{(z-c)-(w-c)}=\frac{1}{(z-c)(1-(w-c)/(z-c))}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(w-c)^{n-1}}{(z-c)^n},$$

ahol a jobb oldali sor $w$-ben egyenletesen konvergens az $|w-c|=r'$ körön, és így (2)-ben a második integrál

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-c)^n}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w-c)^{n-1}\,dw=\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-c)^n$$

alakba írható. Az együtthatók nem függnek $z$-től, csak esetleg $\gamma$-tól és $\Gamma$-tól, amiből következik, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ minden $|z-c|<R'$ esetén, $\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-c)^n$ pedig minden $|z-c|>r'$ esetén konvergens.

Tegyük fel, hogy

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a'_{-n}(z-c)^{-n}, \tag{3}$$

ha $r'<|z-c|<R'$. Az első sor egy hatványsor, a második sor pedig $w=1/(z-c)$ helyettesítéssel egy hatványsorba megy át, amely egy körlapon konvergens. Tekintsünk egy $\gamma\colon I\to D$ zárt pályát, amelyre $r'<|\gamma(t)-c|<R'$ minden $t\in I$-re. A (3)-ban szereplő sorok egyenletesen konvergensek $\gamma(I)$-n, és szorozva $1/(w-c)^{m+1}$-gyel

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-c)^{m+1}}\,dw=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_\gamma a'_n(w-c)^{n-m-1}\,dw.$$

Mivel $(w-c)^k$-nak van primitív függvénye $D$-n, ha $k\neq -1$, a jobb oldali integrálok mind nullák, ha $n-m-1\neq -1$. Így az $\operatorname{ind}(c,\gamma)$ index definíciójából kapjuk (1)-et, és az $\operatorname{ind}(c,\gamma)\neq 0$ esetben a Laurent-sor egyértelműségét is. Ebből speciálisan következik, hogy az $a_n$-ek nem függnek $r'$ és $R'$ választásától sem, $r'\downarrow r$, $R'\uparrow R$ esetén pedig, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ konvergens $|z-c|<R$, a $\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-c)^n$ sor pedig konvergens $|z-c|>r$ esetén. □

**11.2.2. Függvény rendje egy pontban.** Legyen $c\in\mathbb{C}$, és tegyük fel, hogy $f$ holomorf valamely $r>0$-ra a $D=\{z\colon 0<|z-c|<r\}$ lyukas körlapon. Legyen

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n,\quad \text{ha}\quad z\in D$$

az $f$ Laurent-sora. Tudjuk, hogy az $f$ sorának együtthatói nem függnek $r$ választásától. Az $f$ *rend*jét $c$-ben az $\omega(c, f) = \inf\{n: a_n \neq 0\}$ összefüggéssel definiáljuk. Ha $\omega(c, f) < 0$, akkor azt mondjuk, hogy $f$-nek $c$-ben *izolált szingularitás*a van. Ha $\omega(c, f) = -\infty$, akkor $c$-ben $f$-nek *lényeges szingularitás*a van, ha pedig $-\infty < \omega(c, f) = -n < 0$, akkor $f$-nek $c$-ben $n$-edrendű *pólus*a van. Az

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-c)^{-n}, \quad \text{ha} \quad z \neq c$$

függvény az $f$ *főrész*e $c$-ben. Ha $\omega(c, f) \geq 0$, akkor a Laurent-sor hatványsor, így $f$ holomorf módon kiterjeszthető a $\{z: |z-c| < r\}$ körlapra; ekkor azt mondjuk, hogy $c$ *megszüntethető szingularitás*a $f$-nek. Ha $\omega(c, f) = n > 0$, akkor azt mondjuk, hogy $c$ az $f$-nek $n$-edrendű *zérushely*e. Ha $g$ egy másik, a $D$ lyukas körlapon analitikus függvény, akkor triviálisan $\omega(c, f+g) \geq \min\{\omega(c, f), \omega(c, g)\}$ és $\omega(c, fg) = \omega(c, f) + \omega(c, g)$, ha $\omega(c, f)$ és $\omega(c, g)$ végesek; az utóbbi állítás belátásához vegyük észre, hogy ha $f$ véges rendű $c$-ben, $\omega(c, f) = n$, akkor $f$ a $D$-n egyértelműen felírható $(z-c)^n f^*(z)$ alakban, ahol $f^*$ a $D$-n analitikus és rendje $c$-ben 0. Ha $f$ véges rendű $c$-ben, akkor $1/f$ is, és $\omega(c, 1/f) = -\omega(c, f)$. Az $a_{-1}$ az $f$ *reziduum*a $c$-ben, jelölése $\operatorname{Res}(c, f)$.

**11.2.3. Reziduumtétel.** *Legyen $D$ egy egyszeresen összefüggő tartomány és $S \subset D$ egy csupa izolált pontból álló halmaz. Ha $D \setminus S$ nyílt, $f$ analitikus $D \setminus S$-en és $\gamma: I \to D \setminus S$ egy zárt pálya, akkor*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{s \in S} \operatorname{ind}(s, \gamma) \operatorname{Res}(s, f),$$

*és a jobb oldali összegnek csak véges sok tagja nullától különböző.*

$\star$ **Bizonyítás.** Az, hogy $D \setminus S$ nyílt, azzal ekvivalens, hogy $S$-nek nincs $D$-ben pontja. Feltehetjük, hogy minden $s \in S$ nem megszüntethető szingularitása $f$-nek, mert a megszüntethető szingularitásokban a reziduum úgyis nulla, így azokat megszüntethetjük anélkül, hogy a jobb oldali összeg megváltozna. Bármely $K$ kompakt részhalmazára $D$-nek $S \cap K$ véges, mert nem lehet torlódási pontja. Legyen $P$ az összes olyan $w$ pontok halmaza, amelyekre $\operatorname{ind}(w, \gamma) \neq 0$. Választva egy $\gamma(I)$-t tartalmazó nyílt körlapot, az konvex, tehát egyszeresen összefüggő, az index tulajdonságai miatt $P$ korlátos. Mivel $D$ egyszeresen összefüggő, $P \subset D$. Mivel $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ azon pontjainak halmaza, amelyekre $\operatorname{ind}(w, \gamma)$ egy adott értéket vesz fel, nyílt, $P$ minden határpontja $\gamma(I)$-ben van. Így $\overline{P} \subset D$, és $\overline{P}$ kompakt. Legyen $\varphi: I \times [0, 1] \to D$ a $\gamma$ egy homotópiája egy konstans pályával, és $M = \varphi(I \times [0, 1])$. Ha $S' = S \cap (M \cup \overline{P})$, akkor $S'$ véges és $B = (D \setminus S) \cup S'$ nyílt. Jelölje $u_s$ az $f$ főrészét az $s \in S'$ pontban, és tekintsük a

$$g(z) = f(z) - \sum_{s \in S'} u_s(z), \qquad z \in B$$

analitikussá tett függvényt. Mivel a Cauchy-féle alaptétel szerint $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{s \in S'} \int_\gamma u_s(z)\, dz = \sum_{s \in S'} 2\pi i \operatorname{ind}(s, \gamma) \operatorname{Res}(s, f). \ \square$$

**11.2.4. Megjegyzés.** A reziduumtételt gyakran használjuk komplex és valós integrálok kiszámítására. Gyakran egy $z \mapsto f(z)/g(z)$ függvény reziduumára van szükségünk egy $c$ pontban, ahol $f, g$ analitikusak, $g(c) = 0$. Ilyenkor célszerű felírnunk $f$ és $g$ Taylor-sorát $c$ középponttal. Például ha $g'(c) \neq 0$, akkor

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(c) + f'(c)(z-c) + \dots}{g'(c)(z-c) + g''(c)(z-c)^2/2 + \dots} = \frac{1}{z-c} \frac{f(c) + f'(c)(z-c) + \dots}{g'(c) + g''(c)(z-c)/2 + \dots},$$

így $\operatorname{Res}(c, f/g) = f(c)/g'(c)$.

**11.2.5. Meromorf függvények.** Legyen $D \subset \mathbb{C}$ nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy az $f$ *meromorf* $D$-n, ha $f$ a $D$ egy nyílt $B$ részhalmazán holomorf, és $D \setminus B$ minden pontja pólusa $f$-nek. (Például a racionális törtfüggvények meromorf függvények.) Vegyük észre, hogy $D \setminus B$-nek nem lehet torlódási pontja $D$-ben: a torlódási pont ugyanis nem lehet $B$-ben, mert az nyílt, de $D \setminus B$-ben sem, mert annak a pontjai pólusok, így izoláltak. Meromorf függvények összege és konstansszorosa is meromorf, sőt, $D$-n meromorf komplex értékű függvények szorzata is meromorf. Ha $D$ tartomány, akkor $D$-n meromorf komplex értékű függvények hányadosa is meromorf, ha az osztó nem azonosan nulla. Az $1/f$ pólusai $f$ zérushelyei, $1/f$ zérushelyei pedig $f$ pólusai.

$\star$ **11.2.6. Megjegyzés.** A parciális törtekre bontás tétele végtelen sok tagra történő általánosításának tekinthető Mittag-Leffler tétele. Ennek a tételnek, valamint a Weierstrass-féle szorzat előállításnak a segítségével sok érdekes és fontos összefüggés levezethető, például a $\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{\Gamma}(1-z) = \pi/\sin \pi z$ összefüggés. Részletesebben lásd Szőkefalvi-Nagy [54] jegyzetét.

$\star$ **11.2.7. Argumentum-elv.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, és $f$ egy nem azonosan nulla komplex értékű meromorf függvény $D$-n. Legyen $N$, illetve $P$ az $f$ nullhelyeinek, illetve pólusainak halmaza, $g$ pedig egy $D$-n holomorf függvény. Minden $D \setminus (N \cup P)$-beli $\gamma$ zárt pályára*

$$\int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{w \in N \cup P} \operatorname{ind}(w, \gamma) g(w) \omega(w, f).$$

**Bizonyítás.** Az $f$ a $w$ egy környezetében felírható $f(z) = (z-w)^k f_1(z)$ alakban, ahol $k$ az $f$ rendje $w$-ben, $f_1$ holomorf, és $f_1(w) \neq 0$. Ebből

$$f'(z) = k(z-w)^{k-1} f_1(z) + (z-w)^k f_1'(z),$$

tehát $f'/f$ rendje az $w$ pontban nemnegatív, ha $k = 0$, egyébként $-1$, és a reziduuma $k$, ha $k \neq 0$. A $g$ függvénnyel szorozva, $gf'/f$ reziduuma $kg(w)$ lesz. Így a reziduumtételből következik az állítás. $\square$

$\star$ **11.2.8. Következmény.** *Ha $\gamma$ szakaszonként sima zárt pálya $D \setminus (N \cup P)$-ben, és $\Gamma = f \circ \gamma$, akkor*

$$\operatorname{ind}(0, \Gamma) = \sum_{w \in N \cup P} \operatorname{ind}(w, \gamma) \omega(w, f).$$

**Bizonyítás.** Nyilván $\Gamma$ is szakaszonként sima pálya, és ha $\gamma$ az $[a,b]$-n van értelmezve, akkor

$$2\pi i \operatorname{ind}(0,\Gamma) = \int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,dt = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \ \square$$

$\star$ **11.2.9. Rouché tétele.** *Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány, $f$ és $g$ holomorf komplex értékű függvények $D$-n, $N$ az $f$, $N'$ pedig az $f+g$ zérushelyeinek halmaza, $\gamma\colon I \to D$ egy zárt pálya $D \setminus N$-ben. Ha $|g(z)| < |f(z)|$ a $\gamma(I)$-n, akkor*

$$\sum_{w\in N} \operatorname{ind}(w,\gamma)\omega(w,f) = \sum_{w\in N'} \operatorname{ind}(w,\gamma)\omega(w,f+g).$$

**Bizonyítás.** Mivel $f$ és $f+g$ sem azonosan nulla, $N$ és $N'$ izolált pontokból állnak, és megszámlálhatóak. A $\gamma$ egy, a

$$\left\{z \in D\colon |g(z)| < |f(z)|\right\}$$

nyílt halmazban vele homotóp pályával helyettesíthető, így feltehetjük, hogy szakaszonként sima. Legyen $h = (f+g)/f$. Ekkor

$$\frac{(f+g)'}{f+g} = \frac{f'}{f} + \frac{h'}{h},$$

és az előző következmény szerint csak azt kell megmutatnunk, hogy a $\Gamma = h \circ \gamma$ szakaszonként sima pályára $\operatorname{ind}(0,\Gamma) = 0$. Vegyük észre, hogy $|h(z)-1| = |g(z)/f(z)| < 1$, ha $z \in \gamma(I)$. $\square$

$\star$ **11.2.10. A gamma-függvény.** Ez a függvény lényegében a faktoriális kiterjesztése természetes számokról komplex számokra, mert $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$. Ha $\Re(z) > 0$, legyen

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Megmutatjuk, hogy a határérték létezik, és $\mathbf{\Gamma}$ analitikus a $\{z\colon \Re(z) > 0\}$ félsíkon. Legyen

$$f_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \text{ha} \quad \Re(z) > 0.$$

Ha $C \subset \{z\colon \Re(z) > 0\}$ kompakt halmaz, akkor $k \le \Re(z) \le K$ valamely $0 < k \le K < \infty$-re minden $z \in C$-re, és ha $m \ge n$, akkor

$$\begin{aligned}|f_m(z) - f_n(z)| &\le \int_{1/m}^{1/n} t^{k-1}e^{-t}\,dt + \int_n^m t^{K-1}e^{-t}\,dt\\ &\le \int_0^{1/n} t^{k-1}e^{-t}\,dt + \int_n^\infty t^{K-1}e^{-t}\,dt \to 0,\end{aligned}$$

ha $n \to \infty$, így az $f_n$ függvénysorozat minden kompakt halmazon egyenletesen konvergens. A paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálásáról szóló tétel és a Cauchy–Riemann-egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy $f_n$ holomorf, és így Weierstrass tétele szerint $\mathbf{\Gamma}$ analitikus a $\{z\colon \Re(z) > 0\}$ félsíkon. Az $f_n$ definíciójában parciális integrálással, majd $n \to \infty$ határátmenettel adódik a gamma-függvény *függvényegyenlete*: $\mathbf{\Gamma}(z+1) = z\mathbf{\Gamma}(z)$. Ezt átírva a $\mathbf{\Gamma}(z) = \mathbf{\Gamma}(z+1)/z$ alakba, $\mathbf{\Gamma}$ analitikusan folytatható a $\{z\colon \Re(z) > -1, z \neq 0\}$ nyílt halmazra és a függvényegyenlet továbbra is fennáll. Újra alkalmazva ezt az összefüggést, a $\{z\colon \Re(z) > -2, z \neq 0, -1\}$ halmazra folytatható $\mathbf{\Gamma}$. Teljes indukcióval ismételve az eljárást, $\mathbf{\Gamma}$ egy olyan, a $\mathbb{C}$-n meromorf függvénnyé terjeszthető ki, amelynek a $0, -1, -2, \dots$ pontokban elsőrendű pólusai vannak, és erre a kiterjesztett függvényre $-z \notin \mathbb{N}$ esetén teljesül a $\mathbf{\Gamma}(z+1) = z\mathbf{\Gamma}(z)$ függvényegyenlet. Az analitikus folytatás elve szerint a kiterjesztés egyértelmű.

$\star$ **11.2.11. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy $\mathbf{\Gamma}(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$, hogy $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$, és hogy $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$, ha $n \in \mathbb{N}$.

**11.2.12. Feladat [6].** Határozzuk meg az alábbi komplex integrálokat:

(1) $\int_\gamma e^z/z^2\,dz, \quad \gamma(t) = e^{-4\pi i t}, \quad 0 \le t \le 1;$

(2) $\int_\gamma 1/(z^4+1)\,dz, \quad \gamma(t) = 1 + \cos t + i\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi;$

(3) $\int_\gamma 1/((z-1)^2(z^2+1))\,dz, \quad \gamma(t) = \sqrt{6}(\cos t + i\sin t) - 2, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

$\star$ **11.2.13. Feladat [10].** Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{e^x - 1}\,dx = \mathbf{\Gamma}(z)\zeta(z), \quad \text{ha} \quad \Re(z) > 1.$$

$\to$ **11.2.14. Feladat [10].** Ha $P$, $Q$ polinomok, $\deg P + 2 \le \deg Q$, mutassuk meg, hogy

(1) ha $Q$-nak nincs valós zérushelye, akkor

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\Im(z)>0} \operatorname{Res}(z, P/Q);$$

(2) ha $Q$-nak nincs nemnegatív valós zérushelye, akkor

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -i \sum_{z\neq 0} \operatorname{Res}(z, f),$$

ahol

$$f(z) = \log(-z)\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

$\to$ **11.2.15. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy ha $m < n$, akkor

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}-1}{x^{2n}-1}\,dx = \frac{\pi}{n}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n} - \operatorname{ctg}\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right).$$

→ **11.2.16. Feladat [11].** Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}, \quad a>0;$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^6+1};$$

(3) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx;$$

(4) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \qquad n=1,2,\dots;$$

(5) $$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1};$$

(6) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2m_1}-x^{2m_2}}{x^{2n}-1}\,dx, \qquad m_1,m_2<n;$$

(7) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,dx, \qquad m<n.$$

**11.2.17. Feladat [10].** A $-R$, $R$, $2\pi i+R$, $2\pi i-R$, illetve a $-R$, $R$, $\pi i+R$, $\pi i-R$ csúcsú téglalap körül integrálva, majd $R\to\infty$-t véve, mutassuk meg, hogy

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad \text{ha} \quad 0<\alpha<1;$$

(2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha_1 t}-e^{\alpha_2 t}}{1-e^t}\,dt = \pi(\operatorname{ctg}\pi\alpha_1-\operatorname{ctg}\pi\alpha_2), \quad \text{ha} \quad 0<\alpha_1,\alpha_2<1.$$

**11.2.18. Feladat [12].** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

(1) $$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx, \qquad 0<\alpha<1;$$

(2) $$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx;$$

(3) $$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx, \qquad a, b \in \mathbb{R};$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx;$$

(5) $$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx, \qquad a > 0;$$

(6) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\,dx, \qquad a > 0;$$

(7) $$\int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos ax\,dx, \qquad a > 0.$$

⋆ **11.2.19. Feladat [10].** Bizonyítsuk be a gamma-függvény alábbi *Gauss-féle előállításá*t:

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad \text{ha} \quad z \in \mathbb{C}$$

(itt $1/0 = \infty$).

⋆ **11.2.20. Feladat: $\boldsymbol{\beta}$-integrál [11].** Mutassuk meg, hogy a $p > 0$, $q > 0$ értékekre értelmezett kétparaméteres

$$\boldsymbol{\beta}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

*$\beta$-integrál* értéke $\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q)/\mathbf{\Gamma}(p+q)$. Határozzuk meg ennek alapján az $\int_0^{\pi/2} \sin^k x\,dx$, $k \in \mathbb{N}$ integrálok értékét.

⋆ **11.2.21. Feladat [12].** Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{R}^m$-ben az egy sugarú gömbök térfogata $\mathbf{\Gamma}(1/2)^m/\mathbf{\Gamma}(m/2+1) \to 0$, ha $m \to \infty$.

⋆ **11.2.22. Elliptikus integrálok és elliptikus függvények.** A fizikában gyakran lépnek fel $\int R(z, \sqrt{P(z)})\,dz$ típusú, úgynevezett *elliptikus integrál*ok, ahol $R$ racionális törtfüggvény, azaz két kétváltozós polinom hányadosa, $P$ pedig polinom. A név onnan ered, hogy ellipszisív hosszának meghatározásakor is ilyen integrált kapunk. Ha $P$ első- vagy másodfokú, akkor alkalmas helyettesítésekkel a primitív függvény megkapható. Ha $P$ harmad- vagy negyedfokú, akkor néhány elliptikus alapintegrálra vezethető vissza az összes eset, és ezek vizsgálata olyan komplex függvényekhez vezet, amelyek két komplex szám szerint is periodikusak. Az ilyen függvényeket nevezik *elliptikus függvény*eknek. A kérdéskörnek kiterjedt irodalma van, a legfontosabb tényeket illetően lásd Frank–Mises [9], I. 206. o.

# 12

# Közönséges differenciálegyenletek

*Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa. (Függvényeket differenciálni és differenciálegyenleteket megoldani hasznos.)*

*Newton Leibnizhez, 1676*

A differenciálegyenleteket Newton (1642–1727) találta fel, hogy segítségükkel fizikai problémákat oldjon meg. A XVIII. század folyamán számos differenciálegyenlet-típust oldottak meg. Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) munkái vezettek a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek és magasabbrendű egyenletek elméletéhez, és ez a fejlődés vezetett a lineáris algebra számos fogalmának kialakulásához. Például az adjungált operátor fogalma is Lagrange-tól származik, aki azt lineáris differenciáloperátorokra vezette be. Az általános egyenlettípusokra vonatkozó tételek bizonyítását Cauchy kezdeményezte. A megoldás létezésének és egyértelműségének ma szokásos bizonyítása Picard -tól ered, 1890-ből.

Itt a tárgyalás az alapprobléma vázolásával kezdődik, előrebocsátva a létezési és egyértelműségi tételt. Az elemi megoldási módszereket „szakácskönyvszerűen” tárgyalom, úgy érzem, így használhatók a legkönnyebben. A lineáris egyenletek és rendszerek tárgyalása a szokásos.

## 12.1 Alapfogalmak

**12.1.1. Példa.** Egy ágyúgolyót függőlegesen 100 m/s kezdősebességgel fellőnek. Menynyi ideig emelkedik?

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g - kv(t)^2, \qquad v(0) = 100 \text{ m/s}.$$

Ez egy közönséges, elsőrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás egy konstanst tartalmaz, ezt úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltétel teljesüljön.

**12.1.2. Példa.** Vizsgáljuk meg a matematikai inga mozgását:

$$g\sin\varphi(t) = -l\varphi''(t), \quad \varphi'' = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0,\ \varphi(t_0) = \omega_0.$$

Ez egy közönséges, másodrendű explicit differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás két konstanst tartalmaz, ezeket úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek teljesüljenek.

**12.1.3. Példa.** Tegyük fel, hogy egy kémiai folyamat során az $x$ anyag bomlik egy $y$ anyaggá, az $y$ anyag pedig bomlik egy $z$ anyaggá. A bomlás sebessége arányos a bomló anyag koncentrációjával (elsőrendű reakció).

$$\begin{aligned} x' &= -ax & \qquad x(t_0) &= x_0 \\ y' &= -by - x' & \qquad y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Ez egy közönséges, elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszerre vonatkozó kezdeti érték probléma. Az általános megoldás két konstanst tartalmaz, ezeket úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek teljesüljenek.

**12.1.4. Példa: a hővezetési egyenlet.** Legyen $G$ egy tartomány $\mathbb{R}^3$-ban, jelölje $u(x,t)$ a hőmérsékletet az $x \in G$ helyen a $t$ időpontban. A hőmérsékletkülönbség $q(x) = -p(x)\nabla_x u(x,t)$ hőáramot generál, ahol $p(x)$ a *hővezetési tényező*. Egy kis $T$ téglából $dt$ idő alatt kiáramló hőmennyiség $-\int_{\partial T} p(x)\langle \nabla_x u(x,t), n(x)\rangle \, d\chi^2(x)\, dt$. Ha $D$-ben hőforrások is működnek $f(x,t)$ sűrűséggel, akkor a hőforrások által $dt$ idő alatt termelt $\int_T f(x,t)\, dx\, dt$ hőmennyiség és a kiáramló hőmennyiség különbsége megemeli a hőmérsékletet. A szükséges hőmennyiség $dt$ idő alatt $\int_T c(x)d(x)u_t(x,t)\, dx\, dt$, ahol $c(x)$ a fajhő, $d(x)$ pedig a sűrűség. Így azt kapjuk, hogy

$$\int_T \varrho(x)u_t(x,t)\, dx - \int_T f(x,t)\, dx - \int_{\partial T} p(x)\langle \nabla_x u(x,t), n(x)\rangle \, d\chi^2(x) = 0,$$

ahol $\varrho(x) = c(x)d(x)$. Az utolsó integrált átalakítva a divergencia-tétellel,

$$\int_T \Big(\varrho(x)u_t(x,t) - \operatorname{div}_x(p(x)\nabla_x u(x,t)) - f(x,t)\Big)\, dx = 0.$$

Mivel $T$ tetszőleges, fennáll az

$$\varrho(x)u_t(x,t) - \operatorname{div}_x(p(x)\nabla_x u(x,t)) = f(x,t)$$

egyenlet.

**12.1.5. Példa: geometriai interpretáció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és vizsgáljuk az

$$x' = f(t,x), \quad (t,x) \in D$$

közönséges explicit elsőrendű differenciálegyenletet. Ha $x$ megoldása ennek a differenciálegyenletnek és áthalad a $(t_0, x_0)$ ponton, akkor ott a meredeksége $f(t_0, x_0)$. Ezért $D$ minden pontjában — a differenciálegyenlet megoldása nélkül — megadhatjuk az ott áthaladó megoldásgörbe irányát. Ha például $x' = -t/x$ $(t > 0,\ x > 0)$, akkor a megoldásgörbék origó középpontú körívek.

**12.1.6. Differenciálegyenletek.** A fizikaban és más természettudományokban nagyon sokszor előfordul, hogy néhány (egy vagy több) ismeretlen függvény között néhány kapcsolatot ismerünk, és ezekből kell a függvényeket meghatároznunk. Ilyenkor egy kapcsolat és ismeretlen függvény esetén *differenciálegyenlet*ről, több esetén *differenciálegyenlet rendszer*ről beszélünk. Általában mellékfeltételek is járulnak az egyenlethez vagy egyenletekhez. Ha a megoldások egy kezdeti időpontban adottak, akkor *kezdeti érték problémá*ról vagy Cauchy-feladatról, ha pedig valamilyen „peremen”, akkor *peremérték problémá*ról beszélünk. Az alábbiakban pontosabb definíciót adunk.

**12.1.7. A differenciálegyenletek osztályozása.** *Differenciálegyenlet rendszer*endifferenciálegyenlet rendszer] egy

$$f_j\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}\right)$$
$$= g_j\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \dots, x_n, x_n', \dots, x_n^{(m_n)}\right)$$

($j = 1, 2, \dots, k$) alakú egyenletrendszert értünk. Itt az $f_j$, $g_j$ függvények adottak, és a $t$ változótól függő $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlen függvényeket keressük. Az adott és az ismeretlen függvények változói és értékei is euklideszi vagy unitér terek vektorai. Az egyenletek átrendezésével elérhetjük, hogy a jobb oldalon nulla álljon. Ha az adott, illetve ismeretlen függvények vektor értékűek, akkor koordinátákra áttérve egy hasonló, de már skalár értékű függvényekre vonatkozó egyenletrendszert kapunk.

Gyakran célszerű az ismeretlen és az ismert függvényeket egy-egy vektor értékű függvény koordinátáinak tekinteni, így a ($t$-től függő) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorra vonatkozó

$$f(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = g(t, x, x', \dots, x^{(m)})$$

*differenciálegyenlet*et kapunk. (Természetesen nincs akadálya, hogy egy oldalra rendezzük a tagokat, azaz akár azt is feltehetnénk, hogy $g \equiv 0$, de legtöbbször ezt nem tesszük.) Az egyenlet *rend*je $m$, a legmagasabb előforduló derivált rendje; ha $m = 1$, az egyenlet *elsőrendű egyenlet*, egyébként *magasabbrendű egyenlet.*

Általában feltesszük, hogy $f$ és $g$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvények, és *megoldás*on egy nem üres $G$ tartományon (valós változós esetben tehát nyílt intervallumon) értelmezett $m$-szer folytonosan differenciálható $t \mapsto x(t)$ függvényt értünk, amelyre

$$f(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))$$

minden $t \in G$-re. Azt mondjuk, hogy az $x$ megoldásnak az $\tilde{x}$ megoldás *folytatás*a, ha az $\tilde{x}$ függvény kiterjesztése az $x$ függvénynek, azaz $x \subset \tilde{x}$. Egy $x$ megoldást *teljes*nek vagy *nem folytatható*nak nevezünk, ha nincs tőle különböző (azaz valódi) folytatása.

Ha az $x$ ismeretlen függvény $t$ változója valós, akkor *közönséges*, egyébként *parciális differenciálegyenlet*ről beszélünk. Ez utóbbi esetben $x', x'', \dots, x^{(m)}$ nyilván a parciális deriváltakkal fejezhető ki. A „közönséges” jelzőt általában elhagyjuk. Ebben a fejezetben csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk, a parciális differenciálegyenletekkel külön fejezet foglalkozik.

Közönséges differenciálegyenlet rendszereknél a gyakorlatban előforduló esetekben az ismeretlen skalár függvények száma és a skalár egyenletek száma megegyezik, azaz $n = k$. Ennek oka, hogy megfelelő feltételek mellett ebben az esetben az egyenletrendszernek egy és csak egy megoldása létezik. Az $n < k$ esetben az egyenletrendszer túlhatározott, és általában nincs megoldása. Az $n > k$ esetben $n - k$ ismeretlen függvényt szabadon választva az $n = k$ esetet kapjuk. A továbbiakban mindig az $n = k$ esetet fogjuk vizsgálni.

**12.1.8. Explicit és implicit egyenletek.** Ha egy, az ismeretlen $x_1, \dots, x_n$ függvényekre vonatkozó közönséges differenciálegyenlet rendszer

$$x_j^{(m_j)} = f_j(t, x_1, x_1', \dots, x_j, \dots, x_j^{(m_j - 1)}, x_{j+1}, x_{j+1}', \dots)$$

($j = 1, 2, \ldots, n$) alakú egyenletekből áll, és az egyenletek jobb oldalán szereplő függvényekben mindenütt csak $x_j$-nek $m_j$-nél alacsonyabb fokú deriváltjai szerepelnek, akkor *explicit* differenciálegyenlet rendszerről beszélünk, minden más differenciálegyenlet rendszert *implicit egyenlet*nek nevezünk. Implicit egyenleteket néha könnyen átalakíthatunk explicit egyenletekké, máskor az átalakítás problémákkal jár, csak lokálisan végezhető el, vagy még úgy sem. A továbbiakban legtöbbször csak explicit egyenletekkel foglalkozunk.

**12.1.9. Átviteli elv.** Minden magasabbrendű közönséges differenciálegyenlet rendszer ekvivalens egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszerrel. Az átírás a következőképpen történik: ha az $x$ ismeretlen függvénynek az eredeti egyenletrendszerben előforduló legmagasabb deriváltja $x^{(m)}$, akkor bevezetve az

$$x_1 = x', \quad x_2 = x_1', \quad \ldots \quad x_{m-1} = x_{m-2}'$$

új ismeretlen függvényeket, és ezeket beírva az eredeti egyenletekbe, azokban csak $x$, $x_1$, $x_2$, …, $x_{m-1}$ és $x_{m-1}' = x^{(m)}$ fog előfordulni, így a differenciálegyenlet rendszer rendje csökken, viszont a helyettesítést definiáló összefüggések $m - 1$ új elsőrendű egyenletet adnak. A szokásos $x(\tau) = \xi$, $x'(\tau) = \xi_1$, …, $x^{(m-1)} = \xi_{m-1}$ kezdőfeltételből az $x(\tau) = \xi$, $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, \ldots, m-1$ kezdőfeltételek adódnak. Minden ismeretlen függvényre elvégezve a fenti típusú helyettesítést, egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszert kapunk, amely az eredeti differenciálegyenlet rendszerrel ekvivalens. Világos, hogy ha az eredeti differenciálegyenlet rendszer explicit volt, akkor az új differenciálegyenlet rendszer is explicit lesz.

**12.1.10. Alapprobléma.** A fentiek alapján az alábbi közönséges explicit differenciálegyenlettel fogunk foglalkozni:

$$x' = f(t, x), \qquad (t, x) \in D,$$

ahol $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ egy nyílt halmaz, és $f\colon D \to \mathbb{K}^n$ egy folytonos függvény, amelynek $x$ szerinti parciális deriváltja, $f_x\colon D \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ is folytonos. Az egyszerűbb szóhasználat kedvéért a fenti egyenletet *normál egyenlet*nek fogjuk nevezni.

Ha $(\tau, \xi) \in D$ és a fenti rendszer olyan $x$ megoldását keressük, amelyre

$$x(\tau) = \xi,$$

akkor *Cauchy-feladat*ról beszélünk. Meg fogjuk mutatni, hogy a fenti feltételek mellett a Cauchy-feladatnak egy és csak egy teljes megoldása van (egzisztencia és unicitás).

A normál egyenlet jobb oldala úgy fogható fel, hogy a $D$ halmaz minden pontjához megad egy irányt (*iránymező*). Az egyenlet megoldása olyan görbe keresését jelenti, amely minden pontban az ottani adott irányban halad. Gyakran az iránymező ábrázolása jól mutatja a differenciálegyenlet megoldásainak viselkedését. Ha $f$ nem függ $t$-től, akkor gyakran hasznosabb az $f$ vektormezőt ábrázolni, mint az iránymezőt.

→ **12.1.11. Feladat [5].** Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet rendszerekkel ekvivalens elsőrendű differenciálegyenlet rendszert:

(1) $x'' + 2x + y'' + 3y' + y = 0$, $x''' + y' = 0$;

(2) $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$, $x''(0) = 1$.

→ **12.1.12. Feladat [10].** Adjunk meg olyan differenciálegyenlet rendszert, amelynek megoldásai a $t$ adott függvényei:

(1) $x = at$;

(2) $x = at^2$;

(3) $x = ae^{t/a}$;

(4) $x^2 + t^2 = a^2$;

(5) $x^2 + t^2 = at$;

(6) $(t-a)^2 + x^2 = 1$;

(7) $x = at + b$;

(8) $x = at^2 + bt + c$;

(9) $(t-a)^2 + (x-b)^2 = c^2$;

(10) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

(11) $t^2 + x^2 + y^2 = a^2$, $t + x + y = b$.

**12.1.13. Feladat (N. N. Konsztantyinov) [13].** Az $A$ pontból a $B$ pontba két, egymást nem metsző út vezet. Tudjuk, hogy két gépkocsi, amelyek egy $2r$-nél rövidebb kötéllel vannak összekötve, és amelyek két különböző úton indulnak el $A$-ból $B$-be, képesek útjukon végigmenni úgy, hogy nem szakítják szét a kötelet. Képes-e ezen a két úton két kör alakú, $r$ sugarú szénásszekér elkerülni egymást, ha szemben haladnak?

→ **12.1.14. Feladat [12].** Tanulmányozzuk az alábbi differenciálegyenlet rendszerekhez tartozó iránymezőket, illetve vektormezőket. Mit mondhatunk a megoldásokról azok meghatározása nélkül, csak az egyenletből?

(1) $x' = kx$ (szaporodás);

(2) $x' = kx^2$ (robbanás);

(3) $x' = (1-x)x$ (szaporodás versengéssel);

(4) $x' = (1-x)x - c$ (halászat);

(5) $x' = f(t)$;

(6) $x'' = -x$ (kis rezgések);

(7) $x'' = -\sin x$ (inga);

(8) $x' = kx - axy$, $y' = -ly + bxy$ (ragadozó–áldozat *Lotka–Volterra-modell*je);

(9) $x'' = 0$ (szabad tömegpont);

(10) $x' = x$, $y' = ky$;

(11) $x'' = -x$, $y'' = -y$ (gömbi inga).

**12.1.15. Feladat [4].** Milyen egyenlet adja meg az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet szélsőértékeinek mértani helyét?

**12.1.16. Feladat [4].** Milyen egyenlet adja meg az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet inflexiós pontjainak mértani helyét?

$\star$ **12.1.17. Feladat [10].** Néhányszori differenciálással, helyettesítésekkel és egyes tagok kiküszöbölésével redukáljuk differenciálegyenletre az alábbi függvényegyenleteket, amelyekben $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az ismeretlen függvény, és az egyenlet minden $x, y \in \mathbb{R}$-re fennáll:

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Cauchy-egyenlet);

(2) $f(x+y) = f(x)f(y)$ (Cauchy exponenciális egyenlete);

(3) $f(xy) = f(x)f(y)$ (Cauchy hatványegyenlete);

(4) $f(xy) = f(x) + f(y)$ (Cauchy logaritmikus egyenlete);

(5) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ (normanégyzet-egyenlet);

(6) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ (D'Alembert-egyenlet).

## 12.2 Egyváltozós variációszámítás

*Azaz, mivel a világegyetem terve a legtökéletesebb, nem lehet kétség, hogy minden történés a világon meghatározható a megfigyelt jelenségből és okokból a maximum és minimum módszerének segítségével.*

*Leonhard Euler*

*Euler módszerét általánosítva jutott Lagrange figyelemreméltó formuláihoz, ahol egyetlen sorban benne van az analitikus mechanika összes problémájának megoldása.*

*C. G. J. Jacobi*

Newton lerakta a mechanika, és — Leibniz-cel együtt — az analízis alapjait. Követőire várt, hogy az új matematikai eszközöket (melyeket ő a „Principia …"-ban nem használt!) továbbfejlesszék, és felépítsék az épületet. A munkát nagyrészt Euler (1707–1783) végezte el. A „matematicus acutissimus" matematikával, fizikával, élettannal, térképészettel, és még sok mással is foglalkozott. (Összes művei 72 kötet!) Többek között nagy jártassággal rendelkezett a variációszámításban (ahogy ma nevezzük), amely Johann Bernoulli egy lényegében matematikai problémájából nőtt ki, és észrevette, hogy a newtoni mozgásegyenletek integrálásával kapott pályáknak bizonyos minimáltulajdonságaik vannak. Ezzel a variációs elvek bevonultak a fizikába. Munkáit Lagrange (1738–1813) fejlesztette tovább, 100 évvel a „Principia …" után írt könyvében a mechanika lényegében már úgy szerepel, ahogy ma szokás tárgyalni az egyetemen.

A variációszámítás, ahogy ma látjuk, az extrémális problémák tárgykörének egy fejezete. Ez a problémakör jól kezelhető a nemlineáris funkcionálanalízis eszközeivel.

Itt csak az első variációk eltűnéséből kapható Euler–Lagrange-differenciálegyenletek levezetése szerepel.

**12.2.1. A fizika variációs elvei.** A természettudományok alaptörvényeinek nagy része differenciálegyenletként fogalmazható meg. Az egyes konkrét problémákra vonatkozó egyenletek származtatását nagyon elősegíti, hogy a fizika számos ágának (mechanika, relativitáselmélet, elektromágnesség, kvantummechanika, kvantumtérelmélet, stb.) alaptörvényei megfogalmazhatók úgynevezett *variációs elv*ek segítségével. Példaként a klasszikus mechanika esetét tekintjük. Tegyük fel, hogy egy mechanikai rendszer állapotát a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ paraméterekkel, az *általános koordinátá*kkal és ezek idő szerinti deriváltjaival, a $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ *általános sebességek*kel jellemezhetjük, továbbá, hogy a rendszer helyzeti és mozgási energiájának összege állandó, a rendszer *konzervatív.* Ilyen rendszerekre a *Hamilton-elv*azt mondja ki, hogy a rendszer mozgását leíró $t \mapsto q(t)$ vektor értékű függvény olyan, hogy a $t_0$ és $t_1$ időpontok közötti pályára az

$$S(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), q'(t))\, dt$$

*hatás* minimális (pontosabban stacionárius), ahol $L = T - U$ a *Lagrange-függvény*,a $T$ mozgási és $U$ helyzeti energia különbsége. A hatás egy (nem lineáris) funkcionál a lehetséges pályákon. A *variációszámítás* ilyen funkcionálok szélsőértékszámításával foglalkozik, és megfelelő feltételek mellett azt mutatja ki, hogy a szélsőértéket adó pályára teljesülnek a

$$\frac{d}{dt} L_{q'}(t, q(t), q'(t)) - L_q(t, q(t), q'(t)) = 0$$

(másodrendű) Euler–Lagrange-differenciálegyenletek. Ha bevezetjük a $p = L_{q'}$ *általános impulzus*okat, akkor az Euler–Lagrange-egyenletekalakja $p' = L_q$.

**12.2.2. Példa.** Vezessük le a *matematikai inga* (merev, súlytalan $l$ hosszúságú rúdon $m$ tömegű tömegpont) $\varphi$ (függőlegestől vett) kitérésre vonatkozó mozgásegyenletét a Hamilton-elv segítségével. A mozgási energia $m(l\varphi')^2/2$, a helyzeti pedig $-mgl \cos\varphi$, így a Lagrange-függvény

$$L = m(l\varphi')^2/2 + mgl \cos\varphi.$$

Innen az általános impulzus $p = ml^2\varphi'$, az Euler–Lagrange-egyenlet pedig $ml^2\varphi'' = -mgl \sin\varphi$, azaz $l\varphi'' = -g \sin\varphi$.

**12.2.3. Feladat: kettős inga [8].** Írjuk fel a kettős síkinga ($l_1$ hosszúságú súlytalan rúdon $m_1$ tömeg, ahhoz erősítve $l_2$ hosszúságú súlytalan rúdon $m_2$ tömeg) Lagrange-függvényét.

**12.2.4. Feladat: csúszkán lengő inga [8].** Írjuk fel egy $m_1$ tömegű síkinga Lagrange-függvényét, amelynek felfüggesztési pontja $m_2$ tömeggel vízszintes egyenesen mozoghat súrlódás nélkül.

**12.2.5. Egydimenziós probléma.** Tekintsük az alábbi *egydimenziós, rögzített peremű variációs problémát*: Legyenek $n$ és $m$ pozitív természetes számok, $G \subset \mathbb{R}$ nem üres, korlátos nyílt intervallum. Álljon $M$, a *megengedett függvények osztálya* az összes olyan $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$ függvényekből, amelyekre az

$$S(x) = \int_{\overline{G}} L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))\, dt$$

integrál integrandusa minden $\overline{G}$-beli pontban értelmezve van, ahol $L$ egy megfelelő dimenziós euklidészi tér egy $Q$ nyílt részhalmazán értelmezett folytonos valós értékű függvény, és amelyek eleget tesznek a $Bx = g$ peremfeltételnek, ahol $B$ a $\mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$-beli függvényekre értelmezett lineáris operátor, $g$ a $B$ értékkészletének egy eleme, és $B$ „csak a peremen felvett értékektől függ”, azaz nulla, ha $x$ nulla a $G$ végpontjainak egy-egy környezetében. Megoldandó az

$$M\colon S(x) \to \text{lokmin}$$

probléma. Az $L$ függvényt a probléma *Lagrange-függvény*énekis szokás nevezni.

Ez a szélsőérték feladat (és a 14.1.2 többváltozós feladat is) kezelhető a funkcionálanalízis eszközeivel. Első pillantásra úgy néz ki, hogy a feltételes szélsőértékszámítás eszközeit kell használnunk, erre azonban csak akkor van szükség, ha más, bonyolultabb mellékfeltételek is vannak. A fenti, egyszerű mellékfeltétel könnyen kiküszöbölhető, ha egy megengedett $x$ függvényt (például a lokális minimumot adó függvényt) levonunk minden megengedett függvényből, így az

$$(\tilde{x}-x) \mapsto S\big((\tilde{x}-x)+x\big) = \tilde{S}(\tilde{x}-x)$$

funkcionál lokális minimumát keressük. Ezzel az egyszerű *különbség trükk*el kapott új funkcionál már egy normált tér egy nyílt részhalmazán van értelmezve. Annak, hogy lokális szélsőértékhelye legyen egy pontban, szükséges feltétele, hogy az első variációi (iránymenti deriváltjai) nullák legyenek az adott pontban. Megjegyezzük, hogy a fizika variációs elvei nem mindig minimumelvek, és sokszor inkább úgy fogalmazhatók, hogy az első variáció eltűnik, ezért elsősorban ezzel a szükséges feltétellel fogunk foglalkozni, és a lokális minimum létezéséhez elégséges feltételeket egyáltalán nem tárgyalunk. A szükséges feltétel levezetésénél nem Lagrange eredeti módszerét követjük (amit a minimális felszínű forgásfelület vizsgálatánál már láttunk), mert azt akarjuk megmutatni, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet akkor is fennáll, ha csak azt tesszük fel, hogy $x \in \mathcal{C}^m(G)$ és $L \in \mathcal{C}^1(Q)$. Felhasználjuk az alábbi lemmát, amelynek bizonyítására disztribúciókat használunk.

**12.2.6. Du Bois-Reymond-lemma.** *Tegyük fel, hogy $G \subset \mathbb{R}$ egy nem üres nyílt intervallum, $h$ lokálisan integrálható függvény $G$-n, és tegyük fel, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{D}(G)$ függvényre*

$$\int_G h(t)y^{(m)}(t)\,dt = 0.$$

*Ekkor $h$ majdnem mindenütt megegyezik egy $m$-nél alacsonyabb fokú polinommal.*

⋆ **Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy ha egy $h \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúcióra $h' = 0$, akkor $h$ konstans függvénnyel reprezentálható. Válasszunk olyan $\omega \in \mathcal{D}$ függvényt, amelyre

$$\int_G \omega(t)\,dt = 1.$$

Legyen $G = \,]a,b[$. Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{D}$ függvény előállítható

$$\varphi(t) = \psi'(t) + \omega(t)\int_a^b \varphi(s)\,ds$$

alakban, ahol

$$\psi(t) = \int_a^t \left(\varphi(r) - \omega(r)\int_a^b \varphi(s)\,ds\right) dr,$$

és itt $\psi \in \mathcal{D}$. Valóban, $\psi$ akárhányszor differenciálható, és nulla, ha $\operatorname{spt}(\omega) \cup \operatorname{spt}(\varphi)$ alsó határánál kisebb, vagy felső határánál nagyobb a $t$. Ebből viszont

$$h(\varphi) = h(\psi') + h(\omega)\int_a^b \varphi(s)\,ds = \int_a^b h(\omega)\varphi(s)\,ds,$$

azaz $h$ konstanssal reprezentálható.

Most teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha egy $h$ disztribúció $m$-edik deriváltja nulla, akkor $m$-nél alacsonyabb fokú polinommal reprezentálható. Mivel $(h')^{(m-1)} = 0$, $h' = p$, ahol $p$ legfeljebb $m-2$-ed fokú polinom. Legyen $P$ a $p$ egy primitív függvénye, ekkor $(h-P)' = 0$, így $h-P$ konstanssal reprezentálható, azaz $h$ egy $m$-nél alacsonyabb fokú polinommal reprezentálható. Végül a lemma állítását az általánosított Lagrange-lemmábólkapjuk, mivel a $h$ lokálisan integrálható függvény és egy $m$-nél alacsonyabb fokú polinom ugyanazt a disztribúciót reprezentálják.

**12.2.7. Tétel.** *12.2.5 jelöléseivel, tegyük fel, hogy $L \in \mathcal{C}^1(Q)$ és az $x \in M$ függvényhez létezik olyan $\delta > 0$, hogy*

$$S(x) \leq S(\tilde{x}), \quad \text{ha} \quad \tilde{x} \in M \quad \text{és} \quad \|x - \tilde{x}\|_m < \delta.$$

*Ekkor $x$ eleget tesz $G$-n az*

$$\begin{aligned} L_x(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) &- \frac{d}{dt}\bigg(L_{x'}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) \\ &- \frac{d}{dt}\bigg(L_{x''}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) - \dots \\ &- \frac{d}{dt} L_{x^{(m)}}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t))\bigg) \dots \bigg) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Euler–Lagrange-egyenlet*nek.*

**Bizonyítás.** Legyen $G = ]a, b[$ és $y \in \mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, amely nulla a végpontok egy-egy környezetében. Tekintsük az

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon) = S(x + \varepsilon y)$$

valós változós függvényt. Ez a függvény értelmezve van a nulla egy környezetében, és mivel a nulla pontban lokális minimuma van, valamint a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint differenciálható a nulla pontban, $\varphi'(0) = 0$, azaz

$$\int_G \sum_{j=0}^{m} L_{x^{(j)}}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) y^{(j)}(t)\, dt = 0.$$

Nem írva ki a változókat, parciális integrálással átalakítva az integrált, és felhasználva, hogy $y$ eltűnik a végpontok környezetében, azt kapjuk, hogy

$$\int_G \bigg( \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \mathcal{J}^{m-j}(L_{x^{(j)}}) \bigg) y^{(m)}\, dt = 0,$$

ahol $\mathcal{J}$ a $t$ szerinti integrálás

$$\mathcal{J}(h)(s) = \int_a^s h(t)\, dt$$

összefüggéssel értelmezett operátora. Koordinátánként alkalmazva az előző lemmát, azt kapjuk, hogy

$$L_{x^{(m)}} - \mathcal{J}(L_{x^{(m-1)}}) + \mathcal{J}^2(L_{x^{(m-2)}}) - \ldots + (-1)^m \mathcal{J}^m(L_x) = p$$

a $G$ pontjaiban, ahol $p$ egy $m$-nél alacsonyabb fokú, vektorértékű polinom. Mivel minden más tag differenciálható $t$ szerint, $L_{x^{(m)}}$ differenciálható $t$ szerint. Differenciálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} L_{x^{(m)}} - L_{x^{(m-1)}} + \mathcal{J}(L_{x^{(m-2)}}) - \ldots + (-1)^m \mathcal{J}^{m-1}(L_x) = p'.$$

Most, mivel minden más tag is differenciálható, az első két tag összege is differenciálható, így

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} L_{x^{(m)}} - L_{x^{(m-1)}}\right) + L_{x^{(m-2)}} - \ldots + (-1)^m \mathcal{J}^{m-2}(L_x) = p''.$$

Teljes indukcióval folytatva, végül $(-1)^m$-mel szorozva, kapjuk az Euler–Lagrange-egyenletet.

**12.2.8. Regularitás.** Ha tudjuk, hogy $x \in \mathcal{C}^{2m}(G)$ és $L \in \mathcal{C}^{m+1}(Q)$, a kijelölt differenciálások elvégezhetők, és az Euler–Lagrange-egyenlet egy $2m$-edrendű implicit vektor differenciálegyenlettel ekvivalens. Az $L$ Lagrange-függvényre ez a feltevés könnyen ellenőrizhető, az ismeretlen függvényre azonban csak az $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G})$ feltevés tűnik természetesnek. Megmutatható, hogy egy szükséges feltétel, a Legendre-feltételegy olyan, könnyen ellenőrizhető és gyakran teljesülő feltételhez vezet el bennünket, amelynek segítségével az $x \in \mathcal{C}^m(\overline{G})$ feltevésből következik, hogy $x \in \mathcal{C}^{2m}(G)$. Az ilyen típusú úgynevezett *regularitási tétel*ek nagyon fontos szerepet játszanak a variációszámításban.

