

Kedvenc Kísérleteim

Fizika

Járai Antal
Kedvenc Kísérleteim
Fizika

© Járai Antal

A mű más kiadványban való részleges vagy teljes felhasználása, utánközlése, illetve sokszorosítása tilos!

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	7
1. MECHANIKA	11
1.1. Hosszúság, terület, térfogat	11
1.2. Mozgás	28
1.3. Erő és tömeg	42
1.4. Lendület és energia	59
1.5. Merev testek	60
1.6. Szilárd testek	61
1.7. Folyadékok és gázok	62
1.8. Áramlás	84
1.9. Hullámok	84
1.10. Hangtan	85
2. HŐTAN	87
2.1. Hő	87
2.2. Hőmérők	97
2.3. Gőznyomás	119
2.4. Gőzgépek, gázgépek, örökmozgók	133
2.5. Oldatok	141
2.6. Lepárlás	170
2.8. Hő és kémia	190
3. ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG	205
3.1. Elektromosság	205
3.2. Mágnesség	225
3.3. Áram	232
3.4. Áram és kémia	278
3.5. Indukció	295
3.6. Váltóáram	296
3.7. Elektromágneses hullámok	297
4. OPTIKA	298
4.1. Visszaverődés és törés	298

4.2. Képképzés	298
4.3. Szín	298
4.4. A fény mint hullám	298
5. ATOMFIZIKA	301
5.1. Atomok	301
5.2. A periódusos rendszer	309
5.3. Kvantummechanika	309
5.4. Szilárdtestfizika	309
5.5. Magfizika	322
6. TÁBLÁZATOK	323
IRODALOM	327
MUTATÓ	331

BEVEZETÉS

Nem számít, milyen okos vagy, nem számít, milyen szép az elméleted. Ha a kísérletek nem igazolják, rossz.

Richard P. Feynman

A kísérletezésről

Ez a könyv elsősorban a tizenéves korosztálynak szól. A benne leírt kísérleteket egyszerű, magunk fabrikálta eszközökkel, egyszerű, sokszor a hulladékból „megmentett” anyagokkal végezhetjük el, de sokkal közvetlenebb tapasztalatokat szerezhethetünk általuk, mint a távolról, esetleg a TV-ben látott és gondosan előkészített kísérletekből. Nagyon sok kísérletet egyedül, otthoni anyagokkal is el lehet végezni, de azért ne titokban dolgozzatok! Ha nem boldogultok, kérjetek tanácsot, segítséget! Minden kísérletet kipróbáltam, sokhoz fénykép, esetleg video is van, azonban a személyes tapasztalat mindig többet ér, mintha csak mások kísérleteit nézzük végig. Bizonyára sokan szeretnének új dolgokat felfedezni, vagy látványos kísérletekkel elkápráztatni barátait. TŰRELEM! Az otthoni kísérletezés célja, hogy közvetlen tapasztalatból ismerjük meg a természet törvényeit. Eközben adódnak látványos kísérletek is. Az új felfedezéseket hagyjuk későbbre, amikor már biztos és részletes ismereteink lesznek.

Hét éves voltam, amikor Verne könyvét, a „Rejtelmes sziget”-et olvastam, és ez örökre eljegyzett a tudományokkal. Elsősorban a nitroglicerin készítése nyűgözött le. (Verne leírása meglehetősen pontos.) Volt otthon néhány ismeretterjesztő könyv, Öveges „Kis fizika” című könyve, Bragg „Az elektromosság diadalútja” című könyve, Sztrókay Kálmán kísérletekről szóló könyvei, Perelman-könyvek. Jó darabig a kémia vonzott a legjobban, bár olvastam fizikát, csillagászatot, matematikát és mindenféle műszaki dolgot is (meg általában mindent, amihez hozzáfértem). Természetes volt, hogy a debreceni Vegyipari Technikumba mentem középiskolába. Abban a reményben írom ezt a könyvet, hogy — négy évtizedes egyetemi oktatás után — az általános iskolásoknak és középiskolásoknak is sikerül valamit továbbadnom abból, amit én kaptam a „népszerűsítő” könyvek szerzőitől

és tanáraitól. Bár fizikából sok jó kísérletező könyv van, talán ebben is talál néhány érdekességet az Olvasó. Elsősorban az egyszerűsége törekedtem. Általában a lomtárban talált, a konyhából leselejtezett vagy egyenesen a hulladékból megmentett eszközökkel fogunk dolgozni, legfeljebb néhány kémcsőre lesz még szükségünk.

A természet- és műszaki tudományok akkor indultak fejlődésnek, amikor felismerték, hogy *kísérletezni* kell. Ki kell próbálni dolgokat, csak így juthatunk ismeretekhez. Aztán, ha felismerünk valamilyen törvényszerűséget, újabb kísérleteket tervezhetünk az ellenőrzésére. Ha igaznak bizonyul, megtartjuk, ha nem, elvetjük, vagy pontosabb összefüggést keresünk. „A kísérlet az elmélet nélkül vak, az elmélet a kísérlet nélkül üres szellemi játék.” Sok összefüggés csak közelítőleg igaz, ilyenkor tudnunk kell, milyen pontossággal. Minden tudományos igazság kizárólagos próbaköve a kísérlet! Minden kísérlet kérdés a természethez, de csak értelmes kérdésre kapunk értelmes választ. Éppen az a célunk, hogy megtanuljunk az értelmes kérdezés művészetét. Közben sok mindent mélyebben megértünk és sok adatot is megjegyzünk. AZ ELSŐDLEGES CÉL A MEGÉRTÉS.

Mielőtt elvégezzünk egy kísérletet, gondosan olvassuk el a leírását. Hiánytalanul gyűjtjük össze a hozzávalókat, hogy ne közben kelljen kapkodni. Sok kísérletekkel foglalkozó könyv a leírás elején összefoglalja a hozzávalókat. Ezt direkt nem tettem, mert szerintem csak arra csábít, hogy ne olvassuk el előre a leírást. A kísérlet leírásának végét □ jelzi. Nem kell a kísérleteket sorban elvégezni. Sokszor előfordul, hogy valami hiányzik, esetleg egyszerűen túl bonyolultnak találjuk a kísérletet, vagy nincs elég időnk rá. Ilyenkor meglegszünk a leírással, és ha sikerül beszerezni az eszközöket, anyagokat, van időnk, kedvünk, akkor visszatérünk rá. A könyv első olvasásra kihagyható, nehezebb részei * és * jelek között vannak, a még nehezebbek ** és ** között. Bátran válthatunk a fejezetek között is. Akár az utolsó fejezettel is kezdetjük az olvasást. Persze, előfordulhat, hogy valami olyanba ütközünk, amit még nem ismerünk. Ilyenkor vissza kell térnünk egy előző fejezethez. Azt hiszem, az abszolút minimum, amit elég elvégezni, tíz kísérletből egy. Ajánlatos a kísérletek harmadát-felét megcsinálni. Az elméleti magyarázatoknál is nyilván előfordulhat, hogy nem értünk valamit. Nem probléma, nem fogunk felelni belőle. Ilyenkor legjobb átfutni, hogy lássuk, mire is megy ki a dolog. Később majd visszatérhetünk rá, amikor már többet tudunk. Az ember nem mindig egyből érti meg a dolgokat. Hogy ezt a visszatérést megkönnyítsük — ismeretterjesztő könyveknél szokatlanul — a könyvhöz van mutató. Itt betűrendbe felsorolom a fogalmakat, neveket az oldalszámokkal, ahol előfordulnak. A legfontosabb oldalszám, ahol elmagyarázzuk a dolgot, *dőlt* betűvel van megadva. Így felesleges mindent többször elismételni. Ha valami olyannal találkozunk, amit kihagytunk, vagy már elfelejtettünk, könnyen megtalálhatjuk a magyarázatot. Ugyancsak megadom a könyv végén, hogy milyen könyveket használtam fel, még akkor is, ha nem magyar nyelvűek. A pontos hivatkozást azonban, hogy mit honnan vettem, nem adom meg, ez ismeretterjesztő könyveknél nem is szokás. Táblázatok is vannak a könyv végén különböző adatokkal, hogy ne kelljen más könyvekben illetve a világhálón keresgélni.

Nem árt, ha *laboratóriumi jegyzőkönyvet* vezetünk. Ez egyszerűen egy iskolai füzet, amibe golyóstollal leírjuk a kísérleteket, azonnal felírjuk a mért adatokat. Olyat szoktak

választani, hogy ne lehessen feltűnés nélkül lapokat kiszedni vagy beletenni. Egy-egy kísérletre egy oldalt vagy két egymás melletti oldalt szánunk. Az oldal szélére írjunk dátumot. Egy mondat, vagy a cím megadja, hogy mi a feladat. Leírjuk, hogy mit tervezünk, vagy megadjuk, hogy honnan vettük a kísérletet, esetleg, hogy min alapul. Felírjuk a méréseket, észleléseket, bonyolultabb esetben lerajzoljuk a készüléket. Ha esetleg valamit hibásan írtunk fel, ne próbáljuk meg kiradírozni vagy átírni, mert egy idő után nem lehet tudni, melyik volt a helyes: egyszerűen húzzuk át, és írjuk fel újra. Végül rövid összegzés jöhet, esetleg további tervek, ötletek, módosítási javaslatok. Ha ezeket később kipróbáljuk, hozzáírhatjuk az eredeti kísérlethez, megadva az újabb dátumot. Ezért ne sajnáljuk, ha néhány sor üresen marad. Nem kell regényt írni! Egyetlen alapelv van: hogy később is meg tudjuk mondani, mi történt. Még akinek nagyon jó a memóriája, az is meglepődik, ha néhány hónap vagy pláne év múlva beleolvas a saját kísérleti jegyzőkönyvébe.

Mivel foglalkozik a fizika? A biológia az élőlényekkel foglalkozik, a geológia az ásványokkal és kőzetekkel. De mivel foglalkozik a fizika? Talán a fizikára használt régi kifejezés adja ezt meg a legpontosabban: természetfilozófia. Mindennel, ami a természetre vonatkozik, de az idők során néhány dolog kikerült a fizika köréből, a biológia és a geológia mellett elsősorban a kémia. Miért? Elsősorban azért, mert saját, speciális módszerekkel dolgoznak. A természet nem ismer ilyet hogy fizika meg kémia, csak mi osztottuk fel a dolgokat. Ha valaki azt mondaná hogy ragasztóval összeragasztott két fadarabot, ez most fizikai vagy kémiai folyamat, vissza kellene kérdeznem, hogy milyen ragasztót használt? Hogy a különbséget a két témakör között megértjük, tudnunk kell, hogy az anyag atomokból áll. Ez az emberiség talán legnagyobb felfedezése. Olyan állandóan mozgó kis részecskékből, amelyek vonzzák egymást, ha kis távolságra vannak, és taszítják egymást, ha egymásba préselik őket. Ha két komponensű, epoxigyanta ragasztót használunk, az atomok összekapcsolódása megváltozik. Az ilyen folyamatokat tekintjük kémiai folyamatoknak. Ha enyvvvel vagy csirizzel (vízben főzött liszttel) ragasztunk, akkor nincs kémiai változás. Van azért egy nagy része a fizikának, ami a vegyészeknek fontos, és fizikai kémia néven szokták tárgyalni. Ne lepődjünk meg tehát, ha sok olyan kísérlettel találkozunk, ami ezen sorozat kémia részében is előfordul. Ne feledjük, hogy csak mi osztottuk fel a jelenségeket „fizikára” meg „kémiára”. Tulajdonképpen azokkal a legalapvetőbb jelenségekkel foglalkozunk, amiket az emberiség a XVII. századtól kezdve értett meg.

Feltétlenül betartandó biztonsági szabályok:

Minden vegyi anyagot, ami a kezetekbe kerül, kivétel nélkül tekintsetek mérgezőnek, marónak, veszedelmesnek és óvatosan bánjatok vele! Semmi esetre se kóstolgassatok vegyszereket! Egészen ártalmatlannak látszó anyagok, mint például műtrágyák is mérgezőek már 1–2 dekagrammos mennyiségben is! A veszélyes eszközöket és a vegyszereket zárt helyen, különösen kis gyerekektől elzárva kell tartani! A rendetlenség, kapkodás, dobálás, szaladgálás, játék veszélyes, tartsatok rendet! Tartsátok be az előírásokat! Csak olyan kísérletet végezzetek, aminek előre tudjátok az eredményét. Az ismeretlen eredményű kísérletek elvégzését hagyjuk a kutatókra, akik még ilyen esetekben is nagyjából tudják, mi történhet. Végül a tűzveszély. Ez általában nem nagyobb, mint a konyhában, ahol néha szintén nyílt lánggal dolgozunk. A hosszú haját össze kell kötni! Vízrel a

legtöbb tűz eloltható. Vizes ronggyal leborítva olyan tüzek is elolthatók, amelyek vízzel nem. Például benzin nem oltható vízzel, mert feljön a tetejére és tovább ég. Ilyenkor kell a vizes rongy.

Budapest, 2019. február 25.

Járai Antal

1. MECHANIKA

1.1. Hosszúság, terület, térfogat

1.1.1. Kísérlet. A hosszúság mértékegységének eleinte az emberi testhez igazodó egységeket választottak, például a hüvelyk a hüvelykujj szélessége, a láb egy csizmatalp hossza, az öl a kitárt karjainknál az ujjhegyek távolsága. Persze, mindenütt mást értettek ezeken. Később megpróbálták legalább ezeket összehangolni, például az egykori Ausztria-Magyarországon (és az USA-ban ma is) használt egységeknél egy öl 6 láb, egy láb 12 hüvelyk, egy hüvelyk pedig 12 vonás (és az USA-ban a yard 3 láb). 1799-ben Franciaországban szakítottak ezzel a hagyománnyal, az északi sark és az egyenlítő közötti távolság tízmilliomod részét vették, ez lett a méter. Lényegében ma is ezt használjuk. A kisebb és nagyobb egységeket is ebből vezették le, a tízes számrendszer alapján, és minden más egységet is igyekeztek a méterhez igazítani. A régi értékeket átszámolták méterre: 1 osztrák-magyar öl pontosan 1,896483 méter, a fele 0,9482415 méter, míg az USA-yard pontosan 0,91440183 méter, az angol yard egy kicsit kisebb, stb. Ma sem árt azonban, ha tudjuk hüvelykujjunk szélességét, araszunk (kifeszített kezünkön a hüvelykujj és a kisujj hegyének távolsága) és ölünk hosszát, magasságunkat, persze méterben, így mindig van nálunk „mérőeszköz”. MÉRJÜK MEG ÉS JEGYEZZÜK MEG! □

Bár ma mindent méterben mérünk, kényelmetlen lenne például egy csillag távolságát méterben leírni. A kisebb és nagyobb egységek nevével az alapegység neve elé minden mértékegységnél az alábbi táblázatban látható szócska jön.

Tehát például a kilométer 1000 méter, azaz $1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$. A fény egy másodperc alatt 299 792 458 métert tesz meg (a méter új definíciója szerint). A Hold távolsága (átlagosan) 380 000 km, azaz 380 Megaméter, rövidítve 380 Mm. A Napé 150 millió kilométer, azaz 150 Gigaméter, rövidítve 150 Gm (ezt a távolságot nevezik a csillagászok csillagászati egységnek). A legtávolabbi bolygó, a Neptunusz 4,5 Tm-re van a Naptól. A legközelebbi csillag 4,24 fényév, azaz mivel 1 fényév kb. 9,46073 Pm, mintegy 40 Pm távolságra van. A Tejútrendszer átmérője 946 Em, a belátható legnagyobb távolság pedig 130 Ym. Kisebb távolságokra áttérve $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$. A szabad szemmel látható legkisebb részletek nagyságrendje $0,1 \text{ mm} = 100 \mu\text{m}$, a fénymikroszkóppal láthatóak ennél körülbelül ezerszer kisebbek, $0,1 \mu\text{m} = 100 \text{ nm}$ nagyságrendűek, az elektronmikroszkóppal láthatóak ennél is tízszer-százszor, az atomok mérete pedig ezerszer kisebb, 100 pm nagyságrendű,

előtag	jel	hányszoros	név	10-hatvány
Yotta-	Y	1 000 000 000 000 000 000 000 000	quadrillió	10^{24}
Zetta-	Z	1 000 000 000 000 000 000 000	trilliárd	10^{21}
Exa-	E	1 000 000 000 000 000 000	trillió	10^{18}
Peta-	P	1 000 000 000 000 000	billiárd	10^{15}
Tera-	T	1 000 000 000 000	billió	10^{12}
Giga-	G	1 000 000 000	milliárd	10^9
Mega-	M	1 000 000	millió	10^6
kilo-	k	1000	ezer	10^3
hekto-	h	100	száz	10^2
deka-	da	10	tíz	10^1
–	–	1	egy	10^0
deci-	d	0,1	tized	10^{-1}
centi-	c	0,01	század	10^{-2}
milli-	m	0,001	ezred	10^{-3}
mikro-	μ	0,000 001	milliomod	10^{-6}
nano-	n	0,000 000 001	milliárdod	10^{-9}
piko-	p	0,000 000 000 001	billiomod	10^{-12}
femto-	f	0,000 000 000 000 001	billiárdod	10^{-15}
atto-	a	0,000 000 000 000 000 001	trilliomod	10^{-18}
zepto-	z	0,000 000 000 000 000 000 001	trilliárdod	10^{-21}
yocto-	y	0,000 000 000 000 000 000 000 001	quadrilliomod	10^{-24}

végül az atommagok méretének nagyságrendje 1 fm. Biztosan nagyon furcsának tűnik, hogy a deka rövidítésére a da használatos, nem a dk, de hát a szabvány ezt írja elő.

Az előbb használtam a nagyságrend fogalmát. Erről érdemes beszélnünk, mert sokan nem tudják, mi az. Azonos nagyságrendű azt jelenti, hogy nagyon durván egyforma, legfeljebb néhányszor (két-háromszor, esetleg négyszer) nagyobb vagy kisebb. Egy nagyságrenddel nagyobb azt jelenti, hogy nagyon durván a tízszerese, két nagyságrenddel nagyobb azt jelenti hogy nagyon durván a százszorosa, stb. Sokszor mondják hibásan hogy nagyságrendekkel nagyobb valami a másiknál, ha csak néhányszor nagyobb, pedig ez azt jelenti, hogy legalább a százszorosa–ezerszerese.

Táblázatunk utolsó előtti oszlopához csak annyit jegyzünk meg, hogy bár a nagy számok nevei tovább is folytatódnak, ezek ritkán használatosak. Más országokban a nagy számok nevei másként használatosak. Sokkal titokzatosabbnak látszik a táblázat utolsó oszlopa. A száz mellett például az áll, hogy 10^2 . Ez azt jelenti, hogy $100 = 10 \cdot 10$, azaz két tizedet kell összeszoroznunk, hogy 100-at kapjunk. Hasonlóan $1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$, azaz három tizedet kell összeszoroznunk és $1\ 000\ 000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6$, azaz hat tizedet kell összeszoroznunk. Nyilván ez a jelölés sokkal rövidebb. Más esetekben is használjuk, például 2^{10} azt jelenti, hogy 10 darab 2-est kell összeszoroznunk, ez 1024, vagy akár $3,14^{12}$, ez $\approx 918\ 662,0518$. Az ilyen kifejezéseket *hatványnak* nevezzük, az utób-

biban például 3,14 az *alap*, a 12 pedig a *kitevő*. Sok zsebszámológép tud hatványozni, és használja a 10 hatványaira a hatvány jelölést. A rövideg mellett további előnye a hatvány jelölésnek, hogy egyforma alapú hatványokat könnyű összeszorozni illetve elosztani egymással. Például $10^6 \cdot 10^3 = 10^9$, mert mindkét oldal azt jelenti, hogy összesen 9 darab 10-est kell összeszorozni. Tehát egyforma alapú hatványok összeszorozásakor a kitevők összeadódnak. Másrészt $10^6/10^4 = 10^2$, mert ha 6 darab 10-es szorzatát osztjuk 4 darab 10-es szorzatával, akkor 4 darab 10-essel lehet egyszerűsíteni, így végül 2 darab 10-es szorzata marad. Tehát egyforma alapú hatványok osztásakor a kitevők kivonódnak. Így például $10^3/10^2 = 10 = 10^1$, azaz 10^1 úgy értendő, hogy 10. Ha következetesen akarunk maradni, akkor például $10^3/10^3 = 10^0$, másrészt viszont a hányados nyilván 1, így $10^0 = 1$. Mi lesz 10^{-2} ? Megint, ha következetesen akarunk maradni, akkor például egyrészt $10^3/10^5 = 10^{-2}$, másrészt a hányados egyszerűsítés után $1/100 = 1/10^2$, azaz a -2 kitevős hatvány 1 osztva a 2 kitevős hatvánnyal, azaz a 2 kitevős hatvány *reciproka*. Ha így értjük a nulla, illetve negatív kitevős hatványokat, akkor ezekre is érvényben marad az a szabály, hogy egyforma alapú hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak, osztásakor pedig kivonódnak. Még egy hasznos szabály, hogy ha egy hatványt hatványozunk, akkor a kitevők összeszorozódnak, például $(3,14^3)^4 = 3,14^{12}$, hiszen $(3,14^3)^4$ egy olyan szorzat, amelynek mind a 4 tényezője 3 darab 3,14 szorzata, azaz összesen $3 \cdot 4 = 12$ darab egyforma tényezőt kell összeszorozni.

1.1.2. Kísérlet. A fizikusnak lépten-nyomon szüksége van rá, hogy valamilyen beosztásnál a beosztás tized részeit becsülje. Ezt némi gyakorlással megtanulhatjuk. A 1.1.1. fénykép mutatja, hogyan: a milliméter skálát letakarva, csak a centiméter skálát nézve, becsüljük a millimétereket, majd ellenőrizzük, hogy sikerült a becslésünk. Néhány becslést és az ellenőrzését a lapra írtam.

Hosszúságot milliméter beosztású vonalzóval, mérőszalaggal tudunk mérni. Tizedmilliméterek becslésekor nem árt ha kézi nagyítót, idegen szóval *lupét* használunk. A jó lupe több lencséből van összerakva, kettőből vagy háromból, és nem az átmérője számít, hanem hogy egészen a szemünkhöz tartva 2–3 cm-ről nézhessük, amit nagyítva akarunk látni és így jó képet adjon. A hatalmas kézi nagyítók legtöbbször használhatatlan. Az 1.1.1. fényképen geológusok, ékszerészek által apró kristályok nézegetésére használt tízszeres nagyítású lupét láthatunk. Pontosan erre fog kelleni nekünk is, hogy apró dolgokat, finom beosztást nézzünk vele. Kiválóan megfelel egy már nem használt fényképezőgép lencséje, esetleg távcső, mikroszkóp szemlencséje is. □

A becslést rendkívül megkönnyíti egy apró trükk. A milliméterbeosztás alá egy másik beosztást is raknak, amelynek 10 vonala 0,1 milliméterrel közelebb van egymáshoz, mint a milliméterskála vonalai. Ez a segédskála a *nóniusz*. Így ha például a nóniusz negyedik vonala esik egybe egy millimétervonalal, akkor 0,4 millimétert kell hozzáadni az egész milliméterekhez. Van, ahol a segédskála 20 vagy akár 50 részre van osztva. Az 1.1.2. fényképen egy tolómérő látható 20 részre osztott segédskálával. A leolvasás 19,80 mm. Ma már készülnek olyan tolómérők is, amelyek számmal írják ki a mért hosszt. Jó ha van kéznél egy tolómérő, de a tizedrészek becslését mindenképp érdemes megtanulni, és ezzel is jól elboldogulhatunk. A becsült jegyet mindig oda szoktuk írni a mért adat végére, ezzel a mérés pontosságát is jelezzük: az utolsó jegy bizonytalan, a többi biztos.

1.1.3. Kísérlet. Tegyük fel, hogy két, majdnem egyforma hosszú rúd hosszának a különbségét szeretnénk tudni. Nem jó gondolat megmérni a hosszukat külön-külön, majd az egyikből kivonni a másikat. Sokkal jobb, ha egymás mellé állítjuk a kettőt, és közvetlenül a különbséget mérjük. Ha például az első rúd 1012 mm, a második 981 mm, akkor ha a külön-külön mért hosszaknál csak 1–1 mm-t tévedünk, lehet, hogy a különbség hibája 2 mm lesz. A két rudat egymás mellé állítva, a hosszuk különbségét könnyen megmérhetjük 0,1 mm hibával. Próbáljuk ki! Ha csak lehet, kerüljük tehát az olyan méréseket, amelyeknél két majdnem egyforma mért érték különbsége adja az eredményt. \square

1.1.4. Kísérlet. ** Ha a hosszt mérőeszközünkről csak 0,1 mm pontossággal tudjuk leolvasni, tudunk-e vele 0,01 mm hibával mérni? Első pillantásra ez lehetetlennek tűnik, mégis lehetséges. Legyen a mérendő mennyiség x , és mérjük meg 100-szor, például 100 ember, mindegyik más mérőeszkőzzel. Adjuk össze a mért értékeket, és az összeget osszuk el 100-zal. Mennyi ennek a hibája? Ha az első ember x_1 -et mért, akkor a mért és a valódi érték különbsége, idegen szóval *differenciája* $d_1 = x_1 - x$, stb. a századik emberre $d_{100} = x_{100} - x$. Ha a mért értékeket összeadjuk, és az összeget elosztjuk 100-zal, egy \bar{x} (olvasd: x átlag) mennyiséget kapunk, ami

$$\bar{x} = x + \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{100}}{100}.$$

Várható, hogy a hibák részben kiejtik egymást, de mégis, mekkora hiba marad? Legyen $D_2 = d_1 + d_2$, $D_3 = d_1 + d_2 + d_3$, stb. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a d_3 hiba úgy jön létre, hogy 1/2 eséllyel felfele tévedünk 1 egységnyit, és 1/2 eséllyel lefele. Mennyi lesz D_3 négyzete? $D_3^2 = (D_2 + 1)^2 = D_2^2 + 2D_2 + 1$, ha felfele tévedtünk, és $D_3^2 = (D_2 - 1)^2 = D_2^2 - 2D_2 + 1$, ha lefele. Átlagosan tehát $D_3^2 = D_2^2 + 1$. Ha d_3 nem egységnyi, akkor D_3^2 átlagosan $D_2^2 + d_3^2$. Hasonlóan $D_1 = d_1$ jelöléssel D_2^2 átlagosan $D_1^2 + d_2^2 = d_1^2 + d_2^2$, és folytatva az eljárást D_{100}^2 átlagosan $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_{100}^2$, tehát a véletlen hibák *négyzetei* adódnak össze. Ez nem csak ebben az esetben igaz, hanem általában is. Így ha a hibák egyformák, akkor D_{100} négyzete 100-szor akkora, mint az egyes hibák négyzete, azaz D_{100} maga átlagosan tízszer akkora, mint az egyes hibák, így \bar{x} hibája, ami ennek a századrésze, tízszer kisebb, mint egy mérés hibája. Általában, 4 mérés átlagának hibája 2-szer, 9 mérés átlagának hibája 3-szor, stb. kevesebbet ingadozik, mint 1 mérés hibája. Sokszor szoktak több mérést végezni, ha pontosabb eredményre van szükség. Szokás a durva hibák elkerülésére a legkisebb és a legnagyobb eredményt kihagyni az átlagolásból. Ne feledjük, hogy csak a véletlen hibák ejtik ki részben egymást. Ha például mind a száz ember ugyanazt a mérőeszkőzt használja, annak a hibája benne marad az átlagban.

Vajon mérésünk hibájáról is megtudhatunk valamit a mérésekből? Igen, ha n mérést végzünk, és az $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$ mennyiséget elosztjuk $n - 1$ -gyel, akkor egy mérés átlagos hibanégyzetét kapjuk.

Hogyan lesz ebből kísérlet? Ha van olyan zsebszámológépünk, amin van véletlenszám generátor, az 0 és 1 közötti véletlen számokat ad, amik 1/2 körül ingadoznak, átlagos hibájuk $\approx 0,3$. Számoljuk ki 4, 9, 16, 25, ... átlagát, esetleg az átlagtól való eltérések négyzetének átlagát. A statisztikai gombok a zsebszámológépen éppen erre valók! ** \square

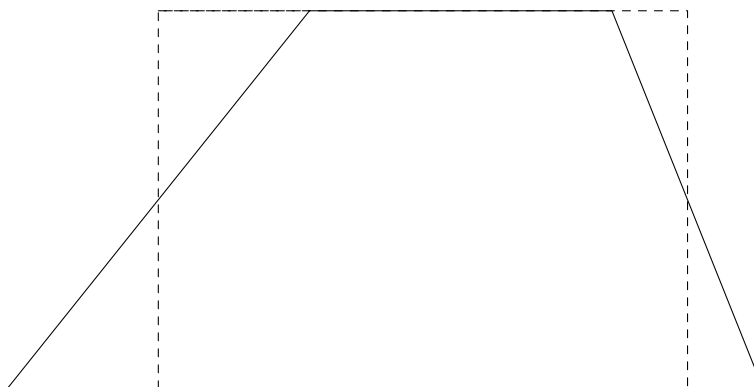
Ha valamit felnagyítunk vagy lekicsinyítünk, az összes hossz ugyanolyan arányban változik. Egy kört nagyítva vagy kicsinyítve a kerületének és az átmérőjének az aránya mindig ugyanannyi. Ezt az arányt a π (ejtsd: pí) görög betűvel szokás jelölni. Értékét a matematikusok nagyon pontosan (sok millió tizedesjegyre) kiszámolták, közelítőleg $3,14\dots$, pontosabb közelítése $3,14159265\dots$. Mivel ez már a második görög betű, amivel találkozunk, bár nem lesz túl sokszor szükség rá, megadom a görög ABC-t is. Így még egyes görög szavakat is egész jól ki tudunk olvasni, ha összeolvassuk a táblázatból a görög betűk nevének első betűit.

alfa	$A \alpha$	éta	$E \eta$	nű	$N \nu$	tau	$T \tau$
béta	$B \beta$	théta	$\Theta \theta$	kszi	$\Xi \xi$	üpszilon	$\Upsilon \upsilon$
gamma	$\Gamma \gamma$	ióta	$I \iota$	omikron	$O o$	fi	$\Phi \phi, \varphi$
delta	$\Delta \delta$	kappa	$K \kappa, \varkappa$	pí	$\Pi \pi, \varpi$	khí	$X \chi$
epszilon	$E \epsilon, \varepsilon$	lambda	$\Lambda \lambda$	ró	$P \rho, \varrho$	pszí	$\Psi \psi$
zéta	$Z \zeta$	mű	$M \mu$	szigma	$\Sigma \sigma, \varsigma$	omega	$\Omega \omega$

A görög ábécé

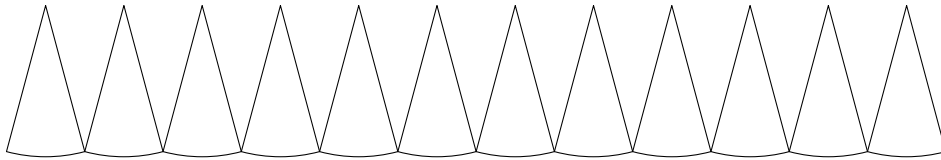
A terület mérésénél az egységet a hosszúságegységből kapjuk, az egységnyi terület egy 1 m-szer 1 m-es négyzet területe, a négyzetméter, jelben m^2 . Egy téglalap területét úgy kapjuk, hogy a szélességét és a hosszúságát összeszorozzuk. Kisebb területegységek a négyzetdeciméter, dm^2 , a négyzetcentiméter, cm^2 , stb. Vigyázzunk, a dm^2 nem decinégyméter, azaz a négyzetméter tizede, hanem négyzet-deciméter, azaz a deciméter négyzete (második hatványa), így $1 dm^2 = 0,1 m \cdot 0,1 m = 0,01 m^2$, azaz a négyzetméter százada! Hasonlóan a cm^2 a négyzetméter tízezrede, stb. Nagyobb egységek a négyzetdekaméter, amit árnak is neveznek (ma már nemigen használják), a négyzethektométer, amit hektárnak is neveznek (hekto-ár), és a négyzetkilométer. Az ár rövidítése a, a hektaré ha. Így

$$1 km^2 = 100 ha = 10\,000 a = 1\,000\,000 m^2.$$



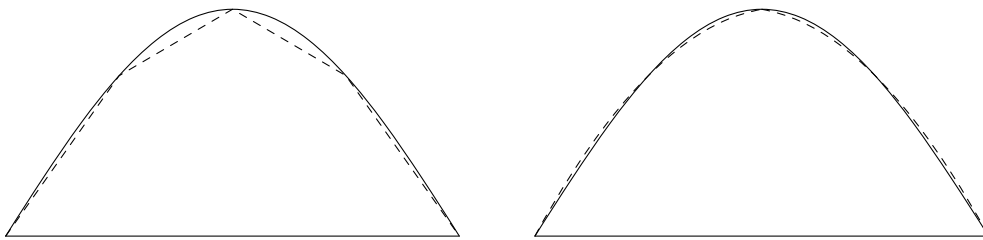
1.1.3. ábra: trapéz átdarabolása

Foglalkozunk most kicsit a terület kiszámításával. Nem árt észrevenni, hogy ha bármilyen síkidomot kétszeresére, háromszorosára, stb. nagyítunk, a területe négyszeresére, kilencszeresére, stb. nő. Ha azonban csak egy irányban nyújtjuk kétszeresére, háromszorosára, stb. és arra merőlegesen nem változtatjuk, akkor a terület is csak kétszeresére, háromszorosára, stb. nő. Egy *trapéz*t, azaz olyan négyszöget, aminek két oldala párhuzamos, mint az 1.1.3. ábra mutatja, könnyen átdarabolhatunk téglalappá, aminek szélessége a párhuzamos oldalak távolsága, a trapéz úgynevezett *magassága*, hosszúsága pedig a párhuzamos oldalak hosszának átlaga, azaz a hosszaiak összegének a fele lesz. A trapéz területét tehát a magasságából és a párhuzamos oldalak hosszából könnyen kiszámíthatjuk. A háromszög egy speciális trapéz, amelynek az egyik „párhuzamos” oldala nulla hosszú, így a területét úgy kapjuk, hogy valamelyik oldal (az „alap”) hosszának a felét szorozzuk az arra az oldalra, azaz az alapra merőleges magassággal.



1.1.4. ábra: kör „átdarabolása”

A körterület kiszámításának ötletét az 1.1.4. ábrán láthatjuk: szétvagdosva a kört sok kis háromszögszerű darabot kapunk, amelyek mindegyikének a magassága a kör sugara. A háromszögszerű darabok alapjainak összes hossza a kör kerülete, tehát π -szer az átmérő. Ennek a felét, azaz π -szer az átmérő felét kell szorozni a sugárral. Mivel az átmérő fele a sugár, végül is azt kapjuk, hogy a terület π -szer a sugár négyzete.



1.1.5. ábra: görbe alatti terület közelítése

Néha előfordul, hogy valamilyen bonyolultabb alakzat, például egy görbe alatti rész *területét* kell kiszámítanunk. Ezt közelítőleg megtehetjük úgy, hogy trapézokkal közelítjük: lásd az 1.1.5. ábra bal oldalán. Sokkal pontosabb közelítést kapunk, ha az alapot

ugyancsak kis részekre osztjuk, de minden kis részen a területet úgy közelítjük, hogy a bal oldali magasságnak, a jobb oldali magasságnak és a középső magasság négyszeresének összegét osztjuk hattal, és ezt szorozzuk az alap megfelelő részének hosszával. Ez a *Simpson-formula*. A magyarázatot a matematikai részben megtaláljuk, itt elégedjünk meg annyival, hogy ez a görbe parabolákkal való közelítésének felel meg. Az 1.1.5. ábra bal illetve jobb oldalán berajzoltuk a trapézokat illetve parabolákat.