**12.2.9. Hiányos Lagrange-függvények.** Ha az $L$ Lagrange-függvénynem függ valamely változótól (hiányos), akkor az Euler–Lagrange-egyenlet általában egyszerűsíthető. Az egydimenziós probléma leírásánál bevezetett jelölésekkel, az $m = 1$, $L \in \mathcal{C}^2(Q)$ eset vizsgálatára szorítkozunk.

Ha $L$ nem függ $x'$-től, vagy $x'$-nek lineáris függvénye, akkor nem differenciálegyenletet kapunk, hanem $x$ egy egyenletből fejezhető ki.

Ha $L$ nem függ $x$-től, akkor az egyenlet

$$\frac{d}{dt} L_{x'}(t, x') = 0$$

alakú, és azonnal integrálható: $L_{x'}(t, x') = c$, azaz elsőrendű egyenletet kapunk.

Ha $L$ nem függ $t$-től és $x''$ folytonos, akkor egyszerű számolással adódik, hogy a $\frac{d}{dt}(L(x, x') - L_{x'}(x, x')x')$ függvény nulla, így az elsőrendű

$$L(x, x') - L_{x'}(x, x')x' = c$$

egyenletre jutunk.

**12.2.10. Brachisztochon-probléma.** Egy tömegpont egy sima pályán súrlódás nélkül csúszik a gravitáció hatására az $A$ pontból $B$ pontba. Vizsgáljuk meg, hogy milyen alakú pálya esetén ér oda a legrövidebb idő alatt. Johann Bernoulli ezen, 1696-ban közölt problémája tekinthető az első variációszámítási feladatnak.

**12.2.11. Feladat: a brachisztochon-probléma egyenlete [8].** Adjuk meg azt az elsőrendű differenciálegyenletet, amelynek megoldásai a brachisztochon-probléma $x \mapsto y(x)$ alakú megoldásai!

**12.2.12. Feladat [5].** Homogén, rugalmas lécet két végénél fogva meghajlítunk („*spline*”, a hajóépítésben használják). Kis hajlítás esetén az energiasűrűség a görbülettel arányos. Ha egy függvény írja le az alakot, kis hajlítás esetén a görbület arányos a második deriválttal. Írjuk fel és oldjuk meg a probléma Euler–Lagrange differenciálegyenletét!

**12.2.13. Feladat [7].** Írjuk fel a kettős inga Euler–Lagrange differenciálegyenletrendszerét!

**12.2.14. Feladat [7].** Írjuk fel a csúszkán lengő inga Euler–Lagrange differenciálegyenlet-rendszerét!

## 12.3 Elemi megoldási módszerek

**12.3.1. Megjegyzés.** Ha egy differenciálegyenletet meg akarunk oldani, akkor alkalmas helyettesítéssel igyekszünk egyszerűbb alakra hozni. Megfelelő helyettesítésekkel az egyenletet megpróbáljuk olyan alakra hozni, amelynek megoldását már ismerjük. Sokszor a transzformáció csak lokálisan végezhető el. Ezzel az eljárással „elég sok” megoldását megtalálhatjuk az egyenletnek. Annak vizsgálata, hogy minden megoldást megkaptunk-e, sokszor célszerűbben elvégezhető az egzisztencia-unicitás tétel felhasználásával, mint a megoldási módszer pontosabbá tételével. Ennek megfelelően, a továbbiakban a megoldási módszereket nem próbáljuk meg nehézkes tételekké átfogalmazni, és a feladatokban az „*oldjuk meg*” kifejezés csak azt jelenti, hogy keressünk „elég sok” megoldást. Az ismeretlen függvény rendszerint $x$-szel, változóját $t$-vel jelöljük, ennek megfelelően a derivált $dx/dt$ az inverz deriváltja pedig $dt/dx$ (nyilván az inverz meghatározása megadja a megoldást). Ezt a megoldás és inverze közötti „szimmetriát” sugallja az is, hogy néha az egyenletet $dt$-vel „végigszorozva” adjuk meg. Néha az ismeretlen függvényt $y$-nal, változóját $x$-szel jelöljük.

**12.3.2. Egzakt egyenletek.** Az $f_1(t,x) + f_2(t,x)x' = 0$ egyenletet *egzakt*nak nevezzük, ha van olyan $(t,x) \mapsto F(t,x)$ valós értékű függvény, amely primitív függvénye az $f = (f_1, f_2)$ vektor-vektor függvénynek, pontosabban $\nabla F = f$. Egy egzakt egyenlet megoldásai a $F(t,x) = c$ egyenletből kaphatók meg. Valóban, ha a $t \mapsto x(t)$ függvényre $F(t,x(t)) \equiv c$, akkor differenciálással $f_1(t,x(t)) + f_2(t,x(t))x'(t) \equiv 0$. Megfordítva, ha $x$ megoldása a differenciálegyenletnek, akkor a $t \mapsto F(t,x(t))$ függvény deriváltja nulla, azaz a függvény konstans, mint azt az előző számítás mutatja.

Az egyenlet egzakt voltát egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett $f_1$, $f_2$ függvények esetén biztosítja azok folytonos differenciálhatósága és a $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ feltétel teljesülése. Az $F$ függvény görbe menti integrálással meghatározható.

**12.3.3. Integráló szorzó.** Ha egy $f_1(t,x) + f_2(t,x)x' = 0$ egyenletre $\partial_1 f_2 \neq \partial_2 f_1$, esetleg egy $\mu(t,x) \neq 0$ függvénnyel végigszorozva egzakttá tehető. Az összes olyan $\mu$ függvény meghatározásának problémája, amellyel az egyenletet szorozva, az egzakt lesz, egy parciális differenciálegyenletre vezet, amelynek megoldása nehezebb, mint az eredeti egyenleté. Egy ilyen $\mu$ függvényt viszont gyakran találhatunk, ha valamilyen speciális alakban keressük, például csak $t$-től függ, csak $x$-től függ, csak $tx$-től függ stb.

→ **12.3.4. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $t\,dt + x\,dx + (t^2 + x^2)t^2\,dt = 0$;

(2) $\operatorname{tg} x\,dt - \operatorname{ctg} t\,dx = 0$;

(3) $x(1+tx)\,dt - t\,dx = 0$;

(4) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx - 2y\,dy = 0$;

(5) $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0$;

(6) $xy^3\,dx + (1 + 2x^2y^2)\,dy = 0$;

(7) $(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0$;

(8) $(3y^2/x - y/x^2 + 2y)\,dx + (8y^2/x + 1/x + 3y)\,dy = 0$;

(9) $(xy + y^2)\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$;

(10) $(y^3 - 2x^2y)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0$.

**12.3.5. Feladat [7].** Melyek azok a görbék, amelyekre az érintési pont, az érintő $x$ tengellyel vett metszéspontja és az origó által meghatározott haromszög területe állandó?

**12.3.6. Feladat [5].** Mi a szükséges és elégséges feltétele (sima függvényekre), hogy az $y' = f(x,y)$ egyenletnek létezzen csak $x$-től függő integráló szorzója?

**12.3.7. Feladat [5].** Mi a szükséges és elégséges feltétele (sima függvényekre), hogy az $y' = f(x,y)$ egyenletnek létezzen csak $y$-tól függő integráló szorzója?

**12.3.8. Szeparábilis egyenletek.** Ha a differenciálegyenlet $f(x)x' = g(t)$ alakra hozható (*szeparábilis*), akkor az egzakt egyenletek megoldási módszerével megoldható, de közvetlen differenciálással is adódik, hogy a megoldásokat az $F(x) = G(t) + C$ összefüggésből kaphatjuk, ahol $F$ a $f$, $G$ a $g$ primitív függvénye. Az $x' = f(x/t)$ alakú *homogén egyenlet* $y = x/t$ helyettesítéssel szeparábilisra vezethető vissza. Ugyancsak szeparábilis egyenletre vezethető vissza az $x' = f(at + bx)$ alakú egyenlet $y = at + bx$ helyettesítéssel. Az

$$x' = f\left(\frac{a_1t + b_1x + c_1}{a_2t + b_2x + c_2}\right)$$

alakú egyenlet, ha az $a_1t + b_1x + c_1$ és $a_2t + b_2x + c_2$ egyenesek párhuzamosak, azaz ha $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, akkor az előző típusba tartozik, egyébként pedig alkalmas $\alpha$ és $\beta$ választással $t = t_1 + \alpha$, $x = x_1 + \beta$ helyettesítéssel az egyenesek metszéspontját a koordináta-rendszer kezdőpontjába eltolva, homogénné válik.

→ **12.3.9. Feladat [9].** Határozzuk meg az alábbi egyenletek összes teljes megoldását:

(1) $x' = x$;

(2) $x' = \sqrt[3]{|x|}$ (itt nincs unicitás!);

(3) $x'x + t = 0$;

(4) $x'' = 0$;

(5) $x^{(m)} = f(t)$.

→ **12.3.10. Feladat [6].** Egy homogén rúd kis lehajlására $y^{(4)}(x) = kf(x)$, ahol $f$ az erő sűrűsége. Határozzuk meg a lehajlást, ha az erősűrűség konstans $C$, és

(1) a rúd a két végén alá van támasztva;

(2) a rúd a két végén be van falazva.

→ **12.3.11. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $1 + x^2 + txx' = 0$;

(2) $tx(1 + t^2)x' = 1 + x^2$;

(3) $(1 + x^2) = tx'$;

(4) $t/(1 + x) - xx'/(1 + x) = 0$, $x(1) = 1$;

(5) $y' \sin x = y \ln y$, $y(0) = 1$;

(6) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$;

(7) $x\sqrt{1 - y^2}\, dx + y\sqrt{1 - x^2}\, dy = 0$, $y(0) = 1$;

(8) $2\sqrt{y}\, dx = dy$, $y(0) = 1$;

(9) $y \ln y\, dx + x\, dy = 0$, $y(1) = 1$;

(10) $(a^2 + y^2)\, dx + 2x\sqrt{ax - x^2}\, dy = 0$, $y(a) = 0$.

→ **12.3.12. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x' = (t + x)/(t + 2x)$;

(2) $x' = (x^2 - t^2)/(2tx)$;

(3) $(t^2 + x^2)x' = tx$;

(4) $(x + y)\, dx - (x - y)\, dy = 0$;

(5) $(3x^2 + 6xy + 3y^2)\, dx + (2x^2 + 3xy)\, dy = 0$;

(6) $x(x - 2y)y' = y(y - 2x)$;

(7) $(x^2 + y^2)y' = xy$.

→ **12.3.13. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x' = (t - x)^2 + 1$;

(2) $x' = \sin(t - x)$;

(3) $x' = at + bx + c$;

(4) $x'^2 = at + bx + c$;

(5) $(t + x)^2 x' = a^2$.

→ **12.3.14. Feladat [10].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y + 1)\, dy = 0$;

(2) $(x + y - 2)\, dx + (x - y + 4)\, dy = 0$;

(3) $(2x - y + 1)\, dx + (2y - x - 1)\, dy = 0$.

→ **12.3.15. Feladat [6].** Egy csónak sebességét a víz ellenállása a sebességgel arányosan csökkenti. A csónak kezdősebessége 1,5 m/s, és 4 s múlva 1 m/s. Mikorra csökken a csónak sebessége 1 cm/s-ra? Mekkora utat tesz meg a megállásig?

→ **12.3.16. Feladat [6].** Oldjuk meg az előző feladatot, ha az ellenállás a sebesség négyzetével arányos!

**12.3.17. Feladat [6].** Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre az érintési pont és az érintő $x$ tengellyel vett metszespontjának távolsága állandó!

**12.3.18. Feladat [6].** Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre az érintési pont ugyanolyan távol van az origótól, mint az érintő $y$ tengellyel vett metszespontjától!

**12.3.19. Feladat [6].** Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre az érintési pont, az $x$ tengelyre vett vetülete, és az érintő $x$ tengellyel vett metszéspontja által meghatározott háromszög területe állandó!

**12.3.20. Feladat [6].** Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyekre az érintési pont, az $x$ tengelyre vett vetülete, és az érintő $x$ tengellyel vett metszéspontja által meghatározott háromszög befogóinak összege állandó!

**12.3.21. Lineáris egyenletek.** Az $x' = f(t)x + g(t)$ *inhomogén lineáris egyenlet* minden teljes megoldása előáll $c\varphi + \varphi_0$ alakban, ahol $\varphi_0$ az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldása, $\varphi$ pedig az $x' = f(t)x$ *homogén lineáris egyenlet* egy nem nulla teljes megoldása. (Ezt később bebizonyítjuk.) Utóbbi szeparábilis, így megoldásait könnyen megkaphatjuk. Az inhomogén egyenlet egy megoldását mindig megkaphatjuk a „konstans variálásával" $c(t)\varphi(t)$ alakban, ahol $\varphi$ a homogén egyenlet egy nem nulla megoldása. (Ezt is bebizonyítjuk később.) Lineárisra visszavezethető az

$$x' + f(t)x + g(t)x^{\alpha} = 0$$

*Bernoulli-egyenlet* $y = x^{1-\alpha}$ helyettesítéssel. Az

$$x' = f(t)x^2 + g(t)x + h(t)$$

*Riccati-egyenlet* egy $\varphi$ megoldását ismerve, $x = y + \varphi$ helyettesítéssel $y$-ra egy Bernoulli-egyenletet kapunk. Egyébként egy Riccati-egyenletből

$$x = \frac{1}{yf(t)}$$

helyettesítéssel $y$-ra egy másik Riccati-egyenletet kapunk, amelyet néha könnyebb megoldani.

→ **12.3.22. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $tx' + 2x = 3t$, $x(0) = 0$;

(2) $tx' + 3x = t^2$;

(3) $x' + ax = e^{mt}$;

(4) $(1 + t^2)x' - 2tx = (1 + t^2)^2$;

(5) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;

(6) $y' + x^2y = x^2$, $y(0) = 1$.

$\to$ **12.3.23. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x' + x = -1/x$;

(2) $x' + x + x^2 = 0$;

(3) $xy' + y = y^2 \ln x$;

(4) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

(5) $y^{n-1}(ay' + y) = x$.

$\to$ **12.3.24. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $2y' - 3y/x = 3xy^{1/2}$;

(2) $y - y' = (1 + x)y^2$;

(3) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$;

(4) $y' + y^2 = 2x^{-2}$;

(5) $y' + y^2 = x^{-4}$;

(6) $y' = e^x y^2 - y + e^{-x}$.

**12.3.25. Feladat [5].** Egy folyadékkal telt pohár tengelye körül forog. Milyen lesz a felszín alakja?

**12.3.26. Feladat [5].** Sorbakapcsolt tekercset és ellenállást tartalmazó körben áram folyik. Határozzuk meg, hogyan változik az áramerősség!

**12.3.27. Feladat [5].** Sorbakapcsolt tekercsre és ellenállásra állandó feszültséget kapcsolunk. Határozzuk meg, hogyan nő az áramerősség!

**12.3.28. Feladat [6].** Sorbakapcsolt tekercsre és ellenállásra szinuszos feszültséget kapcsolunk. Határozzuk meg, hogyan változik az áramerősség!

**12.3.29. Feladat [6].** Egy 10 l vizet tartalmazó tartályba 2 l/perc sebességgel folyik egy 30% sót tartalmazó oldat, azonnal elkeveredik, és a keverék ugyanekkora sebességgel kifolyik. Mennyi sót tartalmaz a tartály 5 perc múlva?

**12.3.30. Feladat [6].** Egy 200 m$^3$ térfogatú szobában 0,15% a levegő $CO_2$-tartalma. Egy ventillátor percenként 20 m$^3$ friss, 0,04% $CO_2$ tartalmú levegőt hajt a a szobába, amely azonnal elkeveredik. Mennyi idő alatt csökken a szoba $CO_2$-tartalma a harmadára?

**12.3.31. Feladat [7].** Tiszta rádióaktív A anyag bomlik B, majd C anyaggá. Mikor lesz B koncentrációja maximális?

**12.3.32. Feladat [8].** Etil-formiát elszappanosítási sebességállandója 0,002/s, keletkezési állandója 0,001/s. Kezdetben az alkohol, a sav és a víz koncentrációja egységnyi a formiáté nulla. Hogyan alakul az idő függvényében?

**12.3.33. Feladat [11].** Határozzuk meg az alábbi görbeseregek ortogonális trajektóriáit, azaz a görbesereg görbéit merőlegesen metsző görbéket:

(1) $y^2 = 2cx$, $c \in \mathbb{R}$;

(2) $y^2 - 2cx + c^2 = 0$, $c \in \mathbb{R}$;

(3) a komplex sík $-1$ és 1 pontjain átmenő körsereg;

(4) a polárkoordinátákban adott $r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\varphi + a^{2n} = c^{2n}$, $c \in \mathbb{R}$ görbesereg.

⋆ **12.3.34. Feladat [10].** Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyek az

$$x^2 + y^2 = a^2 \cosh^2 \frac{z}{a}$$

forgásfelület összes párhuzamos köreit 45°-os szög alatt metszik!

**12.3.35. Implicit egyenletek.** Az

$$x = f(t, x')$$

egyenlet a $p = x'$ paraméter bevezetésével

(1) $$x = f(t, p)$$

alakú, amit differenciálva,

$$\frac{dx}{dt} = p = g\Big(t, p, \frac{dp}{dt}\Big)$$

alakú egyenletet kapunk. Ezt megoldva, a kapott

$$h(t, p, c) = 0$$

alakú összefüggés, és (1) együtt a megoldást adják a $p$ paraméter függvényében. Szükség esetén $p$ a két egyenletből kiküszöbölhető.

Speciálisan, az

$$x = tf(x') + g(x')$$

*Lagrange-egyenlet* megoldható ezzel a módszerrel, mert $t$-re mint $p$ függvényére lineáris egyenletet kapunk.

Hasonlóan oldható meg a

$$t = f(x, x')$$

egyenlet is a $p = x'$ paraméter bevezetésével:

(2) $$t = f(x, p),$$

amiből most $x$ szerinti differenciálással

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p} = g\Big(x, p, \frac{dp}{dx}\Big)$$

alakú differenciálegyenletet kapunk. Ha ennek megoldása

$$h(x, p, c) = 0,$$

akkor ez az összefüggés és (2) együtt a megoldás egy paraméteres előállítása.

Az

$$f(tx' - x) = g(x')$$

*Clairaut-egyenlet* lineáris megoldásai az

$$f(tc - x) = g(c)$$

implicit egyenletből kaphatók. Ha az egyenletnek van ezektől különböző megoldása, amelyre tehát $x'' \neq 0$, akkor azt úgy kaphatjuk meg, hogy az egyenlet differenciálása és $x''$-vel való osztás után kapott

$$f'(tx' - x)t - g'(x') = 0$$

egyenletből és az eredeti egyenletből kiküszöböljük $x'$.

→ **12.3.36. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $t = xx' - tx'^2$;

(2) $x = 2tx' + xx'^2$;

(3) $x = 2tx' - ax'^3$;

(4) $x = 2tx' - x'^2$;

(5) $(tx' - x)^2 - x'^2 - 1 = 0$.

**12.3.37. Magasabbrendű egyenletek.** Az

$$f(t, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

hiányos egyenlet rendje a nyilvánvaló $y = x'$ helyettesítéssel csökkenthető.

Hasonlóan, az

$$f(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

most a független változót nem tartalmazó, úgynevezett *autonóm egyenlet* rendje is csökken, ha megoldását $x' = y(x)$ alakban keressük.

Ha az

$$f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

egyenlet $x \mapsto ax$ helyettesítéssel nem változik, akkor $x = e^y$ helyettesítéskor rendje csökken.

Hasonlóan, ha az egyenlet $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik, akkor $t = e^s$ helyettesítéssel autonóm lesz.

Végül, ha az egyenlet a $t \mapsto at$, $x \mapsto a^p x$ helyettesítések elvégzése után ugyanaz marad, akkor az $x = t^p y$ helyettesítés elvégzése után olyan egyenletet kapunk, amely a $t \mapsto at$ helyettesítéskor nem változik.

→ **12.3.38. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $x'' = \sin t/t$;

(2) $x'' = e^x$;

(3) $tx'' = x' + t\sin(x'/t)$;

(4) $xx'' - 2xx' \ln x = x'^2$;

(5) $x'' = 2xx'$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

(6) $x'' = x'^2 - x$, $x(1) = -1/4$, $x'(1) = 1/2$;

(7) $x'' = x'e^x$;

(8) $tx'' = x'$, $x(0) = x'(0) = 1$;

(9) $t - x''e^{x''} = 0$;

(10) $x''' = x''^2$;

(11) $x''' = 2xx'$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 9/2$.

→ **12.3.39. Feladat [12].** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

(1) $tx'' = 2xx'$;

(2) $(1-t)(xx'' - x'^2) + t^2x^2 = 0$;

(3) $t^2x'' + 3tx' = 1/x^3t^4$;

(4) $x' = t/(t^2x^2 + x^5)$;

(5) $x'(x' + x) = t(t + x)$;

(6) $(t^2 - t^3)x'' + (2t^2 - 4t)x' + (6 - 2t)x = 0$;

(7) $2xx'' - x'^2 = (x' - tx'')^2/3$.

**12.3.40. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy az $y'' + \sin y = 0$ differenciálegyenletnek van olyan megoldása, amely $x \to +\infty$ esetén $\pi$-hez tart!

**12.3.41. Vegyes módszerek.** Ha tudjuk, vagy sejtjük, hogy az egyenlet megoldásai milyen alakúak, akkor a *határozatlan együtthatók módszeré*vel, vagy más néven *próbafüggvények módszeré*vel találhatunk megoldásokat. A megoldásokat például polinom, exponenciális függvény, ezek szorzatainak lineáris kombinációja, stb., alakban kereshetjük, és a differenciálegyenletből egy egyenletrendszert kapunk az együtthatókra. A módszer egyik speciális esete, amikor a megoldást végtelen sor, például hatványsor alakban keressük.

Speciális egyenletek integrálására nagyon sok példa létezik. Ezen egyenletek sora tovább bővíthető, ha egy már megoldott egyenletben valamilyen helyettesítést alkalmazunk. Mindez azt az érzést keltheti, hogy csak ügyességünkön múlik, hogy egy adott differenciálegyenletet meg tudunk-e oldani. Ez nincs így. Mint Liouville bebizonyította, egészen egyszerű egyenletek, például az $x' = x^2 - t$ egyenlet általános megoldása sem áll elő elemi és algebrai függvények, valamint integráljaik véges kombinációjaként. Ha a fent megadott egyszerű módszerekkel nem sikerül valamely egyenletet megoldani, vagy a számítások nagyon hosszadalmasak, komputeralgebrai rendszerek (Maple, MuPAD, muMATH, MATHEMATICA, REDUCE, MACSYMA stb.) segíthetnek. Ha ez sem vezet célra, vagy a megoldás túl bonyolult és így használhatatlan, akkor közelítő módszereket használhatunk.

⋆ **12.3.42. Operátorszámítás.** Heaviside angol mérnök differenciálegyenletekkel foglalkozva, egyszerű és hatékony számítási módszert talált ki. Módszerét egy példán mutatjuk be. Jelölje $D$ a differenciálás „operátorát”, és tegyük fel, hogy az

$$x'' + 2x' + x = t^2 - 4t + 1,$$

azaz $D^2x + 2Dx + x = t^2 - 4t + 1$ differenciálegyenletet szeretnénk megoldani. „Kiemelve” $x$-et, és „osztva” $D^2 + 2D + 1 = (D+1)^2$-nel, majd $1/(D+1)^2$-t „sorbafejtve”,

$$\begin{aligned} x &= (1 - 2D + 3D^2 - 4D^3 + \dots)(t^2 - 4t + 1) \\ &= t^2 - 4t + 1 - 2(2t - 4) + 3 \cdot 2 = t^2 - 8t + 15, \end{aligned}$$

ami egy partikuláris megoldás. Módszerét sikerrel alkalmazta bonyolultabb esetekben is. Heaviside módszere matematikailag megalapozható a Fourier- (vagy Laplace-) transzformáció segítségével: az egyenlet transzformálása — konstanstól eltekintve — a független változóval való szorzásba viszi át a differenciálást, így az osztás és a sorbafejtés jogossá válik, és az inverz transzformációt alkalmazva, kapjuk az eredmény. Egy másik, elegáns módszer Heaviside ötletének megalapozására a Mikusiński-féle operátorszámítás: Vezessük be a lokálisan abszolút integrálható, az origótól balra nullát felvevő valós változós, komplex értékű függvények körében az $(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$ konvolúciót, mint szorzást: a pontonkénti összeadással egy kommutatív gyűrűt kapunk. A $\Theta(t) = 0$, ha $t \leq 0$ és $\Theta(t) = 1$, ha $t > 0$ *Heaviside-függvénnyel* való szorzásra $(\Theta * f)(t) = \int_0^t f(t)\,dt$, így $\Theta$ az „integrálás”. Azt várjuk, hogy ennek multiplikatív inverze a differenciálás, ez azonban nincs a gyűrűben, amely nem is egységelemes. Az úgynevezett Titchmarsh-tétel szerint — a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítva — a fenti gyűrű nullosztómentes, azaz $f * g = 0$ esetén $f = 0$ vagy $g = 0$. Ugyanúgy, ahogy az egész számokból képezzük a racionális számokat, ennek a gyűrűnek is képezhetjük a hányadostestét, amelynek elemeit, az $(f, g)$ párokat $f/g$ alakban írjuk ($g \not\equiv 0$), ezek a *Mikusiński-operátor*ok. Az $f_1/g_1$ és $f_2/g_2$ hányadost akkor azonosítjuk, ha $f_1 * g_2 = f_2 * g_1$. A Mikusiński-operátorok között ott vannak az eredeti függvények, mint $(f * g)/g$ alakú hányadosok, a komplex számok, mint $(\alpha g)/g$ alakú hányadosok ($g/g$ az egységelem), a differenciálás $D = g/(\Theta * g)$ operátora és hatványai, így ebben a testben a Heaviside-féle számítások elvégezhetők. Értelmezhető például $(D + \alpha)^\beta$, ha $\alpha$ és $\beta$ komplex számok, és segítségével megoldhatók az

$$(\alpha_2 t + \beta_2)x'' + (\alpha_1 t + \beta_1)x' + (\alpha_0 t + \beta_0)x = 0$$

*Laplace-féle differenciálegyenlet*ek ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$). Az operátorszámítás felhasználható bizonyos parciális differenciálegyenletek, például az egydimenziós hővezetési és hullámegyenlet, valamint a telegráfegyenlet megoldására is. Az *operátorszámítás* részletes tárgyalása megtalálható Mikusiński [35] könyvében. Megjegyezzük, hogy az operátorszámítás kapcsolatban áll a *disztribúcióelmélet*tel is.

**12.3.43. Feladat.** Egy folyóban a szemben lévő emberhez úszik egy kutya. Milyen pályát ír le?

## 12.4 Általános eredmények

*Jól ismert, hogy Cauchy volt az első matematikus, aki differenciálegyenletek* általános *típusaira, amelyekre explicit megoldás nem kapható, bizonyított be egzisztencia tételeket. Stratégiája az volt, hogy tekintette a különböző módszereket, amelyeket korábban vezettek be numerikus számolások céljára, és megmutatta, hogy ezek a módszerek valóban konvergens közelítő eljárást adnak, amelynek a határértéke megoldás.*

*Jean Dieudonné [4]*

**12.4.1. Ekvivalens integrálegyenlet.** *Az alapprobléma jelöléseivel, egy nyílt intervallumon értelmezett $\varphi \colon I \to \mathbb{K}^n$ függvény pontosan akkor megoldása a Cauchy-feladatnak, ha $\varphi$ olyan folytonos függvény, amelyre*

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, \varphi(s))\,ds, \quad \text{ha} \quad t \in I.$$

**Bizonyítás.** Ha $\varphi$ megoldása a Cauchy-feladatnak, akkor integrálással kapjuk, hogy az integrálegyenlet fennáll. Megfordítva, ha a $\varphi$ folytonos függvény eleget tesz az integrálegyenletnek, akkor a jobb oldalon az integrandusz folytonos, tehát $\varphi$ folytonosan differenciálható. Mindkét oldalt differenciálva kapjuk, hogy $\varphi$ megoldása a differenciálegyenletnek. A $t = \tau$ helyettesítés az integrálegyenletben mutatja, hogy a $\varphi$ megoldása a Cauchy-feladatnak is.

**12.4.2. Példa.** Legyen $x' = 2tx$, $x(0) = 1$. Ekkor az $x_0 \equiv 1$,

$$x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t 2tx_k(t)\,dt$$

iterációval

$$x_k(t) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!},$$

és így várható, hogy

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) = e^{x^2}$$

az integrálegyenlet megoldása.

**12.4.3. Közelítő megoldások.** Az alapprobléma jelöléseivel, ha $\varepsilon > 0$, akkor egy nem üres nyílt intervallumon értelmezett és ott szakaszonként folytonosan differenciálható $\varphi$ függvényt a differenciálegyenlet $\varepsilon$-*megoldás*ának nevezünk, ha

$$\Big|\varphi'(t) - f(t,\varphi(t))\Big| \le \varepsilon$$

minden olyan $t$-re, amelyre $\varphi'(t)$ létezik.

A közelítő megoldások hasznos bizonyítási eszközök, és fontos szerepet játszanak differenciálegyenletek numerikus módszerekkel történő megoldásánál.

**12.4.4. Peano-tétel.** *Az alapprobléma jelöléseivel, de csak az $f\colon D \to \mathbb{K}^n$ függvény folytonosságát feltéve, létezik olyan $x$ megoldása a differenciálegyenletnek, amelyre $\varphi(\tau) = \xi$.*

**Bizonyítás.** Válasszunk $a, b, K > 0$ valós számokat úgy, hogy

$$C = \Big\{(t,x)\colon |t-\tau| \le a, |x-\xi| \le b\Big\} \subset D,$$

továbbá

$$\sup\Big\{\big|f(t,x)\big|\colon (t,x) \in C\Big\} < K$$

teljesüljön, és legyen $c = \min\{a, b/K\}$. Definiáljuk az $x_m$ úgynevezett „Euler-féle töröttvonalakat”. Ezeket úgy kapjuk, hogy a $[\tau - c, \tau + c]$ intervallumot $2m$ egyenlő $h$ hosszúságú részre osztva, a $(\tau, \xi)$ pontból indulva, lineárisan haladunk az $f$ függvénynek a töréspontban felvett értéke által megadott irányba a következő töréspontig. A $K$ és $c$ megválasztásából következik, hogy bármelyik $x_m$ töröttvonal $C$-ben halad, és értékei a $\xi$-től nem esnek távolabb, mint $b$, mert deriváltjuk normája kisebb mint $K$. Legyen $\varepsilon > 0$. Megmutatjuk, hogy ha $m$ elég nagy, akkor $\varepsilon$-megoldást kapunk. Valóban, mivel $f$ egyenletesen folytonos a kompakt $C$-n, van olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, \tilde{t} \in [\tau - c, \tau + c]$, $|t - \tilde{t}| \le \delta$ és $x, \tilde{x}$ távolsága $\xi$-től legfeljebb $b$ és $|x - \tilde{x}| \le \delta$, akkor $\big|f(t,x) - f(\tilde{t},\tilde{x})\big| \le \varepsilon$ teljesül. Ha most $m$ olyan nagy, hogy $h < \delta$ és $hK < \delta$, akkor $x_m$ egy $\varepsilon$-megoldás.

Tekintsünk minden $\varepsilon = 1/k$-hoz egy $x_{m_k}$, $m_k > m_{k-1}$ Euler-féle töröttvonalat. Diagonális eljárással válasszuk ki ennek a sorozatnak egy olyan $x_{m_j}$ részsorozatát, amely az összes töréspontok halmazának pontjaiban konvergens. Felhasználva, hogy minden $x_m$ töröttvonalra $\left|x_m(t) - x_m(\tilde{t})\right| \leq K|t - \tilde{t}|$, ha $t, \tilde{t} \in [\tau - c, \tau + c]$, megmutatjuk, hogy a konvergencia egyenletes, és így a határfüggvény folytonos. Valóban, kiválasztva töréspontok egy véges halmazát, amely $\eta$-nál finomabb felosztása $[\tau - c, \tau + c]$-nek, ha ezekben a pontokban $x_{m_{j_1}}$ és $x_{m_{j_2}}$ eltérése legfeljebb $\eta$, akkor sehol sem több, mint $\eta + 2K\eta$. Mivel elég nagy $m$-re $x_m$ egy $\varepsilon$-megoldás, kielégíti az

$$\left|x_m(t) - \xi - \int_\tau^t f(s, x_m(s))\, ds\right| \leq c\varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ebből határátmenettel kapjuk, hogy a határfüggvény, legyen ez $x$, is kielégíti ezt az egyenlőtlenséget. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül, $x$ kielégíti a differenciálegyenlettel ekvivalens integrálegyenletet. Ebből következik, hogy $x$ megoldás a $]\tau - c, \tau + c[$ intervallumon. □

⋆ **12.4.5. Grönwall-lemma.** *Legyenek $u$ és $v$ a $[0, c]$ intervallumon adott folytonos pozitív függvények, $\omega$ pedig olyan, a $[0, c]$-n folytonos valós függvény, amelyre*

$$\omega(t) \leq u(t) + \int_0^t v(s)\omega(s)\, ds$$

*minden $t \in [0, c]$-re. Ekkor*

$$\omega(t) \leq u(t) + \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(r)\, dr\right) ds$$

*minden $t \in [0, c]$-re.*

A becslés könnyen megjegyezhető: ha a feltételben egyenlőség állna, és a szereplő függvények simák lennének, akkor az állítás egyenlőséggel az ekvivalens differenciálegyenlet megoldását adná. Ez a gondolat a bizonyítás alapja is. A bizonyítás egyben példát ad arra, hogyan lehet differenciálegyenlőtlenségeket megoldani.

**Bizonyítás.** Legyen

$$y(t) = \int_0^t v(s)\omega(s)\, ds.$$

Ekkor $y$ differenciálható, és

$$y'(t) - v(t)y(t) \leq u(t)v(t).$$

Legyen most

$$z(t) = y(t) \exp\left(-\int_0^t v(s)\, ds\right).$$

Ekkor az előző egyenlőtlenség a

$$z'(t) \leq u(t)v(t) \exp\left(-\int_0^t v(s)\, ds\right)$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. Mivel $z(0) = 0$, ebből

$$z(t) \le \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(-\int_0^s v(r)\,dr\right) ds,$$

és így $z$ definíciója szerint

$$y(t) \le \int_0^t u(s)v(s) \exp\left(\int_s^t v(r)\,dr\right) ds,$$

amiből $\omega(t) \le u(t) + y(t)$ miatt adódik az állítás. □

**12.4.6. Hibabecslési tétel.** *Az alapprobléma jelöléseivel, tegyük fel, hogy $\varphi_1$ egy $\varepsilon_1$-megoldása, $\varphi_2$ pedig egy $\varepsilon_2$-megoldása a differenciálegyenletnek az $I$ intervallumon, $\tau \in I$, $K > 0$ és $|f_x| \le K$ mindenütt a $D$-n, továbbá a*

$$D_t = \{x\colon (t, x) \in D\}$$

*„metszet" konvex minden $t \in I$-re. Ekkor*

$$\left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right| \le \left|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\right| e^{K|t-\tau|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(e^{K|t-\tau|} - 1)/K$$

*minden $t \in I$-re.*

⋆ **Bizonyítás.** Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\tau = 0$, és $t \ge 0$. A

$$\left|\varphi_1'(s) - f(s, \varphi_1(s))\right| \le \varepsilon_1$$

egyenlőtlenség integrálásával a $0 \le s \le t$ intervallumon

$$\left|\varphi_1(t) - \varphi_1(0) - \int_0^t f(s, \varphi_1(s))\,ds\right| \le \varepsilon_1 t,$$

és hasonlóan

$$\left|\varphi_2(t) - \varphi_2(0) - \int_0^t f(s, \varphi_2(s))\,ds\right| \le \varepsilon_2 t,$$

tehát

$$\left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right| \le \left|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)\right| + \left|\int_0^t \Big(f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\Big)\,ds\right| + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t.$$

Ebből $\omega(t) = \left|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\right|$ jelöléssel, a középérték-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\omega(t) \le \omega(0) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t + K\int_0^t \omega(s)\,ds$$

adódik, amiből a Grönwall-lemma felhasználásával kapjuk a keresett egyenlőtlenséget. □

**12.4.7. Létezési és egyértelműségi tétel.** *Az alapprobléma feltételei mellett minden Cauchy-feladatnak pontosan egy teljes megoldása létezik. Ha a differenciálegyenlet valamely teljes megoldása legalább egy pontban megegyezik egy megoldással, akkor annak folytatása. Ha két teljes megoldás legalább egy pontban megegyezik, akkor egybeesnek.*

⋆ **Bizonyítás.** Jelölje $\Psi$ a differenciálegyenlet azon $\varphi$ megoldásainak halmazát, amelyekre $\varphi(\tau) = \xi$, és legyen $\hat{\varphi} = \bigcup_{\varphi \in \Psi} \varphi$. Megmutatjuk, hogy $\hat{\varphi}$ függvény. Ha $\varphi_1, \varphi_2 \in \Psi$, $\varphi_1$ az $I_1$-en, $\varphi_2$ az $I_2$-n van értelmezve, de $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $I_1 \cap I_2$-n, akkor az $a, b \in I_1 \cap I_2$, $a < \tau < b$ számok megválaszthatók úgy, hogy $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $]a, b[$-n. Válasszunk a $\varphi_1([a, b])$ kompakt halmaz minden pontjához olyan nyílt környezetet, amelyen $f_x$ korlátos. Az $r > 0$-t ezen lefedés Lebesgue-számának választva, a

$$C = \Big\{(t, x) \colon a < t < b, \big|x - \varphi_1(t)\big| < r\Big\}$$

„hengeren” $f_x$ korlátos. A $\varphi_2$ függvény folytonossága miatt van olyan

$$a \leq a_0 < \tau < b_0 \leq b,$$

hogy $\big|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big| < r$, de $\varphi_1 \neq \varphi_2$ az $]a_0, b_0[$ intervallumon. Ez azonban ellentmond az előző tételnek. Így $\hat{\varphi}$ függvény. Nyilván $\hat{\varphi}$ teljes megoldás, $\hat{\varphi}(\tau) = \xi$, és $\hat{\varphi}$ az egyetlen teljes megoldás. Ha most a $\hat{\varphi}$ teljes megoldás és a $\varphi$ megoldás egy pontban egybeesnek, jelölje $\tau$ ezt a pontot, és legyen $\varphi(\tau) = \xi$. Mivel $\varphi \cup \hat{\varphi} \supset \hat{\varphi}$, $\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \cup \varphi$, azaz $\varphi \subset \hat{\varphi}$. Ha $\varphi$ is teljes megoldás, akkor $\hat{\varphi} \subset \varphi$ is teljesül. □

**12.4.8. A teljes megoldás határtól határig halad.** *Az alapprobléma jelöléseivel, legyen $C \subset D$ egy kompakt halmaz, és $x$ a differenciálegyenlet egy teljes megoldása, amelynek értelmezési tartománya $]a, b[$. Ekkor léteznek olyan $a < a_0 < b_0 < b$ számok, hogy $a < t < a_0$, illetve $b_0 < t < b$ esetén $\big(t, x(t)\big) \notin C$.*

⋆ **Bizonyítás.** Elég a felső végponttal foglalkozni. Ha $b = \infty$, akkor az állítás nyilvánvaló. Egyébként válasszunk olyan $r > 0$ számot, amelyre $C$-től $D$ komplementerének minden pontja $2r$-nél nagyobb távolságban van. A $C$-től $r$-nél nem nagyobb távolságra lévő pontok $C^*$ halmaza kompakt, így rajta $f$ korlátos $K > 0$-val. Ha $p$, $q$ pozitív számok úgy, hogy $p + q \leq r$, akkor a Peano-tétel szerint $c = \min\{p, q/K\}$-ra minden $(\tau, \xi) \in C$ kezdőértékkel létezik megoldás $]\tau - c, \tau + c[$-n. Megmutatjuk, hogy $b_0 = b - c$ választható. Valóban, ha egy $b_0 < \tau < b$ értékre $\big(\tau, x(\tau)\big) \in C$ lenne, akkor az előző tétel szerint $x$ a $b$-nél nagyobb értékekre is értelmezve lenne. □

## 12.5 Lineáris differenciálegyenletek

*A XVIII. században a differenciálegyenletekről írt nagyszámú munkák közül kiemelkednek Euler (1707–1783) és Lagrange (1736–1813) művei. Ezekben a munkákban dolgozták ki mindenekelőtt a kis rezgések elméletét, következésképpen a lineáris differenciálegyenlet-rendszerek elméletét is, mellékesen kialakultak a lineáris algebra alapfogalmai (az n dimenziós eset sajátértékei és vektorai). A lineáris operátor karakterisztikus egyenletét sokáig szekuláris egyenletnek nevezték, mert éppen egy ilyen egyenletből határozták meg a Lagrange-féle kis rezgések elmélete alapján a bolygómozgások szekuláris (évszázados, azaz az éves mozgáshoz képest lassú) perturbációit. Newtont követve először Euler és Lagrange majd Gauss (1777–1855) fejlesztette ki a rezgéselmélet módszereit.*

*V. I. Arnold [1]*

**12.5.1. Lineáris alapprobléma.** Legyen $I$ egy nyílt intervallum,

$$A: I \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n), \qquad b: I \to \mathbb{K}^n$$

legyenek folytonos függvények. Tekintsük az $x' = A(t)x + b(t)$ differenciálegyenletet (a $D = I \times \mathbb{K}^n$ tartományon). Az egyszerűbb hivatkozás kedvéért ezt a differenciálegyenletet a fenti feltételek mellett *lineáris normál egyenlet*nek fogjuk nevezni. A megfelelő *homogén lineáris normál egyenlet* az $x' = A(t)x$ egyenlet. Ezek a differenciálegyenletek nyilvánvalóan kielégítik az létezési és egyértelműségi tétel feltételeit.

**12.5.2. Tétel.** *Az $x' = A(t)x + b(t)$, $t \in I$ lineáris normál differenciálegyenlet minden teljes megoldása az egész $I$ intervallumon van értelmezve.*

⋆ **Bizonyítás.** Legyen $c, d \in I$, $c < \tau < d$, és $x$ egy teljes megoldás, amely értelmezve van a $]c, d[$ intervallumon, $x(\tau) = \xi$. Az

$$\varepsilon = \sup\Big\{\big|b(t)\big|: c \le t \le d\Big\}, \quad K > \sup\Big\{\big|A(t)\big|: c \le t \le d\Big\}$$

konstansokkal, mivel az azonosan nulla függvény $\varepsilon$-megoldása az egyenletnek,

$$\big|x(t)\big| \le |\xi|e^{K|t-\tau|} + \varepsilon\big(e^{K|t-\tau|} - 1\big)/K,$$

ha $c < t < d$. A jobb oldal korlátos, így $x$ is korlátos $]c, d[$-n, amiből $x(]c, d[)$ lezártja kompakt halmaz. Mivel a teljes megoldás határtól határig halad, „kibújik” minden kompakt halmazból, így $d$ nem lehet az $x$ értelmezési tartományának felső határa, $c$ pedig nem lehet az alsó határa. Ebből következik, hogy $x$ az egész $I$-n értelmezve van. □

**12.5.3. Szuperpozíció, komplexifikálás.** Lineáris egyenletek tanulmányozásánál igen hasznos a *szuperpozíció elve*: Ha $x_1$ az $x' = A(t)x + b_1(t)$ az $x_2$ pedig az $x' = A(t)x + b_2(t)$ egyenlet egy megoldása, $\alpha_1, \alpha_2$ skalárok, akkor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ megoldása az $x' = A(t)x + \alpha_1 b_1(t) + \alpha_2 b_2(t)$ egyenletnek. Speciálisan, az $x' = A(t)x$ homogén lineáris egyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak, és az inhomogén $x' = A(t)x + b(t)$ egyenlet egy $x_0$ megoldásához hozzáadva a homogén egyenlet összes megoldását, az inhomogén egyenlet összes megoldását megkapjuk.

A komplex számtest algebrai zártsága miatt gyakran hasznos komplex megoldásokat keresni. Ehhez $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{C}^n$ részének tekintjük és egy $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ lineáris operátort kiterjesztünk egy $A_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n; \mathbb{C}^n)$ komplex lineáris operátorrá az

$$A_{\mathbb{C}}(z) = A_{\mathbb{C}}(x + iy) = A(x) + iA(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad z = x + iy$$

definícióval; ez annak felel meg, hogy $A$ mátrixát komplex elemű mátrixnak tekintjük, az $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat pedig $\mathbb{C}^n$-belieknek. Ha $z = x + iy$ a valós inhomogén egyenlet egy komplex megoldása, akkor $\overline{z} = x - iy$ is komplex megoldása a valós inhomogén egyenletnek, és $(z + \overline{z})/2$ az inhomogén, $(z - \overline{z})/(2i)$ pedig a homogén egyenletnek egy-egy valós megoldása.

Másrészt, minden komplex lineáris tér valós lineáris térnek is tekinthető, kétszer akkora dimenzióval, így a komplex eset sokszor visszavezethető a valósra. Ezért sok tételt elég a valós esetben bebizonyítani.

Ez a két trükk csak a linearitáson múlik, ezért nem csak differenciálegyenletekre, hanem más lineáris egyenletekre is alkalmazható.

**12.5.4. Alaprendszer.** A lineáris alapprobléma jelöléseivel, a szuperpozíció elve szerint a homogén lineáris

$$x' = A(t)x, \qquad t \in I$$

egyenlet teljes megoldásai lineáris teret alkotnak. Ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ teljes megoldásoknak egy lineárisan független rendszere, akkor minden $\tau \in I$-re a $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_r(\tau)$ vektorok lineárisan függetlenek. Valóban, ha

$$c_1\varphi_1(\tau) + \cdots + c_r\varphi_r(\tau) = 0$$

teljesülne, akkor $c_1\varphi_1 + \cdots + c_r\varphi_r$ az azonosan nulla megoldással egyezne meg. A homogén rendszer teljes megoldásainak egy lineárisan független $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ rendszerét *alaprendszer*nek nevezzük. Egy tetszőleges $\varphi$ teljes megoldás előáll egy alaprendszer függvényeinek lineáris kombinációjaként, azaz egy alaprendszer bázis a megoldások terében: Valóban, ha

$$\varphi(\tau) = c_1\varphi_1(\tau) + \cdots + c_n\varphi_n(\tau),$$

akkor $\varphi$ és $c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ ugyanazon kezdeti feltételnek eleget tévő teljes megoldások, azaz egybeesnek $I$-n.

Az alábbi tétel mutatja, hogy van alaprendszer, így a megoldástér dimenziója $n$, és egy alaprendszer meghatározása ekvivalens az

$$S' = A(t)S, \qquad S(\tau) = \mathbb{I}$$

operátor értékű $S\colon I \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ függvényekre vonatkozó Cauchy-feladat, a *rezolvens egyenlet* egyetlen teljes megoldásának meghatározásával. A rezolvens egyenlet megoldásának (mint operátornak) a mátrixát *alapmátrix*nak nevezzük.

**12.5.5. Tétel.** *Az előző pont jelöléseivel, ha $\xi \in \mathbb{K}^n$, akkor $t \mapsto S(t)\xi$ a homogén $x' = A(t)x$ egyenlet $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételhez tartozó teljes megoldása. Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ egy bázisa $\mathbb{K}^n$-nek, akkor a $t \mapsto S(t)\xi_j\varphi_j(t)$ függvények alaprendszert alkotnak. Megfordítva, ha $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ egy alaprendszer, legyen $\Psi(t)$ olyan lineáris leképezés, amely mátrixának oszlopai $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Ekkor $t \mapsto \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}$ a rezolvens egyenlet megoldása.*

**Bizonyítás.** Tekintsük a rezolvens egyenlet egy teljes megoldását. Mivel az egyenlet lineáris, $S$ az egész $I$-n van értelmezve. Bármely $\xi \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\frac{d}{dt}S(t)\xi = \frac{dS(t)}{dt}\xi = A(t)S(t)\xi$$

és $S(\tau)\xi = \xi$. Az unicitás miatt így $\varphi(t) = S(t)\xi$ az $x(\tau) = \xi$ kezdeti feltételhez tartozó $\varphi$ teljes megoldása az $x' = A(t)x$ egyenletnek. Minden $\xi_i$-re alkalmazva ezt, kapjuk, hogy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ alaprendszer.

Megfordítva, $t \mapsto \Psi(t)\Psi(\tau)^{-1}$ a rezolvens egyenlet megoldása. □

**12.5.6. A konstans variálása.** Keressük az inhomogén

$$x' = A(t)x + b(t), \qquad t \in I$$

differenciálegyenlet egy megoldását az alapmátrix ismeretében. Ha $S$ a rezolvens egyenlet egy megoldása, keressük az inhomogén egyenlet megoldását

$$\varphi(t) = S(t)c(t), \qquad c\colon I \to \mathbb{K}^n$$

alakban. Mivel

$$\varphi'(t) = S'(t)c(t) + S(t)c'(t),$$

és $S'(t) = A(t)S(t)$, azt kapjuk, hogy $S(t)c'(t) = b(t)$, azaz $c'(t) = S(t)^{-1}b(t)$, aminek eleget tesz a

$$c(t) = \int_\tau^t S(s)^{-1}b(s)\,ds$$

függvény, és így

$$\varphi(t) = S(t)\int_\tau^t S(s)^{-1}b(s)\,ds$$

Ezzel a heurisztikus gondolatmenettel valóban megoldást kapunk és az alábbi tételhez jutunk:

**12.5.7. Tétel.** *A lineáris alapprobléma jelöléseivel az inhomogén egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat teljes megoldása*

(1)
$$\varphi(t) = S(t)\xi + S(t)\int_\tau^t S(s)^{-1}b(s)\,ds, \quad t \in I,$$

*ahol $S$ a rezolvens egyenlet egyetlen teljes megoldása. Ha $\xi$ befutja $\mathbb{K}^n$-et, akkor az inhomogén egyenlet összes teljes megoldását megkapjuk.*

**Bizonyítás.** Nyilván $\varphi(\tau) = \xi$. A szuperpozíció elve szerint az inhomogén egyenlet minden teljes megoldását megkapjuk, ha az inhomogén egyenlet egy rögzített teljes megoldásához hozzáadjuk a homogén egyenlet valamely teljes megoldását. A jobb oldal első tagja teljes megoldása a homogén egyenletnek, a második tag pedig az inhomogén egyenletnek. $\square$

**12.5.8. A csatolás csökkentése.** Ha az együtthatómátrix nem függ $t$-től, azaz a differenciálegyenlet

$$x' = Ax + b(t), \qquad t \in I$$

alakú, az egyenlet a csatolás csökkentésével megoldható. Válasszuk meg a $T$ lineáris transzformációt úgy, hogy $TAT^{-1} = B$ felső (vagy alsó) háromszög-mátrixú (például Jordan-normálalakú) legyen. Az $y = Tx$ helyettesítéssel

$$y' = By + Tb(t),$$

és az egyik egyenlet csak egy ismeretlen függvényt tartalmaz. Ezzel kezdve az egyenletrendszer fokozatos visszahelyettesítéssel könnyen megoldható.

**12.5.9. Definíció.** *Exponenciális polinom*nak nevezünk egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt, ha előállítható

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} p_j(t)$$

alakban, ahol $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $p_j$ pedig komplex együtthatós polinom, ha $j = 1, 2, \ldots, n$.

$\star$ **12.5.10. Tétel.** *Tegyük fel, hogy a*

$$\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda_j t} p_j(t), \qquad \lambda_j \neq \lambda_k \quad \text{ha} \quad j \neq k$$

*exponenciális polinom nulla egy $I$ nemüres nyílt intervallum minden pontjában. Ekkor $p_j(t) \equiv 0$, ha $j = 1, 2, \ldots, n$, azaz a*

$$t \mapsto t^k e^{\lambda t}, \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ k = 0, 1, \ldots$$

*komplex értékű függvények lineárisan függetlenek $I$-n.*

**Bizonyítás.** Az $n = 1$ esetben $e^{-\lambda_1 t}$-vel szorozva, kapjuk, hogy $p_1(t) \equiv 0$ az $I$ intervallumon, így mindenütt. Tegyük fel indirekt, hogy $n-1$-re igaz az állítás, de $n$-re nem. Szorozva $e^{-\lambda_n t}$-vel

$$\sum_{j=1}^{n-1} e^{(\lambda_j - \lambda_n)t} p_j(t) + p_n(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t \in I.$$

Mivel $e^{\lambda t} p(t)$ deriválásakor a polinom főegyütthatója mindig $\lambda$-val szorzódik, addig differenciálva, amíg $p_n(t)$ deriváltja nulla nem lesz, ellentmondásra jutunk. $\square$

**12.5.11. Tétel.** *A lineáris alapprobléma jelöléseivel, ha $b$ minden koordinátája exponenciális polinom, akkor $x' = Ax + b(t)$ minden megoldása is exponenciális polinom. Ha $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a $b$ koordinátáiban legfeljebb $r$-edfokú, és $\lambda$ az $A$-nak $k$-szoros ($k \geq 0$) sajátértéke, akkor $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a megoldás koordinátáiban legfeljebb $r + k$-adfokú. (Azonosan nulla polinom foka $-1$.)*

$\star$ **Bizonyítás.** A csatolás csökkentésére az $y = Tx$ komplex lineáris helyettesítéssel az $y' = By + Tb(t)$ egyenletre térünk át, amelyben $B$ alsó háromszög mátrix. Nyilván $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja a $Tb(t)$ koordinátáiban is legfeljebb $r$-edfokú. Ugyanezen okból elég megmutatnunk, hogy az $y$ megoldás $y_i$ koordinátaiban az $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja legfeljebb $r + k$-adfokú. Haladjunk $i$ szerinti indukcióval. Az $i$-edik egyenlet $y_i' = \lambda' y_i + E_i(t)$ alakú, ahol $E_i$ exponenciális polinom. A $\lambda' = \lambda$ eset az egyenletek közül pontosan $k$ darabban lép fel. Megmutatjuk, hogy ha az $i$-edik egyenletben $\lambda' = \lambda$, akkor $e^{\lambda t}$ együttható-polinomja $y_i$-ben legfeljebb eggyel magasabb fokú, mint az $E_i$-ben, ha pedig $\lambda' \neq \lambda$, akkor nem magasabb fokú. Ebből adódik az állítás, mert $E_i$ a $Tb$ koordinátáinak és az $y_j$, $j < i$ függvényeknek a lineáris kombinációja. Az $i$-edik egyenlet megoldása a konstans variálásával $c(t)e^{\lambda' t}$ alakú, ahol

$$c(t) = \int E_i(t) e^{-\lambda' t}\, dt.$$

Felhasználva, hogy az integrandus exponenciális polinom, amelyben az előző tétel bizonyítása szerint csak a nulla kitevőhöz tartozó polinom foka csökken eggyel differenciáláskor, a többi nem változik, kapjuk, hogy integráláskor meg csak ennek a foka nőhet eggyel. Így $y_i$-ben csak az $e^{\lambda' t}$ együttható-polinomjának foka nagyobb eggyel, mint $E_i$-ben. $\square$

**12.5.12. Konstansegyütthatós egyenlet.** Az $x' = Ax$ konstansegyütthatós homogén lineáris egyenlet esetén az előző tétel alapján egy alaprendszer meghatározható a határozatlan együtthatók módszerével. A konstans variálásával megkaphatjuk az $x' = Ax + b(t)$ inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ha $b$ koordinátái exponenciális polinomok, akkor gyakran jobb erre a célra is az előző tételt használni, és a határozatlan együtthatók módszerével dolgozni. A szuperpozíció elve szerint az $A$ minden $\lambda$ sajátértékére külön dolgozhatunk.

→ **12.5.13. Feladat [8].** Oldjuk meg:

(1)
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2, & x_1(0) = 5, \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 & x_2(0) = 5; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 2x_2, & x_1(0) = -3, \\ x_2' = -8x_1 - 3x_2, & x_2(0) = 2. \end{cases}$$

**12.5.14. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenlet.** Legyen $I$ egy nyílt intervallum, $a_i, b\colon I \to \mathbb{K}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folytonos függvények. A skalár értékű $x$-re vonatkozó

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x^{(n-i)} + b(t)$$

*n-edrendű lineáris egyenlet* teljes megoldásait a szuperpozíció elve szerint úgy kaphatjuk, hogy az egyenlet egy teljes megoldásához hozzáadjuk a megfelelő *n-edrendű homogén lineáris*

$$x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) x^{(n-i)}$$

egyenlet összes teljes megoldását. Az eredeti egyenlet az átviteli elv szerint egy lineáris differenciálegyenlet rendszerrel ekvivalens, amelyhez a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_n(t) & a_{n-1}(t) & a_{n-2}(t) & \ldots & a_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

mátrix, illetve vektor tartozik. Az *alaprendszer* itt is a homogén egyenlet $I$-n értelmezett megoldásainak egy $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ lineárisan független rendszere. A homogén egyenlet minden megoldása ezek lineáris kombinációja. A $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ teljes megoldások pontosan akkor alkotnak alaprendszert, ha a

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa, a

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)(t)$$

*Wronski-determináns* nem nulla valamely $t \in I$-re. Ha ez a determináns egy $t$-re nem nulla, akkor egyetlen $t$-re sem. A *konstans variálás*ának módszerét alkalmazva itt a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(j)}(t) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) = b(t)$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk a $c_i'$ függvényekre, amelynek determinánsa éppen a Wronski-determináns, ami alaprendszer esetén nem nulla.

Ha az $n$-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek ismerjük egy $\varphi$ nem nulla megoldását, akkor az egyenlet rendje $x(t) = \varphi(t) \int_\tau^t y(s)\,ds$ helyettesítéssel csökkenthető.

**12.5.15. Tétel.** *Legyen*

$$x^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{(j)}$$

*egy $n$-edrendű konstansegyütthatós lineáris egyenlet, és legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ a*

$$z^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

karakterisztikus egyenlet *egy $k$-szoros gyöke. Ekkor a*

$$t \mapsto t^j e^{\lambda t} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1)$$

*függvények a differenciálegyenlet (komplex) megoldásai.*

⋆ **Bizonyítás.** A

$$p(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$$

polinomot $p(z) = q(z)(z-\lambda)^k$ alakban írhatjuk. Ha $D$ jelöli a differenciálás operátorát a végtelen sokszor differenciálható függvények vektorterén, akkor a differenciálegyenlet ezen a téren

$$q(D)(D - \lambda\mathbb{I})^k x = 0$$

alakba írható. Mivel

$$(D - \lambda\mathbb{I})\frac{t^j}{j!}e^{\lambda t} = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t},$$

ha $j > 0$ és $(D - \lambda\mathbb{I})e^{\lambda t} \equiv 0$, látható, hogy a megadott függvények valóban megoldások. □

**12.5.16. Megjegyzés.** A $p$ minden zérushelyére felírva a $t^j e^{\lambda t}$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ függvényeket, a differenciálegyenlet egy alaprendszerét kapjuk. Valós $a_j$ együtthatók esetén könnyen áttérhetünk valós alaprendszerre úgy, hogy a nem valós $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ zérushelyekhez tartozó függvényeket kombináljuk:

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} + t^j e^{\overline{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \cos \beta t,$$

$$\frac{1}{2}(t^j e^{\lambda t} - t^j e^{\overline{\lambda} t}) = t^j e^{\alpha t} \sin \beta t.$$

**12.5.17. Az adjungált egyenlet.** A lineáris normál egyenletben az egyenletek számát csökkenthetjük az $y' = -A(t)^* y$ *adjungált egyenlet* megoldásai segítségével: $t \mapsto \langle x(t), y(t) \rangle$ konstans az $x' = A(t)x$ homogén egyenlet bármely megoldására. Valóban,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle x(t), y(t) \rangle &= \langle x'(t), y(t) \rangle + \langle x(t), y'(t) \rangle \\ &= \langle A(t)x(t), y(t) \rangle + \langle x(t), -A(t)^* y(t) \rangle = 0.\end{aligned}$$

Hasonlóan az $x' = A(t)x + b(t)$ inhomogén egyenlet bármely megoldására

$$\langle x(t), y(t) \rangle = c + \int \langle b(t), y \rangle \, dt$$

valamely $c$ konstanssal.

**12.5.18. Adjungált egyenlet magasabbrendű lineáris egyenletre.** Az

$$A(t)x = \sum_{j=0}^{n} a_j(t) x^{(j)} = b(t)$$

lineáris egyenlet rendjének csökkentésére az

$$A^*(t) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left(\overline{a_j(t)} y\right)^{(j)} = 0$$

*adjungált egyenlet* megoldásait használhatjuk: fennáll a *Lagrange-azonosság*,

$$\overline{y} A(x) - \overline{A^*(y)} x = \frac{d}{dt}\left( \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left(a_k(t)\overline{y}\right)^{(j)} x^{(k-j-1)} \right),$$

amit például parciális integrálásokkal kaphatunk. Innen ha $A^*(x)(t) \equiv 0$ és $A(x)(t) \equiv 0$, akkor a jobb oldali zárójelben álló kifejezés egy $c$ konstans, ha pedig $A(x)(t) = b(t)$, akkor a kifejezés $c + \int \overline{y} b(t) \, dt$.

**12.5.19. Vegyes módszerek.** A $\sum_{j=0}^{n} a_j(t) x^{(j)} = b(t)$ lineáris egyenlet rendjének csökkentésére megpróbálhatjuk integrálni az egyenlet mindkét oldalát. Ha a bal oldalon parciális integrálások után nem marad olyan tag, amely $x$ primitív függvényét tartalmazza, akkor egy eggyel kisebb rendű lineáris egyenletet kaptunk. Esetleg hasznos lehet az egyenletet végigszorozni egy $t$-től függő függvénnyel.

Ha $a_j(t) = c_j t^j$, akkor *Euler-egyenlet*ről beszélünk, és $t = e^s$ helyettesítéssel konstansegyütthatós egyenletet kapunk.

$\to$ **12.5.20. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $xy'' + 2y' - xy = 0$;

(2) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$;

(3) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$;

(4) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$;

(5) $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0$;

(6) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0$.

$\to$ **12.5.21. Feladat [10].** Oldjuk meg:

(1) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$;

(2) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$;

(3) $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + 1/x$.

$\to$ **12.5.22. Feladat [6].** Oldjuk meg:

(1) $y'' - y - 2y = 0$;

(2) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

(3) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

$\to$ **12.5.23. Feladat [5].** Határozzuk meg az $y'' + y = 0$ egyenletnek azt a megoldását, amely a 0 helyen 0, a $\pi/2$ helyen 1. (*Peremérték probléma.*)

$\to$ **12.5.24. Feladat [7].** Oldjuk meg:

(1) $y'' - 2y/x^2 = 0$;

(2) $y'' - 3y'/x + 5y/x^2 = 0$;

(3) $y'' + 7y'/x + 9y/x^2 = 0$.

# 13
# Funkcionálanalízis

*A módszerek és gondolatok, amelyek lassan felgyűltek a XIX. század folyamán, 1900 és 1910 között hirtelen kikristályosodtak. Ez lényegében négy alapvető dolgozat publikálásának köszönhető:*
*Fredholm 1900-as dolgozata az integrálegyenletekről;*
*Lebesgue disszertációja 1902-ből az integrálásról;*
*Hilbert 1906-os dolgozata a spektrálelméletről;*
*Fréchet disszertációja 1906-ból a metrikus terekről.*

*Jean Dieudonné [4]*

*1926 őszén a fiatal Neumann János (1903–1957) Göttingenbe érkezett, hogy hivatalba lépjen, mint Hilbert asszisztense. Ezek voltak azok a lázas évek, amelyekben a kvantummechanika nyaktörő sebességgel fejlődött, és néhány hetenként egy új gondolat bukkant fel a láthatáron. Az új elméletet kifejlesztő fizikusok megfelelő matematikai eszközöket kerestek, és sikeresen próbálkoztak végtelen mátrixokkal, figyelmen kívül hagyva a konvergenciát, differenciáloperátorokkal, „folytonos mátrixokkal" (akármit is jelentsen ez), stb. 1924-ig a legtöbb fizikus azt sem tudta, hogy véges mátrix létezik! Végül rádöbbentek, hogy „megfigyeléseik" a Hilbert-tér Hermite-féle operátoraihoz hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, a Hilbert-féle „spektrum" (egy név, amelyet ő egy látszólag felszínes analógia alapján választott) a központi fogalom az atom „spektrumának" magyarázatában. Ezért természetesen igénybe vették Hilbert segítségét, hogy némi matematikai értelmet próbáljon vinni számításaikba. Nordheim és von Neumann segítségével, Hilbert először $\mathbb{L}^2$ integráloperátoraival próbálkozott, de ez a Dirac-féle „$\delta$-függvény" felhasználását igényelte, egy olyan fogalomét, amely ezen kor matematikusai számára önellentmondó volt, von Neumann ezért elhatározta, hogy más megközelítéssel próbálkozik.*

*Jean Dieudonné [4]*

A XIX. század folyamán felgyülemlő tapasztalatok a század közepére azt mutatták, hogy a különböző matematikai „objektumokkal" (számok, pontok, görbék, felületek, függvények, operátorok, stb.) való algebrai manipulációk nem az objektumok tulajdonságain, hanem a „szabályok" azonosságán múlnak. A halmazelmélet megszületésével a század végén adva volt az általános keret, amely lehetővé tette, hogy az algebrai struktúrák bevezetésével kellő általánosságban és így hatékonyan lehessen ezeket a kérdéseket tárgyalni.

Hasonló tapasztalatok gyűltek fel az analízis területén is a XIX. század végére. A XX. század elején Fréchet felismerte, hogy az analízis „legdurvább", konvergenciával, határértékkel, folytonossággal, Cauchy-sorozatokkal, egyenletes folytonossággal összefüggő munkálatai elvégzésére érdemes bevezetni a metrikus tér fogalmát. A matematikusok, többek között Riesz Frigyes munkái nyomán, hamarosan még általánosabb, topologikus és uniform tereket kezdtek vizsgálni.

A legfontosabb problémák — parciális differenciálegyenletek, integrálegyenletek, variációszámítás — azonban lineáris tereken (függvénytereken) értelmezett lineáris vagy nem lineáris operációk vizsgálatát igényelték. Fredholm és Hilbert vizsgálatai integráloperátorokkal és ezek spektrumával kapcsolatban „konkrét” Hilbert-terekhez,a $\mathbb{l}^2$ és $\mathbb{L}^2$ térhez vezettek. Riesz Frigyes úttörő munkái nyomán az eredményeket fokozatosan sikerült kiterjeszteni más konkrét terekre ($\mathbb{l}^p$, $\mathbb{L}^p\mathbb{L}^p$, $\mathcal{C}[a, b]$, stb.) is, és a végtelen dimenzióval, dualitással, és különböző konvergenciafajtákkal kapcsolatos problémák tisztázódása után a század húszas éveiben elsősorban lengyel matematikusok (S. Banach, H. Steinhaus, S. Mazur), valamint O. Hahn munkáiban jelent meg a normált terek, lineáris funkcionáljaik és operátoraik elmélete az általunk ma ismert formában. Ez az elmélet lehetővé tette az analízis „finomabb”, sorokkal, lineáris egyenletekkel, differenciálással kapcsolatos kérdéseinek kellő általánosságban történő tárgyalását. A további általánosítás a topologikus vektorterek elméletéhez vezetett.

Mint látjuk, a „spektrálelmélet” döntően készen állt, mire Heisenberg és Schrödinger dolgozataiban (1925) megszületett a kvantumelmélet. Az új elmélet azonban a nemkorlátos operátorok vizsgálatát igényelte. Ezek elméletét, felhasználva Hilbert tanítványainak (R. Courant, H. Weyl, E. Schmidt) és másoknak az eredményeit, Neumann János alkotta meg, az absztrakt Hilbert-tér fogalmával együtt. Ez az általános fogalom a véges dimenzióban régóta alkalmazott, belső szorzattal és ortogonalitással kapcsolatos fogalmak és geometriai szemlélet használatát tette lehetővé függvényterekben is, megadva a Fourier-sorok, és más, sajátfüggvények szerinti sorfejtések elméletének a megfelelő keretet, és kristálytisztán mutatva Fourier gondolatainak lényegét.

A fejlődés ma is tovább folyik, a Banach-algebrák, pszeudo-differenciáloperátorok, a nemlineáris funkcionálanalízis, és más területek fejlődése sok régi probléma megoldását hozta meg. Ma a funkcionálanalízist talán a topologikus vektorterek közötti leképezések elméleteként lehetne definiálni. Ez a szerteágazó elmélet áthatja az analízist és a numerikus analízist, és módszerei behatolnak a matematika és alkalmazásai más területeire is.

Ez a fejezet csak a legalapvetőbb fogalmak és eredmények tárgyalására szorítkozik, és csak a lineáris operátorokkal foglalkozik. Először a lineáris analízis lineáris operátorokra vonatkozó néhány fontos tételét tárgyaljuk. A kompakt operátorok Riesz-féle elmélete a klasszikus módon szerepel: ez tekinthető „bemelegítésnek” is. A spektrálelméletnél a nemkorlátos operátorokra vonatkozó spektráltételre koncentrálunk, tárgyalva a függvénnyel való szorzásként és a spektrálmérték szerinti integrálként való előállítást is. A spektráltétel szorzat alakja, a spektrálmérték és a spektrálintegrál fogalma, és a spektráltétel elég egyszerűen megfogalmazható, még igen általános, a Hilbert-tér nem feltétlenül korlátos, normális operátorainak szerkezetét leíró formájában is. Célszerűnek tűnik tehát azok számára, akik a spektráltételt csak alkalmazni kívánják, a legegyszerűbb tények ismertetése után mindjárt a spektráltételt elmondani bizonyítás nélkül, és az elmélet egyszerűbb tényeinek bizonyításával illusztrálni annak erejét. Ez a paragrafus — mivel igen fontos a kvantumelméletben — meglehetősen sok feladatot tartalmaz. Végül röviden ismertetjük a kvantummechanika alapjait.

## 13.1 Lineáris folytonos operátorok

*Valószínűleg Riesz Frigyes volt az első matematikus, aki egy H szeparábilis Hilbert-tér* *összes endomorfizmusainak $\mathcal{L}(H;H)$ algebráját tekintette annak normájával ...*

*Jean Dieudonné [4]*

**13.1.1. Operátoregyenletek, korrekt kitűzésű feladatok.** A legkülönbözőbb egyenleteket — egyenletrendszereket, közönséges és parciális differenciálegyenleteket, integrálegyenleteket, stb. — általában felírhatjuk egy $Tx = y$ *operátoregyenlet* alakjában, ahol $X$ és $Y$ normált terek, $T \in X \to Y$ egy operátor, $y \in Y$. A differenciálegyenleteknél fellépő mellékfeltételeket is bevehetjük az operátoregyenletbe. Például, ha a differenciálegyenlet $Lx = f$ alakú, ahol $L$ egy differenciáloperátor, $f$ adott függvény, a mellékfeltétel pedig $Bx = g$ alakú, ahol $g$ egy adott érték vagy függvény, $B$ pedig az $x$ ismeretlen függvényhez egy adott pontban, vagy egy tartomány határának egy részén felvett értékeket rendelő operátor, akkor $y = (f, g)$, $Tx = (Lx, Bx)$ jelöléssel a probléma $Tx = y$ alakú. Az operátoregyenletekkel kapcsolatban általában az alábbi három természetes követelményt támasztjuk:

(1) minden $y \in Y$-ra létezzen megoldás;

(2) a megoldás egyértelmű legyen;

(3) a megoldás valamilyen értelemben folytonosan függjön a feladat adataitól ($y$-tól és esetleg $T$-től).

Az ezeknek a feltételeknek eleget tévő feladatokat szokás *korrekt kitűzésű*nek nevezni. (1) egyszerűen a $\operatorname{rng}(T) = Y$ feltétellel ekvivalens. (2) azt jelenti, hogy $T$ kölcsönösen egyértelmű, így ha $T$ lineáris, akkor a $\ker(T) = \{0\}$ feltétellel ekvivalens. Láthatóan az, hogy egy feladat korrekt kitűzésű-e, függ az $Y$ választásától, a $T$ értelmezési tartománya megválasztásától, a normák megválasztásától, stb. Gyakran az a fő nehézség, hogy $X$-et, $Y$-t és $T$-t úgy válasszuk meg, hogy a feladat korrekt kitűzésű legyen.

Egy példa korrekt kitűzésű feladatra: Ha $X$, $Y$ Banach-terek, $T \in X \to Y$ nem feltétlenül lineáris zárt operátor, (azaz $T \subset X \times Y$ zárt halmaz), és van olyan $c > 0$, hogy $\|Tx_1 - Tx_2\| \geq c\|x_1 - x_2\|$, ha $x_1, x_2 \in \operatorname{dmn}(T)$, akkor $T$ kölcsönösen egyértelmű, $\operatorname{rng}(T)$ zárt, és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|y_1 - y_2\| < \delta$, akkor a $Tx = y_1$ és $Tx = y_2$ egyenletek $x_1, x_2$ megoldásaira $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$, így $Y$-t $\operatorname{rng}(T)$-re cserélve, a kapott feladat korrekt kitűzésű.

**13.1.2. A sajátértékek módszere.** Lineáris differenciál- és integrálegyenletek, általánosabban $Tx = y$ alakú operátoregyenletek tanulmányozásánál, ahol $T$ egy Hilbert-tér lineáris operátora, nagyon fontos a *sajátértékek módszere*. Először megkeressük a $Tx = \lambda x$ *sajátértékprobléma* (ami egy homogén lineáris egyenlet) nem nulla megoldásainak egy $\{x_k\}$ ortogonális rendszerét. Ha az $y$ vektor $\{x_k\}$ szerinti Fourier-sora konvergál $y$-hoz, akkor a megoldást $x = \sum_k c_k x_k$ alakban keresve, a $\langle Tx, x_k \rangle = \langle y, x_k \rangle$ összefüggésekből az $x_k$ sajátvektorokhoz tartozó $\lambda_k$ sajátértékek ismeretében a $c_k$ Fourier-együtthatók meghatározhatók. Ezzel a módszerrel a $Tx = \lambda x + y$ *inhomogén sajátértékprobléma* is kezelhető. Természetesen a módszer használatánál sok matematikai probléma merül fel, például, hogy milyen Hilbert-teret válasszunk, valósak-e a sajátértékek, ortogonálisak-e a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, választhatunk-e valós sajátvektorokat, a sajátvektorokból képezhető-e teljes ortonormált rendszer, a $\sum_k c_k x_k$ sor milyen értelemben konvergens, igaz-e, hogy $T(\sum_k c_k x_k) = \sum_k c_k T x_k$, stb.

Megjegyezzük, hogy néha $T$ helyett más, vele kapcsolatban álló operátorhoz tartozó sajátérték-probléma sajátvektorai is jól használhatók.

Ez és az előző pont sugallják, hogy az operátorokat, azok sajátvektorait és sajátértékeit érdemes tanulmányozni.

Megjegyezzük, hogy a közönséges algebrai műveletek óvatosan kezelendők, ha az operátorok nem az egész téren vannak értelmezve. Például a $T$ és $S$ operátorok összege csak a $\operatorname{dmn}(T+S) = \operatorname{dmn}(T) \cap \operatorname{dmn}(S)$ halmazon, szorzata (összetétele) pedig csak a $\operatorname{dmn}(TS) = \{x\colon x \in \operatorname{dmn}(S) \text{ és } Sx \in \operatorname{dmn}(T)\}$ halmazon értelmezhető.

**13.1.3. Szuperpozíció, komplexifikálás.** Ha $X$ és $Y$ normált terek $\mathbb{K}$ felett, $T \in X \to Y$ egy lineáris operátor, $c \in Y$, akkor a $Tx = c$ típusú lineáris egyenletek tanulmányozásánál igen hasznos a *szuperpozíció* elve: ha $c_1, c_2 \in Y$, az $x_1$ a $Tx = c_1$ az $x_2$ pedig a $Tx = c_2$ egyenlet egy megoldása, $\alpha_1, \alpha_2$ skalárok, akkor $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ a $Tx = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ egyenlet egy megoldása. Speciálisan, a $Tx = c$ *inhomogén egyenlet* egy $x_0$ megoldásához hozzáadva az $Tx = 0$ *homogén egyenlet* megoldásait, az inhomogén egyenlet összes megoldását megkapjuk.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor a komplex számtest algebrai teljessége miatt gyakran hasznos komplex normált térre áttérni. Az $X$ lineáris térc $X_{\mathbb{C}} X_{\mathbb{C}}$ *komplexifikált*ja $X \times X$, amelyben az $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ komplex skalárral való szorzást $(x, y) \in X_{\mathbb{C}}$ esetén az

$$(\alpha, \beta)(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$$

összefüggés definiálja. Vegyük észre a hasonlóságot $\mathbb{C}$ definíciójával. Ugyanúgy, mint ott, az $(x, 0)$ párt $x$-el azonosítva $X_{\mathbb{C}}$ elemei $x + iy$, $x, y \in X$ alakban, a fenti szorzás pedig a természetes

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$$

alakban írható. Az $X_{\mathbb{C}}$ normált térré tehető az

$$\|x + iy\| = \sup_{\varphi \in \mathbb{R}} \big\|\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y\big\|$$

definícióval. Ha $X$ belső szorzat tér, akkor $X_{\mathbb{C}}$ is belső szorzat térré tehető az

$$\langle x + iy, u + iv\rangle_{X_{\mathbb{C}}} = \langle x, u\rangle + \langle y, v\rangle + i\big(\langle y, u\rangle - \langle x, v\rangle\big)$$

belső szorzattal, amiből a fenti normával ekvivalens norma származik.

A *$T$ lineáris leképezés komplexifikáltjá*t a

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy$$

összefüggés definiálja. Ha $z = x+iy$ az inhomogén egyenlet egy komplex térbeli megoldása, akkor $\overline{z} = x-iy$ is a komplex térbeli megoldása az egyenletnek, és $(z+\overline{z})/2$ az inhomogén, $(z - \overline{z})/(2i)$ pedig a homogén egyenletnek a valós térbeli megoldása. Látni fogjuk, hogy a spektrálelméletben több fogalmat csak komplex terek operátoraira tudunk közvetlenül definiálni. Ha egy ilyen fogalmat valós tér egy operátora esetében használunk, akkor mindig az operátor komplexifikáltjára értendő.

Másrészt, minden komplex lineáris tér valós lineáris térnek is tekinthető, kétszer akkora dimenzióval, így a komplex eset sokszor visszavezethető a valósra. Ezért sok tételt elég a valós esetben bebizonyítani.

**13.1.4. Lineáris operátorok normája.** A $T$ lineáris operátor *normá*ja

$$\|T\| = \sup_{x\in\operatorname{dmn}(T),\|x\|\le 1} \|Tx\|.$$

Ha $\operatorname{dmn}(T) \ne \{0\}$, akkor

$$\|T\| = \sup_{0\ne x\in\operatorname{dmn}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1,x\in\operatorname{dmn}(T)} \|Tx\|.$$

Nyilván $\|Tx\| \le \|T\|\|x\|$ minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re, és $\|T\|$ a legkisebb ilyen konstans. Ha a $T$ normája véges, akkor $T$-t *korlátos*nak nevezzük. Vegyük észre, hogy ez csak azt jelenti, hogy $T$ korlátos a zárt egységgömbön, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy korlátos a korlátos halmazokon, de nem azt, hogy korlátos a teljes értelmezési tartományon. Így ez az elterjedt szóhasználat némileg félrevezető. A norma és a műveletek kapcsolatát az

$$\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(\alpha T)x\big\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = |\alpha|\|T\|,\\
\|T+S\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(T+S)x\big\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| + \sup_{\|x\|\le 1}\|Sx\| = \|T\|+\|S\|,\\
\|TS\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\big\|(TS)x\big\| \le \sup_{\|x\|\le 1}\|T\|\|Sx\| \le \|T\|\|S\|
\end{aligned}$$

összefüggések jellemzik.

**13.1.5. Tétel.** *Egy $T$ lineáris operátorra ha* $\operatorname{dmn}(T) \ne \{0\}$, *akkor a Lipschitz-tulajdonság, a folytonosság, a folytonosság valamely pontban és a korlátosság ekvivalensek, és a norma egybeesik a Lipschitz-konstanssal.*

**Bizonyítás.** A

$$\|T\| = \sup_{0\ne x\in\operatorname{dmn}(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

öszefüggésben $x$ helyére $x-y$-t helyettesítve kapjuk, hogy a korlátosság ekvivalens a Lipschitz-tulajdonsággal és a norma egybeesik a Lipschitz-konstanssal. A Lipschitz-függvények folytonosak. Ha $T$ folytonos $x_0$-ban, akkor van olyan $\delta > 0$, hogy $\|x\| = \delta$ esetén $\|Tx\| = \big\|T(x+x_0) - T(x_0)\big\| \le 1$, így $\big\|T(x/\|x\|)\big\| \le 1/\delta$, azaz $\|T\| \le 1/\delta$. □

**13.1.6. Definíció.** Ha $X$ és $Y$ normált terek, az $X$-et $Y$-ba képező folytonos lineáris operátorok terét $\mathcal{CL}(X;Y)$-nal fogjuk jelölni. A fentiek szerint $\mathcal{CL}(X;Y)$ normált tér. A $\mathcal{CL}(X;\mathbb{K})$ teret $X^*$-gal is jelöljük, és $X$ *konjugált ter*ének nevezzük.

→ **13.1.7. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha $T_n \to T$ a $\mathcal{CL}(X;Y)$ térben, és $x_n \to x$ az $X$ térben, akkor $T_n x_n \to Tx$.

**13.1.8. Tétel.** *Ha $Y$ Banach-tér, akkor $\mathcal{CL}(X;Y)$ is Banach-tér.*

**Bizonyítás.** Legyen $T_n$ egy Cauchy-sorozat. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N$, hogy ha $n, m \ge N$, akkor $\|T_n - T_m\| \le \varepsilon$. Bármely $x$-re

(1)
$$\|T_n x - T_m x\| = \big\|(T_n - T_m)x\big\| \le \|T_n - T_m\|\|x\| \le \varepsilon\|x\|,$$

ha $n, m \geq N$, ezért $T_n x$ Cauchy-sorozat. $Y$ teljessége miatt $T_n x$ konvergens, legyen $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. A $T$ lineáris, mert

$$T(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + Ty,$$
$$T(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x = \alpha T x.$$

Végül (1)-ben $m \to \infty$ határátmenettel $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$, ha $n \geq N$, amiből $T_n - T$, és így $T$ is korlátos és $\|T_n - T\| \to 0$. $\square$

**13.1.9. Projekcióoperátorok és zárt alterek.** Legyen $X$ normált tér és $X = Y \oplus Z$ az $X$ direkt felbontása, azaz tegyük fel, hogy $Y$ és $Z$ az $X$ alterei és minden $x \in X$ egyértelműen írható fel $x = y + z$ alakban, ahol $y \in Y$ és $z \in Z$. A felírás lehetősége azzal ekvivalens, hogy $Y \cup Z$ lineáris burka $X$, az egyértelműsége pedig azzal, hogy $Y \cap Z = \{0\}$. Legyen $Px = z$. Az így definiált lineáris operátort a $Z$ mentén $Y$-ra való *projekció*nak nevezzük. Nyilván az $Y$ mentén $Z$-re való projekció $\mathbb{I} - P$. Egy $P\colon X \to X$ lineáris operátor pontosan akkor projekció, ha $P^2 = P$. Valóban, ekkor $P$ a $\ker(P)$ mentén $\operatorname{rng}(P)$-re való projekció. A legegyszerűbb projekcióoperátorok az $\mathbb{I}$ identikus operátor és a nulloperátor. A projekciók nem feltétlenül folytonosak. Ha $P$ folytonos projekció, akkor $\ker(P)$ és $\operatorname{rng}(P) = \ker(\mathbb{I} - P)$ zártak.

→ **13.1.10. Feladat [9].** Állapítsuk meg, hogy $\mathcal{C}[0,1]$ alábbi funkcionáljai közül melyek lineárisak, korlátosak, és mi a normájuk:

(1) $f(x) = \int_0^1 x(t) \sin t \, dt$;

(2) $f(x) = \int_0^1 t^{1/2} x(t^2) \, dt$;

(3) $f(x) = \int_0^1 |x(t)| \, dt$;

(4) $f(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} x(t)$;

(5) $f(x) = x(1/2)$;

(6) $f(x) = \int_0^1 x^2(t) \, dt$.

**13.1.11. Feladat [8].** Legyen $a \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq b$, legyen $\alpha_j \in \mathbb{K}$, ha $1 \leq j \leq n$ és $f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x(t_j)$, ha $x \in \mathcal{C}[a,b]$. Határozzuk meg az $f$ funkcionál normáját.

→ **13.1.12. Feladat [9].** Legyen $\alpha \geq 0$ és $a \in \mathcal{C}[0,1]$ rögzített. Vizsgáljuk meg, hogy $\mathcal{C}[0,1]$ alábbi, önmagába való leképezései folytonosak-e:

(1) $(Tx)(t) = a(t)x(t)$;

(2) $(Tx)(t) = x(t^2)$;

(3) $(Tx)(t) = x(t^\alpha)$;

(4) $(Tx)(t) = \int_0^t x^2(s) \, ds$;

(5) $(Tx)(t) = \int_0^1 \sin(t-s) x(s) \, ds$.

**13.1.13. Feladat [10].** Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett lesz a $(Tx)(t) = \beta x(t^\alpha)$ leképezés folytonos $\mathbb{L}^2[0,1]$-en? Mikor lesz kontrakció?

**13.1.14. Feladat [5].** Legyen $k\colon [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{C}[a,b]$-n értelmezett $f(x) = \int_a^b k(s)x(s)\,ds$ funkcionál korlátos.

**13.1.15. Feladat [6].** Legyen $K\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a $(T_K x)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$ integráloperátor $\mathcal{C}[a,b]$-t önmagába képezi és korlátos.

**13.1.16. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \int_0^{1/2} x(t)\,dt - \int_{1/2}^1 x(t)\,dt$$

funkcionál értékeinek szuprémuma $\mathcal{C}[0,1]$ zárt egységgömbjén 1, de ezt nem veszi fel.

**13.1.17. A nyílt leképezések tétele.** *Legyenek X és Y Banach-terek, T az X-et Y-ra képező folytonos lineáris operátor. Ekkor T nyílt leképezés, azaz nyílt halmaz képe nyílt.*

**Bizonyítás.** Jelölje $X$-ben $G_r$, $Y$-ban $H_r$ az origó középpontú, $r$ sugarú nyílt gömböt. Első lépésként megmutatjuk, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $H_\varepsilon \subset \overline{T(G_1)}$. Mivel

$$X = \cup_{n=1}^\infty G_n = \cup_{n=1}^\infty nG_1,$$
$$Y = T(X) = T(\cup_{n=1}^\infty nG_1) = \cup_{n=1}^\infty T(nG_1) = \cup_{n=1}^\infty nT(G_1).$$

Ha $\overline{T(G_1)}$ nem tartalmazna belső pontot, akkor az $\overline{nT(G_1)}$ halmazok komplementerei sűrű nyílt halmazok lennének üres metszettel, ami lehetetlen. Így van olyan $y$ és $\delta > 0$, hogy $\mathbb{U}_\delta(y) \subset \overline{T(G_1)}$. Ebből

$$\begin{aligned} H_\delta = \mathbb{U}_\delta(y) - y \subset \mathbb{U}_\delta(y) - \mathbb{U}_\delta(y) \subset \overline{T(G_1)} - \overline{T(G_1)} \\ \subset \overline{T(G_1) - T(G_1)} \subset \overline{T(G_1 - G_1)} \subset \overline{T(G_2)} = 2\overline{T(G_1)}, \end{aligned}$$

ahonnan $\varepsilon = \delta/2$ jelöléssel $H_\varepsilon \subset \overline{T(G_1)}$.

Második lépésként megmutatjuk, hogy $H_{\varepsilon/2} \subset T(G_1)$. Legyen $y \in H_{\varepsilon/2}$. A homogenitás miatt $y \in H_{\varepsilon/2} \subset \overline{T(G_{1/2})}$, így van olyan $x_1 \in G_{1/2}$, hogy $\|y - Tx_1\| < \varepsilon/2^2$. Most $y - Tx_1 \in H_{\varepsilon/2^2} \subset \overline{T(G_{1/2^2})}$, így van olyan $x_2 \in G_{1/2^2}$, hogy $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \varepsilon/2^3$. Hasonlóan folytatva olyan $x_n$ sorozatot konstruálunk, amelyre $x_n \in G_{1/2^n}$, és

$$\Big\| y - T\Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big) \Big\| < \varepsilon/2^{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

A $\sum_{n=1}^\infty x_n$ abszolút konvergens sor összege legyen $x$, ekkor

$$\|x\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \sum_{n=1}^\infty 1/2^n = 1,$$

azaz $x \in G_1$, és (1)-ből határátmenettel $\|y - Tx\| = 0$, azaz $y = Tx \in T(G_1)$.

Végül megmutatjuk, hogy egy $V$ nyílt halmaz képe nyílt. Ha $y \in T(V)$, akkor $y = Tx$ valamely $x \in V$-re. Mivel $V$ nyílt, van olyan $\eta > 0$, hogy $x \in \mathbb{U}_\eta(x) \subset V$. Ebből

$$H_{\varepsilon\eta/2} \subset T(G_\eta) = T(\mathbb{U}_\eta(x) - x) = T(\mathbb{U}_\eta(x)) - Tx,$$

ahonnan

$$\mathbb{U}_{\varepsilon\eta/2}(y) = H_{\varepsilon\eta/2} + y = H_{\varepsilon\eta/2} + Tx \subset T(\mathbb{U}_\eta(x)) \subset T(V). \ \square$$

**13.1.18. Banach tétele a korlátos inverzről.** *Legyenek X, Y Banach-terek, T az X-et Y-ra kölcsönösen egyértelműen leképező folytonos lineáris leképezés. Ekkor $T^{-1}$ folytonos.*

**Bizonyítás.** $T^{-1}$ korlátos, mert a nyílt leképezések tétele szerint folytonos. □

**13.1.19. Következmény.** *Ha $X$ a $| \ |$ és $\| \ \|$ normákkal is Banach-tér, és van olyan $C$ valós szám, hogy $|x| \le C\|x\|$ minden $x$-re, akkor a két norma ekvivalens.*

**Bizonyítás.** Az $(X, \| \ \|)$ térnek az $(X, | \ |)$ térre való identikus leképezése korlátos, így az inverze is korlátos, ami a másik irányú egyenlőtlenséget adja. □

**13.1.20. Zárt operátorok.** Az $X$ normált tér egy részhalmazát az $Y$ normált térbe képező $T$ operátort *zárt operátor*nak nevezzük, ha $T$ zárt részhalmaza az $X \times Y$ térnek. Nyilván ha egy zárt operátor kölcsönösen egyértelmű, akkor az inverze is zárt operátor. A $T$ operátor pontosan akkor zárt, ha bármely $(x, y) \in \overline{T}$ esetén $(x, y) \in T$. Az $(x, y) \in \overline{T}$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha van olyan $(x_n, y_n) \in T$ sorozat, amely $(x, y)$-hoz konvergál, azaz amelyre $x_n \in \mathrm{dmn}(T)$, $x_n \to x$, $y_n = Tx_n \to y$, ha $n \to \infty$. Az $(x, y) \in T$ feltétel pontosan azt jelenti, hogy $x \in \mathrm{dmn}(T)$ és $y = Tx$. Így beláttuk, hogy $T$ pontosan akkor zárt operátor, ha tetszőleges $x_n \in \mathrm{dmn}(T)$ sorozatot véve, melyre $x_n \to x$, $Tx_n \to y$, következik, hogy $x \in \mathrm{dmn}(T)$ és $y = Tx$.

**13.1.21. Zárt gráf tétel.** *Banach-teret Banach-térbe képező zárt lineáris operátor korlátos.*

**Bizonyítás.** Ha $T\colon X \to Y$ zárt, akkor $T \subset X \times Y$ Banach-tér. Mivel $(x, Tx) \mapsto x$ folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezése ennek a Banach-térnek $X$-re, inverze, az $x \mapsto (x, Tx)$ leképezés is folytonos, amiből $x \mapsto Tx$ is folytonos. □

**13.1.22. Következmény.** *Ha $X = Y \oplus Z$ az $X$ Banach-tér zárt alterekre való direkt felbontása, akkor a $Z$ mentén $Y$-ra való $P$ projekció folytonos.*

**Bizonyítás.** $P$ gráfja zárt. □

→ **13.1.23. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy zárt altéren értelmezett folytonos lineáris operátor zárt.

→ **13.1.24. Feladat [7].** Adjunk példát folytonos lineáris, de nem zárt operátorra.

**13.1.25. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $\mathcal{C}[0, 1]$ folytonosan differenciálható függvényein a differenciálás operátora zárt operátor, de nem folytonos.

**13.1.26. Definíció.** Legyen $T$ az $X$ Banach-tér egy lineáris operátorra. Ha $T$ inverze $X$-en értelmezett korlátos lineáris operátor, akkor $T$-t *reguláris*nak nevezzük, egyébként pedig *szinguláris*nak. A $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárt $T$ *sajátértéké*nek, az $0 \ne x \in \mathrm{dmn}(T)$ vektort pedig $T$ *sajátvektorá*nak nevezzük, ha $Tx = \lambda x$. Egy $\lambda$ sajátérték esetén ennek az egyenletnek a megoldásai alkotják a $\lambda$-hoz tartozó *sajátaltere*t. A sajátérték *multiplicitása* ennek az altérnek a dimenziója.

**13.1.27. Definíció.** Legyen $T$ az $X$ komplex Banach-tér egy lineáris operátor. A *rezolvens halmaz* azon $\lambda \in \mathbb{C}$ számok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ reguláris. A rezolvens halmaz komplementere $T$ *spektruma*, $\sigma(T)$. Azon $\lambda$ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ nem kölcsönösen egyértelmű, a $T$ *pontspektruma*, $\sigma_p(T)$; ez a sajátértékek halmaza. Azon $\lambda$ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbb{I}$ kölcsönösen egyértelmű és képtere sűrű $X$-ben, de az inverz nem korlátos, $T$ *folytonos spektruma*, $\sigma_c(T)$. A $\sigma(T)$ többi eleme alkotja $T$ *reziduális spektrumát*, $\sigma_r(T)$-t. Az $r(T) = \sup\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma(T)\}$ szám $T$ *spektrálsugara.*

**13.1.28. A spektrálleképezés elve.** Az operátor spektruma fontos információt ad az operátorról. Nagyon fontos összefüggést fejez ki a spektrum és az operátor között a *spektrálleképezés elve*: ha $T$ az $X$ komplex Banach-tér egy operátora, $f$ egy komplex változós, komplex értékű függvény, akkor $f(\sigma(T)) = \sigma\big(f(T)\big)$. Ha $T \in \mathcal{L}(X;X)$ és $f = g/h$ racionális törtfüggvény, a $g$ és $h$ közös gyök nélküli komplex polinomok hányadosa, akkor a bizonyítás nem nehéz.

A tételt nem bizonyítjuk, nem is fogalmazzuk meg pontosan.

**13.1.29. Neumann-sor.** *Legyen $T \in \mathcal{L}(X;X)$, ahol $X$ Banach-tér, és tegyük fel, hogy $\|T\| < 1$. Ekkor $\mathbb{I} - T$ reguláris és*

$$(\mathbb{I} - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \qquad (T^0 = \mathbb{I}).$$

Figyeljük meg a kapcsolatot $1/(1-t)$ Taylor-sorával.

**Bizonyítás.** A jobb oldali sor abszolút konvergens, mert a $\sum_{k=0}^{\infty} \|T\|^k$ konvergens mértani sor majorálja. Legyen $S_n$ a sor $n$-edik részletösszege, ekkor

$$(\mathbb{I} - T)S_n = S_n(\mathbb{I} - T) = \mathbb{I} - T^{n+1}.$$

Ebből $n \to \infty$ esetén $S_n \to S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$, így a szorzás folytonosságát felhasználva $(\mathbb{I} - T)S = S(\mathbb{I} - T) = \mathbb{I}$, ezt kellett bizonyítanunk. $\square$

**13.1.30. Tétel.** *Ha $X$ egy Banach-tér, akkor $\mathcal{CL}(X;X)$ reguláris elemeinek halmaza nyílt halmaz, és ezen a $T \mapsto T^{-1}$ leképezés folytonos.*

**Bizonyítás.** Legyen $T$ reguláris, és $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$. Ekkor

$$S = T - (T - S) = T\big(\mathbb{I} - T^{-1}(T - S)\big) = T(\mathbb{I} - R),$$

ahol $R = T^{-1}(T - S)$. Mivel $\|R\| \le \|T^{-1}\|\|T - S\| < 1$, az előző tétel szerint $\mathbb{I} - R$ reguláris, és $(\mathbb{I} - R)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} R^k$. De ekkor $S = T(\mathbb{I} - R)$ is reguláris, és

$$S^{-1} = (\mathbb{I} - R)^{-1}T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \big(T^{-1}(T - S)\big)^k T^{-1}.$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\|S^{-1} - T^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \big(T^{-1}(T - S)\big)^k T^{-1} \right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|T^{-1}\|^k \|T - S\|^k \|T^{-1}\| \\
&= \|T - S\| \|T^{-1}\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big(\|T^{-1}\|\|T - S\|\big)^{k-1} \\
&= \frac{\|T - S\|\|T^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\|\|T^{-1}\|}.
\end{aligned}$$

$\square$

**13.1.31. Tétel.** *Legyen $X \neq \{0\}$ komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{CL}(X;X)$. Ekkor $\sigma(T)$ nem üres kompakt halmaz.*

A tételt nem bizonyítjuk, csak annyit jegyzünk meg, hogy $|\lambda| > \|T\|$ esetén a Neumann-sor szerint $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

**13.1.32. Spektrálsugár-formula.** *Ha $T \in \mathcal{L}(X;X)$, ahol $X$ komplex Banach-tér, akkor az $r(T)$ spektrálsugárra*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

A tételt nem bizonyítjuk. $\square$

**13.1.33. Tétel.** *Ha $X$ komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{L}(X;X)$, és $r(T)$ az $T$ spektrálsugara, továbbá $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda^k$ egy komplex hatványsor $R$ konvergenciasugárral, akkor az $f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T^k$ sor $r(T) < R$ esetén abszolút konvergens, $r(T) > R$ esetén divergens.*

**Bizonyítás.** Mivel

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|c_n T^n\|} &= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,\sqrt[n]{\|T^n\|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}\\ &= r(T)/R,\end{aligned}$$

$r(T) < R$ esetén a sor abszolút konvergens, $r(T) > R$ esetén viszont az általános tagja nem tart nullához. $\square$

**13.1.34. Tétel.** *Legyen $X$ komplex Banach-tér, $T \in \mathcal{CL}(X;X)$, és*

$$p(z) = (z-\lambda_1)^{\alpha_1}(z-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(z-\lambda_n)^{\alpha_n} \quad (\lambda_j \neq \lambda_k,\ \text{ha } j \neq k)$$

*egy polinom, amelyre $p(T) = 0$. Ekkor léteznek olyan, $p$-nél alacsonyabb fokú $h_{j,k}$ polinomok, hogy minden $f\colon G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ analitikus függvényre, amelyre $f(T)$ értelmezve van és $\lambda_j \in G$, ha $j = 1, 2, \ldots, n$, teljesül, hogy*

$$f(T) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\alpha_j-1} f^{(k)}(\lambda_j)h_{j,k}(T).$$

A tételt nem bizonyítjuk. $\square$

**13.1.35. Megjegyzés.** Az előző tételt leggyakrabban véges dimenziós terek lineáris operátoraira alkalmazzuk. Ekkor a Cayley–Hamilton-tétel szerint a $p(z) = \det(T - z\mathbb{I})$ karakterisztikus polinomra $p(T) = 0$. Bár a $h_{j,k}$ polinomokat is meghatározhatnánk, egyszerűbb felhasználni, hogy a $h_{j,k}(T)$ operátorok nem függnek $f$-től. $f$ helyére alkalmas függvényeket, például $(z-\lambda_j)^k$ alakú polinomokat írva, az ismeretlen operátorokra egyszerű egyenletrendszert kapunk.

$\to$ **13.1.36. Feladat [8].** Határozzuk meg a $T$ operátor spektrumát, ha mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

$\to$ **13.1.37. Feladat [10].** Határozzuk meg a $T^{1000}$, $e^T$, $\cos T$ és $e^{tT}$ $(t \in \mathbb{C})$ operátorokat, ha $T$ mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

**13.1.38. Feladat [8].** Adjunk példát Banach-téren olyan $T, S \in \mathcal{CL}(X;X)$ operátorokra, amelyekre $TS$ reguláris, de $ST$ szinguláris. Mutassuk meg, hogy $X$ nem lehet véges dimenziós.

→ **13.1.39. Feladat [5].** Két $T, S \in \mathcal{CL}(H;H)$ operátort *hasonló*nak nevezünk, ha létezik olyan reguláris $P \in \mathcal{CL}(H;H)$ hogy $P^{-1}TP = S$. Mutassuk meg, hogy hasonló operátoroknak ugyanaz a spektruma.