1.1.5. Kísérlet. Tegyük fel, hogy egy alumínium fóliából levágott csík területét kell megmérni. A vágások egyenesek, de nem sikerültek párhuzamosra. A fólia szélességét (a trapéz magasságát) megmérve, azt 29 cm-nek találtuk, de hibáztunk, 3 mm-rel nagyobbak mértük, mint amekkora valójában. A hiba ≈ 1 százalék (századrész), azaz 1%. A párhuzamos oldalakat megmérve, azokat 9 cm-nek és 11 cm-nek találtuk, 1 mm-rel illetve 2 mm-rel nagyobbak, mint amekkora valójában. A párhuzamos oldalak hosszának átlaga mérésünk szerint 10 cm, másfél százalékkal, azaz 1,5%-kal nagyobb, mint amekkora valóban. A kiszámolt terület 290 cm^2 , ami $1,015 \cdot 1,01 = 1,02515$ -ször, azaz nagyjából 2,5%-kal nagyobb, mint a valódi, így a valódi $1/1,02515 \approx 0,975$ -ször, azaz nagyjából 2,5%-kal kisebb, mint a kiszámolt. Másik példaként tegyük fel, hogy a trapéz magasságát 1%-kal kisebbnek mértük, mint a valódi, a másik hiba ugyanakkora, mint az előbb. A kiszámolt terület most $1,015 \cdot 0,99 = 1,00485$ -ször, azaz nagyjából 0,5%-kal nagyobb, mint a valódi, így a valódi $1/1,005 \approx 0,995$ -ször, azaz nagyjából 0,5%-kal kisebb, mint a kiszámolt. Az látjuk tehát, hogy szorzáskor a kis hibák nagyjából (előjelesen) összeadódnak, osztáskor pedig kivonódnak. Ezt gyors fejszámolásra is felhasználhatjuk: ha szorzásnál vagy osztásnál valamelyik számhoz közel van egy másik, kerek szám, akkor azzal számolunk, majd az eredményt helyesbítjük annyi százalékkal, amennyi az eltérés volt. \square

1.1.6. Kísérlet. Tegyük fel, hogy egy egész tekerics alumínium fólia területét szeretnénk kiszámolni. A fólia szélességét megmértük, és a mérésünk hibája 1%. Területszámoláshoz hiába tudjuk a kb. 20 m-es hosszúságát akár egy tízezredrész hibával, azaz egy század százalék (‰) hibával megmérni, nem nagyon érdemes, mert a terület hibája úgymint 1% körül lesz. Elég lesz a hosszúságot 1‰ (egy ezrelék, azaz egy ezredrész) hibával mérni, mert ez a hiba már nem befolyásolja lényegesen az eredmény hibáját, az 0,9% és 1,1% között lesz. Általában, a legpontatlanabb adat hibája határozza meg az eredmény hibáját, a többi adat hibáját nem nagyon érdemes ennek a tizedénél tovább csökkenteni. \square

1.1.7. Kísérlet. Egy üveg nyakának belső átmérője tolómérővel mérve 16,75 mm. Mennyi a keresztmetszet területe? Zsebszámológéppel számolva $\pi \cdot (16,75/2)^2 \text{ mm}^2 = 220,3532722 \text{ mm}^2$. Félrevezető azonban ezt írni, mert az sugallja, hogy az eredmény nagyon-nagyon pontos. Jobb, ha azt írjuk, hogy $220,4 \text{ mm}^2$, mert a kiindulási adat, az átmérő hibája 3‰ körül van, így a sugár hibája is ennyi, a sugár négyzetének hibája pedig már 6‰, így a végeredményé is. A zsebszámológép beépített π billentyűjével számoltam, de elég lett volna a 3,14 közelítés is, hiszen ennek a hibája 0,5‰ körül van. A $220,4 \text{ mm}^2$ azt sugallja, hogy az utolsó jegy pontatlan, az utolsó előtti pedig valószínűleg pontos. Ha azt kérdezzük, hogy 1 cm^3 víz mennyivel emeli meg a vízszintet, a válasz $1 \text{ cm}^3 / 220,4 \text{ mm}^2 = 1000 \text{ mm}^3 / 220,4 \text{ mm}^2 \approx 4,54 \text{ mm}$. Az utolsó jegy bizonytalan. \square

Elég gyakran előfordul a fordított probléma is: ismerjük a területet, és keressük az átmérőt vagy a sugarat. Például 1 mm^2 keresztmetszetű drótnak mennyi az átmérője? Mivel a kör területe $\pi \cdot r^2$, azt kapjuk, hogy $r^2 \approx 0,3183 \text{ mm}^2$, de nekünk r kellene. Próbálgatással célt érhetünk: $0,5^2 = 0,25$, kevés, $0,6^2 = 0,36$, sok, $0,55^2 = 0,3025$, kevés, $0,57^2 = 0,3249$, sok, $0,56^2 = 0,3136$, kevés, $0,565^2 = 0,3192$, sok, stb. Az utolsó közelítés elég jó, akár meg is állhatunk: $0,3183$ és $0,3192$ között az eltérés csak $\approx 3 \text{ ‰}$, és mivel négyzetreemeléskor a hiba nagyjából megduplázódik, most nagyjából megfelelődik. Így kevesebb, mint 2 ‰ hibával az átmérő $\approx 1,13 \text{ mm}$. Az ilyen típusú problémák megoldását, azaz ha egy adott y mennyiséghez azt az ismeretlen (nem negatív) x mennyiséget keressük, amire $x^2 = y$, *négyzetgyökvonásnak* nevezzük, és a megoldásra az $x = \sqrt{y}$ jelölést használjuk. A legtöbb zsebszámológépen van $\sqrt{\quad}$ jel.

A térfogat egységét is a hosszúságegységből kapjuk, az egységnyi térfogat egy 1 m -szer 1 m -szer 1 m -es kocka térfogata, a köbméter, jelben m^3 . Egy téglatest térfogatát úgy kapjuk, hogy a szélességét, a hosszúságát és a magasságát összeszorozzuk. Kisebb térfogategység a köbdeciméter, dm^3 , a köbcentiméter, cm^3 , stb. Vigyázzunk, itt is a dm^3 nem deci-köbméter, azaz a köbméter tizede, hanem köb-deciméter, azaz a deciméter köbe (harmadik hatványa), így $1 \text{ dm}^3 = 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,001 \text{ m}^3$, azaz a köbméter ezrede! Hasonlóan a cm^3 a köbméter milliomod része, stb. A mindennapi életben elterjedtebb a liter. Jelölése l , és megegyezik a dm^3 -rel. Tízszere a dekaliter (dal), százszora a hektoliter (hl), tizede a deciliter (dl), százada a centiliter (cl), ezrede a milliliter (ml), stb. Ezeket gyakran használjuk a fizikában.

Nézzük a térfogatszámítást. A legfontosabb eszme *Cavalieri elve*, amit az 1.1.6. fénykép szemléltet: ha a kártyákat elforgatjuk, eltoljuk, a kártyacsomag térfogata nem változik. Sőt, akkor sem változna, ha az egyes kártyák alakját megváltoztatnánk, feltéve, hogy a területük (és persze a vastagságuk) nem változik. Ez akkor is igaz marad, ha a kártyák nem egyformák. A térfogat tehát csak egy adott síkkal párhuzamos területektől függ: ha ezek ugyanazok, ugyanaz a térfogat is. Így mindjárt megkapjuk olyan testek térfogatát, amelyeknek a teljes magasságában mindenütt ugyanaz a keresztmetszet területe: alapterület szorozva magassággal. Ha változik a keresztmetszet területe, alkalmazhatjuk *Kepler hordó formuláját* (ami tulajdonképpen a Simpson-formula): az alaplap területének, a fedőlap területének és a középlap (a fél magasságban vett keresztmetszet) négyszeres területének összegét osztjuk hattal és szorozzuk a magassággal. Ez a képlet nem csak „hengyszerű”, hanem „kúpsszerű” és „csonkakúpszerű” testek, sőt meglepő módon gömb és gömbszelet, és bizonyos hordószerű alakzatok esetén is pontos eredményt ad! Itt „kúpsszerű” testen olyan testet értünk, amely úgy keletkezik, hogy egy akármilyen síkbeli alaplap minden pontját összekötjük egy adott térbeli ponttal. Ha ezt elvágjuk egy, az alaplappal párhuzamos síkkal, kapjuk a „csonkakúpszerű” testet. Ha nagyon vadul változik a keresztmetszet, még mindig felszeletelhetjük a testet, és ezekre a szeletekre alkalmazzuk Kepler hordó formuláját. Itt is érvényes, hogy ha a testet egy irányban kétszeresére, háromszorosára, stb. nyújtjuk de arra merőlegesen nem változtatjuk, akkor a térfogata kétszeresére, háromszorosára, stb. nő.

1.1.8. Kísérlet. Mérjük meg egy kémcső térfogatát! Mint az 1.1.7. fényképen lát-

hatjuk, a kémcsövek egyik végükön zárt, legömbölyített végű, tűzálló üvegből készült csövek. Gyertyaláng felett nyugodtan melegíthetjük. Ilyenkor *kémcsőfogónak* egy (lehetőleg fa) ruhacsipeszt használunk. Lehet, hogy a ruhacsipesz nyílását reszelővel meg kell növelnünk, vagy fa hosszabbítókat kell rá ragasztanunk. Készítsünk néhány ilyen kémcsőfogót! A kémcső nyílása ne irányuljon senki felé, mert lehet, hogy a benne lévő anyag kifröccsen! (Kezdetben esetleg kémcső helyett néhány leselejtezett pálinkáspohárral is elboldogulhatunk, de ezek nem hőállóak, és nem is egyenes a keresztmetszetük.) Például vegyszerboltban, borászati boltban juthatunk kémcsőhöz. A képen látható állványt magunk is elkészíthetjük, de egy befőttes üveg is megteszi helyette. A kémcső belső átmérője tolmérővel mérve 13,75 mm volt. A teljes belső hosszt — beleugva egy ceruzát — 158,0 mm-nek mértem, amiből a legömbölyített rész magassága 3,6 mm. A keresztmetszet területe tehát $148,5 \text{ mm}^2$, így a henger alakú rész térfogata $1,485 \cdot 15,44 \approx 22,93 \text{ cm}^3$. A legömbölyített rész egy olyan „összenyomott félgömb”, amely egy $148,5 \text{ mm}^2$ keresztmetszetű gömb 7,2 mm-re való összenyomásával keletkező „összenyomott gömb” fele. Kepler hordó formulájával számolva, az „összenyomott gömb” térfogata $(0 + 4 \cdot 148,5 + 0) \cdot 7,2/6 \approx 713 \text{ mm}^3$, azaz a legömbölyített rész térfogata $\approx 0,36 \text{ cm}^3$. \square

Nem mindig képezzük a kisebb részeket tízzel, százzal, stb. való osztással. Az ókorban igen kedvelték a hatvan felé osztást, mivel így a fél, harmad, negyed, ötöd, hatod, tized, tizenkettő, tizenötöd, huszad, és a harmincad is egész számú hatvanadrészből áll. Innen ered, hogy az órát hatvan percre, a percet pedig hatvan másodpercre osztjuk. Maga az óra onnan ered, hogy kezdetben a nappalt és az éjszakát is külön-külön 12 órára osztották. Így persze a nappalok hosszával változott az órák hossza is, ezért később áttértek a nap 24 egyforma órára való osztására. A tudományban csak a másodpercet (latinul *secundum*) használjuk időegységnek, jele s. (** A föld forgása nem teljesen egyenes, például a sarki jégsapkák olvadása-megfagyása miatt. Ezért nagyon pontos tudományos méréseknél a másodpercnél azt a meghatározását használják, hogy egy bizonyos atomfajta, a cézium-133 által bizonyos körülmények között kibocsátott rádióhullám 9 192 631 770 hullámának ideje.**) A világegyetem kora $\approx 13,5$ milliárd év, azaz ≈ 426 Ps. Az emberi élet néhány Gs. A fény a naptól 480 s alatt ér ide. Ha százig számolunk, hogy egyszer, kétszer, ..., tízszer, tizenegyszer, tizenkettő, ..., akkor nagyjából a másodperceket számláljuk. Az első mikroprocesszorok egy számítási lépése 1 μs -ig tartott, a maiaké 200 ps-ig. A fény ennyi idő alatt 6 cm-t tesz meg.

A szögmérésben is hatvanad részeket használunk: egy fok (jele $^\circ$) 60 szögperc (jele $'$), egy szögperc pedig 60 szögmásodperc (jele $''$). Azt, hogy egységként miért a fokot, a teljes kör 360-ad részét használjuk, nem tudjuk biztosan. Lehet, hogy az egyenlő oldalú háromszög egy szögét osztották 60 részre. Az is lehet, hogy mivel az év $\approx 365,2425$ nap és így a Nap egy nap alatt a teljes kör $1/365,2425$ -ad részével mozdul el a csillagokhoz képest, ezért osztották a teljes kört 360 részre. Talán mindkét szempont közrejátszott.

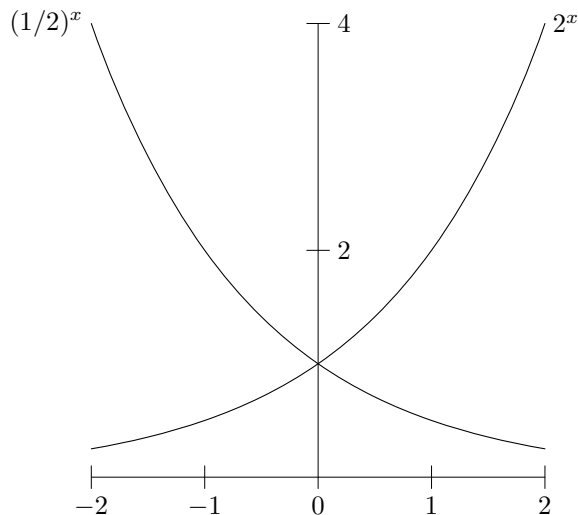
Mindenesetre szögeknél és (gyorsírásként) időnél is írhatunk ilyesmiket, hogy $3^\circ 24' 35''$, ami 3 fok 24 szögperc 35 szögmásodperc, illetve 3 óra 24 perc 35 másodperc.

Van egy másik szögmérési egység is. A szög csúcsával mint középponttal kört rajzolunk, és megnézzük, hogy a szög által a körből kimetszett körív hossza hányszorosa

a sugárnak. Mivel a sugár, amihez viszonyítunk, latinul radius, ezt az egységet radiánnak nevezzük. Legtöbbször nem is szoktuk kiírni, hogy radián, hiszen két hosszúság hányadosa, így nincs mértékegysége. A teljes szög, ami 360° , nyilván 2π radián. Ennek alapján a két egységet át tudjuk számolni egymásba. A tudományban a radiánt gyakrabban használják mint a fokot.

Gyakran mérünk más mennyiségeket is. A tömeg és az erő mérésével nemsoká foglalkozunk. A hőmérséklet mérésével később, a hőtanban majd részletesen foglalkozunk, nagyjából úgyis érezzük. Egyelőre elég lesz annyi, hogy $^\circ\text{C}$ -ban (ejtsd: celziusz fokban) mérjük. A hűtőszekrényben általában 5°C van, a mélyhűtőben pedig kb. -18°C . Általában 5°C -ig az mondjuk, hogy *hideg*, 5 és 15°C között, hogy *hűvös*. A *szobahőmérséklet* 15 – 28°C . A vizet 28 – 40°C között *langyosnak* nevezzük. E felett már nem nagyon bírja el a kezünk, 75°C -ig *melegnek*, a fölött *forrónak* nevezzük.

1.1.9. Az exponenciális függvények. A 1.1.8. ábrán az $y = 2^x$ és az $y = (1/2)^x$ függvények egy darabját látjuk. Az első balról jobbra haladva, azaz növekvő x -ekre nő, a másik csökken. Más alapokra is hasonlóan néznek ki a hatványfüggvények, ha az alap nagyobb, mint 1, akkor növekvőek, ha viszont kisebb mint 1, de pozitív, akkor csökkenőek. Vegyük észre, hogy $1/2 = 2^{-1}$ miatt $(1/2)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$, így az $y = (1/2)^x$ a függvény az x helyen ugyanazt veszi fel értéként, mint az előző a $-x$ helyen, azaz az y tengelyre való tükrözéssel keletkezik az előzőből.