**13.1.40. Feladat [9].** Legyen $X$ komplex Banach-tér. Bizonyítsuk be, hogy minden $T \in \mathcal{CL}(X;X)$ operátorhoz és minden $\sigma(T)$-t tartalmazó $V$ nyílt halmazhoz található olyan $\varepsilon > 0$, hogy ha $S \in \mathcal{CL}(H;H)$ és $\|T - S\| < \varepsilon$, akkor $\sigma(S) \subset V$.

**13.1.41. Adjungált operátor.** Legyenek $X$ és $Y$ Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Ha $T\colon X \to Y$ korlátos lineáris operátor, akkor minden $y \in Y$ elemre $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ folytonos $X$-en, így Riesz reprezentációs tétele szerint van olyan $T^*y \in X$, amelyre

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

Könnyű kiszámolni, hogy $T^*\colon Y \to X$ lineáris operátor; $T^*$ a $T$ *adjungált*ja. Ha $X = Y$ és $T = T^*$, akkor $T$-t *önadjungált*nak nevezzük.

**13.1.42. Tétel.** *Legyenek $X$, $Y$ és $Z$ Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett, $T, S \in \mathcal{L}(X;Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Ekkor $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$, $(RS)^* = S^*R^*$, $\|T^*\| = \|T\|$, $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$, $\operatorname{rng}(T)^\perp = \ker(T^*)$ és $\ker(T)^\perp = \overline{\operatorname{rng}(T^*)}$.*

**Bizonyítás.** A $(T^*)^* = T$, $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$ és $(RS)^* = S^*R^*$ összefüggések könnyen bizonyíthatók a definíció alapján. Az

$$\big|\langle x, T^*y\rangle\big| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

egyenlőtlenségből $x = T^*y$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\|$, amiből $\|T^*\| \leq \|T\|$, ebből pedig $T$ helyére $T^*$-ot írva $\|T\| \leq \|T^*\|$. A normára vonatkozó másik egyenlőség igazolásához vegyük észre hogy

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2,$$

ahonnan következik, hogy $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$, a másik irányú egyenlőtlenség pedig triviális. Ha $y \perp \operatorname{rng}(T)$, akkor $0 = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ minden $x \in X$-re, így mivel $x$ tetszőleges, $y \in \ker(T^*)$. Megfordítva, ha $y \in \ker(T^*)$, akkor bármely $x \in X$-re $0 = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$, és így $y \perp \operatorname{rng}(T)$. A másik összefüggés ebből már következik, ha figyelembe vesszük, hogy $\operatorname{rng}(T)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{rng}(T)}$ és $T$ helyére $T^*$-ot írunk. □

**13.1.43. Következmény.** *Ha $X$ komplex Hilbert-tér és $T \in \mathcal{CL}(X;X)$ önadjungált, akkor $r(T) = \|T\|$.*

**Bizonyítás.** $\|T^2\| = \|T\|^2$, amiből indukcióval $\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$, így az állítás következik a spektrálsugár-formulából. □

→ **13.1.44. Feladat [10].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2[0,1]$ alábbi operátorainak normáját:

(1) $(Tx)(s) = \int_0^1 x(t)\cos(s-t)\,dt$;

(2) $(Tx)(s) = x(s)$, ha $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$, 0, ha $\frac{1}{2} < s \leq 1$;

(3) $(Tx)(s) = x(s)\sin s$;

(4) $(Tx)(s) = x(s)e^{is}$.

→ **13.1.45. Feladat [10].** Határozzuk meg $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ alábbi operátorainak normáját, ha $c \in \mathbb{R}$ és $a$ korlátos mérhető függvény:

(1) $(Tx)(s) = x(s+c)$;

(2) $(Tx)(s) = a(s)x(s)$;

(3) $(Tx)(s) = (x(s) + x(-s))/2$.

→ **13.1.46. Feladat [8].** Legyen $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{l}^2$. Határozzuk meg az alábbi operátorok normáját:

(1) $S_r x = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$;

(2) $S_l x = (\xi_2, \xi_3, \dots)$;

(3) $T_n x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$.

→ **13.1.47. Feladat [11].** Határozzuk meg az előző három feladatban szereplő operátorok adjungáltját.

**13.1.48. Hilbert-terek korlátos lineáris operátorai.** Legyenek $X$ és $Y$ Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Egy korlátos $T \in X \to Y$ operátor mindig kiterjeszthető az egész $X$-re: egyértelműen terjeszthető ki az értelmezési tartománya lezártjára, ennek ortogonális komplementerén pedig tetszőlegesen definiálhatjuk, például választhatjuk nullának. Így a korlátos operátorok $\mathcal{L}(X; Y)$ elemeinek megszorításai.

## 13.2 Kompakt operátorok

*A „Fredholm-alternatíva” megfelelt a „végtelen dimenziós lineáris algebrában” egy $\mathbb{C}$ feletti véges dimenziós vektortér önmagába történő lineáris leképezése képtere és nulltere közötti klasszikus összefüggésnek. De ilyen lineáris leképezésekre sokkal több volt ismert, nevezetesen a Jordan-normálalak, amely „hasonlóság” erejéig jellemezte azokat, így természetes volt megvizsgálni a Fredholm-operátorok hasonló tulajdonságait. Azonban csak részeredményeket kaptak, mielőtt Riesz Frigyes 1918-ban … teljes választ adott a kérdésre, és megtalálta a megfelelő általános környezetet Fredholm eredményeihez, melyet ma* a kompakt operátorok Riesz–Fredholm-elmélete *néven ismerünk. … Riesz Frigyes a $\mathcal{C}(I)$ térre szorítkozik, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy kompakt intervallum, de kifejezetten kiemeli, hogy ezt az esetet csak „próbakőnek” tekinti egy általánosabb elmélethez. Valóban, miután definiálja a normát $\mathcal{C}(I)$-n, sohasem … használ semmit a norma axiomatikus definícióját kivéve (emlékeztetünk rá, hogy ez a definíció nyomtatásban csak két évvel később fordult elő!) Véleményem szerint Riesz Frigyes 1918-as dolgozata egyike a legszebbeknek, amelyet valaha is írtak; nyelvében és szellemében teljesen geometriai, és oly teljesen megfelel a céljának, hogy sohasem múlták felül és Riesz bizonyításai most is szó szerint másolhatók.*

*Jean Dieudonné [4]*

A kompakt operátorok elmélete lineáris integrálegyenletek esetén közvetlenül lehetővé teszi, hogy a sajátértékek módszerét használjuk. Mivel a differenciáloperátorok inverze gyakran egy integráloperátor, a kompakt operátorok elmélete közvetve használható lineáris differenciálegyenletek vizsgálatára is. Az inverz operátor sajátértékei az eredeti operátor sajátértékeinek reciprokai, ugyanazokkal a sajátvektorokkal.

**13.2.1. Definíció.** Legyenek $X$ és $Y$ Banach-terek. Egy $T \in X \to Y$ operátort *kompakt*nak nevezünk, ha folytonos és korlátos halmaz képének a lezártja kompakt. Másként fogalmazva, ha minden korlátos sorozat képéből kiválasztható konvergens részsorozat. Nyilván egy $X$-en értelmezett lineáris operátor pontosan akkor kompakt, ha a (zárt vagy nyílt) egységgömb képének lezártja kompakt, és mindig folytonos. A kompakt operátorokat szokás teljesen folytonosnak is nevezni.

A kompakt operátorok tulajdonságai állnak a legközelebb a véges dimenziós terek operátorainak tulajdonságaihoz. Látni fogjuk, hogy a kompakt operátorok „kicsik": ha $T \in \mathcal{CL}(X;X)$ kompakt operátor, akkor az $S = \mathbb{I} - T$ operátor viselkedése csak egy véges dimenziós altéren tér el lényegesen az identikus operátortól. Az $S$ vizsgálata segít $T$ spektrumának vizsgálatában, ugyanis ha $\lambda \neq 0$, akkor $T - \lambda\mathbb{I} = -\lambda(\mathbb{I} - \frac{1}{\lambda}T)$, és a zárójelben $\mathbb{I}$ és egy kompakt operátor különbsége áll. A legegyszerűbb tulajdonságok összefoglalása után ennek az operátornak a vizsgálatára térünk rá.

**13.2.2. Tétel.** *Legyenek $X$, $Y$ és $Z$ Banach-terek. Ekkor*

(1) *ha $T: X \to Y$ lineáris és folytonos, és $\operatorname{rng}(T)$ véges dimenziós, akkor $T$ kompakt;*

(2) *ha $T: X \to Y$ kompakt lineáris operátor, $R: Y \to Z$, és $S: Z \to X$ folytonos lieáris operátorok, akkor $ST$ és $TS$ kompakt;*

(3) *ha $X$ nem véges dimenziós, $T: X \to X$ kompakt lineáris operátor, akkor $0 \in \sigma(T)$;*

(4) *a kompakt operátorok zárt alteret alkotnak $\mathcal{CL}(X;Y)$-ban.*

**Bizonyítás.** (1) és (2) nyilvánvaló. (3) abból következik, hogy $0 \notin \sigma(T)$ esetén $TT^{-1}$ kompaktsága miatt a zárt egységgömb kompakt lenne. (4)-hez könnyű látni, hogy a kompakt operátorok köréből nem vezet ki a skalárral való szorzás. Ha $T$ és $S$ kompakt operátorok, akkor egy korlátos $x_n$ sorozatnak kiválasztva egy részsorozatát, amelynek $T$ általi képe konvergens, majd az így kapott részsorozatnak egy olyan részsorozatát, amelynek $S$ általi képe konvergens, kapjuk, hogy $T+S$ kompakt, így a kompakt operátorok alteret alkotnak. Legyen $T \in \mathcal{CL}(X;Y)$ ennek az altérnek a lezártjában, válasszunk egy $\varepsilon > 0$-t, és legyen $U$ a nyílt egységgömb $X$-ben. Van olyan $S \in \mathcal{CL}(X;Y)$ kompakt operátor, amelyre $\|S - T\| < \varepsilon$. Mivel $S(U)$ teljesen korlátos, léteznek $x_1, \ldots, x_n$ pontok úgy, hogy $S(U)$-t lefedik az $Sx_i$ középpontú $\varepsilon$ sugarú zárt gömbök. Ebből $T(U)$-t lefedik a $3\varepsilon$ sugarú $Tx_i$ középpontú zárt gömbök, tehát $T(U)$ teljesen korlátos. □

→ **13.2.3. Feladat [5].** Kompakt-e egy Banach-téren az $\mathbb{I}$ identikus operátor?

**13.2.4. Feladat [8].** Legyen $X$ szeparábilis Hilbert-tér, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormált bázis $X$-ben, $Y$ Banach-tér, $T: X \to Y$ lineáris operátor. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\|^2 < \infty$. Mutassuk meg, hogy $T$ kompakt operátor.

⋆ **13.2.5. Riesz-lemma.** *Legyen $X$ Banach-tér, $T: X \to X$ kompakt lineáris operátor, $S = \mathbb{I} - T$. Ekkor $S$ nulltere véges dimenziós, $\operatorname{rng}(S)$ zárt és az ortogonális komplementere véges dimenziós.*

**Bizonyítás.** Az $N = \ker(S)$ nulltéren $Tx = x$, így $N$ zárt egységgömbjének $T$ általi képe önmaga. Mivel $N$ zárt, zárt egységgömbje zárt $X$-ben is. Mivel $T$ kompakt, $N$ egységgömbje kompakt, így $N$ véges dimenziós.

Legyen $y \in \overline{S(X)}$. Ekkor létezik olyan $x_n \in X$ sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) = y.$$

Megmutatjuk, hogy $d(x,y) = \|x-y\|$ jelöléssel $d(x_n, N)$ korlátos sorozat. Ha nem így lenne, akkor részsorozatra áttérve feltehetnénk, hogy $d(x_n, N) \to \infty$. Legyen $z_n = x_n/d(x_n, N)$; nyilván $d(z_n, N) = 1$, tehát van olyan $t_n \in N$, hogy $\|z_n - t_n\| \le 2$. Legyen $s_n = z_n - t_n$, és vegyük észre, hogy definíció szerint $S(s_n) = S(z_n) = S(x_n)/d(x_n, N) \to 0$, de $d(s_n, N) = 1$. A $T$ kompaktsága miatt létezik olyan $s_{n_k}$ részsorozat, amelyre $T(s_{n_k})$ egy $a \in X$ elemhez konvergál. De $s_n - T(s_n) \to 0$ miatt ekkor $s_{n_k} \to a$, és így $d(a, N) = 1$. Másrészt $S(a) = \lim_{k\to\infty} S(s_{n_k}) = 0$, és ez ellentmond $N$ definíciójának.

Megmutattuk tehát, hogy $d(x_n, N)$ korlátos valamely $K$ korláttal. Létezik olyan $x'_n$ sorozat, hogy $x_n - x'_n \in N$ és $\|x'_n\| \le K + 1$. Mivel $S(x_n) = S(x'_n)$, feltehetjük, hogy $x_n$ korlátos. Mivel $T$ kompakt, van olyan $x_{n_k}$ részsorozat, amelyre $T(x_{n_k})$ konvergál egy $b \in X$ elemhez. Mivel $x_{n_k} - T(x_{n_k}) = S(x_{n_k})$ az $y$-hoz konvergál, $x_{n_k}$ konvergál $y + b \in X$-hez, és így $S$ folytonossága miatt $S(y+b) = y$, tehát $y \in S(X)$.

Teljes indukcióval válasszunk olyan $y_1, y_2, \dots$ sorozatot, amelyre $y_n$ majdnem ortogonális az $S(X)$ és $y_1, \dots, y_{n-1}$ által kifeszített $Y_{n-1}$ zárt altérre, azaz $\|y_n\| = 1$ és $d(y_n, Y_{n-1}) \ge 1/2$. De ebből $\big\|T(y_n) - T(y_k)\big\| = \big\|y_n - S(y_n) - y_k + S(y_k)\big\| \ge d(y_n, Y_{n-1}) \ge 1/2$, ha $n > k > 0$, ami ellentmond $T$ kompaktságának. □

**13.2.6. Tétel.** *Legyenek $X$ és $Y$ Hilbert-terek. Egy $T\colon X \to Y$ operátor pontosan akkor kompakt, ha $T^*$ kompakt.*

**Bizonyítás.** Legyen $x_n$ egy sorozat $Y$ egységgömbjéből. Mivel $TT^*$ kompakt, van olyan $x_{n_k}$ részsorozat, amelyre $TT^*x_{n_k}$ konvergens.

$$\begin{aligned}\|T^*x_n - T^*x_m\|^2 &= \big\langle T^*(x_n - x_m), T^*(x_n - x_m)\big\rangle \\ &= \big\langle TT^*(x_n - x_m), x_n - x_m\big\rangle \le 2\big\|TT^*(x_n - x_m)\big\|\end{aligned}$$

miatt $T^*x_{n_k}$ Cauchy-sorozat, tehát konvergens. □

**13.2.7. Fredholm-operátorok.** Legyenek $X$ és $Y$ Hilbert-terek, $T\colon X \to Y$ folytonos lineáris operátor. Ha $\ker(T)$ véges dimenziós, $\operatorname{rng}(T)$ zárt és ortogonális komplementer véges dimenziós, akkor *Fredholm-operátor*nak nevezzük. A $T$ Fredholm-operátor *index*e az

$$\operatorname{ind}(T) = \dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\operatorname{rng}(T)^\perp\big)$$

szám. Mi csak a legegyszerűbb esettel, a nulla indexű Fredholm-operátorokkal fogunk részletesen foglalkozni.

**13.2.8. Tétel.** *A Fredholm-operátorok halmaza nyílt $X$ lineáris folytonos transzformációinak terében, és az index lokálisan konstans.*

**Bizonyítás.** Legyen $S$ Fredholm-operátor. Azt kell megmutatnunk, hogy elég kicsi $\|T - S\|$-ra $T$ is Fredholm-operátor és az indexe ugyanaz. Legyen $N$ és $R$ az $S$ (zárt) nulltere illetve képtere. Legyen $\tilde{T}(u,v) = Tu + v$, ha $u \in N^\perp$ és $v \in R^\perp$. A $\tilde{T}$ operátor folytonos lineáris leképezés. Ha $T = S$, akkor $\tilde{T}$ bijektív; mivel $S(N^\perp) = R$, $X$-re képez, és ha $Su + v = 0$, akkor $v = 0$ és $u = 0$. Ha $T$ elég közel van $S$-hez, akkor $\tilde{T}$ elég közel van ehhez a bijekcióhoz, így maga is bijektív. Ebből következik, hogy $X = T(N^\perp) \oplus R^\perp$ a $\tilde{T}$ definíciója szerint, mert $Tu_1 + v_1 = Tu_2 + v_2$, $u_1, u_2 \in N^\perp$, $v_1, v_2 \in R^\perp$-ből $u_1 = u_2$ és $v_1 = v_2$. Továbbá $\ker(T) \subset N$; valóban, ha $Tu = 0$ és $u \in N^\perp$, akkor $\tilde{T}(u, 0) = 0$, így $u = 0$.

A továbbiakban csak a direkt felbontást és ezt a tartalmazást fogjuk használni. A direkt felbontásból

$$\dim(R^\perp) = \dim(T(N^\perp)^\perp). \tag{1}$$

A tartalmazásból $\dim(\ker(T)) \le \dim(N) < \infty$. Legyen $M$ a $\ker(T)$ ortogonális komplementere $N$-ben. Ekkor $N$ a $\ker(T)$ és az $M$ direkt összege,

$$\dim(N) = \dim(\ker(T)) + \dim(M). \tag{2}$$

Nyilván

$$X = N \oplus N^\perp = (\ker(T) \oplus M) \oplus N^\perp = \ker(T) \oplus (M \oplus N^\perp).$$

Így $T$ injektív az $M \oplus N^\perp$ halmazon. Innen

$$\operatorname{rng}(T) = T(M) \oplus T(N^\perp)$$

zárt és $\dim(T(M)) = \dim(M)$, azaz az

$$X = (T(M) \oplus T(N^\perp)) \oplus \operatorname{rng}(T)^\perp$$

direkt felbontásból ortogonális komplementerének dimenziója megegyezik $R^\perp$ dimenziójával. Azaz

$$\dim(R^\perp) = \dim(T(N^\perp)^\perp) = \dim(\operatorname{rng}(T)^\perp) + \dim(T(M)) = \dim(\operatorname{rng}(T)^\perp) + \dim(M)$$

és

$$\dim(N) = \dim(\ker(T)) + \dim(M).$$

Innen

$$\operatorname{ind}(S) = \dim(N) - \dim(R^\perp) = \dim(\ker(T)) - \dim(\operatorname{rng}(T)^\perp) = \operatorname{ind}(T). \ \square$$

**13.2.9. Fredholm-alternatíva tétel.** *Legyen $X$ egy komplex Hilbert-tér, $S\colon X \to X$ folytonos lineáris bijektív operator, $T\colon X \to X$ egy kompakt lineáris operátor. Tekintsük az*

$$Su + Tu = b, \quad x \in X \tag{1}$$

*egyenletet a*

$$S^*v + T^*v = b*, \quad x \in X \tag{2}$$

*duális egyenlettel. Ekkor*

(3) *adott $b \in X$-re az (1) egyenletnek pontosan akkor van $u \in X$ megoldása, ha $b$ ortogonális (2) homogén változatának minden $v$ megoldására;*

(4) *az eredeti és a duális homogén egyenlet megoldásterének dimenziója véges és megegyezik;*

(5) *a feladat korrekt kitűzésű abban az értelemben, hogy ha az eredeti egyenlet homogén változatának csak a nulla a megoldása, akkor az inhomogén egyenletnek van megoldása. (Az egyértelműségből következik a megoldhatóság.) Ilyenkor a megoldás folytonosan függ a jobb oldaltól, azaz az $S + T$ operátor inverze folytonos;*

(6) *adott $b^* \in X$-re a (2) duális egyenletnek pontosan akkor van $v \in X$ megoldása, ha $b^*$ ortogonális (1) homogén változatának minden $u$ megoldására.*

A tételt gyakran az $S = -\lambda\mathbb{I}$ választással alkalmazzuk, ha a sajátvektorokról akarunk belátni valamit.

**Bizonyítás.** Legyen $R = S + T$. Ekkor $\ker(R) = S(\ker(\mathbb{I} + S^{-1}T))$, így a Riesz-lemma szerint véges dimenziós. Mivel $R^* = S^* + T^*$, ugyanígy következik, hogy $\ker(R^*)$ is véges dimenziós. Ugyancsak a Riesz-lemmából $\operatorname{rng}(R) = S(\operatorname{rng}(\mathbb{I} + S^{-1}T))$ zárt. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{rng}(R)$ és $\ker(R^*)$ egymás ortogonális komplementerei. Tudjuk hogy $\operatorname{rng}(R)^\perp = \ker(R^*)$. Mivel mindkettő zárt altér, $\operatorname{rng}(R) = \ker(R^*)^\perp$. Ebből következik (3). Mivel $(R^*)^* = R$, hasonlóan következik (6).

Mivel $t \mapsto S + tR$ folytonos leképezése $[0,1]$-nek, az index lokálisan konstans és a Riesz-lemma szerint minden $t$-re létezik, ugyanaz minden $t \in [0,1]$-re. Mivel $S$ indexe 0, $S + T = R$ indexe is nulla. Mivel $\ker(R^*)$ megegyezik $\operatorname{rng}(R)$ ortogonális komplementerével, mindkettőnek a dimenziója ugyanannyi. De ez a szám $\dim(\ker(R)) - \operatorname{ind}(R)$, ami $\ker(R)$ dimenziója. Ezzel beláttuk (4)-et.

Végül ha az eredeti egyenlet homogén változatának csak a nulla a megoldása, akkor $R$ magja nulla dimenziós, így $R$ értékkészletének az ortogonális komplementere is nulla dimenziós. Ez azt jelenti, hogy $R$ bijektív, és az inverze folytonos. □

**13.2.10. Hilbert–Schmidt-tétel.** *Ha $X$ egy komplex szeparábilis Hilbert-tér, és $T\colon X \to X$ egy önadjungált kompakt operátor, akkor létezik $X$-ben a $T$ sajátvektoraiból álló teljes ortonormált rendszer.*

**Bizonyítás.** Először megmutatjuk, hogy ha

$$c = \sup_{\|x\| \le 1} \big|\langle Tx, x\rangle\big|,$$

akkor $c = \|T\|$ és vagy $c$, vagy $-c$ a $T$ sajátértéke. A $c \le \|T\|$ egyenlőtlenség triviális, és polarizációval $4\Re\langle Tx, y\rangle \le c(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2c(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, amiből $\|x\| = 1$, $y = Tx/\|Tx\|$ helyettesítéssel $\|Tx\| \le c$ adódik. Válasszunk egy olyan normált elemekből álló $x_n$ sorozatot, amelyre $\big|\langle Tx_n, x_n\rangle\big| \to \|T\|$. Részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda$, ahol $\lambda = \|T\|$ vagy $\lambda = -\|T\|$. Innen $0 \le \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2 \to 0$. Ismét részsorozatra áttérve, feltehetjük, hogy $Tx_n$ konvergens, amiből a fenti összefüggés szerint $\lambda \ne 0$ esetén $x_n$ is konvergens, $x_n \to x$, és $Tx = \lambda x$. Ha $\lambda_1 = \lambda \ne 0$, $x_1 = x$ és $F_1 = \{x_1\}^\perp$, akkor $T(F_1) \subset F_1$, mivel $x \in F_1$, $y \in F_1^\perp$ esetén $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$, így $T(F_1) \subset F_1$. Így a $T$ operátor $F_1$-re vett $T_1$ megszorítására ismét alkalmazhatjuk az eddig bizonyítottakat, vesszük az $F_2 = \{x_1, x_2\}^\perp$ alteret, stb. A $T$ kompaktsága miatt bármely $\varepsilon > 0$-ra van olyan $n$, hogy $\|T_n\| < \varepsilon$. Véges vagy végtelen sok lépés után egy $F_\infty = \cap_n F_n$ altérhez és egy $T_\infty$ operátorhoz jutunk, amelyre $\|T_\infty\| = 0$. Egészítsük ki az eddig kapott sajátvektorokat $F_\infty$ egy teljes ortonormált rendszerével. □

## 13.3 Nem korlátos operátorok

*A kvantummechanika iránti érdeklődéstől hajtva kezdett dolgozni Neumann János az operátorelméletben, és egész életében foglalkozott ezzel a témakörrel. A fogalmak nagy részét, amelyek egy absztrakt elmélethez fontosak, már létrehozta Riesz Frigyes (1880–1956) magyar matematikus, aki megalapozta a korlátos szimmetrikus operátorok spektrálelméletét, nagyon hasonló módon ahhoz, amit ma klasszikusnak tekintünk.*

*Von Neumann látta, hogy Riesz tárgyalásmódját ki kell terjeszteni nemkorlátos operátorokra is, és a kulcsot ehhez Carleman szinguláris integráloperátorokkal foglalkozó, igen eredeti munkájában találta meg. Az eredmény egy dolgozat volt, melyet von Neumann a* Mathematische Zeitschrift*hez küldött el publikálásra, de később visszavont. Ennek a visszavonásnak az oka az volt, hogy 1928-ban Erhard Schmidt (1876–1959) és én, egymástól függetlenül, észrevettük, milyen szerepet játszhat az elméletben az adjungált operátor fogalma, és milyen fontosak az önadjungált operátorok. Amikor von Neumann Schmidt professzortól hallott erről a megfigyelésről, egyből képes volt sokkal teljesebb és kielégítőbb formában újraírni dolgozatát, megadva a zárt szimmetrikus operátorok és önadjungált operátorok teljes spektrálelméletét. Ezt úgy tette, hogy felhagyott Carleman módszerével, melyet csak transzfinit indukció felhasználásával tudott alkalmazni, és bevezette a Cayley-transzformációt, amely a nemkorlátos szimmetrikus operátorok elméletének a korlátos izometrikus operátorok elméletére történő visszavezetésére szolgál. Mellesleg, a már kiszedett dolgozat büntetés nélküli visszavonásáért cserébe, a kiadó kizsarolt von Neumann professzortól egy ígéretet, hogy ír egy könyvet a kvantummechanikáról. A könyv rövidesen meg is jelent, és egyike lett a modern fizika klasszikusainak, különösen értékes a kvantumstatisztika analízise. (Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer–Verlag, 1932).*

*M. H. Stone (1970)*

**13.3.1. Tétel.** *Egy komplex Banach-tér bármely $T \in X \to X$ lineáris operátorának a spektruma zárt halmaz.*

**Bizonyítás.** Megmutatjuk, hogy ha $T$ inverze $S \in \mathcal{CL}(X;X)$, azaz $ST \subset TS = \mathbb{I}$, akkor $S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1} \in \mathcal{CL}(X;X)$ a $T - \lambda\mathbb{I}$ inverze elég kis $|\lambda|$ esetén. Tegyük fel, hogy $|\lambda| < 1/\|S\|$. Ekkor $\mathbb{I} - \lambda S$ reguláris, és

$$(T - \lambda\mathbb{I})Sx = TSx - \lambda Sx = x - \lambda Sx = (\mathbb{I} - \lambda S)x$$

minden $x \in X$-re, így

$$(T - \lambda\mathbb{I})S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}y = (\mathbb{I} - \lambda S)(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}y = y$$

minden $y \in X$-re, azaz $S(\mathbb{I} - \lambda S)^{-1}$ a $T - \lambda\mathbb{I}$ inverze. □

**13.3.2. Adjungált operátor.** Legyenek $X$ és $Y$ Hilbert-terek $\mathbb{K}$ felett. Ha $T$ nem feltétlenül korlátos, de sűrű halmazon van definiálva, akkor azon $y \in Y$ elemekre, amelyekre $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ folytonos $\mathrm{dmn}(T)$-n, ez a funkcionál egyértelműen kiterjeszthető $X$-re, és így van olyan $T^*y \in X$, amelyre

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

[A kiterjesztés egyértelműségéhez szükséges, hogy $\mathrm{dmn}(T)$ sűrű legyen $H$-ban.] Könnyű kiszámolni, hogy $T^* \in Y \to X$ lineáris operátor; $T^*$ a $T$ *adjungált*ja. Nyilvánvaló, hogy ha $T$ korlátos, akkor $T^*$ mindenütt értelmezve van. Az is nyilvánvaló, hogy ha $T \subset S$, akkor $S^* \subset T^*$. Ha $TT^* = \mathbb{I}$ és $T^*T = \mathbb{I}$, akkor $T$-t *unitér*nek nevezzük.

**13.3.3. Definíció.** Egy Hilbert-tér egy $T$ lineáris operátorát *szimmetrikus*nak vagy *Hermite-félé*nek nevezzük, ha $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ minden $x, y \in \mathrm{dmn}(T)$-ra. Vegyük észre, hogy egy szimmetrikus operátorra $\langle Tx, x\rangle$ mindig valós. Egy sűrűn definiált operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $T \subset T^*$. Ha $T = T^*$, akkor $T$-t *önadjungált*nak nevezzük. Ha $\overline{T}$ önadjungált operátor, akkor $T$-t *lényegében önadjungált*nak nevezzük. (Felhívjuk rá a figyelmet, hogy $\overline{T}$ nem feltétlenül függvény!) Egy sűrűn definiált zárt operátort *normális*nak nevezünk, ha $T^*T = TT^*$.

A $T$ lineáris operátort *alulról korlátos*nakoperátor nevezünk, ha van olyan $c$ valós szám, hogy $\langle Tx, x\rangle \geq c\|x\|^2$ teljesül minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re. Ha $c$ választható nullának, akkor $T$-t *nemnegatív*nak,ha pedig $c$ választható pozitívnak is, akkor $T$-t *pozitív*naknevezzük. Ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén a *felülről korlátos operátor*fogalmát kapjuk.

**13.3.4. Tétel.** *Legyen $X$ Hilbert-tér, $T$ egy sűrűn definiált lineáris operátor $X$-en, $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, ha $x_1, x_2 \in X$. Ekkor $T^* = V(T)^\perp$.*

Vegyük észre, hogy ha $X = \mathbb{R}$, akkor $V$ a sík egy derékszöggel való elforgatása.

**Bizonyítás.** $(y, z) \in T^*$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re. Ez azzal ekvivalens, hogy $\big\langle(-Tx, x), (y, z)\big\rangle = 0$ minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re, az utóbbi azonban pontosan akkor teljesül, ha $(y, z)$ a $V(T)$ ortogonális komplementerében van. $\square$

**13.3.5. Következmény.** *$T^*$ zárt operátor. Önadjungált operátor zárt, így normális. $\overline{T}$ pontosan akkor függvény, ha $T^*$ sűrűn definiált, és ekkor $\overline{T} = T^{**}$.*

**Bizonyítás.** Ha $T^*$ sűrűn definiált, akkor $T^{**} = V\big(V(T)^\perp\big)^\perp = T^{\perp\perp} = \overline{T}$ függvény. Ha $T^*$ nem sűrűn definiált, akkor van olyan $0 \neq z \in H$, amely ortogonális $\overline{\mathrm{dmn}(T^*)}$-ra. Ekkor $(z, 0)$ ortogonális $T^*$-ra, tehát $(0, -z)$ benne van $\overline{T}$-ban. $\square$

**13.3.6. Projekcióoperátorok és zárt alterek.** Legyen $X$ Hilbert-tér. Emlékeztetünk rá, hogy a $P\colon X \to X$ lineáris operátor pontosan akkor projekció, ha $P^2 = P$, ekkor $X = \ker(P) \oplus \mathrm{rng}(P)$, és ha $P$ folytonos, akkor $\ker(P)$ és $\mathrm{rng}(P) = \ker(\mathbb{I} - P)$ zártak. Ha $P$ önadjungált, akkor $\mathrm{rng}(P)$ és $\ker(P)$ egymás ortogonális komplementerei. Megfordítva, ha $Y$ az $X$ egy zárt lineáris altere, akkor az $Y^\perp$ mentén $Y$-ra való projekció $P$ operátora önadjungált, mivel $y = Py + (y - Py)$ az $y$ ortogonális felbontása, így $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py\rangle = \langle x, P^2y\rangle = \langle x, Py\rangle$. Ez azt mutatja, hogy a $P \mapsto \mathrm{rng}(P)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít $\mathcal{CL}(X; X)$ önadjungált projekcióoperátorai és $X$ zárt lineáris alterei között. A legegyszerűbb önadjungált folytonos projekciók az $\mathbb{I}$ identikus operátor és a nulloperátor.

**13.3.7. Polarizáció.** *Legyen $X$ Hilbert-tér, $T \in X \to X$ lineáris operátor. Ha $X$ komplex, akkor*

$$\begin{aligned}4\langle Tx, y\rangle = {}&\big\langle T(x+y), x+y\big\rangle - \big\langle T(x-y), x-y\big\rangle \\ &+ i\big\langle T(x+iy), x+iy\big\rangle - i\big\langle T(x-iy), x-iy\big\rangle, \quad x, y \in \mathrm{dmn}(T).\end{aligned}$$

*Ha $T$ szimmetrikus, akkor*

$$4\Re\langle Tx, y\rangle = \big\langle T(x+y), x+y\big\rangle - \big\langle T(x-y), x-y\big\rangle, \quad x, y \in \mathrm{dmn}(T).$$

Ez a *polarizációs formula.* Speciálisan, a belső szorzat kifejezhető a normával.

**Bizonyítás.** Kiszámoljuk. □

**13.3.8. Tétel.** *Legyenek $X$, $Y$ komplex Hilbert-terek, $U \in X \to Y$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *$U$ unitér operátor;*

(2) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ *bármely* $x, y \in H$*-ra;*

(3) $\mathrm{dmn}(U) = X$, $\mathrm{rng}(U) = Y$ *és* $\|Ux\| = \|x\|$ *bármely* $x \in H$*-ra.*

**Bizonyítás.** Ha $U$ unitér, akkor $Y$-ra képez, az egész $X$-en van értelmezve, kölcsönösen egyértelmű, és az inverze $U^*$. Mivel

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle UU^*y, y\rangle = \langle U^*y, U^*y\rangle = \|U^*y\|^2,$$

$U^{-1}$ izometria, és így $U$ korlátos is. Másrészt

$$\langle x, y\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle,$$

azaz (1)-ből következik (2). Hogy (2)-ből következik (3), nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy (3) teljesül. Ekkor

$$\langle U^*Ux, x\rangle = \langle Ux, Ux\rangle = \|Ux\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

bármely $x \in X$-re, így polarizációval kapjuk, hogy $U^*U = \mathbb{I}$. Mivel $U$ lineáris izometria $X$-ről $Y$-ra, ezért létezik korlátos inverze, tehát $U^* = U^{-1}$. □

**13.3.9. Tétel.** *Legyen $X$ komplex Hilbert-tér. Ha a $T \in \mathcal{CL}(X; X)$ operátor önadjungált, akkor a spektruma valós. Ha $T$ nemnegatív operátor, akkor önadjungált és spektruma nemnegatív valós számokból áll.*

**Bizonyítás.** Először tegyük fel, hogy $T$ önadjungált. Ha $\lambda$ nem valós szám, akkor a $T - \lambda\mathbb{I}$ operátor magja $\{0\}$, mert egyébként a mag egy $x$ egységvektorára $\lambda = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}$. A $T - \lambda\mathbb{I}$ operátor értékkészlete sűrű $X$-ben, hiszen $\mathrm{rng}(T - \lambda\mathbb{I})^\perp = \ker((T - \lambda\mathbb{I})^*) = \ker(T - \overline{\lambda}\mathbb{I}) = \{0\}$. Megmutatjuk, hogy a $\mathrm{rng}(T - \lambda\mathbb{I})$ halmazon értelmezett $(T - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ operátor korlátos is. Ha $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}\big\|(T - \lambda\mathbb{I})x\big\|^2 &= \big\langle (T - \alpha\mathbb{I})x - i\beta x, (T - \alpha\mathbb{I})x + i\beta x\big\rangle \\ &= \big\|(T - \alpha\mathbb{I})x\big\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \ge \beta^2\|x\|^2.\end{aligned}$$

A becslés miatt, ha $(T - \lambda\mathbb{I})x_n \to y$, akkor $x_n$ Cauchy-sorozat, így $x_n \to x$ és $(T - \lambda\mathbb{I})x = y$, azaz $T - \lambda\mathbb{I}$ értékkészlete $X$, és a becslésből következik, hogy az inverze korlátos.

Ha $T$ nemnegatív, akkor a polarizációs formula szerint

$$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j \big\langle T(x + i^j y), x + i^j y\big\rangle.$$

Hasonlóan,

$$\langle Ty, x\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^{-j} \big\langle T(y + i^{-j} x), y + i^{-j} x\big\rangle.$$

Mivel
$$\langle T(x+i^jy), x+i^jy\rangle = \langle T(y+i^{-j}x), y+i^{-j}x\rangle,$$
azt kapjuk, hogy $\langle Tx,y\rangle = \overline{\langle Ty,x\rangle} = \langle x,Ty\rangle$. Így $T$ önadjungált, és a spektrum valós. Ha $\lambda < 0$, akkor $\ker(T-\lambda\mathbb{I}) = \{0\}$, hiszen egyébként egy egységvektorára $\langle Tx,x\rangle = \lambda$. Ugyanúgy, mint fent, kapjuk, hogy $\operatorname{rng}(T-\lambda\mathbb{I})$ sűrű $X$-ben, a
$$\big\|(T-\lambda\mathbb{I})x\big\|^2 = \big\langle (T-\lambda\mathbb{I})x, (T-\lambda\mathbb{I})x\big\rangle = \|Tx\|^2 - 2\lambda\langle Tx,x\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \ge \lambda^2\|x\|^2$$
becslésből pedig, hogy inverze mindenütt értelmezett korlátos operátor. □

**13.3.10. Példák.** Példáinkban tekintsük a számegyenest a Lebesgue-mértékkel, és legyen a Hilbert-tér a megfelelő komplex $\mathbb{L}^2$-tér.

(1) Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény, és $M_g$ a $g$-vel való szorzás operátora, azaz
$$M_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad \text{ha} \quad t \in \mathbb{R}.$$
Ekkor $M_g$ korlátos lineáris operátor. Az $M_g$ adjungáltja $M_{\overline{g}}$. Ha $g$ valós értékű, akkor $M_g$ önadjungált. Ha $g$ egy halmaz karakterisztikus függvénye, akkor $M_g$ önadjungált projekcióoperátor.

(2) Legyen
$$(Mf)(t) = tf(t), \quad \text{ha} \quad f \in \mathbb{L}^2 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2\big|f(t)\big|^2\,dt < \infty.$$
Megmutatható, hogy ekkor $M$ nemkorlátos önadjungált operátor.

(3) Legyen $\hbar > 0$ egy valós szám, és definiáljuk a $D$ operátort az $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ függvényeken, úgy, hogy $Df = -i\hbar f'$. Ekkor $D$ sűrűn definiált operátor, és
$$\langle Df, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar f'\overline{g} = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar f\overline{g'} = \int_{-\infty}^{\infty} f\overline{(-i\hbar g')} = \langle f, Dg\rangle,$$
ha $f,g \in \operatorname{dmn}(D)$, azaz $D$ szimmetrikus.

(4) Legyen $M$ a (2)-ben definiált operátor, $D$ pedig a (3)-ban definiált operátor. Az $M$ és $D$ operátorok kommutátora, $DM-MD$ az értelmezési tartományán megegyezik az $-i\hbar\mathbb{I}$ operátorral:
$$-i\hbar\big(tf(t)\big)' + ti\hbar f'(t) = -i\hbar f(t)$$
(Heisenberg-féle felcserélési összefüggés).

→ **13.3.11. Feladat [5].** Mutassuk meg, hogy ha a $X$ Hilbert-tér operátoraira $T$ önadjungált, $S$ szimmetrikus, és $T \subset S$, akkor $T = S$.

→ **13.3.12. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy $(T_{\mathbb{C}})^* = (T^*)_{\mathbb{C}}$.

→ **13.3.13. Feladat [4].** Igazoljuk, hogy ha $X$ komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{CL}(X;X)$ és $\langle Tx,x\rangle = 0$ minden $x \in X$-re, akkor $T = 0$.

→ **13.3.14. Feladat [10].** Tegyük fel, hogy $X$ Hilbert-tér, $T$ az $X$ egy sűrűn definiált szimmetrikus operátora és $T$ értékkészlete sűrű. Mutassuk meg, hogy az alábbi operátorok léteznek és $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Speciálisan, ha $T$ önadjungált, akkor az inverze is.

→ **13.3.15. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy egy szimmetrikus operátor sajátértékei valósak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak. Mutassuk meg, hogy ha $x_n$ egy sajátvektorokból álló teljes ortonormált rendszer, akkor a megfelelő sajátértékek között az összes sajátérték előfordul.

→ **13.3.16. Feladat [8].** Tekintsük az $\mathbb{l}^2$ tér

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \mapsto \left(\sum_{j=1}^n jx_j, 0, 0, \dots\right)$$

lineáris operátorát. Mutassuk meg, hogy a lezártja nem függvény. Mutassuk meg, hogy az adjungáltjának értelmezési tartománya nem sűrű.

**13.3.17. Feladat: Hellinger–Toeplitz-tétel [9].** Bizonyítsuk be, hogy ha $X$ Hilbert-tér, és $T\colon X \to X$ lineáris és szimmetrikus, akkor korlátos.

**13.3.18. Feladat [10].** Milyen $\alpha_n$ számsorozat esetén értelmez a

$$Tx = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \dots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \mathbb{l}^2$$

összefüggés $\mathbb{l}^2$-t önmagába képező lineáris operátort? Mikor lesz $T$ önadjungált? Mikor lesz invertálható?

**13.3.19. Feladat [10].** Legyen $X$ komplex Hilbert-tér, $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ortonormált bázis $X$-ben és $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ korlátos komplex számsorozat. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan $T \in \mathcal{L}(X; X)$ operátor létezik, amelyre $Te_n = \alpha_n e_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Határozzuk meg $T$ normáját és spektrálsugarát.

**13.3.20. Tipikus példa.** Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Azt fogjuk mondani, hogy egy mérhető halmaz *lényegében nulla* halmaz, ha minden véges mértékű részhalmaza nulla mértékű. Megjegyezzük, hogy ha minden $A$ mérhető halmazra

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\},$$

akkor a lényegében nulla halmazok pontosan a nulla mértékű halmazok, és a

$$\nu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, B \in \mathcal{A}, \mu(B) < \infty\},$$

ha $A \in \mathcal{A}$ definícióval ilyen tulajdonságú $\nu$ mértéket kapunk, amely a $\sigma$-véges halmazokon megegyezik $\mu$-vel. Ha két függvény egy lényegében nulla halmaztól eltekintve megegyezik, akkor azt mondjuk, hogy *lényegében megegyeznek*. Ha $t$ mérhető, komplex értékű függvény, legyen $M_t$ a $t$-vel való *szorzás operátora*:

$$(M_t x)(s) = t(s)x(s), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbb{L}^2(\mu),\ tx \in \mathbb{L}^2(\mu).$$

Ha $\tilde{t}$ egy másik mérhető függvény, amely lényegében egyenlő $t$-vel, akkor $M_t = M_{\tilde{t}}$, mivel az $\{x \neq 0\}$ halmaz $\sigma$-véges, és megfordítva, ha $M_t = M_{\tilde{t}}$, akkor $t$ és $\tilde{t}$ lényegében megegyeznek, mert ha az $A$ véges mértékű mérhető halmazon nem egyenlőek, akkor

$A \cap \{\Re\tilde{t} > \Re t\}$, $A \cap \{\Re\tilde{t} < \Re t\}$, $A \cap \{\Im\tilde{t} > \Im t\}$, $A \cap \{\Im\tilde{t} < \Im t\}$ halmazok valamelyikének karakterisztikus függvényén $M_t$ és $M_{\tilde{t}}$ különböznek. $M_t$ sűrűn definiált, mert ha $A$ egy véges mértékű mérhető halmaz, akkor az $A_n = A \cap \{|t| \leq n\}$ halmazok karakterisztikus függvényeire $M_t$ definiálva van, így $\operatorname{dmn}(M_t)$ lezártja tartalmazza az $\mathbb{L}^2$ egyszerű függvényeit, tehát sűrű $\mathbb{L}^2$-ben. Megmutatjuk, hogy $M_t^* = M_{\overline{t}}$. Ha $y \in \mathbb{L}^2$ esetén $x \mapsto \langle M_t x, y\rangle = \int tx\overline{y}\, d\mu$ korlátos lineáris funkcionál $\operatorname{dmn}(M_t)$-n, akkor előáll belső szorzat alakban, azaz van olyan $z \in \mathbb{L}^2$, hogy $\int xt\overline{y}\, d\mu = \int x\overline{z}\, d\mu$, ha $x \in \operatorname{dmn}(M_t)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $t\overline{y}$ és $\overline{z}$ majdnem mindenütt megegyeznek. Ha $\mu\{t\overline{y} \neq \overline{z}\} > 0$ lenne, akkor felhasználva, hogy az $\{y \neq 0\}$ és $\{z \neq 0\}$ halmazok $\sigma$-végesek, választhatnánk olyan $A$ mérhető halmazt, amelyen $t\overline{y} \neq \overline{z}$ és $0 < \mu(A) < \infty$. Feltehetjük, hogy $t$ korlátos $A$-n; valóban, alkalmazzuk az $A \cap \{|t| < n\}$ halmazokra a mérték folytonosságát. Ha most $x = \xi_A \operatorname{sgn}(t\overline{y} - \overline{z})$, akkor $x \in \operatorname{dmn}(M_t)$ és $\int x(t\overline{y} - \overline{z})\, d\mu = \int_A |t\overline{y} - \overline{z}|\, d\mu \neq 0$. Vegyük észre, hogy $M_t$ normális, ha $t$ valós értékű, akkor $M_t$ önadjungált, ha $t$ korlátos, akkor $M_t$ is korlátos ugyanazzal a korláttal, ha $t$ karakterisztikus függvény, akkor $M_t$ önadjungált projekció, és ha $|t| \equiv 1$, akkor $M_t$ unitér.

A $t$ függvény *lényeges értékkészlet*e azon $\lambda \in \mathbb{C}$-k halmaza, amelyeknek bármely $V$ környezetére $t^{-1}(V)$ nem lényegében nulla halmaz. Először vegyük észre, hogy $\lambda$ pontosan akkor sajátértéke $M_t$-nek, ha $t^{-1}\{\lambda\}$ nem lényegében nulla halmaz. Egyébként az $1/(t-\lambda)$ függvény lényegében mindenütt értelmezve van, továbbá $M_{1/(t-\lambda)}$ az $M_{t-\lambda} = M_t - \lambda\mathbb{I}$ operátor inverze, hiszen ha $x \in \mathbb{L}^2$ és $y = x(t-\lambda) \in \mathbb{L}^2$, akkor $x = y/(t-\lambda)$. Vegyük észre, hogy ha $\lambda$ nem sajátérték, akkor az inverz, mivel maga is szorzásoperátor, sűrű halmazon van értelmezve. Megmutatjuk, hogy $\sigma(M_t)$ a $t$ lényeges értékkészlete. Ha $\lambda$ nincs a lényeges értékkészletben, akkor $1/|t-\lambda| \leq 1/r$ valamely pozitív $r$-re egy lényegében nulla halmazt kivéve. Így $M_{1/(t-\lambda)}$ mindenütt értelmezve van és korlátos, de ez az $M_t - \lambda\mathbb{I}$ inverze. Ha $\lambda$ a lényeges értékkészletben van, akkor létezik $A_n$, amelyre $0 < \mu(A_n) < \infty$, hogy $|t-\lambda| \leq 1/n$ az $A_n$-en, és így $\xi_{A_n}$-re $\left\|(M_t - \lambda\mathbb{I})\xi_{A_n}\right\| \leq \|\xi_{A_n}\|/n$, tehát $M_t - \lambda\mathbb{I}$ nem lehet invertálható korlátos inverzzel. Vegyük észre, hogy $\sigma_r(M_t)$ üres, mert ha $\lambda \in \sigma(M_t)$ és $\lambda \notin \sigma_p(M_t)$, akkor $M_{t-\lambda}$ inverze sűrű halmazon van értelmezve, de nem korlátos, azaz $\lambda \in \sigma_c(M_t)$. Megjegyezzük, hogy $t$ lényegében egyenlő egy olyan függvénnyel, amelynek értékkészlete része $\sigma(M_t)$-nek, mert $\mathbb{C} \setminus \sigma(M_t)$ előállítható megszámlálható sok $V$ nyílt halmaz egyesítéseként, amelyek mindegyikére $t^{-1}(V)$ lényegében nulla halmaz. Tehát a $t$ függvényt egy lényegében nulla halmazon megváltoztatva, feltehetjük, hogy $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(M_t)$. Ebből ha $r(M_t) < \infty$, akkor $\|M_t\| \leq r(M_t)$. Mivel a másik irányú egyenlőtlenség mindig teljesül,

$$\|M_t\| = r(M_t) = \inf\Big\{r\colon r \geq 0,\ \{|t| > r\} \text{ lényegében nulla halmaz.}\Big\}$$

**13.3.21. Mit állít a spektráltétel?** A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha $T$ egy normális lineáris operátor egy véges dimenziós komplex $H$ Hilbert-téren, akkor — alkalmas bázisban — $Tf$ koordinátái $(t_1 f_1, t_2 f_2, \ldots, t_n f_n)$ alakba írhatók, ahol $f$ koordinátái $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a $T$ sajátértékei. A $T$ operátor tehát ekvivalens egy adott $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ függvénnyel való szorzással.

Mivel ha $\mu$ tetszőleges mérték, akkor az $\mathbb{L}^2(\mu)$ téren egy mérhető $t$ függvénnyel való szorzás $M_t$ operátora, amelyre

$$(M_t f)(s) = t(s) f(s),$$

normális operátor, amelynek adjungáltja a $\bar{t}$ függvénnyel való szorzás operátora, azt várhatjuk, hogy tetszőleges normális operátort ilyen alakban lehet előállítani. Valóban, a spektráltétel szorzat alakja azt állítja, hogy ha $T$ egy normális operátor egy $H$ komplex Hilbert-téren, akkor van olyan lineáris izometria $H$ és egy $\mathbb{L}^2(\mu)$ tér között, amely $T$-t egy $t$ mérhető függvénnyel való szorzásba viszi át, továbbá $t$ választható úgy, hogy $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$ teljesüljön.

Approximáljuk a $t$ függvényt egyszerű függvényekkel. Egy $\sum t_j \xi_j \approx t$ egyszerű függvénnyel való szorzás $H$-ban egy $\sum t_j P_j \approx T$ operátornak felel meg: a $\xi_j$ karakterisztikus függvénnyel való szorzás egy $P_j$ önadjungált projekcióoperátorba megy át, amely azt „méri", $t_j$-nek mekkora „súlya" van a $\sigma(T)$ spektrumban. Ha a közelítést finomítjuk, az összeg egy $\int_{\mathbb{C}} t\,dP(t) = T$ integrálhoz tart, ez a $T$ spekrálelőállítása. Itt $P$ egy, a $\mathbb{C}$-n értelmezett, $T$-től függő, önadjungált projekcióoperátor értékű mérték, a $T$ úgynevezett spektrálfelbontása. A spektrálmértékkel való munkánál gondot okoz, hogy a fellépő sorozatok nem konvergensek $\mathcal{L}(H;H)$ normájában. Ezt a problémát úgy lehet megkerülni, hogy az $A \mapsto P(A)$ spektrálmérték helyett annak „árnyékaival", az $A \mapsto \langle P(A)x, x\rangle$, $x \in H$ közönséges mértékekkel dolgozunk.

**13.3.22. Spektrálmérték.** Legyen $H$ egy komplex Hilbert-tér, és $\mathcal{A}$ az $X$ halmaz részhalmazainak egy $\sigma$-algebrája. Egy, az $\mathcal{A}$ elemeihez $\mathcal{L}(H;H)$ önadjungált projekcióoperátorait rendelő $P$ leképezést *spektrálmérték*nek nevezünk, ha $P(X) = \mathbb{I}$ és $P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle$ jelöléssel $P_x$ mérték minden $x \in H$-ra. Vegyük észre, hogy minden $P_x$ véges mérték, mert $P_x(X) = \langle \mathbb{I}x, x\rangle = \|x\|^2$, és

$$P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle = \langle P(A)x, P(A)x\rangle = \|P(A)x\|^2.$$

Ebből következik, hogy $P(\emptyset) = 0$. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ nem Cauchy-sorozat, hiszen a projekciók normája csak nulla vagy egy lehet, általában $P$ nem $\sigma$-additív normában, azonban ha $P(A_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Valóban, $P_x(A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra $(n = 1, 2, \ldots)$, akkor $P_x(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra, azaz $\|P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x\|^2 = 0$ minden $x \in H$-ra, így $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. A következő tétel a spektrálmértékek további vizsgálatával foglalkozik.

**13.3.23. Tétel.** *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) *ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;*

(2) *$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ha $A, B \in \mathcal{A}$;*

(3) *bármely két $P(A)$, $P(B)$ projekció felcserélhető egymással és ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A)$ és $P(B)$ képtere ortogonális;*

(4) *ha $A_n$ diszjunkt, mérhető halmazok egy sorozata, és $x \in H$, akkor*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x.$$

$\star$ **Bizonyítás.** Ha $A$ és $B$ diszjunkt mérhető halmazok, akkor

$$\langle P(A \cup B)x, x\rangle = \Big\langle (P(A) + P(B))x, x \Big\rangle$$

minden $x \in H$-ra. Ebből polarizációval $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, azaz teljesül (1). Ha $A \subset B$, akkor $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Ebből $P(A)x = x$ esetén

$$\|x\|^2 = \left\|P(A)x\right\|^2 \leq \left\|P(A)x\right\|^2 + \left\|P(B \setminus A)x\right\|^2 = \left\|P(B)x\right\|^2 \leq \|x\|^2,$$

azaz $\left\|P(B)x\right\| = \|x\|$. Ez azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{rng}(P(B))$, azaz $P(B)x = x$. Így azt kaptuk, hogy $P(B)P(A) = P(A)$. Adjungálással adódik, hogy ez a $P(A)P(B) = P(A)$ összefüggéssel ekvivalens. A tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén fennálló

$$P(A \cup B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B) + P(A \setminus B)$$

összefüggés mindkét oldalához hozzáadva $P(A \cap B)$-t, azt kapjuk, hogy

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Mindkét oldalt megszorozva $P(A)$-val, ebből azt kapjuk, hogy

$$P(A) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)P(A),$$

amiből adódik (2), abból pedig (3). Végül, (4)-ben a jobb oldalon ortogonális sor összege áll, amely a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|P(A_n)x\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = P_x(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \left\|P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x\right\|^2 \leq \|x\|^2$$

összefüggés szerint konvergens. Világos, hogy az $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x$ hozzárendelés egy $Q$ lineáris operátor, amelynek normája nem nagyobb, mint 1. Mivel

$$\begin{aligned}\langle Qx, x\rangle &= \lim_{n\to\infty}\Big\langle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)x, x\Big\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle P(A_k)x, x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = \langle P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x, x\rangle\end{aligned}$$

minden $x$-re, polarizációval kapjuk, hogy $Q = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$, tehát teljesül (4).

**13.3.24. Spektrálintegrál.** *Legyen $H$ egy komplex Hilbert-tér és $P$ egy spektrálmérték $X$-en $\mathcal{L}(H;H)$-beli értékekkel. Ekkor létezik egy és csak egy, az $X$-en értelmezett mérhető komplex értékű függvényeket $H$ lineáris operátoraiba képező*

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_X f(t)\, dP(t)$$

*leképezés* (spektrálintegrál)*, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) $\operatorname{dmn}\varphi(f) = \Big\{x\colon x \in H, \int_X |f|^2\, dP_x < \infty\Big\}$;

(2) $\langle\varphi(f)x, x\rangle = \int_X f\, dP_x$ *minden* $x \in \operatorname{dmn}\varphi(f)$*-re.*

*Teljesül továbbá, hogy minden $\varphi(f)$ sűrűn definiált zárt lineáris operátor, és*

(3) $\|\varphi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 \, dP_x$, *ha* $x \in \operatorname{dmn} \varphi(f)$*;*

(4) *ha* $S \in \mathcal{L}(H;H)$ *és* $SP(A) = P(A)S$ *minden* $A$ *mérhető halmazra, akkor* $S\varphi(f) \subset \varphi(f)S$.

*Ha* $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ *mérhető függvények,* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *pedig skalárok, akkor*

(5) *ha* $P\{f \neq g\} = 0$*, akkor* $\varphi(f) = \varphi(g)$*;*

(6) $\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \subset \varphi(\alpha f + \beta g)$*;*

(7) $\varphi(f)\varphi(g) \subset \varphi(fg)$ *és* $\operatorname{dmn}(\varphi(f)\varphi(g)) = \operatorname{dmn} \varphi(g) \cap \operatorname{dmn} \varphi(fg)$*;*

(8) $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$ *és* $\varphi(f)\varphi(f)^* = \varphi(|f|^2) = \varphi(f)^*\varphi(f)$.

A tételt nem bizonyítjuk. □

**13.3.25. A spektráltétel szorzat alakja nemkorlátos operátorokra.** *Legyen* $H$ *egy komplex Hilbert-tér, és* $T$ *egy normális operátor* $H$*-n. Ekkor létezik olyan* $\mu$ *mérték,* $U\colon H \to \mathbb{L}^2(\mu)$ *unitér operátor és* $\mu$*-mérhető komplex értékű* $t$ *függvény, hogy* $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$*, a* $t$*-vel való szorzás operátora, és* $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$*, továbbá* $\mu$ *választható úgy, hogy*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(B)\colon B \subset A, \mu(B) < \infty\}$$

*teljesüljön minden* $A \in \mathcal{A}$*-ra.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**13.3.26. Spektráltétel.** *Egy* $H$ *komplex Hilbert-tér bármely* $T$ *normális operátorához létezik egy és csak egy* $P$ *spektrálmérték* $\mathbb{C}$ *Borel-halmazain, a* $T$ spektrálfelbontása, *amelyre* $T = \int_{\mathbb{C}} t \, dP(t)$*. Erre a spektrálmértékre* $P(\mathbb{C} \setminus \sigma(T)) = 0$*, így az integrálás* $\sigma(T)$ *felett is végezhető. Továbbá,* $P(A)S = SP(A)$ *minden* $A \subset \mathbb{C}$ *Borel-halmazra, és minden olyan* $S \in \mathcal{L}(H;H)$*-ra, amelyre* $ST \subset TS$.

A bizonyítás a spektráltétel szorzat alakját használja. A spektrálfelbontás a

$$P(A) = U^{-1} \circ M_{\xi_A \circ t} \circ U$$

összefüggéssel definiálható. A részletes bizonyítást lásd a Járai [20] könyvben. Egy másik bizonyítás található Rudin [51] könyvében. □

**13.3.27. Definíció.** Legyen $H$ komplex Hilbert-tér, $T$ a $H$ egy normális operátora, és $P$ a $T$ spektrálfelbontása. Ha $f$ Borel-függvény $\sigma(T)$-n, legyen

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f \, dP.$$

t $f(T)$ Megjegyezzük, hogy $f(T)$ az előző bizonyítás szerint $T$ szorzat alakjával is kifejezhető: $f(T) = U^{-1} \circ M_{f \circ t} \circ U$.

→ **13.3.28. Feladat [6].** Ha $T$ normális operátor, hogyan használható a szorzat előállítása a $Tx = \lambda x + y$ egyenlet megoldására?

→ **13.3.29. Feladat[8].** Mutassuk meg, hogy ha $T$ egy normális operátor, akkor $\operatorname{dmn}(T) = \operatorname{dmn}(T^*)$ és $\|Tx\| = \|T^*x\|$ minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$ esetén.

→ **13.3.30. Feladat [8].** Mutassuk meg, hogy egy $T$ normális operátor pontosan akkor önadjungált, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

→ **13.3.31. Feladat [8].** Bizonyítsuk be, hogy önadjungált és nemnegatív operátor spektruma nemnegatív.

→ **13.3.32. Feladat [8].** A $\lambda$ skalárt az $X$ Banach-tér $T$ lineáris operátora *közelítő sajátértékének* nevezzük, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan normált vektor, amelyre $\|Tx - \lambda x\| < \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy minden közelítő sajátérték benne van a spektrumban, és ha $T$ egy komplex Hilbert-tér egy normális operátora, akkor a spektrum minden eleme közelítő sajátérték.

**13.3.33. Feladat [8].** Igazoljuk, hogy komplex Hilbert-téren egy $T\colon X \to X$ folytonos lineáris operátor akkor és csak akkor nemnegatív, ha önadjungált és $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

**13.3.34. Feladat [7].** Bizonyítsuk be, hogy egy $X$ komplex Hilbert-tér minden nemnegatív $T\colon X \to X$ folytonos lineáris operátorához létezik egy és csak egy olyan $S\colon X \to X$ nemnegatív operátor, amelyre $S^2 = T$.

**13.3.35. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy egy $T$ normális operátorra $r(T) = \|T\|$.

→ **13.3.36. Feladat [8].** A spektrálintegrálnál használt jelölésekkel, mutassuk meg, hogy $\sigma\big(\varphi(f)\big) \subset \overline{\operatorname{rng}(f)}$.

**13.3.37. Feladat [7].** Mutassuk meg, hogy egy komplex Hilbert-tér egy $T$ normális operátora pontosan akkor önadjungált, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ és pontosan akkor unitér, ha $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

**13.3.38. Feladat [6].** A spektráltétel jelöléseivel, mutassuk meg, hogy $\sigma(T)$ a legszűkebb zárt halmaz, amelynek komplementerén $P$ nulla.

→ **13.3.39. Feladat [11].** Bizonyítsuk be, hogy ha $T\colon X \to X$ normális operátor, akkor $\|T\| = \sup_{\|x\| \le 1} \big|\langle Tx, x\rangle\big|$.

→ **13.3.40. Feladat [6].** Adjuk meg egy normális operátor szorzat alakját, ha létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázis.

**13.3.41. Feladat [10].** Legyen $X$ komplex Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy egy $P\colon X \to X$ folytonos lineáris projekcióra a következő állítások ekvivalensek:

(1) $P$ önadjungált;

(2) $P$ normális;

(3) $\operatorname{rng}(P) = \ker(P)^{\perp}$;

(4) $\langle Px, x\rangle = \big\|P(x)\big\|^2$ minden $x \in X$-re.

**13.3.42. Feladat [7].** Legyen $X_1$ egy $X$ Hilbert-tér valamely zárt altere, $X_2 = X_1^{\perp}$ és $P$ az $X_1$-re való ortogonális projekció, végül $T$ egy $X$-en értelmezett operátor. Fejezzük ki $T$ és $P$ közötti algebrai összefüggésekkel a következő állításokat:

(1) $T(X_1) \subset X_1$;

(2) $T(X_1) \subset X_1$ és $T(X_2) \subset X_2$.

**13.3.43. Feladat [5].** Legyen $X$ egy komplex Hilbert-tér. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{CL}(X;X)$-ben az unitér elemek multiplikatív csoportot alkotnak.

**13.3.44. Feladat [5].** Legyen $X$ komplex szeparábilis Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy egy $U\colon X \to X$ folytonos linearis operátor akkor és csak akkor unitér operátor, ha ortonormált bázist ortonormált bázisra képez.

**13.3.45. Feladat [7].** Igaz-e, hogy egy $X$ komplex Hilbert-tér önmagára való, a nullát fixen hagyó izometriája unitér operátor?

**13.3.46. Feladat [8].** Legyen $T$ az $X$ komplex Hilbert-tér folytonos lineáris operátora. Mutassuk meg, hogy

(1) $T$ egyértelműen felírható $T = R + iS$ alakban, ahol $R$ és $S$ önadjungált operátorok;

(2) $T$ pontosan akkor normális, ha $R$ és $S$ felcserélhetőek;

(3) $T$ pontosan akkor unitér, ha normális és $R^2 + S^2 = \mathbb{I}$.

**13.3.47. Feladat [8].** Legyen $T$ az $X$ komplex Hilbert-tér folytonos lineáris önadjungált operátora. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, akkor a $(T - \lambda\mathbb{I})(T - \bar{\lambda}\mathbb{I})^{-1}$ operátor unitér.

**13.3.48. Feladat [8].** Legyen $T$ az $X$ komplex Hilbert-tér folytonos lineáris operátora. Bizonyítsuk be, hogy ha $T - i\mathbb{I}$ reguláris és $(T + i\mathbb{I})(T - i\mathbb{I})^{-1}$ unitér, akkor $T$ önadjungált.

**13.3.49. Feladat [5].** Bizonyítsuk be, hogy egy Hilbert-tér $T$ és $S$ korlátos önadjungált operátorainak szorzata akkor és csak akkor önadjungált, ha $T$ és $S$ felcserélhetőek.

**13.3.50. Feladat [7].** Legyen $T$ egy $X$ egy komplex Hilbert-tér folytonos lineáris operátora. Igazoljuk a következő állításokat:

(1) $T$ pontosan akkor reguláris, ha $T^*$ reguláris, és ekkor $(T^*)^{-1} = = (T^{-1})^*$;

(2) $\lambda \in \sigma(T)$ pontosan akkor teljesül, ha $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

**13.3.51. Feladat [13].** Legyen $T$ az $X$ komplex Hilbert-tér folytonos lineáris operátora. Bizonyítsuk be, hogy

(1) $T$ pontosan akkor normális, ha $\|Tx\| = \|T^*x\|$ bármely $x \in H$-ra;

(2) ha $T$ normális, akkor $\ker(T) = \ker(T^*)$;

(3) ha $T$ normális, $\alpha \in \mathbb{C}$ és $Tx = \alpha x$ valamilyen $x \in H$-ra, akkor $T^*x = \overline{\alpha}x$;

(4) ha $T$ normális, $\alpha$ és $\beta$ különböző sajátértékei $T$-nek, akkor a megfelelő sajátalterek ortogonálisak egymásra.

**13.3.52. Feladat [7].** Legyen $X$ végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{C}$ bármely nem üres kompakt halmaza valamely folytonos lineáris operátor spektruma.

**13.3.53. Feladat [5].** Egy $T$ lineáris operátort *maximális szimmetrikus*nak nevezünk, ha $T$ szimmetrikus és nincs szimmetrikus kiterjesztése. Mutassuk meg, hogy ha $T$ önadjungált, akkor maximális szimmetrikus.

**13.3.54. Feladat [9].** Legyen $T$ szimmetrikus operátor egy komplex Hilbert-téren. Igazoljuk a következő állításokat:

(1) $\|Tx + ix\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$ bármely $x \in \mathrm{dmn}(T)$-re;

(2) $T$ pontosan akkor zárt, ha $\operatorname{rng}(T + i\mathbb{I})$ zárt;

(3) $T + i\mathbb{I}$ kölcsönösen egyértelmű.

$\star$ **13.3.55. Feladat [9].** Legyen $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Ekkor az $(S_f)g = f * g$, $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ *konvolúcióoperátor* korlátos lineáris operátor $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$-en. Hozzuk függvénnyel való szorzás alakra.

## 13.4 Kvantummechanika

*Fizikus nóta*

...

*Harmonikus oszcillátor, hidrogénatom,*
*Van-e más is a világon, én nem tudhatom.*
*De ha netán volna más is — rúgja meg a ló —,*
*Az csak perturbáció.*

*Részecske vagyok, vagy hullám?*
*Élek-e vagy ez a hullám?*
*Megmondanám, hogyha tudnám,*
*De mindent én sem tudhatok!*

*Lett légyen az gólyatúra, joghurt, vagy kefír,*
*Schrödingernek egyenlete az mindent leír.*
*(S) Bár Feynman szerint kimaradt az erkölcs és a ló,*
*— (De) ez csak perturbáció.*

...

*MAΦHE*

**13.4.1. Fizikai alkalmazások.** A kvantumelméletben a fizikai rendszer állapotait egy szeparábilis Hilbert-tér normált elemeivel reprezentáljuk, a fizikai mennyiségeket pedig önadjungált operátorokkal. Ha valamely fizikai mennyiséget egy $T$ önadjungált operátor reprezentál, a rendszer állapotát pedig a $\psi$ normált vektor írja le, és $T$ spektrálfelbontása

$$T = \int_{\sigma(T)} t \, dP(t),$$

akkor egy $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaz esetén $\left\|P(A)\psi\right\|^2$ adja meg annak valószínűségét, hogy a rendszeren mérést végezve, az illető fizikai mennyiségre olyan értéket kapunk, amely $A$-ba esik. Ez a valószínűség nem változik, ha a $\psi$ függvényt egy egységnyi abszolút értékű komplex számmal szorozzuk, így az is ugyanazt az állapotot reprezentálja. Azt is mondhatjuk, hogy egy nem nulla $\psi$ minden nem nulla konstansszorosa ugyanazt az állapotot reprezentálja, de a valószínűség kiszámítása előtt normálni kell $\psi$-t.

**13.4.2. Hullámmechanika: egy egyszerű példa.** A Schrödinger-féle *hullámmechanikában* a szeparábilis Hilbert-tér egy $\mathbb{L}^2$-tér. Egy egyszerű példán mutatjuk be a hullámmechanikát, az egydimenziós *lineáris harmónikus oszcillátor* példáján $m$ tömeggel és $D$ direkciós állandóval. Az oszcillátor kitérése legyen $q$. A Hilbert-tér az $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ tér, a $q \mapsto \psi(q)$ *hullámfüggvény* ennek eleme. A $Q$ *helyoperátor* a $q$-val való szorzás operátora, a $(Q\psi)(q) = q\psi(q)$ operátor. Értelmezési tartománya azon $\psi \in \mathbb{L}^2$ függvények halmaza, amelyekre $Q\psi$ is $\mathbb{L}^2$-ben van. Mivel $Q$ éppen szorzat alakban van, látjuk, hogy önadjungált (nem korlátos) operátor. Leolvashatjuk a spektrálfelbontását is: egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazra $P(A)$ az $A$ karakterisztikus függvényével való szorzás operátora. Ez azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy a részecske helyét megmérve, azt $A$-ban találjuk, $\left\|P(A)\psi\right\|^2 = \int_A |\psi|^2$. Tehát $|\psi|^2$-nek közvetlen fizikai jelentése van: a részecske megtalálási valószínűségének sűrűségfüggvénye.

A *lendület* $P$ operátora Schrödinger szerint a $-i\hbar d/dq$ differenciáloperátor, ahol $\hbar = h/(2\pi)$. A jelölést azért vezetjük be, mert ez a kombináció nagyon gyakran előfordul; itt $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ Js, a *Planck-állandó*. Egyébként Heisenberg szerint a $P$ és $Q$ operátorok $PQ - QP$ *kommutátora* az értelmezési tartományán $-i\hbar\mathbb{I}$ kell legyen, és ez nyilván teljesül például a $\mathcal{D}$-beli $\psi$ függvényekre, mert

$$\frac{i}{\hbar}(PQ-QP)\psi(q) = \frac{d}{dq}(q\psi(q) - q\frac{d}{dq}\psi(q) = \psi(q) + q\psi'(q) - q\psi'(q) = \psi(q).$$

Könnyű látni, hogy $\mathcal{D}$-n a $P$ operátor szimmetrikus. Megmutatható, hogy lényegében önadjungált, lezártjának értelmezési tertománya azokból az $\mathbb{L}^2$-beli függvényekből áll, amelyeknek disztribúció értelemben vett deriváltja is $\mathbb{L}^2$-beli függvénnyel reprezentálható: lásd később. Hogyan lehet a lendület (impulzus) operátorát szorzat alakra hozni? Fourier-transzformációval, az a differeniálást szorzásba viszi át.

Fontos az *energiaoperátor* vagy *Hamilton-operátor*. Az energiát a Hamilton-függvény adja:

$$E = H(q,p) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{D}{2}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}q^2.$$

A $p$ impulzus és a $q$ hely helyére beírva az operátorát kapjuk a Hamilton-operátort:

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \frac{D}{2}q^2\psi(q).$$

A Hamilton-operátort egyelőre $\mathcal{D}(\mathbb{R};\mathbb{C})$-en értelmezve, $H$ az $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ sűrűn definiált, lineáris szimmetrikus operátora, mivel parciális integrálással

$$\begin{aligned}
\langle H\psi, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(q) + \frac{D}{2}q^2\psi(q)\right)\overline{\varphi}(q)d\,q \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(q)\overline{\varphi}'(q)d\,q + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q^2\psi(q)\overline{\varphi}(q)d\,q \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)\overline{\varphi}''(q)d\,q + \frac{D}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(q)\overline{q^2\varphi(q)}d\,q \\
&= \langle \psi, H\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Egyébként hasonlóan adódik az is, hogy $H$ nemnegatív.

Hogyan határozhatjuk meg a hullámfüggvényt? Az időtől való függést is leíró időfüggő *Schrödinger-egyenlet*et úgy kapjuk, hogy az $E = H(q,p)$ összefüggésbe a bal oldalra az $i\hbar\partial/\partial t$ operátort, a jobb oldalra a Hamilton-operátort írjuk. Természetesen a hullámfüggvény most már $q$-tól és $t$-től is függ: jelöljük ezt a függvényt $\Psi(q,t)$-vel. Nyilván parciális deriváltakat kell írnunk. Ebben az esetben tehát az egyenlet

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(q,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q^2}(q,t) + \frac{D}{2}q^2\Psi(q,t).$$

Próbáljuk meg az egyenletnek meghatározni néhány megoldását! Fourier módszerével keressük a megoldást $\Psi(q,t) = T(t)\psi(q)$ alakban! Behelyettesítve az egyenletbe,

$$i\hbar T'(t)\psi(q) = T(t)(H\psi)(q),$$

mivel a $H$ operátor nem függ az időtől. Átrendezve

$$i\hbar\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{(H\psi)(q)}{\psi(q)} =: \lambda,$$

ahol $\lambda$ valamilyen konstans kell legyen, mert az egyik oldal csak az időtől, a másik csak a helytől függ. Tehát a

$$(H\psi)(q) = \lambda\psi(q)$$

sajátérték-egyenletet kell megoldanunk. Ez az időtől nem függő *Schrödinger-egyenlet*. Ha ennek $\lambda_n$ egy sajátértéke a hozzá tartozó $\psi_n$ sajátfüggvénnyel, akkor az $i\hbar T'(t) = \lambda_n T(t)$ egyenletet már könnyű megoldani, és azt kapjuk, hogy $\Psi(q,t) = e^{-i\lambda_n t/\hbar}\psi_n(q)$ egy megoldás. Ez a megoldás egy állóhullám: a helyfüggés nem változik, csak az egységnyi abszolút értékű $e^{-i\lambda_n t/\hbar}$ komplex fázis. $\square$

**13.4.3. A harmónikus oszcillátor sajátértékei és sajátfüggvényei.** Az időtől nem függő Schrödinger-egyenlet a harmónikus oszcillátorra

$$\psi''(q) + \frac{2m}{\hbar^2}(\lambda - Dq^2/2)\psi(q) = 0.$$

Vezessük be $D$ helyett a $\nu = \sqrt{D/m}/(2\pi)$ konstanst, ami a klasszikus esetben a rezgésszám. Ekkor az egyenlet

$$\psi''(q) + \frac{2m}{\hbar^2}(\lambda - 2m\pi^2\nu^2q^2)\psi(q) = 0.$$

A $h/(4\pi^2 m\nu)$ mennyiség négyzetgyöke hosszúság jellegű. Jelöljük $q_0$-lal, és „dimenziótlanítás” céljával vezessük be az $x = q/q_0$ változót. A $\varphi(x) = \psi(q)$ jelöléssel az egyenlet

$$\frac{1}{q_0^2}\varphi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\Big(\lambda - 2m\pi^2\nu^2x^2q_0^2\Big)\varphi(x) = 0,$$

azaz

$$\varphi''(x) + \Big(\frac{2\lambda}{h\nu} - x^2\Big)\varphi(x) = 0.$$

Nagy $x$ esetén a $2\lambda/(h\nu)$ tagot elhanyagolhatjuk, így a megoldás asszimptotikusan $\varphi(x) \sim e^{\pm x^2/2}$. A negatív előjelet választjuk, mert a másik függvény nem négyzetesen integrálható. A pontos megoldást keressük $\varphi(x) = y(x)e^{-x^2/2}$ alakban. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}0 &= e^{-x^2/2}(y''(x) - 2xy'(x) + (x^2-1)y(x)) + \Big(\frac{2\lambda}{h\nu} - x^2\Big)e^{-x^2/2}y(x)\\ &= e^{-x^2/2}\Big(y''(x) - 2xy'(x) + ((2\lambda/(h\nu) - 1)y(x)\Big).\end{aligned}$$

A nagy zárójelben álló kifejezést összevetve a Hermite-polinomok differenciálegyenletével, azt kapjuk, hogy $2n = 2\lambda/(h\nu) - 1$, azaz $\lambda_n = h\nu(n + \frac{1}{2})$ esetén van megoldás, ahol $n = 0, 1, \ldots$, és az

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = e^{-(q/q_0)^2/2}H_n(q/q_0)$$

összefüggéssel definiált függvények a $\lambda_n = h\nu(n+\frac{1}{2})$ sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei a $H$ Hamilton-operátornak. Mivel a $H_n$ Hermite-polinomok teljes ortogonális rendszert alkotnak az $e^{-x^2}$ súlyfüggvényre nézve, ezek a függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$-ben; ez utólag igazolja kissé heurisztikus gondolatmenetünket. A Hermite-polinomok normanégyzete $2^n n!\sqrt{\pi}$, így a

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! q_0 \sqrt{\pi}}}e^{-(q/q_0)^2/2}H_n(q/q_0)$$

sajátfüggvények ortonormáltak. Ha $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ Fourier-együtthatói erre a rendszerre nézve $(c_0, c_1, c_2, \ldots)$, és $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty$, akkor $s_k = \sum_{n=0}^{k} c_n\psi_n$-re

$$Hs_k = \sum_{n=0}^{k} \lambda_n c_n \psi_n \to \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \psi_n,$$

így $\overline{H}\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n \psi_n$. Mivel az $U\colon \psi \mapsto (c_0, c_1, c_2, \ldots)$, $U\colon \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{l}^2$ unitér operátorral és $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$-vel $U^{-1} \circ M_\lambda \circ U$ éppen a $\psi \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n h_n$ leképezés, ez az önadjungált operátor $\overline{H}$, és így $H$ lényegében önadjungált, $U^{-1} \circ M_\lambda \circ U$ pedig a szorzatelőállítása. A $H$ operátor függvényei is könnyen megadhatóak: lásd a következő lemmát.

A harmónikus oszcillátor „tankönyvi” példának látszik, vizsgálata azonban alapot nyújt az elektromágneses rezgések vizsgálatához. Lásd a kvantummechanika matematikai [37], [40], [61], [64], [65], [66] és fizikai [11], [31], stb., irodalmát. □

**13.4.4. Lemma.** *Legyen $x_1, x_2, \ldots$ teljes ortonormált rendszer egy $H$ komplex Hilberttérben, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tetszőleges skalárok. Ekkor az $Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, x_j\rangle x_j$ összefüggés egy normális operátort definiál, és bármely, a $\lambda_j$ számokon értelmezett, komplex értékű $g$ függvényre*

$$g(T)x = \sum_{j=1}^{\infty} g(\lambda_j)\langle x, x_j\rangle x_j.$$

*Ha $x_1, x_2, \ldots$ egy $S$ önadjungált operátor sajátvektorai, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pedig a megfelelő sajátértékek, akkor $T = S$.*

A fenti összefüggések úgy értendők, hogy $Tx$, illetve $g(T)x$ pontosan akkor vannak értelmezve, ha a jobb oldali sor konvergens.

**Bizonyítás.** Ha $A \subset \mathbb{C}$ Borel-halmaz, legyen

$$P(A)x = \sum_{\lambda_k \in A} \langle x, x_k \rangle x_k.$$

Triviális, hogy $P(A)$ projekció, és egyszerű számolás mutatja, hogy önadjungált. Nyilván $P(\mathbb{C}) = \mathbb{I}$, és

$$\langle P(A)x, x \rangle = \sum_{\lambda_k \in A} \left| \langle x, x_k \rangle \right|^2,$$

így $P$ spektrálmérték. Megmutatjuk, hogy $P$ a $T$ spektrálfelbontása, azaz $T = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, dP(\lambda)$. A definícióból látszik, hogy $T$ lineáris operátor. A Fourier-sorok elmélete szerint $x \in \operatorname{dmn}(T)$ pontosan akkor, ha $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k \langle x, x_k \rangle \right|^2 < \infty$. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy $\int_{\mathbb{C}} |\lambda|^2 \, dP_x(\lambda) < \infty$, így a két oldal értelmezési tartománya megegyezik. Azt kell csak megmutatnunk, hogy $\langle Tx, x \rangle = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, dP_x(\lambda)$ a közös értelmezési tartomány minden elemére. De

$$\langle Tx, x \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle \overline{\langle x, x_k \rangle} = \int_{\mathbb{C}} \lambda \, dP_x(\lambda).$$

Tegyük fel, hogy $S^* = S$. Megmutatjuk, hogy $T$ kiterjesztése $S$-nek. Legyen $x \in \operatorname{dmn}(S)$, ekkor

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Sx, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, Sx_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k = Tx.$$

Ebből, $S$ és $T$ önadjungáltságát felhasználva, $S \subset T = T^* \subset S^* = S$. Végül, $g(\lambda) = \lambda$ helyett más $g(\lambda)$ függvényt tekintve, hasonló érveléssel adódik az általános formula. □

**13.4.5. Kvantálási szabályok, Schrödinger-egyenlet.** Egyszerűbb fizikai rendszerek esetén a különböző mechanikai mennyiségek operátorát Schrödinger nyomán egyszerű kvantálási szabályok segítségével kaphatjuk meg a hullámmechanikában. Fejezzük ki az egyes mechanikai mennyiségeket a $q_1, q_2, \ldots, q_n$ általános koordináták és a megfelelő $p_1, p_2, \ldots, p_n$ általános impulzusok segítségével [lásd az egyváltozós variációszámításnál], majd alkalmazzuk a $q_j \overline{t} q_j \cdot$ és $p_j \overline{t} - i\hbar\partial_{q_j}$ helyettesítéseket, azaz $q_j$-t a $q_j$-vel való szorzás operátorával, $p_j$-t pedig a $q_j$ szerinti differenciálás operátorának egy konstansszorosával helyettesítjük. Így a $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ vektorok $G$ terén, a konfigurációs téren értelmezett függvényekre ható operátorokat kapunk. A rendszer állapotait az $\mathbb{L}^2(G; \mathbb{C})$ tér $\psi$ normált elemeivel, az állapotfüggvényekkel vagy hullámfüggvényekkel, a mechanikai mennyiségeket pedig az így kapott operátorokkal reprezentáljuk. Nem világos, hogy az így fellépő operátorok hol vannak értelmezve. Értelmezhetjük őket például $\mathcal{D}(Q; \mathbb{C})$-n, de így nem kapunk önadjungált, csak szimmetrikus operátort. Azonban a fizikailag fontos esetekben a kapott operátor lényegében önadjungált, így tekinthetjük a lezártját, ami már önadjungált. Fontos szerepet játszik a rendszer Hamilton-operátora. Az összes (mozgási+helyzeti) energiát mint $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ és $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ függvényét a $H$ *Hamilton-függvény* adja meg:

$$E = H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(q, p).$$

A kvantálási szabályok alapján tehát $H$-ból megkapjuk a rendszer energiaoperátorát, amit ugyancsak $H$-val fogunk jelölni, és *Hamilton-operátor*nak is nevezünk. Ha a másik oldalon $E\bar{t}i\hbar\partial_t$ helyettesítést alkalmazunk, és a $\Psi$ hullámfüggvényt a $t$ időtől is függőnek tekintjük, megkapjuk a rendszer dinamikáját leíró

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(q,t) = H\Psi(q,t)$$

*Schrödinger-egyenlet*et. Ez az egyenlet írja le, hogy a rendszer $(q,t) \mapsto \Psi(q,t)$ hullámfüggvénye hogyan függ az időtől (amíg a rendszeren nem végzünk mérést). Bármely rögzített $t$-re, a $\psi = \Psi(.,t)$ függvény és egy adott fizikai mennyiséghez tartozó operátor segítségével megkaphatjuk, hogy a megfelelő fizikai mennyiséget mérve, annak mi a valószínűségeloszlása. Ha a Hamilton-operátor nem függ az időtől, fontos szerepet játszik az időtől független $H\psi = \lambda\psi$ Schrödinger-egyenlet is. Ennek a sajátérték egyenletnek egy megoldása egy $\Psi(q,t) = e^{-it\lambda/\hbar}\psi(q)$ időtől csak fázisban függő megoldást, állóhullámot ír le. Az időtől függő Schrödinger-egyenlet megoldásával később foglalkozunk, és megmutatjuk, hogy a legegyszerűbb esetben, amikor a Hamilton-operátor nem függ az időtől, a

$$\Psi(q,t) = e^{-itH/\hbar}\Psi(q,0)$$

úgynevezett „gyenge megoldásai” pontosan leírják a rendszer dinamikáját.

Megjegyezzük, hogy az itt megadott kvantálási szabályok egyrészt nem teljesek (például több azonos részecskét is tartalmazó rendszer esetén más-más pótlólagos szabály lép be attól függően, hogy azok fermionok vagy bozonok; nem veszik figyelembe a relativisztikus effektusokat, így a spint sem; stb.), másrészt ellentmondásosak (egy adott $q_j$-vel való szorzás operátora és szerinte vett differenciálás operátora nem felcserélhetőek, így nem mindegy, milyen sorrendben alkalmazzuk őket; stb.), mégis, lehetővé teszik a legegyszerűbb mechanikai rendszerek „megkvantálását”.

A koordináták operátorai szorzat alakban vannak, így vizsgálatuk egyszerű. Az impulzusoperátorok Fourier-transzformációval hozhatók szorzat alakra. A legfontosabb feladat legtöbbször az energiaoperátor sajatértékeinek és sajátfüggvényeinek meghatározása, esetleg a szorzat alakra hozása. □

**13.4.6. A Schrödinger-egyenlet a hidrogénatomra.** A legegyszerűbb „valódi” példa a hidrogénatom. Itt $\psi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})$,

$$E = H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) = \frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} - \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}},$$

ahol $Q = Q_e$ az elektron töltése, $1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ C, $\varepsilon_0$ a vákuum dielektromos állandója, és $m = m_e$ az elektron tömege, $\approx 9{,}10939 \cdot 10^{-28}$ g. Így azt kapjuk, hogy a Hamilton-operátor a

$$(H\psi)(q) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(q) - \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0|q|}\psi(q)$$

operátor.

Tulajdonképpen ez csak egy közelítés. Két részecskéről van szó, a protonról és az elektronról. Több részecske esetén $q$ háromszor annyi dimenziós, mint ahány részecske van, és a Hamilton-operátor

$$H = U(q) - \sum_k \frac{\hbar^2}{2m_k}\Delta_k,$$

ahol $U$ a potenciális energia, a $\Delta_k$ operátor pedig a $k$-adik részecske koordinátáiban hat. Kato megmutatta, hogy ez az operátor mindig lényegében önadjungált. Ha nincs külső erő, akkor $U$ csak a koordináták különbségeitől függ. Ha $m_0, m_1, \ldots, m_K$ a tömegek, $M = m_0 + m_1 + \cdots + m_K$ az össztömeg és $Mq_c = m_0q_0 + m_1q_1 + \cdots + m_Kq_K$, ahol $q_k$ a $k$-adik részecskéhez tartozó koordináta-hármas, azaz $q_c$ a tömegközéppont koordinátahármasa, akkor bevezetve a $q_k' = q_k - q_c$, $k = 1, 2, \ldots, K$ relatív koordinátákat a $H$ operátor $H_0 + H_1$ alakban írható, ahol $H_0$ csak a tömegközéppont koordinátáiban hat, $H_1$ pedig csak a relatív koordinátákban. Ez azt jelenti, hogy a hullámfüggvény két függvény szorzata, az egyik a tömegközéppont mozgását írja le (ez nem érdekel bennünket), a másik a relatív mozgást. Ha csak két részecske van, akkor a $H_1$ operátor pontosan olyan, mint a hidrogénatomra felírt Hamilton-operátor, de $m_e$ helyére $m_r = m_e m_p/(m_e + m_m)$, kerül, a redukált tömeg, ahol $m_m$ a mag tömege, protonnál $\approx 1{,}672623 \cdot 10^{-24}$ g. Tovább is mehetünk, olyan iont is tekinthetünk, amelyben egy elektron van, de a mag töltése $ZQ_e$: ekkor $Q = Q_e^2$ helyére $ZQ_e^2$ kerül. Az időfüggő Schrödinger-egyenlet ekkor

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(q,t) = -\frac{\hbar^2}{2m_r}\Delta_q\psi(q,t) - \frac{ZQ_e^2}{4\pi\varepsilon_0|q|}\Psi(q,t).$$

A Hamilton-operátort a probléma gömbszimmetrikus jellege miatt célszerű lesz gömbi koordinátákban felírni: $q_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $q_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $q_3 = r\cos\vartheta$, $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $-\pi \le \varphi \le \pi$.

**13.4.7. A Laplace-operátor gömbi koordinátákban.** Tegyük fel, hogy az $x = (x_1, x_2, x_3)$ szokásos helyvektort valamely $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *görbe vonalú koordinátá*k $x(\alpha)$ függvényeként írjuk fel. Tekintsük a

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial\alpha_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial\alpha_3}$$

parciális derivált vektorokat! A továbbiakban feltesszük, hogy ezek páronként merőlegesek és nem nullák (ortogonális koordinátarendszer). A gömbi és a hengerkoordináták például ilyenek. Jelölje ezen vektorok hosszának reciprokát rendre $h_1, h_2, h_3$. Ekkor a

$$i_1 = h_1\frac{\partial x}{\partial\alpha_1}, \quad i_2 = h_2\frac{\partial x}{\partial\alpha_2}, \quad i_3 = h_3\frac{\partial x}{\partial\alpha_3}$$

a (helytől függő) ortonormált bázist alkotnak. Ha az $i_j$ irányba $ds_j$ távolságot haladunk, akkor (lineáris közelítésben) $d\alpha_j = h_j\,ds_j$. Innen grad $f$ koordinátái

$$i_j h_j\frac{\partial f}{\partial\alpha_j}.$$

Határozzuk meg egy $v$ vektormező divergenciáját a görbevonaló koordinátákban! A divergenciatételt fogjuk használni. A $ds_1, ds_2, ds_3$ egyenlő nagyságrendű kis ívek által meghatározott térfogatra az integrál (elsőrendben közelítve) $\operatorname{div} v\, ds_1\, ds_2\, ds_3$. A felületi integrál a $ds_2$ és $ds_3$ ívek által kifeszített (elsőrendben) téglalapra $-v_1\, ds_2\, ds_3$, míg a szembenlévő téglalapra

$$v_1\, ds_2\, ds_3 + \frac{\partial}{\partial s_1}(v_1\, ds_2\, ds_3)\, ds_1.$$

A kettő összege

$$h_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{v_1}{h_2 h_3}\Big)\, ds_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3.$$

Hasonlóan számolhatunk a másik két lappárra is. Így végül azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{div} v = h_1 h_2 h_3 \bigg(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{v_1}{h_2 h_3}\Big) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\Big(\frac{v_2}{h_3 h_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\Big(\frac{v_3}{h_1 h_2}\Big)\bigg).$$

Bár nem lesz rá szükségünk, hasonlóan számolható ki $\operatorname{rot} v$ is: A $ds_1$ és $ds_2$ által kifeszített téglalap körül integrálva kapjuk $ds_1\, ds_2$-ször $\operatorname{rot} v$ harmadik komponensét. A görbe menti integrálok $v_1\, ds_1$, $-v_2\, ds_2$, illetve

$$-v_1\, ds_1 - \frac{\partial}{\partial s_1}(v_1\, ds_1)\, ds_2 \quad \text{és} \quad v_2\, ds_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}(v_2\, ds_2)\, ds_1$$

Hasonlóan tovább számolva végül azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v = {} & i_1 h_2 h_3 \bigg(\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\Big(\frac{v_3}{h_3}\Big) - \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\Big(\frac{v_2}{h_2}\Big)\bigg) \\ & + i_2 h_3 h_1 \bigg(\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\Big(\frac{v_1}{h_1}\Big) - \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{v_3}{h_3}\Big)\bigg) \\ & + i_3 h_1 h_2 \bigg(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{v_2}{h_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\Big(\frac{v_1}{h_1}\Big)\bigg). \end{aligned}$$

Végül $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ alapján

$$\Delta f = h_1 h_2 h_3 \bigg(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Big(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\Big(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\Big) + \frac{\partial}{\partial \alpha_3}\Big(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial f}{\partial \alpha_3}\Big)\bigg).$$

Gömbi koordinátákra

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= (\sin\vartheta \sin\varphi, \sin\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta), \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= (r\sin\vartheta\cos\varphi, -r\sin\vartheta\sin\varphi, 0), \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= (r\cos\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta\cos\varphi, -\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy ezek ortogonális vektorok és hogy $h_1 = 1$, $h_2 = 1/(r\sin\vartheta)$, $h_3 = 1/r$. Így a Laplace-operátor

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\Big).$$

Innen a hidrogénatomra a Schrödinger-operátor

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}D\Big) - \frac{Q_e^2}{r},$$

ahol

$$D = \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Célszerű lesz először a $DY = \kappa Y$ sajátérték-problémát megoldani. A megoldások a gömbfüggvények:

**13.4.8. Gömbfüggvények.** A sajátérték-egyenletben $z = \cos\vartheta$ helyettesítéssel, a változókat szétválasztva

$$Y(\vartheta,\varphi) = P(\cos\vartheta)\Psi(\varphi)$$

alakban keressük a megoldást. Azt kapjuk, hogy

$$\Psi'' + \nu\Psi = 0, \quad \Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi),$$

$$((1-z^2)P')' + \left(\kappa - \frac{\nu}{1-z^2}\right)P = 0.$$

A megfelelő $\mathbb{L}^2$-terek $\mathbb{L}^2]-\pi,\pi[$ és $\mathbb{L}^2]-1,1[$. Az első egyenletből $\nu = m^2$, $m \in \mathbb{Z}$ és $\Psi(\varphi) = e^{im\varphi}$. Így a másik egyenlet

$$\left((1-z^2)P'\right)' + \left(\kappa - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0.$$

Vizsgáljuk először az $m = 0$ esetet. Az egyenletnek eleget tesznek a Legendre-polinomok, amelyek teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben, így ebben az esetben $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $P = P_l$.

Megmutatjuk, hogy az általános esetben a

$$((1-z^2)P')' + \left(\kappa - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0 \tag{1}$$

egyenlet megoldásai $\kappa = l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le l$ esetén a

$$P_l^m(z) = (1-z^2)^{m/2}P_l^{(m)}(z)$$

*asszociált Legendre-függvény*ek. Az ortogonális polinomoknál található összefüggések szerint ezek szoros kapcsolatban vannak az ultraszférikus polinomokkal:

$${}^{(m)}P_{l-m}(z) = \frac{2^m l!}{(l+m)!}(1-z^2)^{-m/2}P_l^m(z). \tag{2}$$

Ezt az összefüggést az ultraszférikus polinomok differenciálegyenletébe helyettesítve, kapjuk, hogy $P_l^m$ kielégíti (1)-et $\kappa = l(l+1)$ esetén. Mivel az ultraszérikus polinomok teljes ortogonális rendszert alkotnak a $\varrho(z) = (1-z^2)^m$ súlyfüggvényre nézve, a $P_l^m$, $0 \le m \le l$ függvények, mint a ${}^{(m)}P_{l-m}\sqrt{\varrho}$ függvények konstansszorosai, teljes ortogonális rendszert alkotnak $\mathbb{L}^2]-1,1[$-ben.

A fentiek alapján az

$$Y_l^m(\vartheta,\varphi) = P_l^{|m|}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \quad l \in \mathbb{N},\ |m| \le l$$

*gömbfüggvény*ekhez jutunk. Nem nehéz megmutatni, hogy a gömbfüggvények egy teljes ortogonális rendszert adnak a gömbfelületen. Könnyen áttérhetünk valós rendszerre is, mert $\overline{Y}_l^m = Y_l^{-m}$, így $m > 0$ esetén $Y_l^m$ és $Y_l^{-m}$ helyett $Y_l^m$ valós és képzetes részét vehetjük. Megmutatható, hogy $Y_l^m$ normanégyzete

$$\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}.$$

Mivel $Y_l^0$ valós, a valós részének normanégyzete ugyanennyi, míg egyébként a valós és a képzetes rész normanégyzete is ennek a fele. Felhasználva a Legendre-polinomokra vonatkozó

$$P_l(z) = 2^k \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \binom{2l-2k}{l}\binom{l}{k} z^{l-2k} = \sum_{k=0}^{[l/2]} c_k z^{l-2k}$$

összefüggést, az

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\vartheta$$

változókra $m \ge 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi) &= r^l P_l^m(\cos\vartheta)e^{im\varphi} \\ &= (r\sin\vartheta e^{i\varphi})^m \sum_{2k+m\le l} r^{2k} c_k (r\cos\vartheta)^{l-2k-m} \\ &= (x_1 + ix_2)^m \sum_{2k+m\le l} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k c_k x_3^{l-2k-m}. \end{aligned}$$

Ebből láthatjuk, hogy $r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi)$ valós és képzetes része is az $x_1, x_2, x_3$ változók valós együtthatós $l$-ed fokú homogén polinomja (azaz pontosan $l$-ed fokú monomok lineáris kombinációja). Ez az észrevétel egyrészt azt jelenti, hogy ez egy $\mathcal{C}^\infty$-függvény a háromdimenziós euklédeszi téren, másrészt lehetőséget ad magasabb dimenziós általánosításokra. □

⋆ **13.4.9. Hidrogénatom, spin nélkül.** *A hidrogénatom*

$$(H\psi)(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi - \frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0|q|}\psi, \quad \mathrm{dmn}(H) = \mathcal{D}(R^3)$$

Hamilton-operátora *(lásd a 13.4.5 pontot) lényegében önadjungált és alulról korlátos. Továbbá*

$$\sigma_c(\overline{H}) = [0,\infty[, \quad \sigma_p(\overline{H}) = \left\{-\frac{m_e Q_e^4}{8h^2\varepsilon_0^2 n^2} : n = 1,2,\dots\right\}, \quad \sigma_r(\overline{H}) = \emptyset;$$

*a* $-m_eQ_e^4/(8h^2\varepsilon_0^2n^2)$ *sajátértékhez tartozó sajátaltér* $n^2$ *dimenziós, és a (gömbi koordinátákban felírt)*

$$ {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)\cdot r^l\cdot e^{-r/(nr_0)}\cdot Y_l^m(\vartheta,\varphi),\quad 0\le l\le n-1,\ |m|\le l $$

*sajátfüggvények feszítik ki, ahol* $r_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(m_eQ_e^2)$ *a atomsugar tomsugar Bohr-féle atomsugár*Bohr-féle atomsugár*, az L függvények általánosított Laguerre-polinomok, az Y függvények pedig gömbfüggvények. A* $\overline{H}$ *operátor értelmezési tartománya a* $\mathcal{H}^2$ *Szoboljevtér. (Lásd később.)*

Ha a redukált tömeggel számolunk, $m_e$ helyére $m_r$ kerül, és ha a mag töltése $Z$, akkor $Q_e^2$ helyére $ZQ_e^2$.

**Részleges bizonyítás.** A teljes bizonyítás megtalálható Triebel [56] könyvében. Itt csak a sajátértékek és a sajátfüggvények meghatározására szorítkozunk, de nem mutatjuk meg, hogy nincs több, és a többi állítást sem.

A probléma gömbszimmetrikus jellege miatt áttérünk gömbi koordinátákra: $q_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $q_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $q_3 = r\cos\vartheta$, $0\le r<\infty$, $0\le\vartheta\le\pi$, $-\pi\le\varphi\le\pi$. A $\psi$ függvényt $r,\vartheta,\varphi$ függvényének tekintve, a Laplace-operátor

$$ \psi\mapsto\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right). $$

Keressük a sajátfüggvényeket $R(r)Y(\vartheta,\varphi)$ alakban. Azt kapjuk, hogy

$$ -\frac{\hbar^2}{2m_r}\left(\frac{1}{r^2}(r^2R')'Y-\frac{R}{r^2}D(Y)\right)-\frac{Q_e^2}{r}RY = ERY, \tag{1} $$

ahol

$$ D(Y) = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}. $$

Vegyük észre, hogy ha a $D(Y)=\kappa Y$ sajátérték-probléma egy sajátfüggvényét helyettesítjük (1)-be, akkor $Y$-nal oszthatunk. Ezt a sajátérték-problémát viszont már vizsgáltuk a 13.4.8 pontban, és azt találtuk, hogy $\kappa = l(l+1)$, $l\in\mathbb{N}$ sajátértékek, a megfelelő sajátfüggvények pedig az $Y_l^m$, $|m|\le l$ gömbfüggvények. Visszahelyettesítve (1)-be, azt kapjuk, hogy

$$ R''+\frac{2}{r}R'+\frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E+\frac{Q_e^2}{4\pi\varepsilon_0r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)R=0. $$

Az $\tilde r_0^2 = -\hbar^2/(2m_eE)$ jelölést bevezetve, az $r$ változó helyett áttérünk a dimenzió nélküli $\varrho = 2r/\tilde r_0$ független változóra. Az $\tilde R(\varrho) = R(r)$, $n = m_eQ_e^2\tilde r_0/(4\pi\varepsilon_0\hbar^2)$ jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$ \tilde R''+\frac{2}{\varrho}\tilde R'+\left(-\frac14+\frac{n}{\varrho}-\frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right)\tilde R=0. \tag{2} $$

Kis $\varrho$ esetén hatványsor alakban keressük a megoldást: $\tilde R(\varrho) = c_0\varrho^s+c_1\varrho^{s+1}+\cdots$. Csak a főtagokat tartva meg, és elhanyagolva a magasabb fokú tagokat, az $s(s+1) = l(l+1)$

összefüggés adódik, ebből pedig $s = l$ vagy $s = -(l+1)$, de csak az első esethez tartozik sima megoldás, így azt sejtjük, hogy kis $\varrho$-ra $\tilde{R}(\varrho) \sim \varrho^l$.