1.1.8. ábra: hatványfüggvények

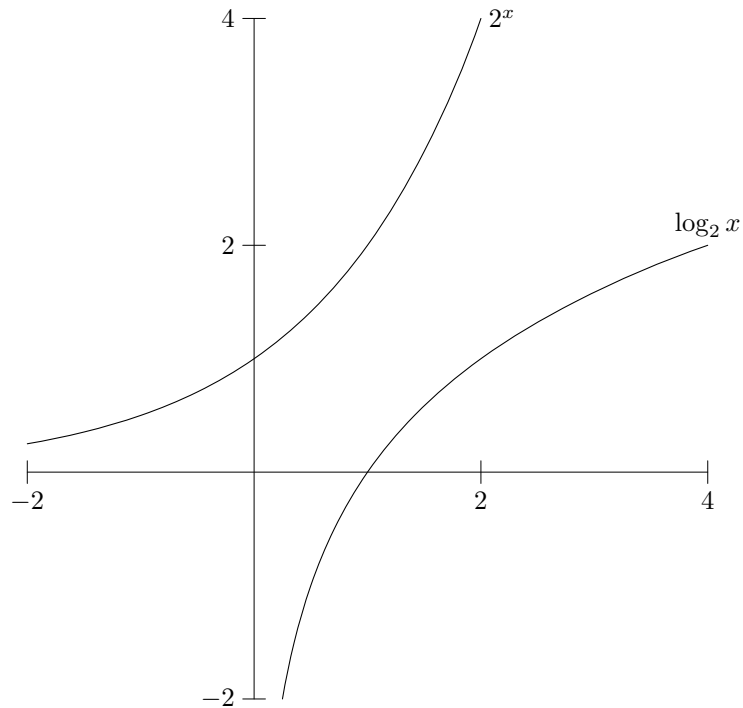
* De mit jelent az, hogy $2^{1.5}$? Ehhez abban kellene megállapodnunk, hogy például mit is jelent az, hogy $2^{0.5}$ vagyis $2^{1/2}$? Ha érvényben akarjuk tartani jól bevált szabályunkat, hogy hatványok szorzásakor a kitevők összeadódnak, osztásakor pedig kivonódnak,

akkor $2^{1/2} \cdot 2^{1/2} = 2^1 = 2$, tehát $2^{1/2}$ az egyetlen olyan pozitív szám, amit saját magával szorozva 2-t kapunk. Ezt a 2 négyzetgyökének neveztük és $\sqrt{2}$ -vel is jelöltük. A négyzetgyökvonáshoz teljesen hasonlóan, próbálgatással számolhatjuk ki a 2 köbgyökét, $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ -et, azt az egyetlen x pozitív számot, amelyre $x^3 = 2$, illetve akármilyen b pozitív szám n -edik gyökét, ahol n akármilyen pozitív egész szám: ez az egyetlen olyan x pozitív szám, amelyre $x^n = b$. Ezt a számot $b^{1/n} = \sqrt[n]{b}$ -vel jelöljük. Ennek hatványozásával akármilyen $b^{m/n}$ számot megkaphatunk, ahol n tetszőleges pozitív egész szám, m pedig tetszőleges egész szám. Szerencsére nem számít, hogy a kitevőt hogyan írjuk fel törtként, mindig ugyanazt kapjuk, például $2^{1/2} = \sqrt{2}$ ugyanaz, mint $2^{2/4} = (\sqrt[4]{2})^2$, és az sem számít, hogy előbb gyököt vonunk és aztán hatványozunk vagy fordítva, például $(\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt[4]{2^2}$. Végül, ha b^c -re van szükségünk, ahol c tetszőleges szám, akkor c -t törttel közelítve kaphatunk közelítést. Most már választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy mit is jelent az, hogy $2^{1.5}$. Azt jelenti, hogy $2^{1/2} \cdot 2$.

Ma a legtöbb zsebszámológép akármilyen b pozitív alap akármilyen c kitevős hatványát képes kiszámítani, sőt a fordított feladatot is megoldja, akármilyen $b \neq 1$ pozitív alaphoz és akármilyen c pozitív számhoz képes meghatározni azt az x kitevőt, amelyre $b^x = c$ (ezt az x -et a c szám b alapú *logaritmusának* nevezzük és $\log_b c$ -vel jelöljük), de nem voltak mindig zsebszámológépek. Célszerűen a 10 törtkitevős hatványainak táblázatát készítették el, mert ekkor elég a 0 és 1 közötti kitevőkre szorítkozni, (a hatvány ekkor 1 és 10 között változik), hiszen 10 egész kitevős hatványaival könnyű szorozni. Az első ilyen táblázatot Briggs készítette. Célja az volt, hogy a szorzást és az osztást megkönnyítse. Ha két számot össze akarunk szorozni, olvassuk ki a táblázatból a hozzájuk tartozó kitevőket. Ezeket adjunk össze (ha osztani kell, vonjuk ki), és a kapott kitevőhöz keressük vissza a számot. Tulajdonképpen az első lépésben a táblázatot fordítva, logaritmustáblaként használtuk, így is nevezték. Középkorban még így számoltunk. Még fontosabb, hogy logaritmustáblával akármilyen alapot hatványozni is lehet. Tegyük fel, hogy valamilyen a alapra rendelkezésünkre áll az a hatványainak egy részletes táblázata, de mi egy másik, b alapra akarjuk b^x értékét meghatározni. (A b pozitív kell legyen, mert egyébként a nem egész kitevős hatványokat nem tudjuk értelmezni.) Először határozzuk meg $\log_a b$ értékét. Ez az a kitevő, amire hatványozva a -t b -t kapunk, tehát az a hatványainak táblázatából meg kell keresnünk azt a kitevőt, amire a hatványa éppen b lesz, ez az $\log_a b$. Képletben $a^{\log_a b} = b$, így mindkét oldalt x -edikre hatványozva $b^x = a^{x \cdot \log_a b}$. Az $a = 10$, $b = 2$ esetben például $\log_{10} 2 = 0,3010300 \dots \approx 0,3$. *

1.1.10. Számolás logaritmusokkal. Mint láttuk, ha valamilyen (pozitív, de 1-től különböző) a alapra van egy, az a hatványait tartalmazó táblázatunk, akkor abból az a alapú logaritmusokat is kiolvashatjuk, ha „visszafele használjuk”. Hasonlóan, ha van egy a alapú logaritmustáblánk, akkor abból az a alapú hatványokat is kiolvashatjuk, ha „visszafele használjuk”; a hatványozás és a logaritmus képzése egymás fordítottja, idegen szóval *inverze*. Az 1.1.9. ábra az $y = 2^x$ és az $y = \log_2 x$ függvények egy darabját ábrázolja, bármelyik képe a másik képéből az $y = x$ egyenesre való tükrözéssel adódik.

* Foglaljuk össze még egyszer, hogyan szorozhatunk és hatványozhatunk logaritmusokkal? A logaritmus definíciója szerint ha b és c pozitív számok, akkor $a^{\log_a b} = b$ és $a^{\log_a c} = c$. Ezeket az összefüggéseket összeszorozva és újra felhasználva a logaritmus



1.1.9. ábra: hatvány és logaritmus

definícióját

$$a^{\log_a b + \log_a c} = b \cdot c = a^{\log_a b \cdot c}.$$

De az a alap két hatványa csak akkor lehet egyenlő, ha a kitevők egyenlőek, így $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, azaz a szorzat logaritmusa a logaritmusok összege. Hasonlóan

$$a^{c \cdot \log_a b} = b^c = a^{\log_a b^c},$$

így $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$, azaz a hatvány logaritmusa a kitevőször az alap logaritmusa.

A hatványozásnál kiderült, hogy egyetlen a alap hatványainak táblázata elegendő arra, hogy bármilyen alap bármilyen hatványát kiszámoljuk. Ugyanezt igaz a logaritmusnál is. Valóban, ha b nem 1, akkor a $b^{\log_b c} = c$ összefüggés a alapú logaritmusát véve $\log_a c = (\log_b c) \cdot (\log_a b)$, ahonnan

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}.$$

*

x	10^x	$(10^x - 1)/x$
1	10,0000000000	9,0000000
1/2	3,16227766017	4,32455320340
1/4	1,77827941004	3,11311764016
1/8	1,33352143216	2,66817145728
1/16	1,15478198469	2,47651175504
1/32	1,07460782832	2,38745050624
1/64	1,03663292844	2,34450742016
1/128	1,01815172172	2,32342038016
1/256	1,00903504484	2,31297147904
1/512	1,00450736424	2,30777049600
1/1024	1,00225114829	2,30517584896
1/2048	1,00112494140	2,30387998720
1/4096	1,00056231260	2,30323240960
1/8192	1,00028111679	2,30290874368
1/16384	1,00014054852	2,30274695168
1/32768	1,00007027179	2,30266601472
$x \rightarrow 0$	$1 + 2,30258507776x$	$2,30258507776$

1.1.11. Kísérlet. * Tanulságos megnézni, hogy hogyan készítette el Briggs logaritmustábláját. Először is, a négyzetgyökvonásra van egy, az osztásnál nem sokkal nehezebb módszer. Briggs ezzel kiszámolta a 10 négyzetgyökét, annak a négyzetgyökét, stb. Mi ezt egy zsebszámológéppel tesszük. Az eredményeket egy táblázatban adtam meg. Megnézve a második oszlopot, amiben a gyökök vannak, azt látjuk, hogy az 1 feletti rész nagyjából feleződik, amint a kitevő feleződik. Ez azt jelenti, hogy $10^x - 1$ nagyjából arányos x -szel. Mennyi az arányossági tényező? Osszuk el $10^x - 1$ -et x -szel. Ez a hányados az arányossági tényező közelítése, ez van az utolsó oszlopban. Ha megfigyeljük a közelítések különbségeit, azok is nagyjából feleződnek. A két utolsó különbsége 0,00008093696. Várhatóan a következő hányados ennek a felével, az azután következő még annak a felével, stb., lesz kisebb. Végül is azt várhatjuk, hogy az arányossági tényező jó közelítését akkor kapjuk, ha ezt az utolsó különbséget levonjuk az utolsó közelítésből. Így az arányossági tényező közelítése 2,30258507776. Kis x -ek esetén tehát 10^x közelítése $1 + 2,30258507776x$. Ezt írtuk be az utolsó sorba.

Lássunk hozzá, hogy kiszámítsuk valamely szám logaritmusát. Nézzük például a 2-t. A táblázat szerint a logaritmus nagyobb, mint 1/4. Osszuk el a 2-t a 1/4-nek megfelelő négyzetgyökkel. Az eredmény 1,12468265038. Ez közel van az 1/16-nak megfelelő négyzetgyökhöz. Osszuk el ezzel. Az eredmény 0,973935050331. Nyilván túllőttünk a célon. Az eredmény szűk 3%-kal kevesebb, mint 1, keressünk a táblázatban olyan négyzetgyököt, ami nagyjából ennyi százalékkal nagyobb, mint egy: szorozzuk a számot az 1/64-hez tartozó négyzetgyökkel. Az eredmény 1,00961314333. Ez nem sokkal több, mint az 1/256-hoz tartozó négyzetgyök, osszuk el vele. Az eredmény 1,000572292211. Ez nem sokkal több, mint az 1/4096-hoz tartozó négyzetgyök, osszuk el vele. Az eredmény

1,00001060355. Azt kaptuk tehát, hogy

$$2 \approx 10^{1/4+1/16-1/64+1/256+1/4096} \cdot 1,00001060355.$$

Az utolsó sorból

$$1,00001060355 = 10^x \approx 1 + 2,30258507776x,$$

ahonnan $x \approx 0,000004605063284$. Innen

$$2 \approx 10^{1233/4096+0,000004605063284} \approx 10^{0,301029995688}.$$

Tehát $\lg 2 \approx 0,301029995688$. *

1.1.12. Kísérlet. * Nem lenne egyszerűbb, ha olyan e alapot választanánk, amire $e^y \approx 1 + y$, ha $y \rightarrow 0$? Hátha ez megkönnyítené az életünket? Persze, meg tudjuk csinálni. Először is Briggs 54-szer vont egymás után gyököt, és 32 tizedesjeggyel számolt. Az ő számításából $10^x \approx 1 + 2,302585092994 \dots x$. Ha $y = 2,302585092994 \dots x$, akkor $10^{y/2,302585092994 \dots} \approx 1 + y$, így a keresett természetes alapszám $e = 10^{1/2,302585092994 \dots}$, amit egyszerűen ki tudunk számolni: Mivel $32768/2,302585092994 = 16384 - 2048 - 128 + 32 - 8 - 1 - 0,0384169939625$, a 10-nek a $1/2 - 1/16 - 1/256 + 1/1024 - 1/4096 - 1/32768 - 0,0384169939625/32768$ -adik hatványát kell kiszámolni, ami a táblázat szerint $2,71828182845$. A pontosabb érték $e = 2,718281828459 \dots$. Ez az alap nagyon gyakran szerepel a matematikában és a természettudományokban. Az ilyen alapszámú logaritmus *természetes logaritmus*nak („logaritmus naturalis”) nevezik, és \ln -nel jelölik. A legtöbb zsebszámológép e^x mellett $\ln x$ értékét is ki tudja számolni. Ha a miénk mégsem tudná, akkor elég tudnunk, hogy $10^{\lg x} = x$ miatt $\lg x \cdot \ln 10 = \ln x$, és $\ln 10 = 2,302585092994 \dots$. *

1.1.13. Komplex számok. * Ha már így átkeveredtünk a matematika területére, ismerkedjünk meg a komplex számokkal.

Egy egyismeretlenes egyenletet *magasabb fokúnak* nevezünk, ha benne az ismeretlen elsőnél magasabb hatványon szerepel. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet például másodfokú egyenlet, ha $a \neq 0$. Az x az ismeretlen, a többi szám ismert. Hogyan tudjuk megoldani? Végigosztva a -val, azt kapjuk, hogy

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Az $y = x + b/(2a)$ helyettesítéssel, mivel $x = y - b/(2a)$, azt kapjuk, hogy

$$\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = 0,$$

azaz

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

ahonnan

$$y_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{tehát} \quad x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A trükk az volt, hogy olyan helyettesítést választottunk, amivel „eltüntettük” az elsőfokú tagot.

A harmadfokú egyenletnél is végig tudunk osztani a legmagasabb fokú tag együtthatójával és el tudjuk tüntetni a másodfokú tagot. Így az $y^3 + py + q = 0$ egyenlet megoldásait kell megtalálnunk. A középkor végének egyik számológépe azt találta, hogy a megoldásokat a

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Cardano-képlet adja.

Látszólag készen vagyunk. Próbáljuk meg a képletet alkalmazni az

$$(y - 1)(y - 2)(y + 3) = y^3 - 7y + 6 = 0$$

egyenletre, amelynek a gyökei nyilván 1, 2 és -3 . (Az egyenlet a bal oldalon úgynevezett *gyöktényező*s alakban van, elsőfokú tényezők szorzataként írva, amiből a gyökök azonnal leolvashatók, hiszen egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla.)

A képlet szerint a megoldások

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}}.$$

Negatív számból kellene négyzetgyököt vonni! A képlet jó, ha csak egy valós gyök van, például az $(x^2 + 4)(x - 3) = 0$ egyenletnél azt meg is adja. Ez a képlet kényszerítette ki a *komplex számok* bevezetését.

A köbgyök alatt álló szám $z = x + y\sqrt{-1}$ alakú, ahol x és y valós számok, mert a négyzetgyök jel alatt álló negatív szám abszolút értékéből tudunk négyzetgyököt vonni. Az $y\sqrt{-1}$ alakú számokat, azaz a negatív számok négyzetgyökeit *képzetes*, idegen szóval *imaginárius* számoknak nevezték el. A komplex számok egy valós szám és egy képzetes szám összegeként állnak elő. A valós szám (itt most x) a komplex szám *valós* része, a $\sqrt{-1}$ együtthatója (itt most y) a *képzetes* része. Hogy kevesebbet kelljen írni, $\sqrt{-1}$ helyett i -t szoktak írni, tehát $z = x + iy$. Hogyan kell komplex számokkal számolni? Ha $w = u + iv$ egy másik komplex szám, amelynek tehát a valós és a képzetes része u illetve v , akkor $z + w = x + iy + u + iv = (x + u) + i(y + v)$. A szorzás sem nehéz, csak azt kell figyelembe vennünk, hogy $i^2 = -1$:

$$(x + iy)(u + iv) = xu + xiv + iyu + yvi^2 = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

A komplex számok valószínűleg elég misztikusnak tűnnek. Észrevehetjük azonban, hogy síkbeli vektoroknak tekinthetők. Foglalkozzunk most a vektorokkal, úgyis szükségünk lesz rájuk.

1.1.14. Kísérlet. A vektorok irányított egyenes szakaszok; az, hogy irányított, azt jelenti, hogy ki van jelölve, melyik a kezdőpontja és melyik a végpontja. A vektort rendszerint egy nyíllal ábrázoljuk, amely a kezdőpontból a végpontba mutat. Az elmozdulásokat például vektoroknak tekinthetjük: egy pont elmozdul a kezdőpontból a végpontba. Vegyünk egy papírlapot és rajzoljunk rá két nyilat (nem kell, hogy ugyanabból a pontból induljanak ki). Tegyük egy átlátszó műanyag fóliát a lapra, és jelöljük be rajta filctollal az első vektor kezdőpontját (C pont). Toljuk el a fóliát az első vektor irányába párhuzamosan (azaz nem elforgatva), amíg a megjelölt pont az első vektor végpontjába jut. Ez az első vektornak megfelelő eltolás. Most jelöljük be a második vektor kezdőpontját egy segédponttal, és toljuk el a második vektor irányába a fóliát, amíg ez a segédpont a második vektor végpontjába nem jut. Ez a második vektornak megfelelő eltolás. A fóliára átrajzolhatjuk az első vektor kezdőpontját (A pont) és végpontját (B pont). Az A pontból a B pontba mutató vektor az első vektor. A B pontból a C pontba mutató vektor lényegében a második vektor, csak eltoltuk úgy, hogy a kezdőpontja átmenjen az első vektor végpontjába. Az A pontból a C pontba mutató vektor az első és a második vektor összege. Vektorokat tehát úgy adunk össze, hogy a megfelelő eltolásokat egymás után elvégezzük. Ha az összeadást a második vektorral kezdjük, nem ugyanazt a vektort kapjuk, hacsak a két vektor nem ugyanonnan indul ki, azonban az összeghez ugyanaz az eltolás tartozik.

Ha egy vektorhoz hozzáadjuk saját magát, akkor ugyanarra fog mutatni, de a hossza kétszer annyi lesz. Ennek alapján egy vektort úgy szorzunk egy valós számmal, hogy a hosszát szorozzuk a valós számmal. Ha a szám negatív, akkor az eredmény ellenkező irányba fog mutatni, mint az eredeti vektor.