Nagy $\varrho$ esetén a (2) egyenletben elhanyagolva az $1/\varrho$-t és $1/\varrho^2$-et tartalmazó tagokat, az $\tilde{R}'' \sim \tilde{R}/4$ összefüggést kapjuk, ahonnan azt sejtjük, hogy $\tilde{R}(\varrho) \sim e^{\pm\varrho/2}$, de csak $e^{-\varrho/2}$ négyzetesen integrálható. Ezek a heurisztikus meggondolások azt sugallják, hogy $\tilde{R}(\varrho) = \varrho^l e^{-\varrho/2} w(\varrho)$ alakban érdemes keresni a megoldást. Visszahelyettesítve (2)-be, azt kapjuk, hogy

$$\varrho w'' + (2l + 2 - \varrho)w' + (n - l - 1)w = 0.$$

Ebből látjuk, hogy ha $n - l - 1 \geq 0$, azaz ha $n > l$, akkor ${}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)$ megoldás, nyilván erre

$$\tilde{R}(\varrho) = {}^{(2l+1)}L_{n-l-1}(\varrho)\varrho^l e^{-\varrho/2},$$

azaz

$$\tilde{r}_0^2 = \frac{16\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^4}{m_e^2 Q_e^4} n^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_e E}$$

miatt $E = -m_e Q_e^4/(8\varepsilon_0^2 h^2 n^2)$ és kapjuk az állítást. $\square$

**13.4.10. Feladat [6].** Egy részecske állapotát egy adott időpontban a

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{-x^2/4}$$

$\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$-beli állapotfüggvény írja le. Helyét meghatározva, milyen valószínűséggel fogjuk a $[-1, 1]$ intervallumban találni?

**13.4.11. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $\psi_2 = c\psi_1$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, akkor a $\psi_1$ és $\psi_2$ állapotok esetén bármely fizikai mennyiség mérésekor bármely Borel-halmaz esetén annak valószínűsége, hogy a mért érték az adott Borel-halmazba esik, megegyezik.

**13.4.12. Feladat [10].** Tegyük fel, hogy a fizikai mennyiségeket reprezentáló $T$ és $S$ önadjungált operátorokra teljesül a $TS - ST \subset i\hbar\mathbb{I}$ *Heisenberg-féle felcserélési összefüggés*. Mutassuk meg, hogy ekkor bármilyen $\psi$ állapot esetén, a fizikai mennyiségek mért értékeinek szórását $\mathbb{D}_\psi(T)$, illetve $\mathbb{D}_\psi(S)$-vel jelölve, teljesül a $\mathbb{D}_\psi(T)\mathbb{D}_\psi(S) \geq \hbar/2$ *Heisenberg-féle határozatlansági reláció*.

**13.4.13. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy korlátos operátorokra nem teljesülhet a Heisenberg-féle felcserélési összefüggés.

# 14

# Parciális differenciálegyenletek

## 14.1 Többváltozós variációszámítás

*A híres Euler az összes variációs problémák vizsgálatát sikeresen egy általános módszerre vezette vissza. De bármilyen kifinomult és gyümölcsöző is legyen a módszere, el kell ismerni, hogy* nem *egyszerű. Itt most egy olyan módszer található, amely csak az analízis egyszerű elveit használja.*

*Joseph Louis Lagrange (1762)*

Ugyanúgy, mint a közönséges differenciálegyenleteknél, a legfontosabb differenciálegyenleteket variációszámítás segítségével kaphatjuk. Lagrange eredeti módszerét fogjuk követni.

**14.1.1. Multiindexek.** Többváltozós függvények vizsgálatánál tömör jelöléseket tesz lehetővé a multiindexek használata. Egy *multiindex* egy

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$$

természetes számokból álló vektor. Legyen $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ és $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_k!$. Multiindexekkel tömören írhatók például polinom többváltozós polinomok és parciális differenciáloperátorok. Ha

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{K}^k,$$

akkor jelölje $\xi^\alpha$ a $\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_k^{\alpha_k}$ *monom*ot. Ekkor egy legfeljebb $m$-ed fokú polinom

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \xi^\alpha$$

alakban írható. Jelölje $\partial^\alpha$ az $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_k^{\alpha_k}$ differenciáloperátort, ahol $\partial_j$ a $j$-edik változó szerinti differenciálás operátora, $P(\partial)$ pedig a

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha$$

differenciáloperátort. Például, ha $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_k^2$, akkor $P(\partial)$ a $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_k^2$ *Laplace-operátor*.Ha $u \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ az $x$ pontban $m$-szer differenciálható, akkor az $u^{(m)}(x)$ szimmetrikus $m$-lineáris forma koordinátái azonosíthatók a $(\partial^\alpha u)(x)$, $|\alpha| = m$ vektorok koordinátáival.

**14.1.2. Többdimenziós probléma.** Tekintsük az alábbi *többdimenziós, rögzített peremű variációs problémát*. Legyenek $n, m, k$ pozitív természetes számok, $G \subset \mathbb{R}^k$ korlátos tartomány. Álljon $M$, a *megengedett függvények osztálya* az összes olyan $u \in \mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$ függvényekből, amelyekre az

$$S(u) = \int_{\overline{G}} L(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(m)}(x))\, dx$$

integrál integrandusa minden $x \in \overline{G}$ pontban értelmezve van, ahol $L$ egy megfelelő dimenziós euklidészi tér egy $Q$ nyílt részhalmazán értelmezett folytonos valós értékű függvény, és amelyek eleget tesznek a $Bu = g$ peremfeltételnek, ahol $B$ a $\mathcal{C}^m(\overline{G}; \mathbb{R}^n)$-beli függvényekre értelmezett lineáris operátor, $g$ a $B$ értékkészletének egy eleme, és $B$ „csak a peremen felvett értékektől függ”, azaz nulla, ha $u|_G \in \mathcal{K}^m(G; \mathbb{R}^n)$. Megoldandó az

$$M\colon S(u) \to \text{lokmin}$$

probléma. Az $L$ függvényt a probléma *Lagrange-függvény*ének $\big[$a fizikában inkább *Lagrange-sűrűség*ének , mivel a térváltozók szerinti integrálja az energiák különbsége$\big]$ is szokás nevezni.

**14.1.3. Lagrange-lemma.** *Tegyük fel, hogy $G \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz és $h\colon G \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tetszőleges $v \in \mathcal{D}(G; R)$ függvényre $\int_G h(t)v(t)\, dt = 0$. Ekkor $h$ nulla $G$-n.*

**Bizonyítás.** Tegyük fel, hogy valamely $x_0 \in G$-re $h(x_0) \neq 0$. Ekkor van olyan $c > 0$ és $G$-beli $U$ környezete $x_0$-nak, amelyen $|h| \geq c$. Legyen $v$ a simitási lemmában hsznált $\omega_\varepsilon$ függvény egy eltoltja, amelynek tartója $U$-ban van. Mivel $h$ nem vált előjelet $U$-ban,

$$\left| \int_G h(t)v(t)\, dt \right| = \left| \int_G h(t)v(t)\, dt \right| = \int_G |h(t)| y(t)\, dt \geq \varepsilon \int_G v(t)\, dt > 0,$$

ami ellentmondás. □

**14.1.4. Parciális integrálás többdimenzióban.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^k$ korlátos nyílt halmaz, amelyre a $\partial G$ határ lokálisan Lipschitz, $u, v\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-függvények, $e_i$ az $i$-edik egységvektor. Ekkor*

$$\int_G (u\partial_i v + v\partial_i u) = \int_{\partial G} uv\langle e_i, \mathbf{n}\rangle.$$

*Ha $v$ tartója $G$-nek kompakt részhalmaza, akkor a jobb oldal nulla, és a $G$ határára vonatkozó feltevés elhagyható.*

Vegyük észre, hogy a tétel lényegében csak a divergenciatétel átfogalmazása.

**Bizonyítás.** Az első eset következik a divergenciatételből, ha egy olyan $\mathbb{R}^k$-beli értékű függvényre alkalmazzuk, amelynek $i$-edik koordinátája $uv$, a többi nulla. A második esetben fedjük le $v$ tartóját véges sok $G$-beli tégla belsejével, és alkalmazzuk az első esetet $G$ helyett ezen téglák egyesítésére. □

**14.1.5. Tétel.** *14.1.2 jelöléseivel, tegyük fel, hogy az $u \in M$ függvényhez létezik $\delta > 0$, hogy*

$$S(u) \leq S(\tilde{u}), \quad \text{ha} \quad \tilde{u} \in M,\ \|u - \tilde{u}\|_m < \delta,$$

*továbbá $u \in \mathcal{C}^{2m}(G;\mathbb{R}^n)$ és $L \in \mathcal{C}^{(m+1)}(Q)$. Ekkor $u$ eleget tesz $G$-n a*

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \left(L_{\partial^\alpha u}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x))\right) = 0$$

Euler–Lagrange-egyenlet*nek.*

**Bizonyítás.** Legyen $v \in \mathcal{K}^m(G;\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, és tekintsük a

$$\varepsilon \mapsto \varphi(\varepsilon) = S(u + \varepsilon v)$$

valós változós függvényt. Ez a függvény értelmezve van a nulla egy környezetében, és mivel a nulla pontban lokális minimuma van, valamint a paraméteres integrálok paraméter szerinti differenciálására vonatkozó tétel szerint differenciálható a nulla pontban, $\varphi'(0) = 0$, azaz

$$\int_G \sum_{j=0}^{m} L_{u^{(j)}}(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x))v^{(j)}(x)\, dx = 0.$$

Nem írva ki a változókat, az integrálandó mennyiség

$$\sum_{|\alpha|\leq m} L_{\partial^\alpha u}\partial^\alpha v$$

alakban is írható. Koordinátánként parciálisan integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\int_G \Bigg(\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^\alpha \partial^\alpha (L_{\partial^\alpha u})\Bigg) v = 0,$$

amiből, mivel $v$ tetszőleges volt, koordinátánként alkalmazva az általánosított Lagrange-lemmát, kapjuk, hogy az Euler–Lagrange-egyenlet $G$ minden pontjában fennáll. □

**14.1.6. Megjegyzés.** Az Euler–Lagrange-egyenletben a kijelölt differenciálásokat elvégezve, $2m$-edrendű parciális differenciálegyenlet-rendszert kapunk $u$-ra.

**14.1.7. Weierstrass példája.** Tekintsük a

$$S(f) = \int_{-1}^{1} \left(xf'(x)\right)^2 dx \to \min, \quad f(-1) = -1,\ f(1) = 1$$

problémát. Az

$$f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\arctan n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

függvénysorozatra $S(f_n) \to 0$, ha $n \to \infty$, így ez egy minimalizáló sorozat, de nem konvergál folytonos függvényhez.

**14.1.8. A Dirichlet-elv.** Mint látjuk, a variációszámítás lehetővé teszi, hogy függvénytereken értelmezett funkcionálokra vonatkozó szélsőérték feladatokat differenciálegyenletekre vezessünk vissza. Megfordítva, egy differenciálegyenlethez is gyakran megtalálhatjuk azt a variációs problémát, amelynek az adott egyenlet az Euler–Lagrange-differenciálegyenlete. Például Gauss, W. Thomson (a későbbi Lord Kelvin), és Dirichlet egymástól függetlenül észrevették, hogy az

$$\int_G |\nabla u|^2 \to \min, \quad \partial G\colon u = g$$

problémához, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $g\colon \partial G \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvény, a Laplace-egyenlet tartozik, mint Euler–Lagrange-egyenlet. Ennek alapján a

$$G\colon \Delta u = 0, \quad \partial G\colon u = g$$

Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladat megoldásának létezését nyilvánvalónak tartották. Riemann a gondolatmenetet általánosítva, *Dirichlet-elv*nek nevezte el, és felhasználásával csodálatos eredményeket ért el a komplex függvénytanban. Három tulajdonság azonban bizonyítatlan maradt:

(1) létezik olyan $u$, amelyre $\partial G\colon u = g$ és az integrál értelmes és véges;

(2) ha létezik ilyen $u$, akkor létezik olyan is, amelyre az integrál minimális;

(3) egy ilyen $u$ függvényre a $G$-n $\Delta u$ értelmezve van.

A problémák első jele Weierstrass példája volt olyan variációs problémára, amelynél a funkcionál alulról korlátos, de az infimumot nem veszi fel, azaz (2) nem teljesül. R. Prym adott egy példát az egységkörön, amelyre (1) nem teljesül. Mivel a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-problémát H. A. Schwarz, C. Neumann és H. Poincaré egymástól függetlenül, más módszerekkel, megfelelő megszorítások mellett megoldották, sokáig azt gondolták, hogy ezek a megszorítások csak a bizonyítások tökéletlenségéből erednek. Végül Lebesgue adott példát olyan $G \subset \mathbb{R}^3$ (gömbbel homeomorf) nyílt halmazra, és $g$ folytonos függvényre, amelyre a Laplace-egyenletre vonatkozó Dirichlet-feladatnak nincs megoldása.

Ha a „Dirichlet-elvet” kívánjuk minimumproblémák megoldására felhasználni, akkor úgy járhatunk el, hogy választunk egy $u_k$ „minimálsorozatot”, amelyre a funkcionál értékei az infimumhoz konvergálnak, majd megpróbáljuk az $u_k$ sorozatnak egy konvergens részsorozatát kiválasztani. Megfelelő feltételek mellett azt várjuk, hogy $\lim_{j\to\infty} u_{k_j}$ a minimumfeladat egy megoldása.

A nehézségek illusztrálására tekintsük egy adott körvonalra illeszkedő minimális felszínű felület meghatározásának problémáját $\mathbb{R}^3$-ban. A minimumot adó körlaphoz találhatunk olyan felületet, amelynek felszíne alig nagyobb, de nagyon távoli pontokat is tartalmaz. Egy minimálsorozat pontonként esetleg egyetlen pontban sem konvergens. A probléma ahhoz hasonló, mintha egy folytonos valós függvény minimumhelyét keresnénk, de csak a racionális számokat ismerve. Megfelelő távolságot kell bevezetni, és a teret teljessé kell tenni, csak ekkor várhatjuk, hogy a minimálsorozat egy megfelelő részsorozata konvergens. Ha a Lagrange-függvényben $u^{(m)}$ a legmagasabb rendű előforduló derivált, akkor a megfelelő tér gyakran a $\mathscr{H}^m(G)$ Szoboljev-tér (amely egy szeparábilis Hilbert-tér), vagy ennek valamilyen zárt altere.

Miután egy ilyen „általánosított” megoldás létezését megmutattuk, megfelelően sima adatok esetén belátható az is, hogy a megoldás klasszikus értelemben is megoldás. Lebesgue példája azonban arra figyelmeztet, hogy a regularitás problémája többváltozós esetben nem olyan egyszerű, mint az egyváltozós esetben, ahol a tartomány határa csak két pont.

Hilbert kezdeményezte a fent vázolt módszer használatát, de hosszú idő telt el, amíg mai formája kialakult. Ez a gondolatmenet vezet a variációszámítás direkt módszereihez is, amelyek közül a Ritz-módszer a legismertebb.

**14.1.9. Példa.** Levezetjük az inhomogén, izotróp, álló membrán kis kitérését jellemző differenciálegyenletet a minimális energia elvéből. A membrán megnyújtásába fektetett munka arányos a felület növekedésével és a rugalmassággal. Alkalmazzunk az $u$ kitérés $u_x$, $u_y$ deriváltjaiban lineáris közelítést. A felület növekedése $\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}-1$ integrálja, ami Newton binomiális sora szerint közelítőleg $(u_x^2+u_y^2)/2$ integrálja. Szoroznunk kell a $p(x,y)$ rugalmassággal, ami feltevésünk szerint függ a helytől, de nem függ az iránytól. Feltesszük, hogy a helytől függő, de a kitéréstől független $f$ erő, valamint a kitéréssel arányos $q$ visszatérítő erő is működik. A membrán pereme rögzített, azaz $\partial G\colon u=g$. Az energia

$$\int_G p(x,y)\frac{u_x^2+u_y^2}{2}-f(x,y)u+q(x,y)\frac{u^2}{2}\,dx\,dy,$$

ennek a lokális minimumát keressük. A Lagrange-függvény tehát

$$L(x,y,u,u_x,u_y)=p(x,y)\frac{u_x^2+u_y^2}{2}-f(x,y)u+q(x,y)\frac{u^2}{2},$$

az Euler–Lagrange-egyenlet pedig

$$-f(x,y)+q(x,y)u-\partial_x(p(x,y)u_x)-\partial_y(p(x,y)u_y)=0,$$

azaz

$$-\operatorname{div}(p(x,y)\nabla u)+q(x,y)u=f(x,y).$$

**14.1.10. Példa.** Levezetjük az inhomogén rezgő húr kis kitérésekre vonatkozó differenciálegyenletét. A húr megnyúlása az $u(x,t)$ kitérés $u_x$ deriváltja segítségével

$$\sqrt{1+u_x^2}-1$$

integrálja. Lineáris közelítést alkalmazva, a helyzeti energia sűrűsége $p(x)u_x^2/2.$, ahol p(x) a rugalmasság. Ha $\varrho(x)$ a húr vonal menti sűrűsége, akkor a mozgási energia sűrűsége $\varrho(x)u_t^2/2$. Ha a húr végpontjai 0 és $\ell$, akkor $u(0,t)=u(\ell,t)=0$, és adott a kitérés és a sebesség a nulla időpontban: $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=u_1(x)$ A Lagrange-függvény

$$L(x,u_t,u_x)=\varrho(x)\frac{u_t^2}{2}-p(x)\frac{u_x^2}{2}.$$

Figyeljük meg, hogy a Lagrange-függvény nem a mozgási és helyzeti energia különbsége, hanem annak sűrűsége: csak a hely szerint integrálva kapjuk a két energia különbségét. A problémánk

$$\int_0^T\int_0^\ell L(x,u_t,u_x)\,dx\,dt\to\text{lokmin}.$$

Az Euler–Lagrange-egyenlet

$$-\partial_t(\varrho(x)u_t) + \partial_x(p(x)u_x) = 0,$$

azaz

$$\varrho(x)u_{tt} - \operatorname{div}_x(p(x)\nabla_x u) = 0.$$

**14.1.11. Példa.** Levezetjük az inhomogén, izotróp, rezgő membrán $u(x,y,t)$ kis kitérését jellemző differenciálegyenletet. A helyzeti energia sűrűsége, ha feltesszük, hogy a helytől és időtől függő, de a kitéréstől független $f$ erő, valamint a kitéréssel arányos, az időtől független visszatérítő erő is működik,

$$p(x,y)\frac{u_x^2+u_y^2}{2} - f(x,y,t)u + q(x,y)\frac{u^2}{2}.$$

A membrán pereme rögzített, azaz $\partial G\colon u(x,y,t) = g(x,y)$. Adott a kitérés és a sebesség a nulla időpontban: $u(x,y,0) = u_0(x,y)$ és $u_t(x,y,0) = u_1(x,y)$. A mozgási energia sűrűsége $\varrho(x,y)u_t^2/2$, ahol $\varrho(x,y)$ a membrán síkbeli sűrűsége. A Lagrange-függvény tehát

$$L(x,y,t,u,u_x,u_y,u_t) = p(x,y)\frac{u_x^2+u_y^2}{2} - f(x,y,t)u + q(x,y)\frac{u^2}{2} - \varrho(x,y)\frac{u_t^2}{2},$$

az Euler–Lagrange-egyenlet pedig

$$-f(x,y,t) + q(x,y)u + \partial_t(\varrho(x,y)u_t) - \partial_x(p(x,y)u_x) - \partial_y(p(x,y)u_y) = 0,$$

azaz

$$\varrho(x,y)u_{tt} - \operatorname{div}_{x,y}(p(x,y)\nabla_{x,y}u) + q(x,y)u = f(x,y,t).$$

**14.1.12. Feladat [11].** Mutassuk meg, hogy a homogén rezgő húr problémájánál a hatásnak nincs szélsőértéke.

**14.1.13. Feladat [11].** Határozzuk meg a minimálfelületek nem lineáris differenciálegyenletét.

**14.1.14. Példa.** Levezetjük az egyik végén befogott, vékony, homogén kör keresztmetszetű rúd kis hajlítási síkrezgéseinek egyenletét. A hajlításhoz szükséges erő arányos a görbülettel, ami kis hajlítás esetén $u_{xx}(x,t)$. Ha $p(x)$ az arányossági tényező az $x$ pontban, akkor $p(x)u_{xx}^2/2 - f(x,t)u$ a helyzeti energia. A mozgási energia $\varrho(x)u_t^2/2$. A Lagrange-függvény

$$L(x,t,u,u_t,u_{xx}) = p(x)\frac{u_{xx}^2}{2} - f(x,t)u - \varrho(x)\frac{u_t^2}{2},$$

így a mozgásegyenlet

$$\varrho(x)u_{tt} + \big(p(x)u_{xx}\big)_{xx} = f(x,t).$$

## 14.2 Alapproblémák

**14.2.1. Lineáris differenciálegyenletek.** Csak *lineáris parciális differenciálegyenletekkel* fogunk foglalkozni lineáris határfeltételek mellett. Egy $Lu = f$ alakú lineáris inhomogén differenciálegyenletet tekintünk, ahol az $u$ ismeretlen és az $f$ adott függvény egy $G \subset \mathbb{R}^n$ tartományon vannak értelmezve, $L$ pedig egy függvényegyütthatós lineáris differenciáloperátor, azaz

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

ahol $m$ az $L$ rendje. Az $a_\alpha$ együtthatófüggvények is a $G$ tartományon vannak értelmezve. Rendszerint egy $H \subset \partial G$ halmazon a $Bu = g$ határfeltételeknek eleget tévő megoldásokat keresünk, ahol $B$ egy $H$-n értelmezett függvényegyütthatókkal képzett vektorértékű lineáris differenciáloperátor. A $Bu = g$ vektoregyenlet koordinátái külön-külön egy-egy skalár határfeltételt jelentenek. Problémánkat tehát tömören

$$G\colon Lu = f, \quad H\colon Bu = g$$

alakban írhatjuk. Ha $B$ rendje $k$, akkor *megoldás*ról akkor beszélünk, ha (nem teljesen korrekt jelöléssel) $u \in \mathcal{C}^m(G) \cap \mathcal{C}^k(G \cup H)$, azaz ha az $u$ függvény $m$-szer folytonosan differenciálható $G$-n, és legfeljebb $k$-adrendű parciális deriváltjai folytonosan és egyértelműen kiterjeszthetők $G \cup H$-ra.

**14.2.2. A feladat részekre bontása.** A szuperpozíció elve szerint egy

$$H \subset \partial G, \quad G\colon Lu = f, \quad H\colon Bu = g$$

lineáris probléma bármely megoldása előállítható egy adott megoldás, és a

$$G\colon Lu = 0, \quad H\colon Bu = 0$$

*homogén probléma* tetszőleges megoldásának összegeként. Több lépésben is haladhatunk. Ha

$$G\colon Lv = f, \quad H\colon Bv = 0 \quad \text{és} \quad G\colon Lw = 0, \quad H\colon Bw = g,$$

akkor $u = v + w$ az eredeti probléma megoldása. Sőt, ha $w$ tetszőleges „elég sima” függvény, amelyre

$$H\colon Bw = g,$$

akkor a

$$G\colon Lv = f - Lw \quad H\colon Bv = 0$$

*homogén peremfeltétel*ü problémát megoldva, $u = v + w$ az eredeti probléma megoldását adja. Ez a *különbség trükk*. Fordítva is alkalmazható: ha inhomogén egyenletet homogén peremfeltétel mellett akarunk megoldani, és ismert az inhomogén egyenlet egy megoldása, akkor a különbség trükkel az inhomogén egyenletet homogén egyenletre vezethetjük vissza inhomogén peremfeltétellel.

Néha hasznos a határt, és ennek megfelelően a problémát is több részre bontani, és a fenti egyszerű trükköket ezekre a részekre alkalmazni.

**14.2.3. A legfontosabb másodrendű egyenletek.** Az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ egy részhalmazán értelmezett $(x,t) \mapsto u(x,t)$ függvényre vonatkozó

$$\varrho(x)u_{tt} - \mathrm{div}_x(p(x)\,\mathrm{grad}_x\, u) + q(x)u = f(x,t)$$

egyenlet hullámmozgásokat ír le. Feltesszük, hogy $\varrho$, $p$, $q$ folytonosak, és hogy $\varrho, p > 0$ a zárt értelmezési tartományukon. Az egyenlet *hiperbolikus* típusú. Legfontosabb speciális esete a konstansegyütthatós

$$u_{tt} - a^2\Delta_x u = f(x,t)$$

*hullámegyenlet.* A fentiekben a $\mathrm{div}_x$x $_x$, x $\nabla_x\nabla_x$, x $\Delta_x\Delta_x$ jelölések azt fejezik ki, hogy ezeket a differenciáloperátorokat itt csak az $x$ változóban alkalmazzuk. Az $x$ és $t$ jelölések megfelelnek annak, hogy a fizikai alkalmazásokban $x$ a hely, $t$ pedig az idő. Ilyen egyenlet lép fel például mechanikai és elektromágneses rezgések terjedésének leírásakor. Az előbbi esetben $u$ a kitérés, $f$ a külső erő sűrűsége, $q$ a kitéréssel arányos visszahúzó erő direkciós erejének sűrűsége, $\varrho$ a tömegsűrűség, $p$ pedig a mechanikai feszültség. Elektromágneses rezgéseknél, ha $u$ a skalárpotenciál, akkor $f$ a töltéssűrűség, $p$ az (abszolút) dielektromos „állandó”, azaz $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, $q \equiv 0$, és $\varrho$ az (abszolút) mágneses permeábilitás, $\mu = \mu_r\mu_0$ reciproka. Vegyük észre, hogy mindkét esetben $fu$ energiasűrűség jellegű. Egyébként — megfelelő feltételek mellett — a vektorpotenciál koordinátái is hasonló egyenletnek tesznek eleget, de $\varepsilon$ és $\mu$ szerepe megcserélődik, és a töltéssűrűség helyére az áramsűrűség kerül. Más fizikai jelenségek leírásában is szerepet játszik ez az egyenlet.

Diffúzió, illetve hővezetés vizsgálatánál lép fel a parabolikus

$$\varrho(x)u_t - \mathrm{div}_x(p(x)\,\mathrm{grad}_x\, u) + q(x)u = f(x,t)$$

*diffúziós egyenlet.* Hővezetés esetén $u$ a hőmérséklet, $\varrho$ a fajhő és a sűrűség szorzata, $p$ a hővezetési tényező, $q \equiv 0$, $f$ pedig a hőforrások (vagy nyelők) energiaintenzitása. Diffúzió esetén $u$ a koncentráció, $f$ a források (vagy nyelők) intenzitása, $\varrho \equiv 1$, $p$ a diffúziós állandó, $q$ pedig a koncentrációval arányos elnyelődés (vagy kibocsátás) intenzitása. Formailag hasonló egyenlet adódik a kvantummechanikában is (Schrödinger-egyenlet). A diffúziós egyenlet legfontosabb speciális esete a konstansegyütthatós

$$u_t - a^2\Delta_x u = f(x,t)$$

*hővezetési egyenlet.*

A fenti egyenleteket — mivel időtől függő folyamatokat írnak le — közös néven *evolúciós egyenlet*eknek fogjuk nevezni. Ezeknél rendszerint kezdeti érték problémát vizsgálunk, amikor a $t = 0$ időpontban adott annyi feltétel, ahanyad rendű az egyenlet $t$-ben, vagy vagyes feladatot, ahol kezdet és peremfeltételek is vannak. Időben állandó (stacionárius) folyamatok esetén a jobb oldal és az ismeretlen függvény nem függ az időtől, így a

$$-\mathrm{div}_x(p(x)\,\mathrm{grad}_x\, u) + q(x)u = f(x)$$

*elliptikus* egyenletet kapjuk. Itt a természetes határfeltétel általában *peremfeltétel*, azaz az értelmezési tartomány korlátos határán írunk elő feltételeket. A stacionárius egyenlet, pontosabban az arra vonatkozó sajátérték-probléma lép fel akkor is, ha az evolúciós egyenletek megoldásait a Fourier-módszerrel keressük. Néhány más fizikai terület, ahol szintén erre az egyenletre, vagy valamely speciális esetére jutunk: gravitációs potenciál, potenciális áramlás, szóródási jelenségek. A stacionárius egyenlet fontos speciális esetei a konstansegyütthatós

$$-\Delta u - k^2 u = f(x)$$

*Helmholtz-egyenlet*, a

$$-\Delta u = f(x)$$

*Poisson-egyenlet*, és a

$$-\Delta u = 0$$

*Laplace-egyenlet.*

Megjegyezzük, hogy mint látható, inhomogén, de izotróp (azaz iránytól nem függő tulajdonságú) közegre vonatkozó egyenletekre szorítkozunk, azért, hogy a fellépő differenciáloperátorok szimmetrikusak legyenek. Anizotróp esetre a tárgyalás technikailag bonyolultabb. További hivatkozások találhatók Zeidler [63] könyvében.

**14.2.4. A változók szétválasztása.** Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldására gyakran jól használható a *Fourier-módszer*, a *változók szétválasztása*. Először a megfelelő homogén egyenlet megoldását keressük

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

alakban. Ha például $L = L_x + L_y$, ahol $L_x$ csak az $x$-ben, $L_y$ csak az $y$-ban ható differenciáloperátor, $x \in G$, $y \in H$, akkor az $Lu = 0$ egyenletből azt kapjuk, hogy

$$wL_x v + vL_y w = 0,$$

azaz

$$\frac{L_x v}{v} + \frac{L_y w}{w} = 0.$$

Mivel az első tag csak $x$-től, a második csak $y$-tól függ, mindkettő konstans, így az

$$L_x v = \lambda v, \quad L_y w = -\lambda w$$

problémákat kapjuk. (Néha máskor is sikerül — megfelelő átalakítások után — így „szétválasztani" a változókat.) Az egyik problémát, mondjuk az elsőt megoldva, bizonyos $\lambda$-kra kapunk csak $v_\lambda$ megoldást. Az eredeti probléma megoldása ezek után

$$u(x, y) = \sum_\lambda v_\lambda(x) w_\lambda(y)$$

alakban kereshető, és itt már csak a $w_\lambda$ függvények ismeretlenek.

Ha a tartomány nem $G \times H$ alakú, akkor gyakran érdemes ilyen alakra hozni új változók bevezetésével.

Néhány példát mutatunk be a Fourier-módszer alkalmazására.

**14.2.5. A hővezetési egyenlet megoldása Fourier-módszerrel.** Az

$$L_x = -\Delta_x u$$

jelöléssel a hővezetési egyenletre vonatkozó

$$G \times ]0,T[\colon u_t - \Delta_x u = f(x,t),$$

$$G\colon u(x,0) = u_0(x), \quad \partial G \times [0,T]\colon u = 0$$

úgynevezett *vegyes feladat*ot fogjuk vizsgálni. Először a

$$G \times ]0,T[\colon u_t - \Delta_x u = 0 \quad \partial G \times [0,T]\colon u = 0$$

probléma $u(x,t) = X(x)T(t)$ alakú megoldásait keressük. Így a

$$G\colon -\Delta_x X = \lambda X \quad \partial G\colon X = 0$$

sajátérték-problémához jutunk. Legyen $X_k$ ennek a sajátérték-feladatnak a sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(G)$-ben, a megfelelő sajátérték $\lambda_k$ és keressük az eredeti feladat megoldását

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$$

alakban. Feltéve, hogy a sor tagonként differenciálható, behelyettesítve és belsőleg szorozva $X_j$-vel, a

$$T_j' + \lambda_j T_j = \langle f(.,t), X_j\rangle, \qquad T_j(0) = \langle u_0, X_j\rangle,$$

$j = 1,2,\ldots$ egyenleteket kapjuk. Az eljárás formális, a megoldás helyességét ellenőrizni kell. A vegyes feladatok tárgyalásánál megmutatjuk, hogy Fourier módszere pontosan a gyenge megoldásokat adja.

**14.2.6. A hővezetési egyenlet megoldása Fourier-módszerrel vékony, hőszigetelt rúd esetén.** Az előző pont tárgyalásmenetét folytatni tudjuk, ha $G$ egy egydimenziós $]0,\ell[$ intervallum. A

$$G\colon -X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(\ell) = 0$$

sajátérték-problémának csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $\lambda > 0$, $\lambda = \lambda_k = k^2\pi^2/\ell^2$, $k = 1,2,\ldots$, éspedig $X_k(x) = \sin k\pi x/\ell$ és konstansszorosai. Így a homogén esetben az adódik, hogy $T_k(t) = c_k e^{k^2\pi^2 t/\ell^2}$. A $c_k$-kat úgy kell meghatározni, hogy az

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{\ell} e^{k^2\pi^2 t/\ell^2}$$

megoldás a $t = 0$ helyen $u_0$ legyen, azaz a $c_k$-k az $u_0$ szinusz-sorának együtthatói legyenek, tehát

$$c_k = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} u_0(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx.$$

Figyeljük meg, hogy az $X(0) = X(\ell) = 0$ peremfeltétel annak felel meg, hogy a rúd végeit állandó (nulla) hőmérsékleten tartjuk. Ha például hőszigeteljük, akkor az $X'(0) = X'(\ell) = 0$ peremfeltétel adódik, stb. Ezek az esetek hasonlóan kezelhetők.

**14.2.7. A hullámegyenlet megoldása Fourier-módszerrel.** Az

$$L_x = -\Delta_x u$$

jelöléssel a hullámegyenletre vonatkozó

$$G \times ]0,T[\colon u_{tt} - \Delta_x u = f(x,t),$$

$$G\colon u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad \partial G \times [0,T]\colon u = 0$$

úgynevezett *vegyes feladat*ot fogjuk vizsgálni. Teljesen hasonlóan, mint hővezetési egyenletnél, a

$$T_j'' + \lambda_j T_j = \left\langle f(.,t)/\varrho, X_j \right\rangle_\varrho, \qquad T_j(0) = \langle u_0, X_j\rangle_\varrho, \quad T_j'(0) = \langle u_1, X_j\rangle_\varrho$$

egyenletekhez jutunk. Ha $G$ egy egydimenziós $]0,\ell[$ intervallum, azaz ha $\ell$ hosszúságú rezgő húrról van szó, akkor a homogén esetben az adódik, hogy $T_k(t) = a_k \cos k^\pi t/\ell + b_k \sin k\pi t/\ell$. A formális megoldás

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big( a_k \cos\frac{k^\pi t}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi t}{\ell}\Big) \sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

A $t = 0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy az $a_k$-k az $u_0$ szinusz-sorának együtthatói kell legyenek, azaz

$$a_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell}\, dx.$$

A formális megoldást differenciálva $t$ szerint

$$u_t(x,t) = \frac{\pi}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-k a_k \sin\frac{k^\pi t}{\ell} + k b_k \cos\frac{k\pi t}{\ell}\Big)\sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

Innen $t = 0$ helyettesítéssel

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^\ell u_1(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\, dx. \ \square$$

**14.2.8. A Schrödinger-egyenlet és a Fourier-módszer.** Próbáljuk meg az

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(q,t) = H(q)(\psi(q,t))$$

*Schrödinger-egyenlet* megoldásait keresni Fourier-módszerrel, $\psi(q,t) = T(t)X(q)$ alakban, ha a $H$ energiaoperátor nem függ az időtől. Azt kapjuk, hogy

$$i\hbar T'(t) X(q) = T(t) H(q) X(q),$$

ahonnan a $H(q)X(q) = \lambda X(q)$ sajátérték-feladatot kapjuk. Mivel $H(q)$ önadjungált operátor, sajátértékei valósak. Minden $\lambda$ sajátértékre az $i\hbar T'(t) = T(t)$ egyenletet kapjuk, aminek megoldása $T(t) = e^{-i\lambda t/\hbar}$, egy $t$-től függő egységnyi abszolút értékű komplex szám, „fázisszög”, az $X(q)$ sajátállapot lényegében nem változik. Nem kapunk meg minden megoldást, csak a „stacionárius” megoldásokat. $\square$

**14.2.9. Sajátérték-feladat megoldása Fourier-módszerrel.** A változók szétválasztása gyakran jól használható sajátérték-probléma megoldására is: A megoldást

$$u(x,y) = v(x)w(y)$$

alakban keressük. Ha $L = L_x + L_y$, ahol $L_x$ csak az $x$-ben, $L_y$ csak az $y$-ban ható differenciáloperátor, $x \in G$, $y \in H$, akkor az $Lu = \lambda u$ sajátérték-probléma

$$wL_x v + vL_y w = \lambda vw,$$

azaz

$$\frac{L_x v}{v} + \frac{L_y w}{w} = \lambda$$

alakba írható. Mivel a jobb oldali első tag csak $x$-től, a jobb oldali második tag csak $y$-tól függ, mindkettő konstans, így az

$$L_x v = \mu v, \quad L_y w = \nu w$$

sajátérték-problémákat kapjuk, és $\lambda = \mu + \nu$. Vegyük észre, hogy az utóbbi két sajátérték-probléma megoldásaiból mindig megkaphatjuk az eredeti sajátérték-probléma egy megoldását.

## 14.3 Disztribúciók

*1930 és 40 között számos matematikus kezdte rendszeresen vizsgálni a parciális differenciálegyenletek „általánosított” megoldásainak fogalmát, amely alkalomszerűen (és név nélkül) már Poincaré munkájában előfordul. ...*
*Dirac nyomán, az elméleti fizikusok nem haboztak úgy tekinteni, hogy a $\Theta$ Heaviside-függvénynek, amely 0, ha $x \le 0$ és 1, ha $x > 0$, létezik egy „általánosított deriváltja”, az úgynevezett $\delta$ „Dirac-függvény”, amely $x \neq 0$ esetén 0 lenne, de úgy, hogy $\int \delta(x)\,dx = 1$; további $\delta', \delta'', \ldots$ „deriváltjait” is bevezették ennek a „függvénynek”, olyan „egyenleteket” felírva, mint*

$$\int f(x)\delta^{(n)}(x-a)\,dx = f^{(n)}(a)$$

*egy $f \in \mathcal{C}^n$ függvényre, vagy*

$$\int \delta'(a-x)\delta^{(n)}(x-b)\,dx = \delta^{(n+1)}(a-b).$$

*Egy ideig a matematikusok számára rejtélyesek voltak ezek a manipulációk, amelyek végül is valódi függvényekre vonatkozó helyes állításokra vezettek. A döntő lépést Sz. Szoboljev tette meg 1936-ban: a nemlétező „függvényekkel” végzett bűvészmutatványok végeredménye végül mindig egy teljesen tisztességes lineáris funkcionál definiálása volt a $\mathcal{D}(G)$ vektortéren, mint például $f \mapsto f^{(n)}(a)$; Szoboljev gondolata volt közvetlenül ilyen funkcionálokkal foglalkozni, feltéve, hogy csak valódi matematikát felhasználó tulajdonságokkal jellemezhetjük őket. ... Laurent Schwartz fő hozzájárulása az volt, hogy 1945-ben észrevette, a disztribúciók Szoboljev által bevezetett fogalma (amelyet ő is függetlenül újra felfedezett,) lehetővé teszi a Fourier-transzformáció kielégítő általánosítását, amely minden előző általánosítást tartalmaz. ...*

*Schwartz szerepe a disztribúcióelméletben nagyon hasonló ahhoz, amit Newton és Leibniz játszott a differenciál- és integrálszámításban: ellentétben a közhiedelemmel, nem ők fedezték fel, olyan emberek, mint Cavalieri, Fermat és Roberval már akkor művelték, amikor Newton és Leibniz még kisiskolások voltak. De ők rendszerezték az algoritmusokat és jelöléseket úgy, hogy a differenciál- és integrálszámítás azzá a sokoldalú és hatékony eszközzé vált, amelynek ismerjük, míg előttük csak bonyolult érveléssel és ábrákkal lehetett kezelni.*

*Jean Dieudonné [4]*

**14.3.1. Definíció.** Ha $G \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, $\mathcal{D}(G)$ jelöli az összes, $G$-n értelmezett, végtelen sokszor differenciálható, kompakt tartójú függvények — a *tesztfüggvény*ek — vektorterét. Ha $K \subset G$ kompakt, jelölje $\mathcal{D}_K(G)$k $_K$ a $\mathcal{D}(G)$ azon alterét, amely a $K$-beli tartójú függvényeket tartalmazza. A $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^m}$ normák segítségével definiáljuk a

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{\|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}^m}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{\mathcal{C}^m}}$$

eltolásinvariáns metrikát $\mathcal{D}_K(G)$-n, ez $\mathcal{D}_K(G)$ *szokásos metriká*ja. Ebben egy $\varphi_k$ sorozat pontosan akkor tart nullához, ha $\partial^\alpha \varphi_k \to 0$ egyenletesen minden $\alpha$-ra. Jelölje $\mathcal{D}'(G)$ az összes olyan $\mathcal{D}(G)$-n értelmezett lineáris funkcionálok terét, amelyeknek minden $\mathcal{D}_K(G)$-re való megszorítása folytonos. $\mathcal{D}'$ elemei a *disztribúció*k.A definícióból következik, hogy egy $T\colon \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálra $T \in \mathcal{D}'$ pontosan akkor teljesül, ha minden $K \subset G$ kompakt halmazhoz van olyan $m$ egész szám és $C < \infty$ konstans, hogy

$$\left|T(\varphi)\right| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{C}^m}$$

teljesül minden $\varphi \in \mathcal{D}_K$-ra. Ha minden $K$-hoz ugyanaz az $m$ jó (esetleg más-más $C$-vel), akkor a disztribúciót *$m$-edrendű*nek nevezzük. Ha nincs ilyen $m$, akkor a disztribúció *végtelen rendű.*

**14.3.2. Példák.** Jelölje $\mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(G)$ az $G \subset \mathbb{R}^n$ halmazon *lokálisan Lebesgue-integrálható* függvények terét. Ha $f \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}$, legyen

$$T_f(\varphi) = \int_G f(x)\varphi(x)\, dx,$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}$. Mivel

$$\left|T_f(\varphi)\right| \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f|,$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}_K$, $T_f$ nulladrendű disztribúció. Az ilyen alakban előállítható disztribúciókat *reguláris disztribúció*knak nevezzük. Sokszor nem korrekt módon jelölésben nem teszünk különbséget egy lokálisan integrálható függvény és a hozzá tartozó reguláris disztribúció között. Hasonlóan, ha $\mu$ egy lokálisan véges mérték, amely $G$ Borel-halmazain értelmezve van, akkor a

$$T_\mu(\varphi) = \int_G \varphi\, d\mu, \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

összefüggés egy nulladrendű disztribúciót definiál, a *$\mu$-höz tartozó disztribúciót*. Ha a $\mu$ mérték a Dirac-mérték, azaz $G$ minden részhalmaza $\mu$-mérhető, és mértéke 1, ha az origót tartalmazza, egyébként nulla, akkor a kapott disztribúció a *Dirac-delta*, amit $\delta$-val fogunk jelölni. A Dirac-delta pontszerű fizikai mennyiség (tömegpont, ponttöltés, stb.) matematikai megfelelője.

A vonal mentén, felületen, stb. koncentrálódó fizikai mennyiségnek megfelelő disztribúciót is könnyen megadhatjuk. Legyen $0 \le k \le n$, és tekintsünk egy $\varrho\colon G \to \mathbb{R}$ függvényt, amely lokálisan $\chi^k$-integrálható. Megmutatható, hogy $\varrho$ szükségképpen eltűnik a $G$ egy $k$-dimenziós $H$ részhalmazán kívül. A

$$T(\varphi) = \int_G \varphi(x)\varrho(x)\, d\chi^k(x)$$

összefüggés egy nulladrendű disztribúciót definiál, amely a $H$ részhalmazon $\varrho$ „sűrűséggel” eloszló fizikai mennyiségnek felel meg. Az eloszlást jelentő disztribúció elnevezés innen származik.

**14.3.3. Általánosított Lagrange-lemma.** *A $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon lokálisan integrálható $f$ függvényre $T_f = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = 0$ majdnem mindenütt.*

**Bizonyítás.** Az elégségesség nyilvánvaló. Legyen $a \in G$ és válasszunk olyan $U$ környezetét, amely benne van $G$-ben és amelyen az $f$ Lebesgue-integrálható. Ha $f = \sum_{j=0}^{3} i^j f_j$ nemnegatív $f_j$ függvényekkel, és $f$ nem majdnem mindenütt nulla $U$-n, akkor valamelyik $f_j$ sem. Feltehetjük, hogy ez $f_0$. Van olyan pozitív mértékű $K \subset U$ kompakt halmaz és $c > 0$ konstans, hogy $K \subset \{f_0 \ge c\}$. Az integrál abszolút folytonossága miatt elég kis $\delta > 0$-ra ennél kisebb mértékű halmaz felett integrálva $|f|$-et, az integrál kisebb, mint $c\lambda^n(K)$. Elég nagy $k$-ra $\mathbb{U}_{2/k}(K) \subset U$ és a mérték folytonossága miatt $\lambda^n \mathbb{U}_{2/k}(K) < \delta + \lambda^n(K)$. A simítási tételben szereplő $\omega_\varepsilon$-nal simítva $\mathbb{B}_{1/k}(K)$ krakterisztikus függvényét, ha $2\varepsilon < 1/k$, akkor a kapott $\varphi$ tesztfüggvény a $K$-n 1, $\mathbb{U}_{2/k}(K)$-n kívül 0, és egyébként értéke 0 és 1 között van. Innen $f\varphi$ integrálja $K$-n nagyobb, mint $c\lambda^n(K)$, azon kívül viszont még az abszolút érték integrálja is kisebb ennél, így $T_f(\varphi) \ne 0$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $f$ majdnem mindenűtt nulla bármely pont valamely környezetében, így a kompakt halmazokon is. Mivel $G$ $\sigma$-kompakt, $F$ majdnem mindenütt nulla $G$-n. $\square$

**14.3.4. Definíció.** Ha disztribúciókra akarunk valamit definiálni, akkor megnézzük, hogy reguláris disztribúciók esetén mi adódik, és az így kapott formulát használjuk fel — megfelelő átalakítások után — definíciónak. A „megfelelő átalakítás” abban áll, hogy mindent, amit a disztribúcióval akarunk tenni, „átjátszunk” a tesztfüggvényre. Például parciális integrálással adódik, hogy ha $f$ egy $m$-szer folytonosan differenciálható függvény, $|\alpha| \le m$, akkor $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T_f(\partial^\alpha \varphi)$. Ennek alapján ha $\alpha$ egy multiindex, és $T \in \mathcal{D}'$, akkor legyen

$$(\partial^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi),$$

ha $\varphi \in \mathcal{D}$. Ha

$$|T\varphi| \le C\|\varphi\|_m \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}_K\text{-ra},$$

akkor

$$\bigl|(\partial^\alpha T)\varphi\bigr| \le C\|\partial^\alpha \varphi\|_m \le C\|\varphi\|_{m+|\alpha|},$$

így $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'$. Definíciónk alapján tehát ha $f$ egy $m$-szer folytonosan differenciálható függvény, akkor $|\alpha| \le m$ esetén
$$\partial^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}.$$
Ha $f$ nem folytonosan differenciálható, akkor ez általában nem áll fenn. Például, ha

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

a *Heaviside-függvény*, akkor $T_\Theta$ deriváltja a Dirac-delta, de $\Theta'$-höz a nulla disztribúció tartozik. A példa mutatja, hogy szakadásos függvények disztribúció-deriváltja jobban tükrözi a függvény viselkedését, mint a közönséges derivált.

Ugyanezen elv alapján, ha $T \in \mathcal{D}'$, $f \in \mathcal{E}$, legyen

$$(fT)(\varphi) = T(f\varphi), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

és legyen
$$(\tau_x T)(\varphi) = T(\tau_{-x}\varphi), \quad \check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi}).$$
Vegyük észre, hogy ha $g \in \mathcal{C}^m$, és $|\alpha| \le m$ esetén $\partial^\alpha T$ egy $f_\alpha$ függvényhez tartozó reguláris disztribúció, akkor $|\beta| \le m$ esetén

$$\partial^\beta T_{fg} = \sum_{0 \le \alpha \le \beta} T_{f_\alpha \partial^{\beta-\alpha} g}.$$

**14.3.5. Példa.** Egydimenzióban $-\delta'$ egy dipólusnak a matematikai megfelelője. Könnyen definiálhatjuk a vonal mentén, felületen, stb. eloszló dipólusrendszer megfelelőjét is. Legyen $0 \le k \le n$, $H$ egy $k$-dimenziós részhalmaza $G$-nek, $\varrho\colon G \to \mathbb{R}$ egy lokálisan $\chi^k$-integrálható függvény, amely $H$-n kívül eltűnik, és

$$e\colon H \to \{x\colon x \in \mathbb{R}^n, |x| = 1\}.$$

A
$$T(\varphi) = \int_H \langle \nabla\varphi(x), e(x)\rangle \varrho(x)\, d\chi^k(x)$$
elsőrendű disztribúció a $H$-n $\varrho$ sűrűséggel $e$ irányítással eloszló dipólusrendszer matematikai megfelelője. Felületi dipólusrendszer esetén $e$ legtöbbször a felületi normális, ekkor *kettős réteg*ről beszélünk.

**14.3.6. Definíció.** $\mathcal{D}'$-ben a funkcionálok pontonként konvergenciáját érdemes használni. Ennél
$$T_k \to T, \quad \text{ha} \quad T_k(\varphi) \to T(\varphi) \text{ minden } \varphi \in \mathcal{D}\text{-re}.$$
$\mathcal{D}'$ teljes erre a konvergenciára az alábbi értelemben: ha minden $\varphi \in \mathcal{D}$-re $T_k(\varphi)$ konvergens, akkor a
$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T_k(\varphi)$$

összefüggés egy $T \in \mathcal{D}'$ disztribúciót definiál. Megmutatható, hogy minden $T \in \mathcal{D}'$ disztribúció előállítható $\mathcal{D}$-beli függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók sorozatának a határértékeként.

Mivel a disztribúciók a függvényfogalom általánosításainak tekinthetők, az *általánosított függvény* elnevezés is gyakran használatos. Ennek megfelelően, nem korrekt módon, számos könyv az általánosított függvény „változóját” is kiírja, például $\delta(x)$, $\delta'(x)$, stb. Gyakran még „titokzatosabb” jelölésekkel is találkozhatunk, például $\delta(1-|x|)$, $\delta'(1-|x|)$, stb. Ezek értelmét megfejthetjük, ha a disztribúciót függvényekkel közelítjük. Például 9.4.26 jelöléseivel, $\omega_{1/k} \to \delta$, ha $k \to \infty$, másrészt (egydimenzióban)

$$\begin{aligned}\int \omega_{1/k}(1-|x|)\varphi(x)\,dx &= \int_{-2}^{0} \omega_{1/k}(1+x)\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{2} \omega_{1/k}(1-x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} \omega_{1/k}(t)\varphi(t-1)\,dt + \int_{-1}^{1} \omega_{1/k}(t)\varphi(1-t)\,dt \\ &\to \varphi(-1)+\varphi(1),\end{aligned}$$

így $\delta(1-|x|)$ a $\tau_{-1}\delta + \tau_1\delta$ disztribúciót jelöli.

$\to$ **14.3.7. Feladat [6].** Bizonyítsuk be, hogy ha $T_k \to T$ a $\mathcal{D}'$-ben, akkor bármely $\alpha$ multiindexre $\partial^\alpha T_k \to \partial^\alpha T$.

**14.3.8. Definíció.** Tegyük fel, hogy $T \in \mathcal{D}'(G)$. Ha $H$ egy nyílt részhalmaza $G$-nek, és $T(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathcal{D}(G)$-re, amelynek tartója $H$-ban van, akkor azt mondjuk, hogy $T$ *eltűnik* $H$-n. Legyen $W$ az összes ilyen $H$-k egyesítése. $G \setminus W$-t a $T$ *tartó*jának nevezzük, és $\operatorname{spt}(T)$-vel jelöljük. Ha $T, S \in \mathcal{D}'(G)$ és $T - S$ eltűnik $H$-n, akkor azt mondjuk, hogy $T$ és $S$ *megegyeznek* $H$-*n.*

**14.3.9. Tétel.** *Ha $T \in \mathcal{D}'(G)$, akkor $T$ eltűnik $G \setminus \operatorname{spt}(T)$-n.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**14.3.10. Következmény.** *Tegyük fel, hogy $T \in \mathcal{D}'$ és $\varphi \in \mathcal{D}$. Ekkor*

(1) *ha $\operatorname{spt}(\varphi) \cap \operatorname{spt}(T) = \emptyset$, akkor $T(\varphi) = 0$;*

(2) *ha $\operatorname{spt}(T) = \emptyset$, akkor $T = 0$;*

(3) *ha $\psi \in \mathcal{E}$, és $\psi = 1$ valamely $\operatorname{spt}(T)$-t tartalmazó nyílt halmazon, akkor $\psi T = T$.*

**Bizonyítás.** (1) és (2) triviálisak. (3) abból adódik, hogy $\varphi - \psi\varphi$ tartója nem metsz bele $\operatorname{spt}(T)$-be.

**14.3.11. Disztribúciók kiterjesztése.** Bizonyos $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciókat nem csak $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényein értelmezhetünk, hanem értelmezésük kiterjeszthető más $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényekre is.

Egy $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sorozatra azt mondjuk, hogy *egyhez tart*, ha minden $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazhoz van olyan $k_0$, hogy $k \geq k_0$ esetén $\eta_k(x) = 1$, ha $x \in K$, továbbá minden $m \in \mathbb{N}$-hez van olyan $c_m$ konstans, hogy $\|\eta_k\|_{\mathcal{C}^m} \leq c_m$ minden $k$-ra. Ilyen sorozatot kaphatunk simítással: 9.4.26 jelöléseivel, legyen $\eta_k = \xi_{\mathbb{B}_k(0)} * \omega$.

Azt mondjuk, hogy a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció *kiterjeszthető* a $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényre, ha minden egyhez tartó $\eta_k$ sorozatra létezik a

$$T(\varphi) = \lim_{k\to\infty} T(\eta_k \varphi)$$

határérték, és ez nem függ az $\eta_k$ sorozat választásától.

**14.3.12. Példa.** Ha $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, és $\operatorname{spt}(T) \cap \operatorname{spt}(\varphi)$ kompakt, akkor $T$ kiterjeszthető $\varphi$-re. Legyenek ugyanis $\eta$ és $\eta^*$ olyan $\mathcal{D}$-beli függvények, amelyek 1-et vesznek fel ezen kompakt halmaz egy környezetében. Ekkor

$$T(\eta\varphi) - T(\eta^*\varphi) = T((\eta - \eta^*)\varphi) = 0,$$

mert $\operatorname{spt}\big((\eta-\eta^*)\varphi\big)\cap\operatorname{spt}(T) = \emptyset$. Ebből következik, hogy ha $\eta_k$ egyhez tart, akkor $T(\eta_k\varphi)$ valahonnan kezdve konstans, tehát létezik a határértéke, és a határérték nem függ az $\eta_k$ sorozat választásától. Speciálisan, kompakt tartójú disztribúció minden $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ függvényre kiterjeszthető.

**14.3.13. Disztribúciók direkt szorzata.** Legyen az $f$ a $G$ nyílt halmazon lokálisan Lebesgue-integrálható, $g$ pedig a $H$ nyílt halmazon lokálisan Lebesgue-integrálható. A $G \times H$ nyílt halmazon értelmezett $(f \times g)(x, y) = f(x)g(y)$ lokálisan Lebesgue-integrálható függvényhez tartozó disztribúcióra

$$T_{f\times g}(\varphi) = \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y)\, dy\, dx.$$

Ez motiválja az alábbi definíciót. Legyen $T \in \mathcal{D}'(G)$ és $S \in \mathcal{D}'(H)$. Ha $\varphi \in \mathcal{D}(G \times H)$, akkor megmutatható, hogy $x \mapsto S(\varphi(x, .))$ egy $\mathcal{D}(G)$-beli függvény, és a

$$(T \times S)\varphi = T_x\big(S_y(\varphi(x, y))\big)$$

összefüggés egy $\mathcal{D}'(G \times H)$-beli disztribúciót definiál, a $T$ és $S$ szorzat *direkt szorzat*át. A jelölés azt fejezi ki, hogy a $\varphi$ kétváltozós függvényre először rögzített $x$ mellett mint $y$ függvényére alkalmazzuk az $S$ disztribúciót, majd a kapott, $x$-től függő függvényre alkalmazzuk $T$-t.szer s zer s $T \times S$direkt szorzata x $T_x$y $S_y$

**14.3.14. Disztribúciók konvolúciója.** Tegyük fel, hogy $f, g, |f| * |g| \in \mathbb{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Ekkor $f * g$ is lokálisan integrálható, és

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int (f * g)(t)\varphi(t)\, dt = \iint f(y)g(t - y)\varphi(t)\, dy\, dt \\ &= \iint f(y)g(x)\varphi(x + y)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Ennek alapján a $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók konvolúcióját a

$$(T * S)(\varphi) = (T_x \times S_y)\big(\varphi(x + y)\big), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

összefüggéssel értelmezzük. Mivel az $(x, y) \to \varphi(x + y)$ függvény nem kompakt tartójú, a konvolúciót csak akkor értelmezhetjük, ha $T_x \times S_y$ minden ilyen függvényre kiterjeszthető. Megmutatható, hogy ekkor a fenti összefüggés disztribúciót definiál. Például a fenti feltételek mellett $T_f * T_g$ definiálva van, és $T_f * T_g = T_{f*g}$. Egy másik fontos eset, amikor minden $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmazra az

$$\big\{(x, y)\colon x + y \in K, x \in \operatorname{spt}(T),\ y \in \operatorname{spt}(S)\big\}$$

halmaz kompakt. Ekkor $T_x \times S_y$ tartójának és $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ tartójának metszete kompakt, így $T * S$ definiálva van.

Megmutatható, hogy ha csillag s sillag s $T * ST * S$ definiálva van, akkor

$$(T * S)(\varphi) = T_x\Big(S_y(\varphi(x + y))\Big).$$

Ezt a formulát néha könnyebb alkalmazni. Itt $x \mapsto S_y\big(\varphi(x + y)\big)$ általában nem kompakt tartójú, de $\mathcal{E}$-beli függvény, és megmutatható, hogy $T_x$ kiterjeszthető erre a függvényre.

**14.3.15. Példák.** Legyen $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

(1) Ha $\operatorname{spt}(T)$ kompakt, akkor $T * S$ definiálva van.

(2) Egy dimenzióban, ha $\operatorname{spt}(T), \operatorname{spt}(S) \subset [0, \infty)$, akkor $T * S$ definiálva van.

(3) $T * \delta = T$.

(4) $(1 * \delta') * \Theta = 0 * \Theta = 0 \neq 1 = 1 * \delta = 1 * (\delta' * \Theta)$.

**14.3.16. Tétel.** *Legyen $T, R, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ha $T * S$ és $R * S$ definiálva van, akkor az alábbi disztribúciók is, és*

(1) $(\beta T + \gamma R) * S = \beta(T * S) + \gamma(R * S)$;

(2) $T * S = S * T$;

(3) $\partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$;

(4) $\tau_x(T * S) = (\tau_x T) * S = T * (\tau_x S)$.

A tételt nem bizonyítjuk. □

**14.3.17. Definíció.** Szeretnénk disztribúciók Fourier-transzformáltját definiálni, de gondot okoz, hogy a Fourier-transzformáció $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$-et nem önmagába képezi le. Itt jobb más tesztfüggvényeket használni.

Egy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ függvényt *gyorsan csökkenő*nek fogunk nevezni, ha bármely polinommal megszorozva is korlátos. Egy $f$ mérhető és gyorsan csökkenő függvény minden $\mathbb{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ térben benne van. Ez $p = \infty$ esetén triviális, egyébként pedig abból adódik, hogy az

$$x \mapsto (1 + |x|^{2n}) f(x)$$

függvény korlátos. Valóban, ebből $|f|$ nem nagyobb, mint a $g(x) = 1/(1 + |x|^{2n})$ függvény konstansszorosa, így elég belátnunk, hogy az utóbbi $\mathbb{L}^p$-ben van. Mivel $|g|^p \leq g$, elég belátni, hogy $g$ integrálható. Ez gömbi koordinátákra áttérve, vagy egyszerűbben a kofelszín-képlettel adódik, de abból is következik, hogy $k \in \mathbb{N}$ és $2^k < |x| \leq 2^{k+1}$ esetén $0 \leq g(x) \leq 1/2^{2kn}$, így

$$\int_{\mathbb{B}_{2^{k+1}}(0) \setminus \mathbb{B}_{2^k}(0)} g(x)\, dx \leq \frac{1}{2^{2kn}} \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1 + n/2)} 2^{n(k+1)}.$$

Jelölje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ azon végtelen sokszor differenciálható, $\mathbb{R}^n$-et $\mathbb{K}$-ba képező függvények terét, amelyeknek minden parciális deriváltja is gyorsan csökkenő. Megmutatható, hogy az $n$-dimenziós Fourier-transzformáció a $\mathcal{S}$ teret önmagára képezi le kölcsönösen egyértelműen.

Definiáljuk $\mathcal{S}$-en a

$$q_{s,m}(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leq s} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^m \left|(\partial^\alpha \varphi)(x)\right|$$

normák felhasználásával a

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{s,m=0}^{\infty} 2^{-s-m} \frac{q_{s,m}(\varphi - \psi)}{1 + q_{s,m}(\varphi - \psi)}$$

eltolásinvariáns metrikát. Ez $\mathcal{S}$ *szokásos metrikája*. Jelölje $\mathcal{S}'$ az $\mathcal{S}$ folytonos lineáris funkcionáljainak halmazát. Egy $T$ lineáris funkcionál pontosan akkor van $\mathcal{S}'$-ben, ha van olyan $s$, $m$ és $C$, hogy $\left|T(\varphi)\right| \leq Cq_{s,m}(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathcal{S}$-re. Ha egy $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció minden $\mathcal{S}$-beli függvényre kiterjeszthető, és a kiterjesztés $\mathcal{S}'$ egy eleme, akkor $T$-t *temperált disztribúció*nak nevezzük. Megmutatható, hogy $\mathcal{S}'$ minden eleme egy és csak egy temperált disztribúció kiterjesztése. Ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a temperált disztribúciók és $\mathcal{S}'$ elemei között. Jelölésben gyakran nem teszünk különbséget egy temperált disztribúció és $\mathcal{S}'$ megfelelő eleme között.

**14.3.18. Példák.** (1) Minden $T$ kompakt tartójú disztribúció temperált. Legyen $T$ egy ilyen disztribúció, és $\eta \in \mathcal{D}$ egy függvény, amely $\operatorname{spt}(T)$ egy környezetén 1. Ekkor $T(\varphi) = T(\eta\varphi)$ minden $\varphi \in \mathcal{S}$-re, és $\varphi \mapsto \eta\varphi$ egy folytonos leképezése $\mathcal{S}$-nek $\mathcal{D}_K$-ba, ahol $K = \operatorname{spt}(\eta)$. Így $T$ az $\mathcal{S}'$ egy elemének megszorítása $\mathcal{D}$-re.

(2) Ha $1 \leq p < \infty$, $m > 0$ és $f$ egy mérhető függvény $\mathbb{R}^n$-en úgy, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{-m} \left|f(x)\right|^p dx < \infty,$$

akkor $T_f$ temperált disztribúció. Itt $T_f(\varphi) = \int f\varphi$, ha $\varphi \in \mathcal{S}$.

(3) Ha $\mu$ egy lokálisan véges mérték, amely értelmezve van $\mathbb{R}^n$ Borel-halmazain, és van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^{-m} d\mu(x) < \infty,$$

akkor $T_\mu$ temperált disztribúció. Valóban, legyen

$$T_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu, \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

**14.3.19. Tétel.** *Ha $\alpha$ multiindex, $P$ polinom, és $g \in \mathcal{S}$, továbbá $T$ egy temperált disztribúció, akkor a $\partial^\alpha T$, $PT$ és $gT$ disztribúciók is temperáltak.*

**14.3.20. Definíció.** Ha $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, akkor $\hat{f}$ folytonos és eltűnik a végtelenben. Számítsuk ki az $\hat{f}$-höz tartozó disztribúciót:

$$\begin{aligned} T_{\hat{f}}(\varphi) &= \int \hat{f}(t)\varphi(t)\, dt = \int \varphi(t) \int f(x) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\, dx\, dt \\ &= \int f(x) \int \varphi(t) e^{-2\pi i\langle t,x\rangle}\, dt\, dx = T_f(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Ez motiválja az alábbi definíciót: Ha $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, legyen

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}), \quad \text{ha} \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

A $\hat{T}$-t a $T$ *Fourier-transzformált*jának nevezzük.Megmutatható, hogy $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$; ezt nem bizonyítjuk.

**14.3.21. Tétel.** *Legyen $T \in \mathcal{S}'$ ekkor*

(1) $(\tau_x T)\hat{} = \mathbf{e}_{-x}\hat{T}$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$;

(2) $(\mathbf{e}_x T)\hat{} = \tau_x \hat{T}$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$;

(3) $\hat{\hat{T}} = \check{T}$;

(4) *Ha $P$ polinom, akkor $P(\partial)T$ Fourier-transzformáltja $t \mapsto P(2\pi i t)$ és $\hat{T}$ szorzata és $P(\partial)\hat{T}$ a $x \mapsto P(-2\pi i x)$ és $T$ szorzatának Fourier-transzformáltja.*

A tételt nem bizonyítjuk. □

**14.3.22. Példák.** Láttuk, hogy a polinomok temperált disztribúciók. Kiszámítjuk a Fourier-transzformáltjukat. Kezdjük az azonosan 1 függvénnyel.

$$1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} 1\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi,$$

amiből

$$\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

azaz $\hat{1} = \delta$. Hasonlóan, $\hat{\delta} = 1$. Ha most $P$ tetszőleges polinom, akkor $P(\partial)\delta$ Fourier-transzformáltja $t \mapsto P(2\pi i t)$, és $x \mapsto P(-2\pi i x)$ Fourier-transzformáltja $P(\partial)\delta$.

→ **14.3.23. Feladat [12].** Határozzuk meg az alábbi disztribúciók Fourier-transzformáltját:

(1) $\tau_{-1}\delta - \tau_1\delta$;

(2) $\delta''$;

(3) $\Theta(x)\Theta(1-x)$;

(4) $f(x) = 1$, ha $-1 \le x \le 1$, $f(x) = x+2$, ha $-2 < x < -1$, $f(x) = 2-x$, ha $1 < x < 2$, és 0 egyébként;

(5) véges sok polinomiális szakaszból álló kompakt tartójú függvény;

(6) $\Theta(x)\Theta(1-x)\sin(\omega x + \alpha)$;

(7) modulált rezgés: $\sin \omega x$ és az (5) alatti függvények szorzata.

→ **14.3.24. Feladat [8].** Mi az összefüggés egy 1 szerint periodikus, $]0,1[$-en integrálható függvény Fourier-sora és Fourier-transzformáltja között?

**14.3.25. Feladat [10].** Mutassuk meg, hogy a Plancherel-tételben szereplő izometria $\mathbb{L}^2$ elemeihez a disztribúcióként vett Fourier-transzformáltjukat rendeli.

## 14.4 Kezdeti érték problémák

*1860-ban Riemann kétváltozós függvényekre vonatkozó másodrendű hiperbolikus $Lu = 0$ egyenletek esetén a Cauchy-feladat megoldására az $L^*v = 0$ adjungált egyenlet egy $x$-től függő $y \mapsto g(x,y)$ partikuláris megoldásának a felhasználását javasolta, amelyre a $g$ magfüggvénnyel definiált $T$ integráloperátorra $L(Tf) = f$ teljesül minden $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$-re. A $g$ függvény hasonló szerepet játszik $L$-nél, mint* *a Green-függvény a Laplace-operátornál. … Amit hangsúlyozni akarunk, az az, hogy a XIX. század végére készen állt a (meglehetősen bizonytalan) gondolat, hogy egy $L$ másodrendű differenciáloperátor esetén az $L^*v = 0$ adjungált egyenlet egy $y \mapsto g(x,y)$ megoldását kell megkeresni, amelynek megfelelő szingularitása van az $x$ pontban, és a $g$ maggal definiált $T$ integráloperátorra $L(Tf) = f$, ha $f \in \mathcal{D}$; egy ilyen $g$ függvényt* elemi *vagy* alapmegoldásnak *neveztek …*

*Jean Dieudonné [4]*

**14.4.1. Általánosított megoldások.** Legyen

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

ahol $a_\alpha \in \mathcal{E}(G)$. Az $Lu = f$ differenciálegyenlet, ahol $f \in \mathcal{D}'(G)$, *általánosított megoldás*án olyan $u \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúciót értünk, amely eleget tesz az egyenletnek, azaz amelyre

$$Lu(\varphi) = f(\varphi) \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}(G)\text{-re.}$$

Megjegyezzük, hogy — mint egyszerű számolás mutatja — az egyenlet az

$$u(L^*\varphi) = f(\varphi) \quad \text{minden } \varphi \in \mathcal{D}(G)\text{-re}$$

egyenlettel ekvivalens, ahol

$$L^*\varphi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi),$$

az $L$ *formális adjungált*ja.

**14.4.2. Lemma.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha $f \in \mathcal{C}(G)$, és az $u$ általánosított megoldás $\mathcal{C}^m(G)$-ben van, akkor $u$ megoldása a differenciálegyenletnek.*

**Bizonyítás.** Mivel $u \in \mathcal{C}^m(G)$, az $u$ klasszikus és általánosított deriváltjai $m$-ed rendig egybeesnek. Mivel $u$ általánosított megoldás, a $G$-n folytonos $Lu - f$ függvényhez a nulla disztribúció tartozik. Ebből az általánosított Lagrange-lemma szerint $Lu - f$ azonosan nulla. □

**14.4.3. Definíció.** Legyen $L$ *konstansegyütthatós lineáris differenciáloperátor*, azaz

$$L = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha\partial^\alpha.$$

Az $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciót az $L$ operátor *alapmegoldás*ának nevezzük, ha $LE = \delta$.

Megjegyezzük, hogy az alapmegoldás nem egyértelmű, mert a homogén $Lu = 0$ egyenlet bármely általánosított megoldását hozzáadva egy alapmegoldáshoz, új alapmegoldást kapunk. Megmutatható, hogy minden konstansegyütthatós lineáris differenciáloperátornak létezik temperált alapmegoldása.

**14.4.4. Tétel.** *Legyen $E$ az $L$ konstansegyütthatós differenciáloperátor egy alapmegoldása. Ha $u = E * f$ értelmezve van, akkor általánosított megoldása az $Lu = f$ egyenletnek, továbbá $u$ egyértelmű azon $\mathcal{D}'$-beli disztribúciók körében, amelyekre $u * E$ értelmezve van.*

**Bizonyítás.** Ha $E * f$ értelmezve van, akkor

$$L(E * f) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha (E * f) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha (\partial^\alpha E * f)$$
$$= \Big( \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha E \Big) * f = \delta * f = f.$$

Ha két megoldás van, akkor az $u$ különbségükre $Lu = 0$ és $u * E$ értelmezve van, így

$$u = u * \delta = u * (LE) = (Lu) * E = 0 * E = 0. \ \square$$

**14.4.5. Az alapmegoldás fizikai jelentése.** Az $E$ alapmegoldás a $\delta$ elemi forráshoz tartozó elemi hatás. Az $f$ forrást előállítjuk $f = \delta * f$ alakban elemi források „összegeként". Az $u$ hatást $u = E * f$ alakban, az elemi hatások „összegeként" kapjuk.

**14.4.6. Példa.** Keressük meg egy közönséges differenciálegyenlet egy alapmegoldását. Az

$$u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots + a_m u = 0$$

differenciálegyenlet egy alapmegoldása $E = \Theta u$, ahol $\Theta$ a Heaviside-függvény, $u$ pedig az egyenlet

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u^{(m-1)}(0) = 1$$

kezdeti feltételeknek eleget tévő megoldása. Valóban, $E^{(k)} = \Theta u^{(k)}$, ha $k < m$ és $E^{(m)} = \delta + \Theta u^{(m)}$. Speciálisan, az $u' + au = 0$ egyenlet egy alapmegoldása $E(t) = \Theta(t) e^{-at}$, az $+ a^2 u = 0$ egyenlet egy alapmegoldása pedig $E(t) = \Theta(t) \sin(at)/a$.

$\to$ **14.4.7. Feladat [9].** Az $Lu = \ + a^2 u$ differenciáloperátornak adjunk meg olyan alapmegoldását, amelynek tartója $]-\infty, 0]$-ban van.

$\star$ **14.4.8. Green-függvény.** A lineáris differenciálegyenletre vonatkozó

$$G\colon Lu = f, \quad \partial G\colon Bu = 0$$

probléma megoldására felhasználható egy olyan $G \times \overline{G}$-n értelmezett $(x, y) \mapsto g(x, y)$ függvény, a *Green-függvény*, amelyre

$$G\colon Lg(.,y) = \tau_y \delta \quad \text{és} \quad \partial G\colon Bg(.,y) = 0,$$

ha $y \in G$. Ekkor

$$u(x) = \int_G g(x,y) f(y)\, dy$$

olyan, a peremfeltételnek eleget tévő függvény, amelyre az

$$(Lu)(x) = \int_G Lg(.,y) f(y)\, dy = \int_G \delta(x-y) f(y)\, dy = f(x)$$

formális számolás azt sugallja, hogy megoldása az egyenletnek, azaz a

$$(Tf)(x) = \int_G g(x,y) f(y)\, dy, \quad \text{ha} \quad x \in G$$

összefüggéssel értelmezett $T$ integráloperátor az $L$ differenciáloperátor „inverze". A Green-függvény az alapmegoldás általánosítása a függvényegyütthatós esetre. A $T$ operátor sajátértékei az $L$ operátor sajátértékeinek reciprokai. A Green-függvény sokszor az $L_y^* g(x,y) = \delta(y-x)$ összefüggésből nyerhető. Itt $L^*$ az $L$ formális adjungáltja.

A Green-függvény nagyon hatékony eszköz. Sajnos, általában csak egyszerű tartományok esetén sikerül explicit módon meghatározni.

**14.4.9. Feladat [11].** Határozzuk meg az alábbi differenciáloperátorok egy $[0,\infty[$-beli tartójú alapmegoldását:

(1) $\dfrac{d^2}{dt^2}-a^2$;

(2) $\left(\dfrac{d}{dt}+a\right)^m$;

(3) $\dfrac{d^2}{dt^2}+4\dfrac{d}{dt}$;

(4) $\dfrac{d^2}{dt^2}-2\dfrac{d}{dt}+1$;

(5) $\dfrac{d^2}{dt^2}+3\dfrac{d}{dt}+2$;

(6) $\dfrac{d^2}{dt^2}-4\dfrac{d}{dt}+5$;

(7) $\dfrac{d^3}{dt^3}-a^3$;

(8) $\dfrac{d^3}{dt^3}-3\dfrac{d^2}{dt^2}+2$;

(9) $\dfrac{d^4}{dt^4}-a^4$;

(10) $\dfrac{d^4}{dt^4}-2\dfrac{d^2}{dt^2}+1$.

**14.4.10. Feladat [11].** Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x)=\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x)=\frac{e^{-ik|x|}}{4\pi|x|}$$

a $-\Delta-k^2$ Helmholtz-operátor alapmegoldása $\mathbb{R}^3$-ban.

**14.4.11. Feladat [11].** Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x)=\frac{-e^{ik|x|}}{2ki} \quad \text{és} \quad \overline{E}(x)=\frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

a $-\Delta-k^2$ Helmholtz-operátor alapmegoldása $\mathbb{R}$-ben.

**14.4.12. Feladat [12].** Bizonyítsuk be, hogy

$$E(x)=\frac{e^{-k|x|}}{2k} \quad \text{illetve} \quad E(x)=\frac{e^{-ik|x|}}{2ki}$$

a $-\Delta+k^2$ operátor alapmegoldása $\mathbb{R}$-ben, illetve $\mathbb{R}^3$-ban.

**14.4.13. Feladat [14].** Bizonyítsuk be, hogy az $n$-dimenziós

$$i\hbar\partial_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

Schrödinger-operátor egy alapmegoldása

$$E(x,t)=-\frac{i\Theta(t)}{\hbar}\left(\frac{m}{2\pi\hbar t}\right)^{n/2} e^{i\left(\frac{m}{2\hbar t}|x|^2-\frac{\pi n}{4}\right)}.$$

⋆ **14.4.14. Feladat [16].** Bizonyítsuk be, hogy a

$$\partial_t^2 - a^2\Delta + m^2$$

Klein–Fock–Gordon-operátor egy alapmegoldása $n = 1, 2, 3$ esetén rendre

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)}{2a} J_0(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}),$$
$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)}{2\pi a^2} \frac{\cos(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}},$$
$$E(x,t) = \frac{\Theta(at)}{2\pi a}\delta(a^2t^2-|x|^2) - \frac{m\Theta(at-|x|)}{4\pi a^3} \frac{J_1(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}.$$

⋆ **14.4.15. Feladat [16].** Bizonyítsuk be, hogy a

$$\partial_t^2 + 2m\partial_t - a^2\Delta$$

telegráf-operátor egy alapmegoldása $n = 1, 2, 3$ esetén rendre

$$E(x,t) = \frac{i\Theta(at-|x|)e^{-mt}}{2a} J_0(im\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}),$$
$$E(x,t) = \frac{\Theta(at-|x|)e^{-mt}}{2\pi a^2} \frac{\chi(m\sqrt{t^2-|x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}},$$
$$E(x,t) = \frac{\Theta(at)e^{-mt}}{2\pi a}\delta(a^2t^2-|x|^2) - \frac{\Theta(at-|x|)me^{-mt}}{4\pi i a^3} \frac{J_1(im\sqrt{t^2-|x|^2/a^2})}{\sqrt{t^2-|x|^2/a^2}}.$$

**14.4.16. A hővezetési egyenlet alapmegoldása.** Alkalmazzunk $x$ szerinti Fourier-transzformációt a

$$\partial_t E - a^2\Delta_x E = \delta$$

egyenlet mindkét oldalára. Formálisan számolva,

$$\partial_t \hat{E}(y,t) + 4\pi^2a^2|y|^2\hat{E}(y,t) = 1(y)\times\delta(t),$$

amiből az $u' + au$ egyenlet alapmegoldásában $a$ helyére $4\pi^2a^2|y|^2$-et helyettesítve,

$$\hat{E}(y,t) = \Theta(t)e^{-4\pi^2a^2|y|^2t}.$$

Ebből inverz Fourier-transzformációval

$$E(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4a^2t}}.$$

Bár a fenti formális számolás is pontossá tehető, az így megsejtett függvényről közvetlenül is bizonyíthatjuk, hogy alapmegoldás. A továbbiakban mint „az” alapmegoldásra fogunk rá hivatkozni.

Nyilván $t > 0$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\,dx = 1,$$

$t < 0$ esetén pedig $E$ nulla, így $E$ lokálisan integrálható. Tetszőleges $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ függvényre

$$\begin{aligned} E(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t) - a^2\Delta_x\varphi(x,t)\big)\,dx\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\big(-\partial_t\varphi(x,t) - a^2\Delta_x\varphi(x,t)\big)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Parciális integrálások után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\varphi) = &\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t E(x,t) - a^2\Delta_x E(x,t))\varphi(x,t)\,dx\,dt \\ &+ \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varphi(0,\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\,dx + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\big(\varphi(x,\varepsilon) - \varphi(0,\varepsilon)\big)\,dx. \end{aligned}$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy az első tag nulla. A második tag nyilván tart $\varphi(0,0)$-hoz, így elég megmutatnunk, hogy az utolsó tag nullához tart. A középérték-tétel felhasználásával adódik, hogy alkalmas $c$ konstansra ez a tag nem nagyobb, mint

$$c\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)|x|\,dx.$$

Az $x/\sqrt{\varepsilon}$ helyére új változót helyettesítve, adódik, hogy ez az integrál nullához tart, ha $\varepsilon \downarrow 0$.

**14.4.17. Tétel.** *Tekintsük a*

(1) $$\{t > 0\}\colon u_t - a^2\Delta_x u = f, \quad \mathbb{R}^n\colon u(x,0) = u_0(x)$$

*Cauchy-feladatot. Terjesszük ki az $u$ és $f$ függvényeket $t < 0$ esetére úgy, hogy ott nullával legyenek egyenlőek. Ekkor az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ kiterjesztett függvényekre*

(2) $$\partial_t\tilde{u} - a^2\Delta_x\tilde{u} = \tilde{f} + u_0 \times \delta,$$

*azaz az (1) Cauchy-feladat minden megoldása kiterjesztve a (2) egyenlet általánosított megoldása.*

**Bizonyítás.** Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor

$$\begin{aligned}
(\partial_t \tilde{u} - a^2 \Delta_x \tilde{u})(\varphi) = \tilde{u}(-\partial_t \varphi - a^2 \Delta_x \varphi) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(-\partial_t \varphi - a^2 \Delta_x \varphi)\, dx\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t u - a^2 \Delta_x u) \varphi \, dx\, dt \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon)\, dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t) \varphi(x,t)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \varphi(x, 0)\, dx \\
&= (\tilde{f} + u_0 \times \delta)(\varphi).
\end{aligned}$$

**14.4.18. Tétel.** *Jelölje $\mathcal{M}$ azon $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények osztályát, amelyek $t < 0$ esetén nullák, és minden $0 \le t \le T$ sávban korlátosak. Az előző pont jelöléseivel, legyen $f \in \mathcal{M}$, és legyen $u_0$ valós értékű korlátos mérhető függvény $\mathbb{R}^n$-en. Ekkor a (2) egyenletnek létezik egyértelmű általánosított megoldása az $\mathcal{M}$ függvényosztályban, és erre a megoldásra*

$$\begin{aligned}
u(x,t) = &\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y,s)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-s)}\right)^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}}\, dy\, ds \\
&+ \frac{\Theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\, dy.
\end{aligned}$$

*Az $u$ általánosított megoldás folytonosan függ az $f$ és $u_0$ függvényektől a következő értelemben: ha $|f| \le \varepsilon$ és $|u_0| \le \varepsilon_0$, akkor a megoldásra tetszőleges $0 \le t \le T$ sávban $|u| \le T\varepsilon + \varepsilon_0$. Ha még $f \in \mathcal{C}^2\{t \ge 0\}$, továbbá $f$ minden legfeljebb másodrendű deriváltja $\mathcal{M}$-ben van, és $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, akkor $u$ megoldása a Cauchy-feladatnak.*

A megoldás első tagja a *hőpotenciál*, a második tagja pedig a *felületi hőpotenciál.*

A bizonyítás az eddigiek alapján úgy történhet, hogy megmutatjuk, az $E$ alapmegoldásnak és a $F = \tilde{f} + u_0 \times \delta$ disztribúciónak létezik a konvolúciója, és $\mathcal{M}$-ben van. Így az előző tételek szerint a (2) egyenlet általánosított megoldása egyértelmű $\mathcal{M}$-ben. Az $u$ folytonos függése $f$-től és $u_0$-tól az integrálok becsléseiből következik. Ha a simasági feltételek is teljesülnek, akkor megmutatható, hogy $u$ eleget tesz a kezdeti feltételeknek és elég sima is, így a Cauchy-feladat klasszikus megoldása.

**14.4.19. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(1) $u_t = 4u_{xx} + t + e^t$, $u(x,0) = 2$;

(2) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u(x,0) = \sin x$;

(3) $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x$, $u(x,0) = \cos x$;

(4) $u_t = u_{xx} + e^t \sin x$, $u(x,0) = \sin x$;

(5) $u_t = u_{xx} + \sin t$, $u(x,0) = e^{-x^2}$;

(6) $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = e^{2x-x^2}$;

(7) $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = xe^{-x^2}$;

(8) $4u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin x e^{-x^2}$.

**14.4.20. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$):

(1) $u_t = \Delta u + e^t$, $u(x, y, 0) = \cos x \sin y$;

(2) $u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y$, $u(x, y, 0) = 1$;

(3) $u_t = \Delta u + \cos t$, $u(x, y, 0) = xye^{-x^2-y^2}$;

(4) $8u_t = \Delta u + 1$, $u(x, y, 0) = e^{(x-y)^2}$;

(5) $2u_t = \Delta u$, $u(x, y, 0) = \cos xy$.

**14.4.21. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$):

(1) $u_t = 2\Delta u + t \cos x$, $u(x, y, z, 0) = \cos y \cos z$;

(2) $u_t = 3\Delta u + e^t$, $u(x, y, z, 0) = \sin(x - y - z)$;

(3) $4u_t = \Delta u + \sin 2z$, $u(x, y, z, 0) = \cos 2ye^{-x^2}$;

(4) $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z)$, $u(x, y, z, 0) = e^{-(x+y-z)^2}$;

(5) $u_t = \Delta u$, $u(x, y, z, 0) = \cos(xy) \sin z$.

**14.4.22. Feladat [13].** Oldjuk meg az $u_t = a^2 u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x, t)$

(1) $\delta \times \delta$;

(2) $\partial_k \delta \times \delta$;

(3) $\tau_{x_0} \delta \times \tau_{t_0} \delta$, $t_0 \geq 0$;

(4) $\delta \times \delta'$;

(5) $\partial_k^2 \delta \times \tau_{t_0} \delta$;

(6) $\partial_k \delta \times \delta'$;

(7) $\delta \times \Theta$;

(8) $\tau_{x_0} \delta \times \tau_{t_0} \Theta$, $t_0 \geq 0$;

(9) $\tau_{x_0} \delta \times \delta' + \partial_k \tau_{x_0} \delta \times \delta$;

(10) $\delta \times \omega$, $\omega \in \mathcal{C}\{t \geq 0\}$.

**14.4.23. Feladat [13].** Oldjuk meg az $u_t = u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x, t)$

(1) $\Theta(t - 1)e^t$;

(2) $\Theta(t - \pi) \cos t$;

(3) $\Theta(t - 1)x$;

(4) $\Theta(t - 2)e^x$;

(5) $\Theta(t)\Theta(x)$;

(6) $\Theta(t)\Theta(1 - |x|)$.

**14.4.24. Feladat [13].** Oldjuk meg az $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f(x, t)$, $u(x, 0) = u_0(x)$ feladatot a következő adatokkal:

(1) $f(x, t) = 1$, $u_0(x) = 1$, $c = 1$;

(2) $f(x, t) = e^t$, $u_0(x) = \cos x$, $a = c = 1$, $b = 0$;

(3) $f(x, t) = e^t$, $u_0(x) = \cos x$, $a = c = 2$, $b = 0$;

(4) $f(x, t) = t \sin x$, $u_0(x) = 1$, $a = c = 1$, $b = 0$;

(5) $f(x,t) = 0$, $u_0(x) = e^{-x^2}$;

(6) $f(x,t) = \omega(t) \in \mathcal{C}^1\{t \geq 0\}$, $u_0 \in \mathcal{C}$ korlátos.

**14.4.25. Feladat [13].** Oldjuk meg az $u_t - a^2 u_{xx} - bu_x - cu = f + u_0 \times \delta$ általánosított feladatot a következő adatokkal:

(1) $f(x,t) = \Theta(t-1)$, $u_0(x) = \Theta(x)$, $c \neq 0$;

(2) $f(x,t) = \Theta(t-1)$, $u_0(x) = \Theta(1-x)$, $c = 0$;

(3) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^t$, $u_0(x) = \Theta(1-|x|)$, $c \neq 1$;

(4) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^t$, $u_0(x) = \Theta(x)e^x$, $c = 1$;

(5) $f(x,t) = \Theta(t-1)e^x$, $u_0(x) = x\Theta(x)$, $a = 2$, $b = c = -2$;

(6) $f(x,t) = \Theta(t)\Theta(x)$, $u_0(x) = x$.

**14.4.26. A hullámegyenlet alapmegoldása.** A hővezetés egyenletéhez hasonlóan kezelhető a hullámegyenlet is. Hasonló meggondolásokkal azt kapjuk, hogy ha $n = 1$, akkor

$$E(x,t) = \frac{\Theta(at - |x|)}{2a},$$

ha $n$ páros, akkor

$$E(x,t) = \frac{(-1)^{n/2-1}\mathbf{\Gamma}(\frac{n-1}{2})}{2a\pi^{(n+1)/2}} \frac{\Theta(at - |x|)}{\left(a^2t^2 - |x|^2\right)^{(n-1)/2}},$$

ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor

$$E(\varphi) = \frac{\Theta(t)}{(2a\pi)\pi^{(n-3)/2}} \int_0^\infty \left(\frac{d}{2a^2 t\, dt}\right)^{\frac{(n-3)}{2}} \left(\frac{1}{2at} \int_{S_{at}} \varphi(x,t)\, dx\right) dt$$

egy alapmegoldás. A továbbiakban ezekre a disztribúciókra, mint „az" alapmegoldásra fogunk hivatkozni.

**14.4.27. Definíció.** Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eltűnik, ha $t < 0$. Legyen $E$ a hullámegyenlet alapmegoldása. A $V = E * f$ disztribúciót $f$ sűrűségű *késleltetett potenciál*nak nevezzük. Ha $f = u_1 \times \delta$, illetve $f = u_0 \times \delta'$, ahol $u_0$, $u_1$ tetszőleges $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúciók, akkor a megfelelő $V_0 = E * (u_1 \times \delta)$ illetve $V_1 = E * (u_0 \times \delta')$ késleltetett potenciálokat az $u_1$ sűrűségű *egyszerű réteg*,illetve az $u_0$ sűrűségű *kettős réteg késleltetett potenciálján*aknevezzük. Megjegyezzük, hogy ha $f$ lokálisan integrálható függvény, illetve $u_0$, $u_1$ lokálisan integrálható függvények, akkor — hasonlóan, mint a hővezetési egyenletnél — a fenti késleltetett potenciálok integrálok segítségével zárt alakban felírhatók és becsülhetők.

**14.4.28. Tétel.** *Tekintsük a hullámegyenletre vonatkozó alábbi Cauchy-feladatot:*

$$\{t > 0\}\colon u_{tt} - a^2 \Delta_x u = f, \quad \mathbb{R}^n\colon u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x).$$

*Terjesszük ki az $u$ és $f$ függvényeket az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ függvényekké úgy, hogy $t < 0$ esetén legyenek nullák. Az $\tilde{u}$ függvény kielégíti az*

$$\partial_t^2 \tilde{u} - a^2 \Delta_x \tilde{u} = \tilde{f} + u_0 \times \delta' + u_1 \times \delta$$

*általánosított egyenletet.*

**Bizonyítás.** A hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelő állításhoz hasonlóan bizonyítható. □

**14.4.29. Tétel.** *Legyen $n = 1$ esetén $k = 1$, $n = 2, 3$ esetén pedig $k = 2$, $f \in \mathcal{C}^k(t \geq 0)$, $u_0 \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ és $u_1 \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a Cauchy-feladatnak egyetlen megoldása létezik, és az folytonosan függ az $f$, $u_0$, $u_1$ adatoktól az alábbi értelemben: ha $|f| \leq \varepsilon$, $|u_1| \leq \varepsilon_1$, $|u_0| \leq \varepsilon_0$ és $(k-1)|\operatorname{grad} u_0| \leq \varepsilon_0'$, akkor az $u$ megoldásra tetszőleges $0 \leq t \leq T$ sávban $|u| \leq \varepsilon T^2/2 + \varepsilon_1 T + \varepsilon_0 + (k-1)a\varepsilon_0' T$. A megoldás $n = 3$ esetén előállítható a* Kirchoff-formulával:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{f(y, t - |x-y|/a)}{|x-y|}\, dy + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\mathbb{S}_{at}(x)} u_1(y)\, dy + \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t \left( \frac{1}{t} \int_{\mathbb{S}_{at}(x)} u_0(y)\, dy \right);$$

$n = 2$ *esetén a* Poisson-formulával:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{\mathbb{U}_{a(t-s)}(x)} \frac{f(y,s)}{\sqrt{a^2(t-s)^2 - |x-y|^2}}\, dy\, ds + \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{u_1(y)\, dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \partial_t \int_{\mathbb{U}_{at}(x)} \frac{u_0(y)\, dy}{\sqrt{a^2t^2 - |x-y|^2}};$$

$n = 1$ *esetén a* d'Alembert-formulával:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)\, dy\, ds + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(y)\, dy + \frac{1}{2}\big(u_0(x+at) + u_0(x-at)\big).$$

**14.4.30. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat:

(1) $u_{tt} = u_{xx} + 6$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = 4x$;

(2) $u_{tt} = 4u_{xx} + xt$, $u(x,0) = x^2$, $u_t(x,0) = x$;

(3) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 0$;

(4) $u_{tt} = u_{xx} + e^x$, $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = x + \cos x$;

(5) $u_{tt} = 9u_{xx} + \sin x$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = 1$;

(6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega x$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$;

(7) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin \omega t$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$.

**14.4.31. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$):

(1) $u_{tt} = \Delta u + 2$, $u(x,y,0) = x$, $u_t(x,y,0) = y$;

(2) $u_{tt} = \Delta u + 6xyt$, $u(x,y,0) = x^2 - y^2$, $u_t(x,y,0) = xy$;

(3) $u_{tt} = \Delta u + x^3 - 3xy$, $u(x,y,0) = e^x \cos y$, $u_t(x,y,0) = e^y \sin x$;

(4) $u_{tt} = \Delta u + t \sin y$, $u(x,y,0) = x^2$, $u_t(x,y,0) = \sin y$;

(5) $u_{tt} = 2\Delta u$, $u(x,y,0) = 2x^2 - y^2$, $u_t(x,y,0) = 2x^2 + y^2$;

(6) $u_{tt} = 3\Delta u + x^3 + y^3$, $u(x,y,0) = x^2$, $u_t(x,y,0) = y^2$;

(7) $u_{tt} = \Delta u + e^{3x+4y}$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = e^{3x+4y}$;

(8) $u_{tt} = a^2\Delta u$, $u(x,y,0) = \cos(bx + cy)$, $u_t(x,y,0) = \sin(bx + cy)$;

(9) $u_{tt} = a^2\Delta u$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = (x^2 + y^2)^2$;

(10) $u_{tt} = a^2\Delta u + (x^2 + y^2)e^t$, $u(x,y,0) = u_t(x,y,0) = 0$.

**14.4.32. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi feladatokat ($\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$):

(1) $u_{tt} = \Delta u + 2xyz$, $u(x,y,z,0) = x^2 + y^2 - 2z^2$, $u_t(x,y,z,0) = 1$;

(2) $u_{tt} = 8\Delta u + t^2x^2$, $u(x,y,z,0) = y^2$, $u_t(x,y,z,0) = z^2$;

(3) $u_{tt} = 3\Delta u + 6(x^2 + y^2 + z^2)$, $u(x,y,z,0) = x^2y^2z^2$, $u_t(x,y,z,0) = xyz$;

(4) $u_{tt} = \Delta u + 6te^{x\sqrt{2}}\sin y \cos z$ valamint $u(x,y,z,0) = e^{x+y}\cos(z\sqrt{2})$, $u_t(x,y,z,0) = e^{3y+4z}\sin 5x$;

(5) $u_{tt} = a^2\Delta u$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$;

(6) $u_{tt} = a^2\Delta u + (x^2 + y^2 + z^2)e^t$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = 0$;

(7) $u_{tt} = a^2\Delta u + \cos(x)\sin(y)e^z$, $u(x,y,z,0) = x^2e^{y+z}$, $u_t(x,y,z,0) = \sin(x)e^{y+z}$;

(8) $u_{tt} = a^2\Delta u + xe^t\cos(3y + 4z)$, $u(x,y,z,0) = xy\cos z$, $u_t(x,y,z,0) = yze^x$;

(9) $u_{tt} = a^2\Delta u$, $u(x,y,z,0) = u_t(x,y,z,0) = \cos\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**14.4.33. Feladat [13].** Oldjuk meg az $u_{tt} = u_{xx} + f$ általánosított feladatot, ha $f(x,t)$

(1) $\delta \times \delta$;

(2) $\tau_{x_0}\delta \times \tau_{t_0}\delta$, $t_0 \geq 0$;

(3) $\delta' \times \delta$;

(4) $\delta \times \delta'$;

(5) $\delta \times \tau_{t_0}\delta'$;

(6) $\tau_{x_0}\check{\delta}' \times \delta$;

(7) $\delta \times \delta''$;

(8) $\delta'' \times \delta$;

(9) $\delta \times \omega + \delta \times \delta' + \delta \times \delta$, $\omega \in \mathcal{C}\{t \geq 0\}$;

(10) $\delta \times \Theta + \tau_{x_0}\delta \times \delta' + \delta \times \delta$;

(11) $\delta \times \omega + \tau_{-2}\check{\delta} \times \delta' + \tau_{-3}\check{\delta} \times \delta$, $\omega(t) = t\Theta(t)$.

**14.4.34. Feladat [13].** Oldjuk meg az alábbi (inkorrekt jelöléssel felírt) általánosított feladatokat:

(1) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \Theta(x)\delta'(t) + \Theta(x)\delta(t)$;

(2) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \Theta(t)(x-1) + x\delta'(t) + \operatorname{sgn}(x)\delta(t)$;

(3) $u_{tt} = a^2u_{xx} + \Theta(t)tx + \delta(t)\Theta(x)/\sqrt{x}$;

(4) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)/(t+1) + \Theta(-x)\delta(t)$;

(5) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t-2)\ln t + |x|\delta'(t)$;

(6) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \Theta(t)t^m + \Theta(2 - |x|)\delta'(t)$, $m = 1, 2, \ldots$;

(7) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)e^{x+t} + \Theta(x)e^{-x}\delta(t)$;

(8) $u_{tt} = 9u_{xx} + \Theta(t - \pi)\cos t + \Theta(x - 3)\delta'(t) + \delta(t)$;

(9) $u_{tt} = u_{xx} + \Theta(t)\Theta(x)$;

(10) $u_{tt} = u_{xx} + \delta(x - x_0)\Theta(t)\sin t + x\delta'(x)\delta(t)$.

## 14.5 Peremérték problémák

*Kezdetben az adott elliptikus differenciáloperátor csak a kétszer folytonosan differenciálható függvényeken van értelmezve. Aztán ezt az operátort kiterjesztjük formális lezárást használva egy absztrakt módon definiált operátorrá. A fő probléma megmutatni, hogy a kiterjesztett operátor önadjungált. Ezután alkalmazhatók Neumann János módszerei.*

*Kurt Otto Friedrichs (1934)*

**14.5.1. Elliptikus differenciáloperátorok.** Tegyük fel, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelyre $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. A 14.2.3 pontban bevezetett jelölésekkel az

$$Lu = -\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u$$

differenciáloperátort fogjuk vizsgálni. Az operátort a $\mathcal{C}^2(\overline{G})$ téren értelmezzük, tehát $\mathbb{L}^2(D)$ egy sűrű részhalmazán van értelmezve. Pontosabban az egyszerűség kedvéért csak a

$$G\colon Lu = f, \qquad \partial G\colon u = 0$$

Dirichlet-feladatot vizsgáljuk, bár a használt módszer alkalmas lenne más peremérték-problémák vizsgálatára is. Tehát feltesszük, hogy ha $u \in \operatorname{dmn}(L)$, akkor $u$ eltűnik $G$ határán.

Tulajdonképpen a vegyes feladatoknál és a Fourier-módszerben játszott szerepe miatt célszerű lenne az általánosabb

$$L_\varrho u = -\frac{1}{\varrho(x)}\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) + \frac{q(x)}{\varrho(x)}u$$

differenciáloperátort vizsgálni. Ez azonban nem szimmetrikus $\mathbb{L}^2(G)$. Ezen könnyen segíthetünk, ha az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ térben dolgozunk. Az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ tér elemei ugyanazok, mint $\mathbb{L}^2(G)$ elemei, és a normák is ekvivalensek, mivel $\varrho$ alulról és felülről is korlátos, pozitív függvény, a belső szorzat azonban más. A $\varrho$ súlyfüggvény az $L_\varrho u = f$ differenciálegyenlet megoldásakor semmi szerepet nem játszik, mivel szorozhatunk vele, a sajátérték-feladat tárgyalásakor azonban fontos, mert megváltoztatja a belső szorzatot, és így $L_\varrho$ szimmetrikus, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények pedig ortogonálisak lesznek. Az egyszerűség kedvéért maradunk az $L$ operátornál. Más, nem szimmetrikus operátorok általánosabb módszerekkel vizsgálhatók: Lásd Evans [6] könyvét.