Ugyan így adunk össze és szorzunk számmal térbeli vektorokat. \square

1.1.15. Kísérlet. * A komplex számokat síkbeli vektoroknak is tekinthetjük. Vegyünk egy kockás papírt, és az egyik vízszintes vonalat vastagítsuk meg. Ez lesz a száme egyenes, ezen vannak a valós számok. Egy erre merőleges vonalat is vastagítsunk meg, ez lesz a képzetes tengely, ezen vannak a képzetes számok. A kettő metszéspontja az origó. A valós tengelyen jobbra vannak a pozitív számok. A kockák megadnak egy beosztást. Persze nem szükséges, hogy az egység egy kocka legyen. Az origótól egységnyi távolságra felfelé, a képzetes tengelyen van az $i = \sqrt{-1}$. A papír minden pontja két valós számmal jellemezhető: az első az „ x koordináta” azt adja meg, hány egységet kell jobbra mennünk, a második, az „ y koordináta” pedig azt, mennyit kell felfelé mennünk, hogy az origóból az adott pontba jussunk. Rajzolhatunk egy vektort, egy nyilat is az origóból az adott pontba. A komplex számokat a sík pontjainak tekinthetjük: az $x + iy$ komplex szám első koordinátája x , a szám valós része, második koordinátája pedig y , a szám képzetes része. A vektor hosszát a komplex szám *abszolút értékének* nevezzük. A Pitagorasz tétel szerint ez $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Minek felel meg az összedás? Például $z = 1 + i$ és $w = 1 + 2i$ összege $z + w = 2 + 3i$, ez pontosan megfelel a vektorok összeadásának. Mi a szorzás geometriai jelentése? Most $zw = -1 + 3i$. Ha felrajzoljuk és lemérjük, a szorzat abszolút értéke megegyezik a két szám abszolút értékének szorzatával, az x tengely pozitív felével bezárt szöge pedig a szorzandó és a szorzó szögének összegével. Az első állítást mindjárt megindokoljuk, a másodikat pedig a következő pontban.

Valaki azt mondhatja: én másik i -t használok: „Az én i -m megegyezik az ön i -jének ellentettjével”. Nem szólhatunk ellene semmit, mert $(-i)(-i) = i^2 = -1$. Ami nekünk $z = x + iy$, az neki $x - iy$; az ő koordinátarendszerében a képzetes tengely lefelé mutat. A $\bar{z} = x - iy$ komplex szám a z komplex szám *konjugáltja*. Ha egy képletben minden komplex számot a konjugáltjával helyettesítünk, a képlet igaz marad; ez annak felel meg, hogy mindent tükröztünk az x tengelyre. Például bármilyen z, w komplex számokra $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

A komplex konjugált nagyon hasznos. Például $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. A segítségével tudunk osztani is: mivel szorozni tudunk, elég az 1-et osztani a $z \neq 0$ komplex számmal, azaz reciprokot képezni. De $z\bar{z}/|z|^2 = 1$, így $1/z = \bar{z}/|z|^2$. A szorzat abszolút értékére

$$|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

Vonjunk mindkét oldalból négyzetgyököt. * \square

1.1.16. Kísérlet. * Próbáljunk meg komplex kitevőre hatványozni. Elég lesz az e alap hatványait kiszámolni. Nyilván azt várjuk, hogy

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Az első tényező valós kitevős, nincs vele gond. Egy e^z alakú hatvány kis valós kitevőre $e^z \approx 1 + z$. Feltesszük, hogy ez komplexben is igaz, ekkor $e^{it} \approx 1 + it$. Induljunk ki egy nagyon kicsi t -ből, mondjuk legyen $t = 2^{-24}$, és kezdjük el $1 + it$ -t ismételtelen négyzetre emelni. A hatványok, 16 tizedesjegyre számolva számítógéppel, de az eredményt 11 tizedesjegyre kerekítve a táblázatban találhatóak.

Ha ábrázoljuk a valós részt és a képzetes részt, azt látjuk, hogy a valós rész $\cos t$, a képzetes rész pedig $\sin t$ (lásd a programot). Kísérleti úton felfedeztük tehát a nevezetes

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Euler-féle összefüggést. Később megmagyarázzuk, miért is igaz ez. Ezek szerint egyébként $|e^{it}| = 1$ minden t valós számra. Ez nem olyan meglepő: $e^{it} = x + iy$ valamilyen komplex szám. Ha most mindenhova komplex konjugáltat írunk, akkor $e^{-it} = x - iy$, de $e^{it}e^{-it} = e^0 = 1$, így $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = 1$.

Nyilván minden komplex szám felírható $z = |z|\operatorname{sgn}(z)$ alakban, ahol $\operatorname{sgn}(0) = 0$, egyébként $\operatorname{sgn}(z) = z/|z|$ egy egységnyi abszolút értékű komplex szám. Viszont egy egységnyi abszolút értékű komplex szám felírható e^{it} alakban alkalmas t -re. A t -t rendszerint úgy választjuk, hogy $-\pi < t \leq \pi$ teljesüljön, és a komplex szám *argumentumának* nevezzük. Így z felírható $|z|e^{it}$ alakban, ahol $z \neq 0$ esetén t a z vektornak az x tengely pozitív felével bezárt szöge (ha $z = 0$, akkor minden t jó). Ez a komplex szám *exponenciális alakja*. Az Euler-féle összefüggés miatt $z = |z|(\cos t + i \sin t)$, ez a komplex szám *trigonometrikus alakja*. Ha $w = |w|e^{is}$, akkor $zw = |z||w|e^{it}e^{is} = |zw|e^{i(t+s)}$, igazoltuk a szorzás megsejtett geometriai jelentését. * \square

t	e^{it}
2^{-24}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000005960$
2^{-23}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000011921$
2^{-22}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000023842$
2^{-21}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000047684$
2^{-20}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000095367$
2^{-19}	$1,00000000000 + i \cdot 0,00000190735$
2^{-18}	$0,99999999999 + i \cdot 0,00000381470$
2^{-17}	$0,99999999997 + i \cdot 0,00000762939$
2^{-16}	$0,99999999988 + i \cdot 0,00001525879$
2^{-15}	$0,99999999954 + i \cdot 0,00003051758$
2^{-14}	$0,99999999814 + i \cdot 0,00006103516$
2^{-13}	$0,99999999255 + i \cdot 0,00012207031$
2^{-12}	$0,99999997020 + i \cdot 0,00024414062$
2^{-11}	$0,99999988081 + i \cdot 0,00048828123$
2^{-10}	$0,99999952319 + i \cdot 0,00097656234$
2^{-9}	$0,99999809271 + i \cdot 0,00195312376$
2^{-8}	$0,99999237073 + i \cdot 0,00390624007$
2^{-7}	$0,99996948281 + i \cdot 0,00781242053$
2^{-6}	$0,99987793264 + i \cdot 0,01562436423$
2^{-5}	$0,99951175942 + i \cdot 0,03124491401$
2^{-4}	$0,99804751256 + i \cdot 0,06245931796$
2^{-3}	$0,99219767093 + i \cdot 0,12467473385$
2^{-2}	$0,96891242893 + i \cdot 0,24740396110$
2^{-1}	$0,87758257497 + i \cdot 0,47942554575$
2^0	$0,54030232197 + i \cdot 0,84147100989$
2^1	$-0,41614686135 + i \cdot 0,909297481024$
2^2	$-0,653643698783 - i \cdot 0,756802585526$

1.2. Mozgás

1.2.1. Kísérlet. A legegyszerűbb mozgás az egyenes vonalú egyenletes mozgás. Egy egyenes vonalú mozgást akkor nevezünk *egyenletesnek*, ha a mozgó test egyenlő idők alatt egyenlő utakat tesz meg. (Ide értjük azt is, amikor a test egyáltalán nem mozog.) Számtalanszor találkozunk vele. Egy autó, vonat, kerékpáros, ejtőernyős, stb., ha már felgyorsult, általában ilyen mozgást végez. Ha meg akarunk győződni róla, hogy egy test egyenletes mozgást végez, legegyszerűbb, ha videóra vesszük, és megmérjük, hogy a képkockák között eltelt — egyenlő — időkben ugyanannyi utat tesz meg. Magunk is előállíthatunk ilyen mozgást, például egy vízben süllyedő vagy éppen felemelkedő golyó, vízben vagy mézben emelkedő buborék rövid idő múlva ilyen mozgást végez. A mozgás *sebessége* tetszőleges időtartam alatt megtett út osztva az eltelt idővel. A sebességet általában v -vel jelöljük (velocity). Ha a mozgás nem egyenletes, akkor is számíthatunk *átlagsebességet*: az egész mozgás vagy egy szakasza alatt megtett utat osztjuk az eltelt

idővel. A gyakorlatban a sebességet sokszor mérik km/ó-ban, de a távolság alap mértékegysége a méter, az idő a másodperc, így a sebesség alap mértékegysége a m/s. Az átszámítás egyszerű, csak behelyettesítünk. Például $1 \text{ km/ó} = 1000 \text{ m}/3600 \text{ s} = 5/18 \text{ m/s}$. Megfordítva, $1 \text{ m/s} = 0,001 \text{ km}/(1/3600) \text{ ó} = 3,6 \text{ km/ó}$. Néhány sebesség: gyalogos 4–6 km/ó, ló 5–25 m/s, kerékpár 15–50 km/ó, fecske 72–180 km/ó, puskagolyó 1 km/s, gépkocsi 80–240 km/ó, vonat 60–400 km/ó, repülőgép 800–3000 km/ó, Hold a Föld körül 1 km/s, műhold 8 km/s, Föld a Nap körül 30 km/s. Számoljuk át őket azonos egységbe! \square

1.2.2. Kísérlet. Az egyenes vonalú egyenletes mozgás jól tanulmányozható ha van egy átlátszó egyenes csövünk. Fogjuk be az egyik végét, majd töltsük meg majdnem teljesen vízzel, csak egy kis buborékot hagyjunk. Megdöntve a csövet, a buborék rövid idő után egyenletesen halad a cső vége felé. A mozgás annál gyorsabb, minél nagyobb az eltérés a vízszintestől. \square

1.2.3. Kísérlet. Az első igazi kísérleti fizikus Galilei volt. Tárgyakat ejtett le magasból, és megfigyelte, hogy (majdnem pontosan) egyszerre érnek földet, függetlenül attól, milyen nehezek. Ezzel megdöntötte az az ókori tévhitet, hogy a könnyebb tárgyak lassabban esnek. Az igaz, hogy nagy terjedelmű könnyű tárgyak mozgását a levegő jelentősen akadályozza, de a legtöbb esetben az akadályozás elhanyagolható. Légüres térben például a toollpely is ugyanúgy esik, mint a vasgolyó! Hogy a szabadesést pontosabban tanulmányozhassa, lelassította az előző kísérletben látott trükkel: golyókat gurított le lejtőn. Ezek is egyforma gyorsan gurulnak. Hogy a sebességet megvizsgálhassa, húrokat feszített ki a lejtőn keresztbe. A húrokat addig állította, amíg a golyó a húrokat egyenlő időközökben pendítette meg, és ekkor megmérte a húrok közötti távolságokat. Megállapította, hogy ez a mozgás *egyenletesen változó mozgás*: egymás utáni egyenlő időtartamok alatt a golyó átlagsebessége mindig ugyanannyival nő.

Mi közvetlenül a vizsgáljuk: vegyük videóra egy szabadon eső test mozgását. Az 1.2.1. videó egy ilyen felvétel. Nulladik képkockának az utolsó olyat választjuk, amín még nincs észrevehető elmozdulás. A képkockák közötti időtartam $1/25 \text{ s}$. Az utat, az elmozdulásokat, az átlagsebességeket, és azok különbségeit az alábbi táblázat tartalmazza.

Az első képen kimért átlagsebesség kérdéses, mert nem tudjuk a golyót pontosan mikor engedték el a nulladik és az első kép között, sőt, az is lehet, hogy valamivel a nulladik kép előtt, de elmozdulása még nem észrevehető. Mint látjuk a táblázatból, az átlagsebesség minden $0,04 \text{ s}$ -ban mintegy 40 cm/s -mal nő. Így ha pontosan a nulladik kép elkészültekor sikerül a tárgyat elengedni, akkor az első kép készítésének időpontjában a sebessége 40 cm/s . Jó közelítéssel (valójában most pontosan) a két kép között az átlagsebessége 20 cm/s , így a megtett út $0,8 \text{ cm}$. Az első és a második kép között az átlagsebesség 60 cm/s , így a megtett út ennek háromszorosa, majd ötszöröse, stb., a teljes megtett út pedig ennek négyszerese, kilencszerese, stb. Így az elmozdulás az n -edik képen $s = 0,8 \text{ cm} \cdot n^2$. Mivel $t = n/25 \text{ s}$, azt kapjuk hogy $s = 5t^2$, ha az elmozdulást méterben, az időt másodpercben mérjük. A mért elmozdulások nagyjából meg is felelnek ennek. \square

1.2.4. Kísérlet. Megmértük egy szabadon eső testre, hogy mennyi utat tesz meg (méterben) t másodperc alatt, és azt találtuk, hogy az s útra $s(t) = 5t^2$. Szeretnénk tudni,

t	e^{it}
2^{-24}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000005960$
2^{-23}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000011921$
2^{-22}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000023842$
2^{-21}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000047684$
2^{-20}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000095367$
2^{-19}	$1,0000000000 + i \cdot 0,00000190735$
2^{-18}	$0,9999999999 + i \cdot 0,00000381470$
2^{-17}	$0,9999999997 + i \cdot 0,00000762939$
2^{-16}	$0,9999999988 + i \cdot 0,00001525879$
2^{-15}	$0,9999999954 + i \cdot 0,00003051758$
2^{-14}	$0,9999999814 + i \cdot 0,00006103516$
2^{-13}	$0,9999999255 + i \cdot 0,00012207031$
2^{-12}	$0,9999997020 + i \cdot 0,00024414062$
2^{-11}	$0,9999988081 + i \cdot 0,00048828123$
2^{-10}	$0,9999952319 + i \cdot 0,00097656234$
2^{-9}	$0,9999809271 + i \cdot 0,00195312376$
2^{-8}	$0,9999237073 + i \cdot 0,00390624007$
2^{-7}	$0,9996948281 + i \cdot 0,00781242053$
2^{-6}	$0,99987793264 + i \cdot 0,01562436423$
2^{-5}	$0,99951175942 + i \cdot 0,03124491401$
2^{-4}	$0,99804751256 + i \cdot 0,06245931796$
2^{-3}	$0,99219767093 + i \cdot 0,12467473385$
2^{-2}	$0,96891242893 + i \cdot 0,24740396110$
2^{-1}	$0,87758257497 + i \cdot 0,47942554575$
2^0	$0,54030232197 + i \cdot 0,84147100989$
2^1	$-0,41614686135 + i \cdot 0,909297481024$
2^2	$-0,653643698783 - i \cdot 0,756802585526$

mennyi a test sebessége m/s-ban mondjuk 1 s múlva, vagy akár tetszőleges időpontban. A méréssel való megoldás az lenne, hogy megmérjük, hol van a test 1 s múlva, azaz mennyi ekkor az $s(t)$ út, és egy kicsit később (esetleg előbb), mondjuk egy t' időpontban, azaz mennyi ekkor az $s(t')$ út. A t és t' közötti átlagsebességet könnyen megkaphatjuk, az az

$$\frac{s(t') - s(t)}{t' - t}$$

különbségi hányados, azaz különbségek hányadosa, idegen szóval *differenciahányados*. Minél rövidebb időkülönbséget veszünk, annál pontosabban közelíti ez a hányados a t időpontbeli sebességet. Persze, túl rövid időtartamoknál a mérési hibák tönkreteszik az eredményt.

Lássunk most a dologhoz matematikus módra. A matematikában és a természettudományokban a különbségeket szeretik Δ -val jelölni. Ez a görög ábécé nagy D betűje, és arra emlékeztet bennünket, hogy különbségről, idegen szóval *differenciáról* van szó.

Legyen tehát $\Delta s = s(t') - s(t)$ és $\Delta t = t' - t$. A t' -re nincs is szükség, mivel $t' = t + \Delta t$, így $s(t') = s(t + \Delta t)$. Ezzel a jelöléssel a különbségi hányados azaz differenciáhányados $\Delta s / \Delta t$, a sebesség pedig az a $v(t)$ határérték, amihez a differenciáhányados közeledik, ha Δt közeledik nullához. Jelölésben

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v(t), \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0.$$

Akármilyen $s(t)$ függvényre is a differenciáhányados határértékét, ha $\Delta t \rightarrow 0$, *differenciálhányadosnak* nevezzük. Jelölése Leibniz nyomán ds/dt , pontosabban

$$\frac{ds}{dt}(t),$$

hiszen függ t -től. A jelölés arra emlékeztet bennünket, hogy a differenciálhányadost akkor kapjuk, amikor a Δt differencia „végtelen kicsivé válik” (a nagy Δ -ból kis d lesz). Ez a megfogalmazás nem pontos, akit a pontos megfogalmazás érdekel, olvassa el ennek a könyvsorozatnak a matematikai részét, ahol minden matematikát megtalál, amit a többi rész felhasznál. Még pontatlanabban azt mondhatjuk, hogy a sebesség az egységnyi időre eső út. Ezt nem úgy értjük, hogy egységnyi időre mérjük az átlagsebességet, hanem nagyon rövid Δt időre mérünk, és a Δt -vel való osztással kiszámoljuk, hogy a $\Delta s / \Delta t$ átlagsebességgel mennyi lenne az egységnyi időre eső út, és végül még közelítjük Δt -t nullához. Egyébként a fizikában gyakran szükség van a differenciálhányados differenciálhányadosára is. Ha $s(t)$ az út, $v(t)$ a sebesség, akkor

$$\frac{dv}{dt}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t)$$

a gyorsulás.

Térjünk vissza a konkrét példánkhoz. Ha $s(t) = 5t^2$, akkor

$$s(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2 = 5t^2 + 10t \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2,$$

ahonnan

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}(t) = 10t + 5\Delta t.$$

Nyilván ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor a jobb oldal $10t$ -hez közeledik.