**14.5.2. Green-formulák.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, amelyre $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. A 14.2.3 pontban bevezetett jelölésekkel az*

$$Lu = -\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad} u) + q(x)u$$

*differenciáloperátorra, ha $u \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ és $v \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$ valós értékű függvények, akkor teljesül az* első Green-formula*:*

$$\int_G vLu = \int_G p\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_G quv - \int_{\partial G} pvu_{\mathbf{n}}.$$

*Ha pedig $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$, akkor teljesül a* második Green-formula*:*

$$\int_G vLu - uLv = \int_{\partial G} p(uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}).$$

**Bizonyítás.** Az első Green-formula bizonyításához alkalmazzuk a divergenciatételt a $G$ tartományra:

$$\begin{aligned}
\int_G vLu &= \int v(-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu) \\
&= -\int_G \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u) + \int_G p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle + \int_G quv \\
&= \int_G p\langle \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v\rangle - \int_{\partial G} pvu_{\mathbf{n}} + \int_G quv.
\end{aligned}$$

A második Green-formulát úgy kapjuk, hogy az elsőben felcseréljük $u$ és $v$ szerepét, és a kapott formulát kivonjuk az eredetiből.

**14.5.3. Elliptikus differenciáloperátorok tulajdonságai.** Az 14.5.1 pont jelöléseivel megmutatjuk, hogy $L$ szimmetrikus. Ha $u, v \in \operatorname{dmn}(L)$, akkor a második Green-formulából

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, Lv\rangle = \int_G vLu - uLv = \int_{\partial G} p(uv_{\mathbf{n}} - vu_{\mathbf{n}}) = 0.$$

Vizsgáljuk most az $\langle Lu, u\rangle$ belső szorzatot, az úgynevezett *energiaintegrál*t. (Mint láttuk, $\frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle$ általában az energiának felel meg.) Az első Green-formulában $v = u$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\langle Lu, u\rangle = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + \int_G qu^2 - \int_{\partial G} puu_{\mathbf{n}} = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2.$$

Ebből következik, hogy $q > 0$ esetén $L$ pozitív operátor, és minden sajátértéke pozitív. Differenciálegyenletünk $Lu = f$ alakba írható. Az $L$ elliptikus differenciáloperátor pozitív és szimmetrikus, de nem önadjungált. Hogy a spektrálelmélet eszközeit alkalmazhassuk, az $L$ operátort kiterjesztjük egy önadjungált operátorrá. Ez a kiterjesztés úgy történik, hogy az energiaintegrál által adott normában teljessé tesszük az értelmezési tartományt. Az így kibővített értelmezési tartomány elemei azonosíthatók $\mathbb{L}^2(G)$ bizonyos függvényeivel; olyan függvények, amelyeknek disztribúció értelemben vett első és második parciális deriváltjai négyzetesen integrálhatók (Szoboljev-tér). Az így kapott Friedrichs-kiterjesztésről finom becslések mutatják, hogy inverze kompakt operátor, tehát alkalmazható rá a Riesz-elmélet. Az inverz minden $f \in \mathbb{L}^2(G)$-re megad egy úgynevezett *általánosított megoldást*, ami tulajdonképpen egy disztribúció. Az általános esetben az operátor nem pozitív, de alulról korlátos, így az identikus operátor egy konstansszorosát hozzáadva, alkalmazható a fent leírt módszer.

Azt, hogy a kapott általánosított megoldás klasszikus értelemben is megoldás, a *regularitáselmélet* keretében bizonyítják, ha szükség van rá. Durván szólva, ha elég sima $\partial G$, akkor minél simább $f$, annál simább $u$, és ha elég sima, akkor klasszikus értelemben is megoldás. Lásd Evans [6] könyvét.

**14.5.4. Friedrichs-tétel.** *Tegyük fel, hogy a $T \in X \to X$ sűrűn definiált lineáris operátor szimmetrikus az $X$ valós Hilbert-téren és $T$ pozitív, azaz van olyan $c > 0$ konstans, hogy*

$$\langle Tu, u\rangle \geq c\|u\|^2 \quad \text{minden } u \in \operatorname{dmn}(T)\text{-re.}$$

*Legyen az $X_E$* energiatér *a $\operatorname{dmn}(T)$ teljes burka az $\langle u, v\rangle_E = \langle Tu, v\rangle$* energia belső szorzatra *nézve. Ekkor*

(1) $\operatorname{dmn}(T)$ *identikus beágyazása $X$-be egyértelműen kiterjeszthető $X_E$ egy folytonos beágyazásává $X$-be;*

(2) *az $f(v) = \langle f, v\rangle$, ha $v \in X_E$ összefüggés egy folytonos $X \subset X_E^*$ beágyazást definiál;*

(3) *léteznek $T \subset T_F \subset T_E$ kiterjesztései $T$-nek úgy, hogy a $T_F \in X \to X$* Friedrichs-kiterjesztés *önadjungált és*

$$\langle T_F u, u\rangle \geq c\|u\|^2$$

*minden $u \in \operatorname{dmn}(T_F)$-re;*

(4) *a $T_F^{-1}\colon X \to X$ inverz létezik, lineáris, folytonos és önadjungált;*

(5) *a $T_F^{-1}\colon X \to X_E$ leképezés lineáris és folytonos;*

(6) *a $T_E\colon X_E \to X_E^*$ energiakiterjesztés az $X_E$ dualitás-leképezése, azaz a*

$$(T_E u)(v) = \langle u, v\rangle_E$$

*összefüggésnek eleget tévő lineáris homeomorfizmus, továbbá $T_F^{-1} f = T_E^{-1} f$, ha $f \in X$;*

(7) *ha az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt, akkor a $T_F^{-1}\colon X \to X$ operátor is kompakt;*

(8) *a*

$$Tu = f$$

*egyenlet minden megoldása megoldása a*

$$T_F u = f, \quad u \in \operatorname{dmn}(T_F)$$

*egyenletnek, az*

$$\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle, \quad v \in \operatorname{dmn}(T)$$

általánosított problémá*nak és az*

$$\frac{1}{2}\langle u,u\rangle_E - \langle f,u\rangle \to \min$$

variációs problémá*nak, továbbá $X_E$-n az utóbbi három probléma ekvivalens.*

⋆ **Bizonyítás.** Az $\langle u,v\rangle_E = \langle Tu,v\rangle$ belső szorzattal és a megfelelő normával ellátva dmn$(T)$-t, vegyük észre, hogy $d = 1/\sqrt{c}$ jelöléssel $\|u\| \le d\|u\|_E$ minden $u \in \mathrm{dmn}(T)$-re továbbá dmn$(T)$ sűrű az $X_E$ teljes burokban. Megmutatjuk, hogy létezik egy $j\colon X_E \to X$ lineáris folytonos és kölcsönösen egyértelmű leképezés, így ha $u$-t azonosítjuk $j(u)$-val, akkor $X_E \subset X$. Valóban, legyen $j(u) = u$, ha $u \in \mathrm{dmn}(T)$. Ez a leképezés folytonosan kiterjeszthető $X_E$-re. Határátmenettel $\langle u,v\rangle_E = \big\langle Tu, j(v)\big\rangle$ minden $u \in \mathrm{dmn}(T)$, $v \in X_E$-re, így $j(v) = 0$-ból $v = 0$, tehát $j$ kölcsönösen egyértelmű. Azonosítva $v$-t $j(v)$-vel, határátmenettel az

$$\|u\| \le d\|u\|_E, \quad \text{ha} \quad u \in X_E$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Hasonlóan, megmutatjuk, hogy létezik egy $h\colon X \to X_E^*$ folytonos lineáris és kölcsönösen egyértelmű leképezés, így $u$-t $h(u)$-val azonosítva, $X \subset X_E^*$. Ha $f \in X$, legyen $f^*(v) = \langle f,v\rangle$ minden $v \in X_E$-re. Ekkor $f^* \in X_E^*$, mivel

$$\big|f^*(v)\big| \le \|f\|\|v\| \le d\|f\|\|v\|_E, \quad \text{ha} \quad v \in X_E.$$

Legyen $h(f) = f^*$. Mivel $\|f^*\| \le d\|f\|$, a $h\colon X \to X_E^*$ leképezés folytonos. Mivel $X_E$ sűrű $X$-ben, $f^* = 0$-ból $f = 0$ következik, azaz $h$ kölcsönösen egyértelmű. Azonosítva $f$-et $f^*$-gal, azt kapjuk, hogy

$$f(v) = \langle f,v\rangle, \quad \text{ha} \quad f \in X, v \in X_E.$$

A következő lépés a kiterjesztések konstrukciója és vizsgálata. Legyen $T_E$ az $X_E$ dualitás-leképezése, azaz ha $u \in X_E$, legyen $b(v) = \langle u,v\rangle_E$ minden $v \in X_E$-re, és legyen $T_E u = b$. A Riesz-tétel szerint $T_E\colon X_E \to X_E^*$ egy lineáris izometria. Az is teljesül, hogy

$$T_E u(v) = \langle u,v\rangle_E, \quad \text{ha} \quad u,v \in X_E,$$

és

$$T_E u(u) = \|u\|_E^2 \ge c\|u\|^2, \quad \text{ha} \quad u \in X_E.$$

Legyen $f \in X$. A $T_E u = f$ egyenlet ekvivalens az

$$\langle u,v\rangle_E = \langle f,v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in X_E$$

egyenlettel. A $T_E\colon X_E \to X_E^*$ operátor kiterjesztése a $T \in X \to X$ operátornak. Valóban, ha $Tu = f$, akkor

$$\langle u,v\rangle_E = \langle Tu,v\rangle = \langle f,v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in X_E,$$

így $T_E u = f$. Végül legyen $\mathrm{dmn}(T_F) = T_E^{-1}(X)$ és $T_F u = T_E u$, ha $u \in \mathrm{dmn}(T_F)$. Nyilván $T \subset T_F \subset T_E$. A $T_F^{-1} = S$ inverz operátor a $T_E^{-1}\colon X_E^* \to X_E$ izometria megszorítása, és mivel az $X_E \subset X \subset X_E^*$ beágyazások folytonosak, $S\colon X \to X_E$ és $S\colon X \to X$ folytonos. Ha az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt, akkor $S\colon X \to X$ kompakt. Megmutatjuk, hogy

$S\colon X \to X$ szimmetrikus. Legyen $f, g \in X$, $u = Sf$, $v = Sg$. Ekkor $\langle Sf, Sg\rangle_E = \langle f, Sg\rangle$. Innen $\langle f, Sg\rangle = \langle g, Sf\rangle$, azaz $S$ szimmetrikus. Mivel $\operatorname{dmn}(S) = X$, az $S\colon X \to X$ operátor önadjungált. Mivel $T_F$ az $S$ önadjungált operátor inverze, szintén önadjungált. Továbbá

$$\langle T_F u, u\rangle = \langle u, u\rangle_E \geq c\|u\|^2, \quad \text{ha} \quad u \in \operatorname{dmn}(T_F).$$

Hátra van még az utolsó állítás bizonyítása. Minden $b \in X_E^*$-ra, az

$$\frac{1}{2}\langle u, u\rangle_E - b(u) \to \min, \quad u \in X_E$$

variációs problémának egyetlen megoldása $u = T_E^{-1}b$. Valóban, ha $a = T_E^{-1}b$, akkor $b(v) = \langle a, v\rangle_E$ minden $v \in X_E$-re a $T_E$ konstrukciója szerint. Innen a variációs probléma ekvivalens az

$$\langle u - a, u - a\rangle_E \to \min, \quad u \in X_E$$

feladattal, amelynek egyetlen megoldása $u = a$. Speciálisan, ha $f \in X$ és $b(u) = \langle f, u\rangle$ minden $u \in X_E$-re, akkor $u = T_E^{-1}f = T_F^{-1}f$. Ha $T_F u = f$, akkor

$$\langle T_F u, v\rangle = \langle u, T_F v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \text{minden } u \in \operatorname{dmn}(T)\text{-re.}$$

Megfordítva, legyen $f \in X$ és $u \in X_E$ az általánosított probléma megoldása, azaz

$$\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle, \quad \text{ha} \quad v \in \operatorname{dmn}(T).$$

Mivel $\langle u, v\rangle_E = \langle f, v\rangle$, kapjuk, hogy $u = T_E^{-1}f = T_F^{-1}f$. Végül $T \subset T_F$ miatt, ha $Tu = f$, akkor $T_F u = f$. □

**14.5.5. Következmény.** *Tegyük fel, hogy $X$ végtelen dimenziós, és az $X_E \subset X$ beágyazás kompakt. Ekkor*

(1) *a $T_F \in X \to X$ operátornak megszámlálható sok $\lambda_n$ sajátértéke van;*

(2) *$T_F$ minden sajátértéke véges multiplicitású, $\lambda_n \geq c$ minden $n$-re, és $\lambda_n \to \infty$ amint $n \to \infty$;*

(3) *a sajátvektorokból képezhető teljes ortonormált rendszer $X$-ben.*

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk a Hilbert–Schmidt-tételt $T_F^{-1}$ komplexifikáltjára. Vegyük észre, hogy egy sajátvektor konjugáltja is sajátvektor, így a valós és a képzetes része is, tehát a sajátvektorok választhatók valósaknak. □

**14.5.6. Friedrichs-kiterjesztés alulról korlátos szimmetrikus operátorokra.** Tegyük fel, hogy $T \subset X \times X$ sűrűn definált szimmetrikus lineáris operátor az $X$ valós Hilbert-téren, és $T$ operátor alulról korlátos operátor, azaz van olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $\langle Tu, u\rangle \geq c\|u\|^2$ minden $u \in \operatorname{dmn}(T)$-re. A Friedrichs-kiterjesztés ekkor is definiálható, és az eredmények nagy része átvihető erre az esetre is, a következőképpen: Válasszunk olyan $c'$ konstanst, amelyre $c + c' > 0$, és tekintsük a $T' = T + c'\mathbb{I}$ operátort. Alkalmazzuk erre Friedrichs tételét, és a kapott Friedrichs-kiterjesztésből vonjunk le $c'\mathbb{I}$-t, így kapjuk a $T$ operátor $T_F$ Friedrichs-kiterjesztését. Világos, hogy a $Tu = f$ egyenlet minden megoldása megoldása a $T_F u = f$ egyenletnek, és az $\langle u, Tv\rangle = \langle f, v\rangle$ minden $v \in \operatorname{dmn}(T)$-re általánosított problémának, valamint a $T'$-höz tartozó $X_E$ energiatéren az utóbbi kettő ekvivalens. Ennek belátásához $T'$-re, $T_F'$-re és $f$ helyett $f + c'u$-ra kell alkalmazni Friedrichs tételének eredményeit. Vegyük észre, hogy ha $c'$ helyett egy másik konstanssal dolgozunk, az energiatér ugyanaz marad, más, ekvivalens normával. Így az általánosított probléma $T$-re ugyanaz marad, amiből következik, hogy $T_F$ nem függ a $c'$ választásától.

**14.5.7. Példa: Dirichlet-feladat.** A különbség trükkel az elliptikus egyenletekre vonatkozó Dirichlet-feladatban a peremfeltétel homogén peremfeltételre redukálható. Így 14.5.1 jelöléseivel, az alábbi problémát fogjuk vizsgálni:

$$G\colon Lu = f, \quad \partial G\colon u = 0.$$

Itt 14.5.3 szerint $L$ egy szimmetrikus alulról korlátos differenciáloperátor, amely $\mathbb{L}^2(G)$ egy sűrű alterén van értelmezve. Ez az operátor pozitív, ha $q > 0$, így ekkor alkalmazható Friedrichs tétele, a többi eset pedig erre az esetre visszavezethető. Az energianormára

$$\|u\|_E^2 = \int_G (p|\nabla u|^2 + qu^2).$$

Ez a norma nyilván ekvivalens az

$$u \mapsto \left( \int_G (|\nabla u|^2 + u^2) \right)^{1/2}$$

normával, bármely $p, q > 0$ esetén, mivel $p$ és $q$ alulról és felülről is korlátosak. Így az energiatér egy olyan altere $\mathbb{L}^2(G)$-nek, amely erre a normára nézve zárt. Szoboljev tételéből következni fog, hogy ez a tér a $\mathcal{H}^1$ tér egy zárt altere, a $\mathcal{H}_0^1$ tér, és a $\mathcal{H}_0^1 \subset \mathbb{L}^2$ beágyazás kompakt, így megszámlálható sok sajátérték van, mindegyiknek a rangja véges, és a sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(G)$-ben.

**14.5.8. Szoboljev-terek.** Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $m \in \mathbb{N}$. Jelölje $\mathcal{H}^m(G)$ azon $u \in \mathcal{D}'(G)$ disztribúciók terét, amelyekre $|\alpha| \leq m$ esetén $\partial^\alpha u$ reguláris disztribúció, és

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2 < \infty,$$

ahol $\| \ \|$ az $\mathbb{L}^2(G)$ tér normáját jelöli, az

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle$$

belső szorzattal, ahol $\langle ., . \rangle$ az $\mathbb{L}^2(G)$ tér belső szorzata. Nyilván $\mathcal{H}^0 = \mathbb{L}^2$. A $\mathcal{D}(G) \subset \mathcal{H}^m(G)$ halmaz lezártját $\mathcal{H}^m$-ben jelölje $\mathcal{H}_0^m(G)$. Disztribúciók konvergenciáját felhasználva, nem nehéz belátni, hogy $\mathcal{H}^m$, és így $\mathcal{H}_0^m$ is Hilbert-tér.

**14.5.9. Szoboljev beágyazási tétele.** *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$. Ekkor*

(1) *$\mathcal{C}^\infty(\overline{G})$ sűrű $\mathcal{H}^m(G)$-ben, ha $m = 0, 1, 2, \ldots$;*

(2) *a $\mathcal{H}^0(G) \supset \mathcal{H}^1(G) \supset \mathcal{H}^2(G) \supset \ldots$ beágyazások kompaktak;*

(3) *ha $m - j > n/2$, akkor $\mathcal{H}^m(G) \subset \mathcal{C}^j(\overline{G})$, azaz minden $u \in \mathcal{H}^m(G)$ függvény megváltoztatható úgy egy nullmértékű halmazon, hogy $\mathcal{C}^j(\overline{G})$-ba tartozzon, továbbá a beágyazás folytonos;*

(4) *létezik egy egyértelműen meghatározott lineáris folytonos $B\colon \mathcal{H}^1(G) \to \mathbb{L}^2(\partial G)$ „peremérték-képző” operátor úgy, hogy minden $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G})$-ra a $Bu$ függvény $\chi^{n-1}$-majdnem mindenütt megegyezik $u|_{\partial G}$-vel; $Bu = g$ (majdnem mindenütt) helyett egyszerűen azt fogjuk írni, hogy $\partial G\colon u = g$;*

(5) *$u \in \mathcal{H}_0^m(G)$ akkor és csak akkor, ha $u \in \mathcal{H}^m(G)$ és $\partial G\colon \partial^\alpha u = 0$ minden $|\alpha| < m$ esetén $(m = 1, 2, \ldots)$.*

A tétel, hivatkozásokkal, és a bizonyítás nagy része megtalálható Zeidler [63] könyvében, II. 238–251. o., 1030. o.

**14.5.10. Tétel.** *14.5.1 feltételei mellett, tegyük fel, hogy a*

$$G\colon Lu = f, \quad \partial G\colon u = 0.$$

*peremérték-problémáról van szó. Ekkor az $L$ operátor alulról korlátos és szimmetrikus $\mathbb{L}^2(G)$-ben, Friedrichs-kiterjesztésének megszámlálható végtelen sok sajátértéke van, a sajátértékek halmazának nincs torlódási pontja, és minden sajátérték véges rangú. A sajátfüggvényekből képezhető teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2(G)$-ben.*

**Bizonyítás.** Ahhoz, hogy Friedrichs tételének következményeit és Szoboljev beágyazási tételét alkalmazva megkapjuk ezt az állítást, csak azt kell megmutatnunk, hogy $L$ alulról korlátos operátor, az energianorma pedig $\mathscr{H}^1$ eredeti normájával ekvivalens. A Dirichlet-feladatra ez nyilvánvaló, mert tudjuk, hogy

$$\langle Lu, u\rangle = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 \geq c \int_G u^2,$$

ha $q \geq c$, és ha $c + c' > 0$, akkor az $L + c'\mathbb{I}$ operátorra az energianorma

$$\langle Lu + c'u, u\rangle_\varrho = \int_G p|\operatorname{grad} u|^2 + (q + c')u^2. \ \square$$

## 14.6 Vegyes feladatok

*1971-ben olvastam Fujita és Kato gyönyörű dolgozatát a kvázilineáris Navier–Stokes-egyenletről, és gyönyörű volt látni, hogy megfelelően szemlélve,* közönséges *differenciálegyenletnek néz ki, és a vizsgálata a közönséges differenciálegyenleteknél szokásos módon történik. Ez valószínűleg nem meglepetés a parciális differenciálegyenletek szakértőinek, de én közönséges és függvény-differenciálegyenletekkel foglalkoztam, és érdeklődésem, hogy parciális differenciálegyenletekről olvassak, rendszerint lelohadt a technikai nehézségek láttán.*

*Sok parciális differenciálegyenletekre vonatkozó problémát lehet Banach-térbeli közönséges differenciálegyenletként felírni nemkorlátos operátorok felhasználásával. Félcsoportok felhasználásával Volterra-integrálegyenletre áttérve, a parabolikus problémákban már nem lépnek fel nemkorlátos operátorok, és a vizsgálat teljesen hasonló a közönséges differenciálegyenletekhez. Kizárólag általánosított (gyenge) megoldásokkal dolgozunk, amelyek gyakran klasszikus megoldások is.*

*Dan Henry (1981)*

*A félcsoportok analitikus elmélete mostanában került fel a matematikai diszciplínák örökké növekvő listájára. . . . Én örülök minden félcsoportnak, amelyet látok, és mindenütt találkozom velük! A barátaim azonban megfigyelték, hogy vannak olyan matematikai objektumok is, amelyek nem félcsoportok.*

*Einar Hille (1948)*

**14.6.1. Egyparaméteres operátorseregek: Hille–Yosida-tétel.** *Legyen $H$ egy komplex Hilbert-tér, $A \in H \to H$ egy normális operátor, és $S(t) = e^{tA}$.*

(1) *Ha $A$ önadjungált és felülről korlátos a $c$ konstanssal, akkor $t \geq 0$ esetén $S(t) \in \mathcal{L}(H;H)$ és $\|S(t)\| \leq e^{ct}$, továbbá $S(0) = \mathbb{I}$ és $S(t+s) = S(t)S(s)$, ha $t, s \geq 0$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonos minden $x \in H$-ra, ha pedig $x \in \operatorname{dmn}(A)$, akkor $\mathcal{C}^1(]0,\infty[;H)$-ban van, és deriváltja $AS(t)x = S(t)Ax$, tehát kielégíti az $u' = Au$ differenciálegyenletet. A*

$$\lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{S(t)-S(0)}{t}\right)x$$

*határérték pontosan akkor létezik, ha $x \in \operatorname{dmn}(A)$, és ekkor megegyezik $Ax$-szel.*

(2) *Ha $A^* = -A$, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $S(t)$ unitér operátor, továbbá $S(0) = \mathbb{I}$ és $S(t+s) = S(t)S(s)$, ha $t, s \in \mathbb{R}$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonos minden $x \in H$-ra, ha pedig $x \in \operatorname{dmn}(A)$, akkor $\mathcal{C}^1(\mathbb{R};H)$-ban van, és deriváltja $AS(t) = S(t)A$, tehát kielégíti az $u' = Au$ differenciálegyenletet. A*

$$\lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{S(t)-S(0)}{t}\right)x$$

*határérték pontosan akkor létezik, ha $x \in \operatorname{dmn}(A)$, és ekkor megegyezik $Ax$-szel.*

Az első esetben egyparaméteres *lineáris operátor félcsoport*ról, a második esetben egyparaméteres *lineáris operátor csoport*ról beszélünk, $A$ a *generátor*.

**Bizonyítás.** (1)-hez, ha $P$ az $A$ spektrálfelbontása, akkor a spektráltételből, a spektrálintegrál tulajdonságait felhasználva,

$$\|S(t)x\|^2 = \int_{\sigma(A)} e^{2t\lambda}\, dP_x(\lambda) \leq e^{2ct}\|x\|^2$$

minden $x \in H$-ra. Az, hogy $S(0) = \mathbb{I}$, triviális. Mivel $e^{(t+s)\lambda} = e^{t\lambda}e^{s\lambda}$, a spektrálintegrál tulajdonságai szerint $S(t+s) = S(t)S(s)$. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonosságának belátásához vegyük észre, hogy adott $\varepsilon > 0$-hoz a $P_x$ mérték folytonossága szerint van olyan $b < 0$, hogy $P_x]-\infty, b[ < \varepsilon$. Ebből

$$\begin{aligned}\|S(t)x - S(s)x\|^2 &= \int_{\sigma(A)} |e^{t\lambda} - e^{s\lambda}|^2\, dP_x(\lambda)\\ &\leq \int_{]-\infty,b[} 4\, dP_x(\lambda) + \int_{[b,c]} |e^{t\lambda} - e^{s\lambda}|^2\, dP_x(\lambda)\\ &\leq 4\varepsilon + \varepsilon\|x\|^2,\end{aligned}$$

ha $t$ és $s$ elég közel vannak.

Hasonlóan bizonyítjuk $t \mapsto S(t)x$ differenciálhatóságát. Legyen

$$B(s) = \int \lambda e^{s\lambda}\, dP(\lambda).$$

Mivel $|\lambda e^{s\lambda}|^2 \le |\lambda|^2 e^{2cs}$, ha $\int |\lambda|^2 \, dP_x(\lambda) < \infty$, akkor $\int |\lambda e^{s\lambda}|^2 \, dP_x(\lambda) < \infty$ is teljesül, így a spektrálintegrál tulajdonságai szerint $\operatorname{dmn}(A) \subset \operatorname{dmn}(B(s))$. A spektrálintegrál további tulajdonságait felhasználva,

$$\operatorname{dmn}(AS(s)) = \operatorname{dmn}(S(s)) \cap \operatorname{dmn}(B(s)) = \operatorname{dmn}(B(S)) \supset \operatorname{dmn}(A).$$

Most használjuk fel a középérték-egyenlőtlenségből kapható

$$\left| \frac{e^{t\lambda} - e^{s\lambda}}{t-s} - \lambda e^{s\lambda} \right| \le \sup_{0 \le \vartheta \le 1} \left| \lambda e^{s\lambda}(e^{\vartheta(t-s)} - 1) \right|$$

becslést. A folytonosság bizonyításához hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\| \left( \frac{S(t) - S(s)}{t-s} - AS(t) \right) x \right\|^2 &= \int_{\sigma(A)} \left| \frac{e^{t\lambda} - e^{s\lambda}}{t-s} - \lambda e^{s\lambda} \right|^2 \, dP_x(\lambda) \\ &\le 4\varepsilon + \varepsilon \|x\|^2, \end{aligned}$$

ha $s, t \ge 0$ elég közel vannak. Ebből adódik, hogy $t \mapsto S(t)x$ eleget tesz a differenciálegyenletnek $x \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén. A derivált másik alakja hasonlóan adódik. Ugyancsak adódik, hogy a

$$\lim_{t \downarrow 0} \left( \frac{S(t) - S(0)}{t} \right) x$$

határérték $x \in \operatorname{dmn}(A)$ esetén létezik, és megegyezik $Ax$-szel. Definiálja a $C$ operátort a fenti határérték azokban a pontokban, amelyekben a határérték létezik. Az $\langle e^{tA}x, y \rangle = \langle x, e^{tA}y \rangle$ összefüggés mindkét oldalának jobboldali deriváltját képezve a nullában, kapjuk, hogy $C$ szimmetrikus. Mivel $C$ az $A$ szimmetrikus kiterjesztése, $C = A$.

(2) legtöbb állítása (1) megfelelő állításához hasonlóan látható be, így csak az eltéréseket ismertetjük. $A^* = -A$ pontosan akkor teljesül, ha $iA$ önadjungált, így $A$ spektruma képzetes számokból áll. Ebből következik, hogy $S(t)$ mindenütt értelmezve van, korlátos, továbbá az $e^{t\lambda}e^{-t\lambda} = 1$ összefüggésből,

$$S(t) = \int_{\sigma(A)} e^{t\lambda} \, dP(\lambda), \quad S(t)^* = \int_{\sigma(A)} e^{-t\lambda} \, dP(\lambda)$$

felhasználásával $S(t)S(t)^* = S(t)^*S(t) = \mathbb{I}$, tehát $S(t)$ unitér. A $t \mapsto S(t)x$ leképezés folytonosságának és differenciálhatóságának bizonyítása hasonló, mint (1)-ben, de a $b > 0$ értéket úgy kell választani, hogy a $-ib$ és $ib$ pontokat összekötő szakasz komplementerének $P_x$-mértéke $\varepsilon$-nál kisebb legyen. Végül az $\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle = \langle x, y \rangle$ összefüggés differenciálásából adódik, hogy $\langle Cx, y \rangle + \langle x, Cy \rangle = 0$, és ez használható $C = A$ bizonyítására. □

**14.6.2. Példa: a Schrödinger-egyenlet.** Az

(1) $$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon -i\hbar u_t - Lu = 0, \quad \mathbb{R}^n\colon u(x, 0) = u_0(x)$$

alakban írható Schrödinger-egyenletnél általában nem elég kétszer folytonosan differenciálható megoldásokra szorítkozni, s gyakran $u_0$ sem folytonos. Kiterjesztve $L$-et $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ egy önadjungált $H$ operátorává (energiaoperátor), tekinthetjük (1) helyett az

(2) $$u' = -\frac{i}{\hbar} Hu, \quad u(0) = u_0, \quad u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}))$$

Cauchy-feladatot. Az $-\frac{i}{\hbar}H$ operátor adjungáltja $(-\frac{i}{\hbar}H)^* = \frac{i}{\hbar}H$, így alkalmazható az előző tétel második fele, mely szerint (2) megoldásai

$$u(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}tH}u_0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

alakban állíthatók elő, és itt $e^{-\frac{i}{\hbar}tH}$ unitér operátorok egy egyparaméteres csoportja. Ez az összefüggés minden $u_0 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$-re értelmez egy $t \mapsto u(t)$ folytonos leképezést, amelyet az eredeti egyenlet megoldás *gyenge megoldás*ának nevezünk. A kvantummechanikában a gyenge megoldások sokkal jobban használhatók, mint (1) megoldásai. Az egyenletben szereplő imaginárius egység miatt csak komplex $\mathbb{L}^2$-tér jöhet szóba. □

Ha sajátvektorokból képezhető teljes ortonormált rendszer, akkor ko”nnyen ki tudjuk számítani normális operátorok függvényeit. A Schrödinger-egyenlet esetében a lemma azt mutatja, hogy ha létezik $L$ (vagy $H$) sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszer $\mathbb{L}^2$-ben, akkor a gyenge megoldások éppen a Fourier-módszernek ezzel az ortonormált rendszerrel való alkalmazásakor adódó megoldások.

**14.6.3. Vegyes feladat parabolikus egyenletre.** 14.2.3 jelöléseivel és feltételei mellett a parabolikus

$$H_T\colon \varrho(x)u_t - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

diffúziós egyenletet fogjuk vizsgálni, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $0 < T \leq \infty$, és $H_T = G \times ]0,T[$. Olyan $u \in \mathcal{C}^2(H_T)$ megoldásokat keresünk, amelyek eleget tesznek a

$$\overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x), \quad \partial G \times [0,T[\colon k(x)u_{\mathbf{n}}(x,t) + h(x)u(x,t) = g(x,t)$$

kezdeti, illetve peremfeltételeknek. Az $f$, $g$, $u_0$ függvényekről feltesszük, hogy folytonosak, és teljesítik a

$$\partial G\colon k(x)\langle\nabla u_0(x), \mathbf{n}(x)\rangle + h(x)u_0(x) = g(x,0)$$

feltételt.

**14.6.4. Absztrakt parabolikus egyenletek.** 14.6.3 feltételei mellett, a diffúziós egyenletet fogjuk vizsgálni, homogén peremfeltétel esetén. Feltesszük, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f \in \mathcal{C}(\overline{G} \times [0,T[)$, és $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G} \times [0,T[) \cap \mathcal{C}^2(H_T)$ megoldásokat keresünk. Megjegyezzük, hogy első peremfeltételnél az $u \in \mathcal{C}^1(\overline{G} \times [0,T[)$ feltétel nem természetes, de csak így tudjuk hatékonyan kezelni a problémát. A 14.5.1 pont jelöléseit felhasználva a problémát tömören

$$H_T\colon \varrho u_t + Lu = f, \quad \overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x), \quad u \in \mathcal{C}^2(H_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G} \times [0,T[) \tag{1}$$

alakba írhatjuk. Operátoregyenletre áttérve, a

$$]0,T[\colon u' = Au + b(t), \quad u(0) = u_0, \; u \in \mathcal{C}^1(]0,T[;\mathbb{L}^2) \cap \mathcal{C}([0,T[;\mathbb{L}^2) \tag{2}$$

egyenlethez jutunk, ahol $-A$ a $L_\varrho$ Friedrichs-kiterjesztésének komplexifikáltja, és $b(t) = f(.,t)/\varrho$. Ennek megoldásaira azt várjuk, hogy $S(t) = e^{tA}$ jelöléssel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)b(s)\,ds \tag{3}$$

alakban állnak elő. Az utóbbi összefüggéssel megadott függvényeket az eredeti egyenlet *gyenge megoldás*ainak nevezzük. A gyenge megoldások nyilván egyértelműek. A (3) megoldásban szereplő integrál szeparábilis Hilbert-tér beli függvényekre vonatkozik. Ilyen integrál definiálása egyszerű függvényekkel való közelítéssel lehetséges: lásd a [21] könyvet. A következő tételt csak megfogalmazzuk, bizonyítása ugyanott megtalálható.

**14.6.5. Parabolikus egyenlet gyenge megoldásai.** *Az előző pont és 14.2.5 jelöléseivel, (1) minden megoldására a $t \mapsto u(.,t) \in \mathbb{L}^2(\varrho)$ függvény folytonos, és eleget tesz a (2) egyenletnek. Ha $t \mapsto b(t) \in \mathbb{L}^2(\varrho)$ folytonos, akkor (2) minden megoldása gyenge megoldás is. Ha $u_0 \in \mathbb{L}^2(\varrho)$, $f \in \mathbb{L}^2(H_T)$, akkor (3) jobb oldala mindig értelmezve van, továbbá ha az $L_\varrho$ sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel, vagy a Friedrichs-kiterjesztésének sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel alkalmazzuk a Fourier-módszert, akkor a kapott sor minden $t$-re konvergens az $\mathbb{L}^2(\varrho)$ térben, és összege a (3) gyenge megoldás.* □

**14.6.6. Következmény.** *(1)-nek legfeljebb egy megoldása létezik, és a megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételtől és a jobb oldaltól az alábbi értelemben: ha $-c \le 0$ az $L_\varrho$ egy alsó korlátja,*

$$\|u_0\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)} \le \varepsilon_0 \quad \textit{és} \quad \left\|f(.,t)/\varrho\right\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)} \le \varepsilon,$$

*ha $0 \le t \le T$, akkor $\left\|u(.,t)\right\|_{\mathbb{L}^2(\varrho)} \le \varepsilon_0 e^{ct} + \varepsilon t e^{ct}$, ha $0 \le t \le T$.* □

**14.6.7. Vegyes feladat hiperbolikus egyenletre.** A 14.2.3 és pont jelöléseivel és feltételei mellett a hiperbolikus

$$H_T\colon \varrho(x)u_{tt} - \operatorname{div}_x(p(x)\operatorname{grad}_x u) + q(x)u = f(x,t)$$

egyenletet fogjuk vizsgálni, ahol $G \subset \mathbb{R}^n$ egy korlátos tartomány, $0 < T \le \infty$, és $H_T = G \times ]0,T[$. Olyan $u \in \mathcal{C}^2(H_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{G} \times [0,T[)$ megoldásokat keresünk, amelyek eleget tesznek a

$$\overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),$$
$$\partial G \times [0,T[\colon k(x)u_{\mathbf{n}}(x,t) + h(x)u(x,t) = g(x,t)$$

kezdeti, illetve peremfeltételeknek. Az $f$, $g$ és $u_1$ függvényekről feltesszük, hogy folytonosak, $u_0$-ról, hogy $\mathcal{C}^1(\overline{G})$-ban van, és hogy teljesül a

$$\partial G\colon k(x)\langle \nabla u_0(x), \mathbf{n}(x)\rangle + h(x)u_0(x) = g(x,0)$$

feltétel. Feltesszük továbbá, hogy $\partial G \in \mathcal{C}^{0,1}$, $f \in \mathcal{C}(\overline{G}\times[0,T[)$, valamint, hogy $Lu \in \mathbb{L}^2(G)$ minden $t$-re. Ez utóbbi feltétel nem természetes, de csak így tudjuk hatékonyan kezelni a problémát.

**14.6.8. Absztrakt hiperbolikus egyenletek.** A 14.6.7 pont feltételei mellett az ott leírt hiperbolikus egyenletre vonatkozó vegyes feladatot fogjuk vizsgálni, homogén első, második vagy harmadik peremfeltétel mellett. A 14.5.1 pont jelöléseit használva, feltesszük, hogy $L_\varrho$ pozitív operátor, és a problémát tömören

$$(1) \qquad H_T\colon \varrho(x)u_{tt} + Lu = f(x,t), \quad \overline{G}\colon u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)$$

alakba írjuk. Áttérve operátoregyenletre, az

$$]0,T[\colon u'' = A + f(.,t)/\varrho, \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,$$
$$u \in \mathcal{C}^2(]0,T[;\mathbb{L}^2) \cap \mathcal{C}^1([0,T[;\mathbb{L}^2)$$

problémát kapjuk, ahol $-A$ a $L_\varrho$ Friedrichs-kiterjesztésének komplexifikáltja, és $b(t) = f(.,t)/\varrho$. Alkalmazva az átviteli elvet, az

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

egyenlethez jutunk, amelyből

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad c(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

jelölésekkel azt kapjuk, hogy

$$(2) \qquad ]0,T[: w' = Cw + c(t), \quad w(0) = w_0,\ w \in \mathcal{C}^1(]0,T[;Z) \cap \mathcal{C}([0,T[;Z)$$

ahol $X = \mathbb{L}^2(\varrho;\mathbb{C})$, $X_E$ az $L_\varrho$-hoz tartozó energiatér komplexifikáltja, $Z = X_E \times X$, $w_0 \in Z$, és $\operatorname{dmn}(C) = \operatorname{dmn}(A) \times X_E$. Ennek megoldásaira azt várjuk, hogy $S(t) = e^{tC}$ jelöléssel,

$$(3) \qquad w(t) = S(t)w_0 + \int_0^t S(t-s)c(s)\,ds$$

alakban állnak elő. Az utóbbi összefüggés által előállított $w(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ függvénypárokat az eredeti egyenlet *gyenge megoldás*ainak nevezzük. A gyenge megoldások nyilván egyértelműek. Itt is szerepel a (3) megoldásban szeparábilis Hilbert-tér beli függvényekre vonatkozó integrál: lásd a [21] könyvet, ahol az alábbi tétel bizonyítása is megtalálható.

**14.6.9. Hiperbolikus egyenlet gyenge megoldásai.** *Az előző pont és 14.2.5 jelöléseivel, $C^* = -C$, és ha $c$ folytonos, akkor (2) megoldásai is gyenge megoldások. Ha $L_\varrho$ sajátfüggvényeiből képezhető teljes ortonormált rendszer, akkor (1) minden megoldására $t \mapsto \big(u(.,t), u_t(.,t)\big)$ gyenge megoldás. Ha $z_0 \in Z$ és $f \in \mathbb{L}^2(H_T)$, akkor (3) jobb oldala értelmezve van, $w(t) = \big(u(t), v(t)\big)$ folytonos, továbbá $L_\varrho$ vagy a Friedrichs-kiterjesztése sajátfüggvényeiből álló teljes ortonormált rendszerrel alkalmazva a Fourier-módszert, az $u(.,t)$-re kapott sor minden $t$-re konvergens az $X_E$ térben, a tagonként $t$ szerint differenciálással kapott sor minden $t$-re konvergens az $X$ térben, és összegük $u(t)$, illetve $v(t)$.* $\square$

**14.6.10. Megjegyzés.** Tekintsük az

$$u'' = Au + b(t), \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1$$

Cauchy-feladatot. Skalár egyenlet esetén, az alaprendszer

$$\cos(tA^{1/2}), \quad \sin(tA^{1/2}).$$

A $v(t) = u'(t)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(tA^{1/2})u_0 + A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})v_0 \\ &\quad + \int_0^t A^{-1/2}\sin((t-s)A^{1/2})b(s)\,ds, \\ v(t) &= -A^{1/2}\sin(tA^{1/2})u_0 + \cos(tA^{1/2})v_0 \\ &\quad + \int_0^t \cos((t-s)A^{1/2})b(s)\,ds. \end{aligned}$$

(3) megfelel ennek, mert az előző tétel szerint

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos(tA^{1/2}) & A^{-1/2}\sin(tA^{1/2}) \\ -A^{1/2}\sin(tA^{1/2}) & \cos(tA^{1/2}) \end{pmatrix}.$$

**14.6.11. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a diffúziós egyenletre vonatkozó vegyes feladatnál egyparaméteres operátor félcsoport adódik, míg az hiperbolikus egyenletek, illetve a Schrödinger-egyenlet esetében egyparaméteres operátor csoport. Ennek fizikai oka az, hogy a diffúziós folyamatok irreverzibilisek, míg a rezgések, illetve a kvantumfolyamatok — amíg megfigyelés nem történik — reverzibilisek. Az irreverzibilis folyamatok nem írhatók le $u' = Au$ alakú egyenletekkel, ahol $A$ korlátos, például közönséges lineáris differenciálegyenletekkel. A fizika differenciálegyenleteit, elsősorban a parciális differenciálegyenleteket túl erős, nem reális regularitási feltételek mellett nyerjük, ezért a fizikai folyamatokat a gyenge megoldások jobban leírják, mint a megoldások. Ez azt mutatja, hogy az egyparaméteres operátor csoportok és félcsoportok vizsgálata fontosabb, mint a differenciálegyenleteké. Ezért nem is foglalkozunk a megoldások létezésének technikailag bonyolult kérdéseivel. Ezekre egy regularitási elmélet ad választ, hasonlóan az elliptikus egyenletekhez, amelynek keretében megmutatják, hogy ha a kezdeti- és peremfeltételekben, valamint az egyenlet jobb oldalán szereplő függvények és a tartomány határa „elég simák”, akkor a gyenge megoldások is „elég simák”, és így megoldások is.

**14.6.12. Feladat [12].** Határozzuk meg egy végtelen hosszú, $R$ sugarú henger belsejében a hőmérsékleteloszlást a következő esetekben:

(1) a henger felületén nulla hőmérsékletet tartunk fenn, a henger belsejében pedig a kezdeti hőmérsékleteloszlás csak a tengelytől való $r$ távolságtól függ, értéke $AJ_0(\mu r/R)$, ahol $\mu$ a $J_0(\mu) = 0$ egyenlet egy gyöke;

(2) a henger felületén állandó hőmérsékletet tartunk fenn, a henger belsejében pedig a kezdeti hőmérséklet nulla;

(3) a henger felülete hőt ad át a környező nulla hőmérsékletű közegnek, a kezdeti hőmérséklet csak a tengelytől való távolságtól függ.

**14.6.13. Feladat [12].** Oldjuk meg az

$$u_t = u_{xx} + u_x/x - u/x^2 + f(t)J_1(\mu_k x)$$

vegyes feladatot, ahol $\mu_k$ a $J_1(\mu) = 0$ egyenlet egyik pozitív gyöke, $u(0,t)$ korlátos, $u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, ha $f(t) = \sin t$, illetve ha $f(t) = e^{-t}$.

**14.6.14. Feladat [13].** Határozzuk meg egy kör alakú, $R$ sugarú membrán szabad rezgését a következő esetekben:

(1) a kezdeti kitérés $J_0(\mu_k r/R)$, ahol $\mu_k$ a $J_0$ Bessel-függvény egy pozitív gyöke, a kezdeti sebesség nulla;

(2) a kezdeti kitérés és sebesség csak $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvénye;

(3) a kezdeti kitérés forgási paraboloid alakú, a kezdeti sebesség pedig nulla.

**14.6.15. Feladat [13].** Egy súlyos, homogén fonal egyik végénél van felfüggesztve. A fonalat kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, és kezdősebesség nélkül elengedjük. Vizsgáljuk a nehézségi erő hatására bekövetkező kis rezgéseket.

**14.6.16. Feladat [13].** Egy súlyos, homogén fonal egyik végénél tengelyhez van erősítve. A tengelyt állandó szögsebességgel forgatjuk. Határozzuk meg tetszőleges kezdeti feltételek mellett a függőleges egyensúlyi helyzet körüli kis rezgéseket.

# Irodalom


[1] Arnold, V. I.: *Közönséges differenciálegyenletek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[2] Budó Á.: *Kísérleti fizika I–III.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[3] Dieudonné, J., *Grundzüge der modernen Analysis I–IX.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971–1988.

[4] Dieudonné, J.: *History of Functional Analysis.* North-Holland Publishing Company, 1981.

[5] Eukleidész: *Elemek.* Gondolat, Budapest, 1983.

[6] Evans, L. C.:: *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[7] Federer, H.: *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1969.

[8] Feynman, R. P. – Leighton, R. B. – Sands, M.: *Mai fizika I–X.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

[9] Frank, Ph. – Mises, R. E.: *A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I–II.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966–1967.

[10] Gelfand, I. M.: *Előadások a lineáris algebrából.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

[11] Geszti, Tamás: *Kvantummechanika.* TypoTeX, Budapest, 2007.

[12] Gjunter, N. M. – Kuzmin, R. O.: *Felsőbb matematikai példatár I–III.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

[13] Gyemidovics, B. P.: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[14] Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[15] Halmos P. R.: *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.

[16] Halmos P. R.: *Elemi halmazelmélet.* Sigler, L. E.: *Halmazelméleti feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[17] Hewitt, E. – Stromberg, K. R.: *Real and abstract analysis.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1965.

[18] Hörmander, H.: *The Analysis of Linear Partial Differencial Operators I–IV.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokio, 1983.

[19] Járai A.: *Mérték és integrál.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.

[20] Járai A.: *Bevezetés a matematikába.* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2006.

[21] Járai A.: *Modern alkalmazott analízis.* TypoTEX, Budapest, 2007.

[22] Járai A.: *Kalkulus.* Eötvös Kiadó, Budapest, 2013.

[23] Jegorov, I. P.: *Geometria.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[24] Kirillov, A. A. – Gvisiani, A. D.: *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[25] Kolmogorov, A. N.: *A valószínűségszámítás alapfogalmai.* Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1982.

[26] Kuros, A. G.: *Felsőbb algebra.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.

[27] Kurzweil, J.: *Nichtabsolut konvergente Integrale.* Teubner, 1980.

[28] Laczkovich M.: *Valós függvénytan.* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1995.

[29] Laczkovich M.: *Sejtés és Bizonyítás.* TypoTEX, Budapest, 1998.

[30] Laczkovich M. – T. Sós V.: *Analízis I.–II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005–2007.

[31] Landau, L. D. – Lifsic, E. M.: *Elméleti fizika I–X.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1973.

[32] Landau, E.: *Grundlagen der Analysis.* Chelsea Publishing Company Inc., New York, 1948.

[33] Mansfield, D. E. – Thomson,D. – Bruckheimer, M.: *Matematika új felfogásban I–IV.* Gondolat, Budapest, 1972.

[34] Meszéna Gy., Ziermann M., *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[35] Mikusiński, J.: *Operátorszámítás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.

[36] Morgan, F.: *Geometric measure theory. A beginner's guide.* Academic Press, 1988.

[37] Neumann J.: *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[38] Pál J. – Schipp F. – Simon P.: *Analízis II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1991. J3-960.

[39] Páles Zs.: *Feltételes szélsőértékszámítás.* Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1989.

[40] Penrose R.: *Road to Reality.* .pdf fájl, letölthető.

[41] Péter R.: *Játék a végtelennel.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.

[42] Petruska Gy.: *Komplex függvénytan. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1986. J3-1288.

[43] Pólya Gy.: *Matematikai módszerek a természettudományokban.* Gondolat, Budapest, 1984.

[44] Pontrjagin, L. Sz.: *Közönséges differenciálegyenletek.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[45] Harold arold Potter, Murray Harold (1918–2008)Potter, M. H. – Morrey, C. B.: *A first course in real analysis.* Springer, 1977.

[46] Rényi A.: *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[47] Reed, M. – Simon, B..: *Methods of Modern Mathematical Physics I–IV.* Academic Press, 1972–1979.

[48] Richtmeyer, R.: *Principles of advanced mathematical physics I–II.* Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1978, 1981.

[49] Riesz F. – Szőkefalvi-Nagy B.: *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[50] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[51] Rudin, W., *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

[52] Safarevics, I. R.: *Algebra.* Typotex Kiadó, Budapest, 2000.

[53] Szidarovszky F.: *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.

[54] Szőkefalvi-Nagy B.: *Komplex függvénytan. Egységes jegyzet. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1971. J3-434.

[55] Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R.: *Thomas-féle Kalkulus I–III.* Typotex, Budapest, 2006–2007.

[56] Triebel, H.: *Höhere Analysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[57] Triebel, H.: *Analysis und mathematische Physik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.

[58] Vlagyimirov, V. Sz.: *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[59] Vlagyimirov, V. Sz.: *Parciális differenciálegyenletek feladatgyűjtemény.* Műszaki Könyvkiadó, 1980.

[60] van der Waerden, B. L.: *Moderne Algebra I.–II.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1959.

[61] van der Waerden, B. L.: *Group Theory and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1974.

[62] van der Waerden, B. L.: *Egy tudomány ébredése.* Gondolat, Budapest, 1977.

[63] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its Application, I–IV.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[64] Zeidler, E.: *Applied Functional analysis. Applications to Mathematical Physics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[65] Zeidler, E.: *Applied Functional analysis. Main Principles and Their Applications.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[66] Zeidler, E.: *Quantum Field Theory, I–III.* Springer-Verlag, 2009.

[67] Zwillinger, D.: *Handbook of differential equations.* Academic Press, Boston – San Diego – New York – Berkeley – London – Sydney – Tokyo – Toronto, 1989.

# Mutató