Egy még egyszerűbb példa az egyenes vonalú egyenletes mozgás. Ennél $s(t) = s_0 + ct$. Ha t helyére nullát írunk, látjuk, hogy s_0 a nulla időpontig megtett út. Ezt a függvényt szeretnénk differenciálni: így nevezik a differenciálhányados meghatározását, a differenciálhányados függvényt pedig *deriválnak*. Most nagyon egyszerű a helyzet: $\Delta s = c\Delta t$ bármilyen t -re, és

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = c \rightarrow c,$$

tehát a sebesség állandó, $v(t) = c$. Így erre a mozgásra $s(t) = s_0 + vt$.

* Mutatunk még egy példát. Differenciáljuk az $f(x) = e^x$ függvényt. Erre a függvényre

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Na de ha Δx közel van nullához, akkor nagyon jó közelítéssel $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x$, méghozzá annál jobb közelítéssel, minél közelebb van Δx nullához. Így a jobb oldalon szereplő tört annál közelebb van 1-hez, minél közelebb van Δx nullához. Így a deriváltfüggvény is $f(x) = e^x$. Ez mutatja, miért célszerű az e alapot használni. Minden más hatványfüggvény deriváltjában megjelenik valamilyen konstans. *

Mit tegyünk, ha valamilyen függvény deriváltjára van szükségünk? Például azt szeretnénk tudni, hogy mi az $f(x) = \sin(x)$ deriváltja? Tanuljunk meg differenciálni? Nemrég még nemigen volt más lehetőség. Ez nem is olyan nehéz. Vannak *differenciálási szabályok*: például ha egy függvényt szorzunk egy konstanssal, akkor a deriváltja szorozódik a konstanssal; ha két függvényt összeadunk, akkor a differenciálhányadosuk összeadódik. Vannak szabályok függvények szorzatának, hányadosának, egyik függvény másikba való helyettesítésével kapott függvénynek a differenciálására. Ezen kívül néhány függvény deriváltját kell megtanulnunk.

Ma ott a kezünk ügyében a számítógép, így használhatunk valamilyen komputeralgebra rendszert, azok tudnak differenciálni. En az ingyenes Maxima rendszert használtam a wxMaxima grafikus interfésszel. Nézzük meg a megfelelő programot a fényképek között.

1.2.5. Newton jelölése. Newton sokkal egyszerűbb jelölést használt a deriváltra: egyszerűen az eredeti függvény fölé tett ponttal jelölte. Ebben a jelölésben $v(t) = \dot{s}(t)$ és $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$. Néha ezt az egyszerű jelölést fogjuk használni.

1.2.6. Differenciálás. ** Aki nem ijed meg egy kis matematikától, tartson velem egy kis kitérőre, amiben megtanulunk differenciálni. A magyarázatok szemléletesek, de nem pontosak. Akit a pontos bizonyítások érdekelnek, olvassa el ennek a könyvsorozatnak a matematika részét.

Kezdjük a differenciálási szabályokkal. Legyen $t \mapsto x(t)$ a t -hez $x(t)$ -t rendelő függvény, és c egy konstans. Az $y(t) = cx(t)$ függvény deriváltját szeretnénk megtudni. Ha t -t megnöveljük Δt -vel, akkor x megnő Δx -szel. Így

$$\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t) = cx(t + \Delta t) - cx(t) = c\Delta x.$$

Innen

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = c \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow c \frac{dx}{dt}, \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0,$$

azaz

$$\frac{dy}{dt}(t) = c \frac{dx}{dt}(t),$$

a konstans kiemelhető a differenciáláskor.

Legyen most $t \mapsto x(t)$ és $t \mapsto y(t)$ két függvény, és legyen $z(t) = x(t) + y(t)$. Ekkor

$$\Delta z = x(t + \Delta t) - x(t) + y(t + \Delta t) - y(t) = \Delta x + \Delta y.$$

Innen

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}, \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0,$$

azaz

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) + \frac{dy}{dt}(t),$$

az összeg differenciálása tagonként végezhető.

Most legyen $z(t) = x(t)y(t)$. Ekkor

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) = (x(t) + \Delta x)(y(t) + \Delta y) - x(t)y(t) = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y.$$

Osztva mindkét oldalt Δt -vel, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = y \frac{\Delta x}{\Delta t} + x \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \Delta x.$$

Mi történik, ha $\Delta t \rightarrow 0$? A jobb oldali utolsó tagban a hányados egy véges értékhez közeledik. Ha a Δx is el lenne osztva Δt -vel, az is egy véges értékhez közeledne, így a nélkül nullához kell közelednie. Egyébként ha egy $t \mapsto x(t)$ függvényre (a t -hez tartozó) $\Delta x \rightarrow 0$, ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor azt mondjuk, hogy a függvény *folytonos* t -ben. A fizikában előforduló legtöbb függvény folytonos. Okoskodásunk azt mutatja, hogy egy differenciálható függvény folytonos. Az előző összefüggésből tehát $\Delta t \rightarrow 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)y(t) + x(t)\frac{dy}{dt}(t),$$

ez a *szorzat differenciálási szabálya*.

Még két differenciálási szabály van hátra. Legyen $t \mapsto x(t)$ egy függvény, és $x \mapsto y(x)$ egy másik. Helyettesítsük be az első függvényt a másodikba, azaz tekintsük a $t \mapsto y(x(t))$ függvényt. A jelölés azt sugallja, hogy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt},$$

ez a *lányszabály*. Pontosabban, az összetett függvény deriváltja a t helyen egyenlő a külső függvény deriváltja az $x(t)$ helyen szorozva a belső függvény deriváltja a t helyen. A $t \mapsto x(t)$ inverze $x \mapsto t(x)$. Innen $t = t(x(t))$ és t szerint differenciálva az előző szabály szerint

$$1 = \frac{dt}{dx}(x) \cdot \frac{dx}{dt}(t),$$

azaz az *inverz függvény differenciálása*:

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{\frac{dx}{dt}(t)}.$$

Először ennek az alkalmazására mutatunk példát. Legyen $x = e^t$. Ekkor $t = \ln x$. Mi ennek a deriváltja? A szabály szerint

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{e^t}.$$

De nekünk nem a t függvényében kell a derivált, így $t = \ln x$ -et kell a jobb oldalon helyettesítenünk. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{dt}{dx}(x) = \frac{1}{x}.$$

A többi logaritmus függvény differenciálása már könnyű, mert azok az \ln konstansszorosai.

A láncszabály alkalmazásával számítsuk ki $t \mapsto a^t$ deriváltját. Írjuk át e alapra:

$$a^t = (e^{\ln a})^t = e^{t \ln a}.$$

Ez egy e^{ct} alakú függvény, ahol $c = \ln a$ egy konstans. Két függvényből van összetéve: a $t \mapsto ct$ belső függvényből, aminek a deriváltja c és az $x \mapsto e^x$ függvényből, aminek a deriváltja e^x . Ennek megfelelően a derivált $ce^x = ce^{ct}$. (Más függvéynél is ez a helyzet: ha a függvény változóját szorozzuk egy konstanssal, a derivált szorzódik a konstanssal.) Tehát a^t deriváltja $a^t \ln a$.

Másik példaként tekintsük a $t \mapsto t^a$ függvény deriváltját, ahol a konstans. Átírva e alapra

$$t^a = (e^{\ln t})^a = e^{a \ln t}.$$

Ez hármas összetett függvény: a legbelső függvény $t \mapsto \ln t$, aminek deriváltja $1/t$, a középső $x \mapsto ax$, aminek deriváltja a , és a legkülső pedig $y \mapsto e^y$, aminek deriváltja saját maga. Ennek megfelelően $t \mapsto t^a$ deriváltja $ae^y/t = at^a/t = at^{a-1}$.

Nem felejtettünk el valamit? Mi a hányados deriváltja? A hányados egy függvény szorozva egy másik reciprokával, így elég $t \mapsto 1/x(t)$ deriváltját meghatározni. Ez viszont a $t \mapsto x(t)$ belső függvényből, és az $x \mapsto x^{-1}$ külső függvényből van összetéve, így deriváltja

$$-\frac{\frac{dx}{dt}(t)}{x^2(t)}.$$

Végül azt ígértük, hogy megindokoljuk az Euler-féle összefüggést. A $t \mapsto e^{it}$ leképezés egy síkbeli görbe. A differenciálási szabályok érvényesek akkor is, ha a függvény értékei komplex számok, sőt, lehet a függvény változója is komplex! Ennek a függvénynek a deriváltja ie^{it} , aminek az abszolút értéke minden t -re 1. A függvény tehát az origó középpontú, egységnyi sugarú körön való mozgást ír le, aminek a sebessége egységnyi. Merre indul a mozgás? A derivált a $t = 0$ időpontban i , tehát a mozgás az y tengellyel párhuzamosan felfelé indul. A mozgó pont x koordinátája (a komplex szám valós része) a t időpontban tehát $\cos t$, az y koordinátája (képzetes része) pedig $\sin t$, megkaptuk az Euler-féle összefüggést! Mivel a derivált

$$ie^{it} = -\sin t + i \cos t,$$

azt is megkaptuk, hogy a \cos deriváltja $-\sin$, a \sin deriváltja pedig \cos . ** \square

1.2.7. Kísérlet. Térjünk vissza az $s = 5t^2$ képletéhez, amit a szabadon eső test által megtett útra mértünk (méterben, az idő másodpercben). Láttuk, hogy a sebesség $v = 10t$ (a sebesség m/s-ban). Milyen gyorsan változik a sebesség? A sebesség változását *gyorsulásnak* nevezzük, és a -val jelöljük (acceleration). Hogy megkapjuk, ugyanazt kell tennünk a sebességgel, amit az úttal tettünk, hogy a sebességet megkapjuk, differenciálni. Ez most igen könnyű:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10(t + \Delta t) - 10t}{\Delta t} = 10 \rightarrow 10, \quad \text{ha } \Delta t \rightarrow 0$$

azaz a gyorsulás állandó, 10 m/s^2 . Ez a legegyszerűbb egyenes vonalú nem egyenletes mozgás. \square

1.2.8. Integrálás. Az a probléma is érdekel bennünket, hogy ha egy egyenes vonalú mozgást végző testre ismerjük a sebességét, akkor hogyan határozhatjuk meg, hogy mennyi utat tett meg, mondjuk a t_0 időponttól a t_1 időpontig. Osszuk fel ez az időintervallumot kicsiny Δt hosszúságú intervallumokra, és minden intervallumban vegyük a test $v(t_i)$ sebességét a kis intervallum valamelyik t_i időpontjában. A Δt idő alatt megtett út jó közelítéssel $v(t_i)\Delta t$. Ha ezeket a kis utakat összeadjuk, akkor azt kapjuk, hogy a megtett út $\sum v(t_i)\Delta t$. Ha most $\Delta t \rightarrow 0$, akkor pontosan kapjuk a megtett utat. Amit kaptunk, azt úgy jelöljük, hogy

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt.$$

A furcsa \int (integrál) jel arra utal, hogy összegzésről van szó. A \sum görög S betű (a latin summa-ból) helyére került, ami összegzés jelent. A dt arra utal, hogy a pontos értéket akkor kapjuk, amikor Δt a „végtelen kicsiny” dt -vé válik. Végül is azt kapjuk, hogy

$$s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt,$$

vagy ami ezzel egyenértékű, hogy

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = s(t_1) - s(t_0).$$

Észrevehetjük, hogy ez az eljárás nagyon hasonlít arra, amit egy $t \mapsto f(t)$ görbe alatti terület közelítésére használtunk: ott is kis szakaszokra bontottuk a szakaszt, és minden kis szakaszon közelítettük a területet, majd ezeket összeadtuk. Hogy jobb közelítést kapjunk, nem egy függvényértéket vettünk, hanem vagy a két végpontban vett függvényérték számtani közepét (trapéz-szabály), vagy a két végpontban vett függvényérték összege plusz a közepén vett függvényérték négyszeresét osztottuk hattal, és ezt szoroztuk a kis szakasz hosszával. Tulajdonképpen egy görbe alatti terület egy integrál, így amit tanultunk, az integrál értékének közelítő kiszámítása!

A másik, még jobb módszer, hogy találjuk ki a $t \mapsto s(t)$ függvényt. Első pillantásra ez nagy számárságnak hangzik, hiszen éppen ez a feladat, amit meg szeretnénk oldani.

Fogalmazzuk meg kicsit másként: Találjunk egy olyan függvényt, aminek $t \mapsto v(t)$ a deriváltja. Ezt úgy lehet megtenni, hogy szorgalmasan összegyűjtünk differenciáláskor egy táblázatot, hogy minek mi a deriváltja, és most visszafele használjuk ezt a táblázatot! És mi van, ha nem a megfelelő $t \mapsto s(t)$ függvényt találtuk meg? Több függvénynek is lehet ugyanaz a deriváltja. Például az „igazi” $s(t)$ függvényen kívül az $\tilde{s}(t) = s(t) + c$ „hamis” $\tilde{s}(t)$ függvénynek is ugyanaz a deriváltja, mert a konstans deriváltja nulla. Szerencsére erre a „hamis” függvényre is

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = \tilde{s}(t_1) - \tilde{s}(t_0),$$

mert a különbségképzésnél a konstans kiesik! De hátha van „egészen hamis” $\tilde{s}(t)$ függvény, ami nem csak konstansban különbözik az igazitól? Nem, ilyen nincs, ez a fizikai szemléletünkből is következik, mert a sebesség meghatározza az út változását.

Foglaljuk össze mégegyszer, amire jutottunk. Egy $t \mapsto f(t)$ függvényre a t_0 és t_1 közötti szakaszon a görbe alatti terület (az integrál) meghatározásához keressünk egy olyan $t \mapsto F(t)$ függvényt, aminek f a deriváltja. Egy ilyen függvényt az f primitív függvényének vagy *határozatlan integráljának* nevezünk. (Ha f folytonos, akkor mindig van ilyen.) Az összes primitív függvény halmazát $\int f(t) dt$ jelöli; ezek csak konstansban különböznek. Bármely F primitív függvényre

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = F(t_1) - F(t_0),$$

ez a *Newton–Leibniz-formula*.

A primitív függvény keresésnek is megvannak a maga szabályai, például ha c konstans, akkor

$$\int (f(t) + cg(t)) dt = \int f(t) dt + c \int g(t) dt.$$

Integrálásra használjunk egyelőre inkább számológépet, mert nem egyszerű megtanulni.

1.2.9. Kísérlet. Egy helikopterből kiugró ejtőernyős sebességét szeretnénk meghatározni az idő függvényében. Nem egyenletesen változó mozgást végez: egy darabig gyorsul, majd a sebessége majdnem állandó lesz, nagyjából 50 m/s. Amikor kinyitja az ejtőernyőt, hirtelen lassul, majd a sebessége újra majdnem állandó lesz. A mozgás teljes vizsgálatához ismernünk kellene a mozgás okait. Ez a következő fejezetek tárgya, e nélkül nem juthatunk messzire. El is halasztjuk a bonyolultabb mozgások vizsgálatát, de példaként ebben az egy esetben elvégezzük a vizsgálatot. Csak a mozgásnak az ejtőernyő nyitásáig terjedő szakaszát vizsgáljuk. A mozgást a

$$\frac{dv}{dt}(t) = g - cv^2(t)$$

egyenlet írja le. A bal oldalon a gyorsulás áll. A jobb oldalon a szabadon eső test gyorsulása áll, ez növeli a sebességet (ami kezdetben nulla), a másik tag — ami a levegő

súrlódásából adódó közegellenállásnak felel meg — pedig csökkenti. A kísérletek szerint az utóbbi tag arányos a sebesség négyzetével. Egy idő után a sebesség állandó 50 m/s lesz, így a gyorsulás nulla. Innen $g = c \cdot 2500 \text{ m}^2/\text{s}^2$, ahonnan $c = 0,004/\text{m}$. Persze, a c konstans függ például az ejtőernyős testtartásától, de ettől most eltekintünk.

Az ilyen típusú egyenleteket, amelyekben az ismeretlen függvény és a differenciálhányadosa, esetleg annak a differenciálhányadosa, stb. is szerepel, *differenciálegyenlet*nek nevezzük. Nagyon gyakoriak a természettudományokban, mert a természettörvényeket gyakran ilyen egyenletekkel tudjuk leírni. Itt az ismeretlen a sebesség, mint az idő függvénye. Ezt az egyenletet meg lehetne oldani akár tetszőleges kezdősebességre is, de ahhoz integrálni kéne tudni. Valóban, gondoljunk arra, hogy az integrálás tulajdonképpen egy

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t)$$

differenciálegyenlet megoldása, ahol $x(t)$ az ismeretlen függvény, $f(t)$ ismert. Egy differenciálegyenlet általánosságban

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$$

alakú, ahol $x(t)$ az ismeretlen függvény, f ismert. A differenciálegyenletek megoldásával a matematikai részben részletesen foglalkozunk. A komputeralgebra rendszerek tudnak differenciálegyenleteket megoldani, használjuk ki ezt a képességüket!

1.2.10. Differenciálegyenletek megoldása. Az integrálás legnagyobb haszna a fizikában a differenciálegyenletek megoldása. ** A bátrabbak számára, akik nem ijednek meg az integrálástól, leírjuk néhány egyszerű differenciálegyenlet típus megoldási receptjét. Az ismeretlen függvényt x -szel jelöljük, a változóját t -vel, de nem írjuk ki.

A

$$g(x) \frac{dx}{dt} = f(t)$$

alakra hozható, úgynevezett *elsőrendű szeparábilis* differenciálegyenlet minden megoldása megkapható a

$$G(x) = F(t) + c$$

egyenletből kifejezve x -et, ahol c tetszőleges konstans, F a f , a G pedig a g egy primitív függvénye. Az elsőrendű jelző arra utal, hogy csak az ismeretlen függvény első deriváltja szerepel az egyenletben. A képlet könnyen megjegyezhető: írjuk az egyenletet $g(x) dx = f(t) dt$ alakba, majd integráljuk mindkét oldalt. A szeparábilis (szétválasztható) jelző arra utal, hogy a változókat szét lehet választani a két oldalra.

Egy másik könnyen megoldható típus az *elsőrendű lineáris* differenciálegyenlet:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + g(t).$$

A $t \mapsto x(t)$ függvény akkor és csak akkor megoldása ennek az egyenletnek, ha benne van az

$$e^F \int g(t) e^{-F(t)} dt$$

függvényhalmazban, ahol F a f egy tetszőleges primitív függvénye.

A fizikában gyakran előforduló típus az *inhomogén másodrendű lineáris* differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(t) \frac{dx}{dt} + g(t)x = h(t).$$

Ennek a megoldásához előbb a megfelelő *homogén másodrendű lineáris*

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + f(t) \frac{dx}{dt} + g(t)x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A homogén lineáris jelző arra utal, hogy — mint behelyettesítéssel könnyen adódik — a megoldások konstansszorosai is megoldás, és megoldások összege is megoldás. Ez utóbbi egyenlet összes megoldását könnyen fel tudjuk írni, ha találunk két, x_1 és x_2 megoldást, úgynevezett *alaprendszer*t, amelyre a

$$\frac{dx_1}{dt} x_2 - \frac{dx_2}{dt} x_1$$

függvény seholsem nulla. Ekkor pontosan az $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$ alakú függvények a homogén egyenlet megoldásai, ahol c_1 és c_2 konstansok. Ha még az inhomogén egyenletnek is találunk egy x_0 megoldását, akkor annak az összes megoldását is fel tudjuk írni: ezek az $x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2$ alakú függvények, ahol c_1 és c_2 konstansok. De hogyan találjuk meg az inhomogén egyenlet egy megoldását, illetve a homogén egyenlet egy alaprendszerét, vagy legalábbis egy megoldását? Néha segít a *próbafüggvények módszere*. Az inhomogén egyenlet egy megoldását például mindig megtalálhatjuk, ha a homogén egyenlet megoldásában a c_1, c_2 együtthatókat függvényeknek tekintjük, és a

$$\frac{dc_1}{dt} x_1 + \frac{dc_2}{dt} x_2 = 0 \quad \text{és} \quad \frac{dc_1}{dt} \frac{dx_1}{dt} + \frac{dc_2}{dt} \frac{dx_2}{dt} = h$$

feltételeket rójuk ki rájuk. Ezt az egyenletrendszert megoldva megkapjuk c_1 és c_2 deriváltját és integrálással c_1 -et és c_2 -t. Ez a *konstans variálásának módszere*. Hogyan kaphatunk azonban alaprendszeret? Ha valahogyan találunk a homogén egyenletnek egy x_1 megoldását, akkor $x_1 \int y$ alakban érdemes másik megoldást keresni, ahol y ismeretlen függvény. De hogyan találunk egy megoldást? Hatványfüggvény, polinomszor hatványfüggvény, ilyen függvények összege, stb., alakban kereshetjük, az f és g függvények alakja is ötletet adhat.

Nézzünk egy egyszerű példát. Legyen a homogén egyenlet

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + b = 0,$$

ahol a és b konstansok. Az $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban keresve egy megoldást a $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ egyenlethez jutunk. Ha az egyenletnek két valós gyöke van, mindjárt egy alaprendszer kapunk. Ha két komplex gyök van, akkor bármelyik komplex megoldás valós és képzetes

része alaprendszer ad. Ha csak egy λ gyök van, akkor $x_1(t) = e^{\lambda t}$ jelöléssel, $x_1 \int y$ alakban keresve egy másik megoldást visszahelyettesítve

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) \int y + 2\lambda \frac{dx_1}{dt} y + a \frac{dx_1}{dt} y + x_1 \frac{dy}{dt} = (2\lambda + a) \frac{dx_1}{dt} y + x_1 y' = 0.$$

Mivel λ a másodfokú egyenlet kétszeres gyöke, $a = -2\lambda$, így azt kapjuk, hogy $dy/dt = 0$, azaz y konstans, mondjuk 1. Innen $x = x_1 \int 1$, mondjuk $x(t) = te^{\lambda t}$. **

1.2.11. Kísérlet: differenciálegyenletek numerikus megoldása. Mit tudunk az ejtőernyős problémájával kezdeni, ha nem tudunk integrálni? Meghatározhatjuk a megoldást közelítően. A legegyszerűbb módszer, amit a megoldásra használhatunk, az *Euler-módszer*: abban áll, hogy egy t_0 időpontból indulunk ki, amelyhez tartozó v_0 sebességet ismerjük, választunk egy elég kis Δt időkülönbséget, és az egyenletből kiszámítjuk a $\Delta v/\Delta t$ hányadost (közelítőleg). Szorozva Δt -vel, kapjuk a Δv különbséget, és így $v_1 = v_0 + \Delta v$ -t, a sebesség közelítését a t_1 időpontban. Itt most a $t_0 = 0$ időpontból indulhatunk, amikor $v_0 = 0$. Ezt ismételtetjük, amíg a szükséges időpontot — például 10 s-ot — el nem érjük. Például lehet $\Delta t = 1$ s.

Az Euler-módszer meglehetősen durva közelítést ad. Ahhoz hasonlít, mintha egy szakaszon vett görbe alatti területet a szakaszt sok kis szakaszra osztva, azok végpontjaiban vett függvényértékeknek megfelelő magasságú téglalapok területének összegével akarnánk közelíteni a trapéz módszer helyett. A trapéz módszer felhasználná a jobb oldal értékét a t_1 , v_1 helyen, azonban v_1 értékét most nem ismerjük, éppen azt keressük!

A javított Euler-módszerhez vagy Heun módszeréhez jelöljük az Euler-módszerrel kiszámított Δv értéket inkább $\Delta \tilde{v}$ -mal, és legyen $\tilde{v}_1 = v_0 + \Delta \tilde{v}$. A jobb oldalon v helyére \tilde{v}_1 -ot, t helyére t_1 -et írva, kapunk valamilyen \tilde{v}_1 értéket. Legyen $\Delta \tilde{\tilde{v}}_1 = \tilde{v}_1 - v_0$, legyen Δv a $\Delta \tilde{v}$ és $\Delta \tilde{\tilde{v}}$ számtani közepe, azaz az összegük fele, és $v_1 = v_0 + \Delta v$.

Még jobb a görbe alatti terület kiszámítására használt trapéz módszer pontos megfelelőjét használni, amit itt is *trapéz módszernek* neveznek. Úgy próbáljuk v_1 -et megválasztani, hogy a

$$v_1 - v_0 = \Delta v = \frac{\Delta t}{2} \cdot (g - cv_0^2 + g - cv_1^2)$$

egyenlet teljesüljön. Itt most szerencsénk van, ez az egyenlet könnyen megoldható, mert v_1 -ben másodfokú. Ha nincs ilyen szerencsénk, akkor azt tehetjük, hogy valamely alkalmas — mondjuk a Heun-módszerrel kapott — kezdő v_1 -et behelyettesítünk az egyenlet jobb oldalába, kapunk egy Δv -t, és ezzel egy jobb v_1 -et, ezt újra behelyettesítjük a jobb oldalba, stb. Mindezt addig csináljuk, amíg v_1 változása jelentősen csökken, mondjuk kisebb, mint az előző lépésbeli változás fele. Általában pár behelyettesítés elég, ha Δt kicsi. Az utolsó v_1 -et használjuk a továbblépéshez. A Heun-módszert használjuk *prediktor* (jósló) formulának, a trapéz-módszert pedig *korrektor* (javító) formulának.

Milyen pontosak ezek a módszerek? Az Euler-módszernél egy-egy lépés hibája kis Δt -re arányos Δt négyzetével, a Heun módszerénél és a trapéz módszerénél viszont egy-egy lépés hibája Δt köbével arányos. Azt szoktuk mondani, hogy az Euler-módszer *másodrendű*, a másik két módszer viszont *harmadrendű* közelítést ad. Jó-jó, de még mindig nem tudjuk, mekkora a hiba. Úgy becsülhetjük, hogy megismételjük az egész számítást

kétszer annyi lépéssel, azaz fele akkora Δt -vel. A 0 időponttól indulva 1 s-os lépésekkel 10 lépésben az Euler-módszernél így 49,0924 m/s-ot kapunk, 1/2 s-os lépésekkel 20 lépésben pedig 48,6599 m/s-ot. Mivel az Euler-módszer másodrendű, egy-egy lépés hibája negyedelődött, viszont kétszer annyi lépés van, a teljes hiba nagyjából feleződött. A két számított érték között a különbség $-0,4325$ m/s, így a valódi érték közelítése 48,2274 m/s. Újra felezve Δt -t, és ismét megismételve a számítást, az eredmény 48,4332 m/s, most a különbség $-0,2267$ m/s, a valódi érték közelítése 48,2065 m/s. Végül még egyszer felezve az eredmény 48,3179 m/s, a különbség $-0,1153$ m/s, a valódi érték közelítése 48,2026 m/s. Ha Heun módszerével számolunk, az első eredmény 48,0403 m/s, fele akkora lépésközzel pedig 48,1669 m/s. Mivel ez a módszer harmadrendű, egy-egy lépés hibája nyolcadára csökkent, de kétszer annyi lépés van, a hiba teljes hiba negyedelődött, ezért a javítás a két eredmény különbségének, $0,1263$ m/s-nak a harmada. Így a valódi érték közelítése 48,2080 m/s. Hasonló az eljárás a trapézmódszernél is: Az első eredmény 48,2287 m/s, fele akkora lépésközzel 48,2079 m/s, a különbség $-0,0208$ m/s, a valódi érték közelítése 48,2010 m/s. Megfigyelhetjük, hogy az első 1–2 másodpercben a mozgás gyakorlatilag egyenletesen változó. Kétszer akkora időtartamra végrehajtva a számolást, látjuk, hogy 15 s után a mozgás gyakorlatilag egyenletes.

A közegellenállás függ a levegő sűrűségétől is, ami viszont a magasság függvénye. Felhajtóerő is van, ami szintén a levegő sűrűségének így a magasságnak a függvénye. Ha ezeket is figyelembe kívánjuk venni, két ismeretlen függvényünk van, a magasság és a sebesség. Az előző egyenletben c már nem konstans, hanem a h magasság függvénye. Ha több ismeretlen függvényünk is van, mindegyikhez kell egy-egy egyenlet. Az új egyenlet

$$\frac{dh}{dt}(t) = v(t).$$

Mindegyik egyenletben az ismeretlen függvény differenciálhányadosa a független változó és az ismeretlen függvények egy adott függvénye. A független változó az idő. A sebesség változása függ a sebességtől és — mivel a levegő sűrűsége, így a légellenállás is változik a magassággal — a magasságtól is. A magasság változása a sebességtől függ. Ilyen *differenciálegyenlet-rendszerek* megoldására a trapézmódszer használható, mivel a többi módszer nem elég stabil. Mint majd látni fogjuk, ha a Nap és a nyolc bolygó mozgását akarjuk meghatározni, akkor 54 ismeretlen függvényünk van: minden égitestre a helyének és a sebességének három-három komponense.

Természetesen, mint ahogy a görbe alatti terület számítására is vannak a trapézmódszernél jobb módszerek, itt is. Mégis, már ennyi is elég, hogy nagyon sok problémát meg tudjunk oldani. \square

1.2.12. Kísérlet. Egy tetszőleges mozgásnál a helyvektort kell megadnunk az idő függvényében. Persze, valamihez viszonyítanunk kell, tekintenünk kell egy úgynevezett koordinátarendszert. Ha más nem mondunk, akkor ezt a Földhöz rögzítjük. Vesszünk egy rögzített pontot a Földön, és a *helyvektort* három számmal adjuk meg: a kezdőponttól mennyit kell menni délre, majd keletre, végül felfelé, hogy az adott pontba érjünk. (A háromból bármelyik lehet negatív is.) Például a hely lehet $\mathbf{r} = (5 \text{ m}, -2 \text{ m}, 3 \text{ m})$, azaz 5 métert kell mennünk délre, 2 métert keletre és 3 métert felfelé. Ezt írhatjuk

$\mathbf{r} = (5, -2, 3)$ m alakban is, de az $(5, -2, 3)$ hármast önmagában, mértékegység nélkül nem tekintjük fizikai mennyiségnek, csak matematikai konstrukciónak. A helyvektort jellemző három hosszúságot nevezzük *helykoordinátáknak*. Gyakran az elsőt x -szel, a másodikat y -nal, a harmadikat z -vel jelöljük. A vektorok összeadásának az felel meg, hogy a megfelelő koordinátákat összeadjuk, számmal való szorzásának pedig az, hogy mindegyiket szorozzuk az adott számmal. Az r helyvektort írhatjuk $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban is, ahol $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ (matematikai) vektorok. A fizikában az a szokás, hogy a vektorokat kövér betűvel jelöljük, és a betű nem kövér változata a vektor hosszát jelöli, tehát itt most $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Az \mathbf{r} persze mozgó testeknél függ az időtől. Például $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0, 25t)$ m egy spirálvonalon mozgó test mozgását írja le: nézzük meg a programot. \square

1.2.13. Kísérlet. A t és $t + \Delta t$ időpontok közötti *elmozdulásvektor* az $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ vektor, azaz a $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ vektorhoz hozzáadjuk a $\mathbf{r}(t)$ vektor ellentettjét. Ha az elmozdulásvektort osztjuk a Δt időtartammal (azaz szorzunk a reciprokéval), majd Δt -t nullához közelítjük, a $\mathbf{v}(t)$ *sebességvektort* kapjuk. Ez — kissé pontatlanul — az egységnyi időre eső elmozdulásvektor, így ez is vektor. Tehát a sebességek vektorként viselkednek. A sebességvektor koordinátáit v_x, v_y, v_z -vel szokás jelölni, azaz $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$. Az x, y, z függvényeket differenciálva számíthatók ki: lásd a programot.

Tovább is mehetünk, a sebességvektort az idő szerint differenciálva kapjuk a gyorsulásvektort:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)). \quad \square$$

1.2.14. Kísérlet. A nem egyenes vonalú mozgások közül a *körmozgás*, azaz körön való mozgás a legegyszerűbb. Legyen a kör sugara r . Feltehetjük, hogy a kör középpontja az origó, és az xy síkban fekszik, azaz z mindig nulla (vagy így választjuk meg a koordinátarendszert). A helyzetet egyetlen szöggel jellemezhetjük, az x tengely pozitív fele és a \mathbf{r} helyvektor által bezárt φ szöggel: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. A r jelölés jogos, mert \mathbf{r} hossza éppen r . * Ha az xy síkot a komplex síknak fogjuk fel, akkor egyébként $\mathbf{r} = r e^{i\varphi}$. * Persze, ha mozog a test, akkor φ függ az időtől. Számoljuk ki a sebességet! Aki nem tud differenciálni, nézze meg a programot! Azt kapjuk, hogy

$$\frac{dx}{dt}(t) = -r \frac{d\varphi}{dt}(t) \sin \varphi(t), \quad \frac{dy}{dt}(t) = r \frac{d\varphi}{dt}(t) \cos \varphi(t).$$

A $\varphi(t)$ szög deriváltját $\omega(t)$ -vel jelöljük és *szögsebességnek* nevezzük. (A szögsebesség deriváltja a *szöggyorsulás*.) Ezzel a jelöléssel

$$\mathbf{v}(t) = (-r\omega(t) \sin \varphi(t), r\omega(t) \cos \varphi(t), 0).$$

Az utolsó koordináta nulla, így a sebességvektor is az xy síkban van. A nagysága $v(t) = r\omega(t)$. A \sin és a \cos helyet cserélt, és az egyik előjelet váltott, így a sebességvektor merőleges a helyvektorra, azaz a kör érintőjének irányába mutat.

A körmozgások közül a legegyszerűbb az *egyenletes körmozgás*. Ennek a szögsebessége és így a sebesség nagysága is állandó, nem függ az időtől, $v = r\omega$. A szögelfordulás nyilván

$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$, ahol φ_0 a nulla időponthoz tartozó szög. A szögsebességet jellemezhetjük a másodpercenkénti körülfordulások számával is, amit n -nel szokás jelölni. Ha T egy körülfordulás ideje, akkor $n = 1/T$, így n egysége $1/s$. Mivel egy körülfordulás 2π szöget jelent, $\omega = 2\pi n$.

Az egyenletes körmozgásnál a sebesség nagysága állandó, de maga a sebesség nem, mert az iránya állandóan változik. Differenciálással

$$\mathbf{a}(t) = (-r\omega^2 \cos(\varphi_0 + \omega t), -r\omega^2 \sin(\varphi_0 + \omega t), 0),$$

azaz a gyorsulásvektor is a kör síkjában van, nagysága $r\omega^2$, és iránya ellentétes $\mathbf{r}(t)$ irányával. A nagyságra és az irányra vonatkozó állítás nem egyenletes körmozgásra nem marad igaz. \square

1.3. Erő és tömeg

A mozgásokról nem lehet túl sokat mondani, ha nem tudjuk a mozgás okait. Ezt Newton 1666-ban az erőkben találta meg. Az erőről mindenkinek van valami fogalma mindennapi tapasztalataink, izomerőnk alapján. Newton törvényei összekapcsolják az erőket a mozgásokkal.

1.3.1. Kísérlet. Newton első törvénye szerint minden test megtartja sebességét, amíg annak megváltoztatására (más testektől származó) külső erők nem kényszerítik. Ebbe azt az esetet is beleértjük, amikor a sebesség nulla, és azt is, hogy a sebességnek az iránya sem változik, azaz a gyorsulás nulla. Ha például jégen meglökünk egy jégdarabot, jó sokáig csúszik, amíg a súrlódás lassan megállítja. Egy sima, vízszintes felületen elgurított golyó még tovább gurul. A törvény ellen azzal érvelhetnénk, hogy végül is megáll. Azonban például a Hold változatlan nagyságú sebességgel kering a Föld körül, és ezt már évezredek óta látjuk, és évmilliárdok óta fennáll. Igaz, a sebesség iránya változik, de ezt meg fogjuk tudni magyarázni. \square

1.3.2. Kísérlet. Állítsunk egy gyufásdoboz a legkisebb lapjára egy papírlapon. Ha óvatosan húzni kezdjük a papírlapot, majd kezünk nekiütöközik valaminek, a gyufásdoboz előredől. Ha hirtelen rántjuk meg a papírlapot, a gyufásdoboz hátradől. Ha hirtelen meglökjük a papírlapot, előredől. Minden nap tapasztaljuk ezt, ha buszon utazunk, különösen ha állva. Ha a busz fékez, előredőlünk, kapaszkodnunk kell, erőt kell kifejtenünk, mert testünk igyekszik megtartani sebességét. Ha hirtelen indul a jármű, szintén kapaszkodni kell, mert testünk igyekszik megtartani nulla sebességét. Ha kanyarodik, testünk igyekszik megtartani sebességének irányát. Ezért nevezik Newton első törvényét a *tehetetlenség törvényének* is. \square

1.3.3. Kísérlet. Tegyük egy pohárra egy kartonlapot, például kártyalapot, arra egy pénzdarabot. Pöcköljük meg a kartonlapot: elrepül, de a pénzdarab a pohárba esik. A magyarázat, hogy ha erősen pöcköltük meg a lapot, gyors mozgásba jön. A lap és a pénzdarab közötti súrlódás gyorsítja a pénzdarabot is, de rövid ideig, nem jön elég gyors mozgásba, és a pohárba esik. \square

1.3.4. Kísérlet. Az aszalon lévő tányér alól gyors mozdulattal kiránthatjuk az abroszt anélkül, hogy a tányér leesne. Lehetőleg ne az ünnepi teríték alól próbáljuk meg kirántani az abroszt! Tegyük az asztal szélére egy papírlapot, arra egy műanyag pohár vizet és rántsuk ki a papírlapot! \square

1.3.5. Kísérlet. Milyen koordináta-rendszerben igaz Newton első törvénye? Úgynevezett *inerciarendszerekben* (inercia=tehetetlenség). Ezekben ha egy test bárhol nyugalomban van, akkor nyugalomban is marad. Ha egy koordináta-rendszer inerciarendszer, akkor bármely, hozzá képes egyenes vonalú egyenletes mozgást (de forgást nem) végző rendszer is inerciarendszer. Például a Föld körül keringő űrhajó elég jó közelítéssel inerciarendszer, nagyjából 1 óra alatt kerüli meg a Földet, ehhez képest kicsiny időtartamok alatt nem észlelünk elmozdulást. Nézzünk meg egy videófelvételt az űrállomás belsejéről! A Marsra tartó űrhajóban 1 óra helyett 1 év alatt lesz jelentős az elmozdulás. A Naprendszer elhagyó űrhajón, amikor távol jár már a Naptól, évmilliók alatt sem vehető észre elmozdulás, ha pedig már a galaxisoktól is távol jár, évmilliárdok alatt sem. \square

1.3.6. Kísérlet. A *tömeg* (azaz az anyagmennyiség) egységét a méterrendszerben a méterhez igazították. Egy cm^3 (hideg) víz tömegét választották egységnek, ez a gramm (jele g). Pontosabban, készítettek egy 1 dm^3 -es kockát, és az ebbe beleférő víz tömegével egyenlő tömegű mérőszínyt, ez az alap kilogramm. Minden más mérőszínyt ehhez hasonlítottak. Ezt nagyon pontosan meg lehet tenni kétkarú mérleggel, az összehasonlítás hibája a százaléknak a milliomodrésze, azaz $1\text{‰}\text{‰}\text{‰}$. Később kiderült, hogy az alapkilogramm 28 milliomodrésszel, azaz $28\text{‰}\text{‰}\text{‰}$ -kel nagyobb tömegű, mint 1 dm^3 víz, de már nem változtattak rajta, és lényegében ma is ezt használjuk. Az eltérés a gyakorlatban elhanyagolható. Az Mg-nak más neve is van, ez a *tonna* (jele t).

A tömeg mérésére szükségünk lesz egy jó mérlegre. Manapság már nagyon sok háztartásban van 5 kg-ig mérő, 1 g érzékenységgel *digitális mérleg*. Ez tökéletesen megfelelő nekünk. Még jobb az a típus, amely 5 kg-ig 1 g, de 500 g-ig 0,1 g, azaz 1 dg érzékenységgel. Ha nem jutunk digitális mérleghez, akkor egy régi tolósúlyos mérleg is megteszi, ezzel 12 kg-ig 1 dag (dekagramm) érzékenységgel mérhetünk. Ezzel már nem minden kísérletet tudunk elvégezni. Ennél pontatlanabb mérleggel nem sokat tudunk kezdeni. Persze, a konyhai mérlegeknél sokkal érzékenyebb digitális mérlegek is kaphatók, de elég drágák.

Esetleg bosszantónak tűnhet, hogy 1 dm^3 víz tömege nem pontosan 1 kg. Hogyan követhettek el ilyen hibát? Próbáljuk meg magunk megmérni 1 dm^3 víz tömegét! Egy üres fazék tömegét 1486 g-nak mértem, vizet öntöttem bele, így a tömege 4650 g lett, tehát a víz tömege 3164 g. A fazék átmérőjét 257 mm-nek mértem, míg a víz mélységét (középen) 59,3 mm-nek, ahonnan a víz térfogata 3076 cm^3 . Ebből 1 dm^3 víz tömegére 1,029 kg adódik. Inkább csodálkoznunk kell, milyen pontosan mértek több, mint kétszáz éve. Az én mérésem hibája több, mint ezerszer akkora. \square

Talán meglepő, de a csodaszép digitális mérleg, bár sokkal kényelmesebb használni, semmivel sem pontosabb, mint egy jó kétkarú mérleg. Például a Holdon teljesen használhatatlan lenne, a valódi tömegnek kb. a hatodát mutatná. Ezt még nem bánánk, de a Földön is hogy mennyit mutat, attól függ, hol van. Ez azért van, mert a digitális mérleg tulajdonképpen nem tömeget, hanem a Földnek az adott tárgyra ható vonzóerejét, a *súlyerőt*, a tárgy *súlyát* méri. Igaz, a kétkarú mérleg is, de azt a súlyokra ható vonzóerővel

hasonlítja össze. Így ahányszorosára változik az egyik, annyiszorosára változik a másik is, és a kétkarú mérleg a Holdon is pontos lenne. Mekkora eltérést várhatunk a digitális mérlegnél? Ha egy 5 kg-os tömeget például a Duna szintjéről felviszünk a Kékes csúcsára, mennyit mutat a mérleg? A Föld vonzóereje a középpontjától mért távolság négyzetével fordítva arányos, azaz ahogy nő a távolság négyzete, úgy csökken a vonzóerő. Az északi saroktól az egyenlítőig a távolság 10 000 km, így a Föld kerülete 40 000 km, tehát a sugara $40\,000/(2 \cdot \pi) \approx 6366$ km. A Kékestető $\approx 0,9$ km-rel magasabban van, mint a Duna, tehát $\approx 0,14\%$ -kal távolabb van a Föld középpontjától, így a távolság négyzete $\approx 0,28\%$ -kal nagyobb, a vonzóerő tehát $\approx 0,28\%$ -kal kisebb. Így az 5 kg-os tömegnél 1,4 g-nak megfelelő eltérés várható! Még rosszabb a helyzet, ha a digitális mérleget az északi sarkra vagy az egyenlítőre visszük. A sarkon kb. $2,6\%$ -kal nagyobb a vonzóerő, az egyenlítőnél pedig kb. $2,6\%$ -kal kisebb, mint az északi sark és az egyenlítő között félúton, a tengerszinten. (Ez főleg abból adódik, hogy a Föld nem tökéletes gömb, hanem lapult, a sarkok közelebb vannak a középpontjához, mint az egyenlítő.) Az európai nagyvárosoknál $\pm 1\%$ körüli az ingadozás, tehát 5 kg-nál ± 5 g! Ezt a problémát úgy szokták kiküszöbölni, hogy a jobb digitális mérlegekhez adnak egy „beállítótömeget”, és ezzel be lehet állítani, hogy az adott helyen helyesen mérjen.

Néha nem is tömeget, hanem erőt akarunk mérni. Ilyenkor ideális a digitális mérleg, különösen, ha erőegységnek azt az erőt választjuk, amivel 1 g tömeget az adott helyen a Föld vonz, ez lenne a pond (jele p), amit régebben használtak. Sajnos, mint fentebb láttuk, így az erőegység függne a helytől. Inkább olyan erőt kellene használni, ami nem függ a helytől. Ha egy úrhajón, a súlytalanság állapotában egy 1 tonnás szekrény repül felénk másodpercenként 1 métert téve meg, azaz 1 m/s sebességgel, ugyanúgy a falhoz lapít, mint a Földön, ha nem szedjük össze minden erőnket, hogy megállítsuk. Pedig ez a sebesség elég kicsi, 3 600 méter óránként, azaz 3,6 km/ó, lassú séta sebessége! Ha 1 s időnk van rá, hogy megállítsuk, kb. 102 kp (kilopond) erőre lesz szükségünk. Az erő egységét ilyen alapon választották meg: 1 newton (jele N) az az erő, ami egy 1 kg tömegű test sebességét 1 s alatt 1 m/s-mal változtatja meg. Másként tehát 1 newton az az erő, ami egy 1 kg tömegű testet 1 m/s² gyorsulással gyorsít. Az egységet Newton angol fizikusról nevezték el. (A személyekről elnevezett mértékegységeket nagy betűvel jelöljük.) A fentiek szerint kifejezhető a tömeg, a hosszúság és az idő egységeivel, tehát nem igazán új egység: 1 N=1 kg·m/s². (Ezért is nem függ a helytől.) A pondra azt mondták, hogy legyen 1 p=9,80665 mN (pontosan), ez majdnem pontosan az az erő, amivel 1 g tömeget az északi sark és az egyenlítő között félúton a tengerszinten a Föld vonz. A newton tehát kb. 2 %-kal nagyobb, mint a kp tizede.

1.3.7. Kísérlet. Mi a matematikai összefüggés, ami összekapcsolja az erőt a mozgással? Ez Newton második törvénye:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

Itt \mathbf{F} az erő, m a tömeg és \mathbf{a} a gyorsulás. Az egyenlet vektoregyenlet, két (esetleg az időtől, helytől, sebességtől, stb. függő) vektort kapcsol össze. Koordinátákban kiírva

$$(F_x, F_y, F_z) = m \cdot (a_x, a_y, a_z).$$

Vizsgáljuk meg például, hogy következik a szabadesés törvénye ebből. A szokásos koordinátarendszerben, nem túl távol a földfelszíntől egy m tömegű testre a tömegével arányos, lefelé mutató erő hat. (Hogy miért, arra majd visszatérünk.) Tehát $F_x = 0$, $F_y = 0$ és $F_z = -mg$, ahol g az arányossági tényező. Innen $a_x = 0$ és $a_y = 0$, azaz az x és y irányokban egyenes vonalú egyenletes mozgás történik, mintha inerciarendszerben lennénk. Másrészt $-mg = ma_z$, azaz $a_z = -g$, egy konstans. Integrálással

$$z = z_0 + v_z t - \frac{g}{2} t^2.$$

Nemcsak a szabadesés törvényét kaptuk meg, hanem a függőleges hajításét is. \square

1.3.8. Kísérlet. Mindennapi tapasztalat, hogy ha nyomjuk az asztalt, úgy érezzük, hogy az asztal is nyomja a kezünket. Ha húzunk egy kötelet, a kötél is húzza a kezünket. *Newton harmadik törvénye* azt mondja ki, hogy ha egy test hat egy másik testre valamilyen erővel, akkor a másik test is hat az elsőre egy ugyanakkora, de ellentétes irányú erővel, úgynevezett *ellenerővel*.

Végezzünk erre egy kísérletet! Mágnesre kötözzünk cérnát vagy két kis mágneset (például ajtómagneszből szedhetjük ki) tapasszunk egymáshoz, közéjük egy cérnaszálat csipetve. Egy hasonló tömegű vasdarabot (például csavaranyát, csavart, stb.) kötözzünk cérnára! Két kezünkkel mindkettőt emeljük fel! Rendszerint vadul lengenek. Várjuk meg, amíg a lengés lecsillapodik! Ezt elősegíthetjük azzal, hogy hagyjuk finoman az asztalhoz súrlódnia a testeket. Ha már alig mozognak, közelítsük őket egymáshoz. Ha elég közel kerülnek, megindulnak egymás felé, és összetapadnak. Azt szokták mondani, hogy a mágnes vonzza a vasat, de látjuk, hogy a vas is hat a mágnesre: a két erő egyforma. Cseréljük ki a vasat kisebbre (alátét, gémkapocs, stb.)! Most azt látjuk, hogy jobban gyorsul a mágnes felé: az erők egyformák, de kisebb a tömeg. Ha nagyobb tömegű vasat veszünk, mint a mágnes, a mágnes gyorsul jobban ugyanezért.

Ugyanezt tapasztaljuk például vízen úszó csónakoknál. Ha az egyikből ellökjük a másikat, mindkettő megindul, függetlenül attól, melyikből jön a lökés. \square

1.3.9. Kísérlet. A hatás-ellenhatás törvényét jól szemlélteti a Segner János András magyar matematikus-fizikus által feltalált Segner-kerék. Egyszerű modellje az 1.3.1. fényképen látható. A lapos műanyag palackon alul az oldalán két helyen egymással átellenesen fúrjunk pár mm átmérőjű lyukat! Fúrjuk ki a tetejét is, és dugjunk át a lyukon egy vékony de erős szálat; én horgászszinórt („damilt”) használtam. A kb. 1 m-es szinórt belül egy fa, műanyag vagy alumínium darabkára kötözzük, kívül pedig például egy ceruzára, hogy könnyű legyen fogni. A palacktetőt emeljük fel a szállal! Ha a szál meg van csavarodva, forogni kezd. Várjuk meg, amíg a forgás megáll, esetleg valamihez finoman odasúrolva a tetőt! Töltsük meg a palackot vízzel, és csavarjuk rá a tetőt, vigyázva, hogy a szálat ne csavarjuk meg újra! Emeljük fel a palackot a ceruzánál fogva! A palack forgásba jön. A magyarázat, hogy a kiáramló vizet gyorsító erő (ami a víznyomásból ered) ellenereje hat a palackra, és hozza forgásba. (Egyébként egy lyuk is elég.) Segner ezen az elven működő vízimalmot is épített. \square

1.3.10. Kísérlet. Még egyszerűbb kísérlet is mutatja az ellenerő felléptét: fújunk fel egy lufit és engedjük el! A gumi feszülése megnöveli a belső levegő nyomását, ez

felgyorsítja a kiáramló levegőt. Az ellenelő gyorsítja a luft. Ezen az elven működnek a rakéták, de a (hatalmas) nyomást lőpor vagy ahhoz hasonló keverék égése hozza létre. \square

1.3.11. Kísérlet. Látványos bemutatása a hatás-ellenhatásnak és a rakétaelvnek a vízrakéta. Egy egyszerű műanyag palack, amit félig megtöltünk vízzel és egy átfúrt parafa dugón keresztül egy légsűrítővel (motoros autópumpa vagy más kis kompresszor) felpumpálunk. A kompresszort még akkor csatlakoztassuk a dugóban lévő csőre, amikor az felfelé áll, nehogy bele folyjon a víz! A nyomás előbb-utóbb kilöki a dugót, és a nagy sebességgel kiáramló vízsugarat gyorsító erő ellenereje felgyorsítja a rakétát, ami 15–20 m magasra emelkedik. Nézzük meg az 1.3.2. videót! „Kilövőállványnak” elég két derékszögben összeszegezt deszka, amire alul körbe egy madzagot kötözünk (ez tartja a „rakétát”), és minél meredekebb szögben nekitámasztjuk valaminek. A „rakéta” elkészítéséhez ki kell fúrunk egy parafadugót. A következő kísérlet a dugófúrásról szól. Ne sajnáljuk a megtanulására szánt időt, mert sokszor van rá szükség!

1.3.12. Kísérlet. A vegyészek *dugófúrás*hoz kiélezett szélű fémcsöveket használnak. A kívánt lyukátmérőnél kb. 1 mm-rel kisebb külső átmérőjű csövet válasszunk. A csövet az 1.3.3. fényképen látható módon egy ollóval élezzük ki, és az ugyanott látható módon nyomjuk a dugóba. Forgatva és nyomva lassan átfúrja a dugót. A dugódarabokat egy erős dróttal vagy vékonyabb csővel kitolhatjuk a dugófúrónkból. Vigyázzunk, nehogy a kezünkbe menjen, például tehetünk a dugó másik oldalára egy fadarabot. Amikor már kezd látszani, hogy hol fog kijönni a fúró, vegyük ki, és a másik oldalról fejezzük be a fúrást, így nem szakad ki a lyuk széle. (Persze, fúróállványon is fúrhatunk, ha van, lassú fordulatszámmal.) Gumidugót és parafadugót ugyanígy fúrhatunk. A parafadugót a fúrás előtt meg kell puhítani, így jobban fog zárni. Ez úgy történik, hogy egy deszka-darabbal erősen az asztalra nyomva görgetjük. Ha az a gyanúnk, hogy a dugó átereszt, dugjunk be vele egy üveget, és nyomjuk forró vízbe. Ha rossz a dugó, a kitáguló levegő kibuborékol. Parafadugó zárását megjavíthatjuk, ha olvadt paraffinba áztatjuk. A gyári dugófúró készletek vékonyfalú sárgaréz csövekből készülnek, és gyári élezőt is lehet hozzá kapni. Használhatunk alumínium vagy vörösréz csöveket is. Vascső is jó lenne, de túl kemény, azonnal kiveszi az olló életét. Ha végképp nem sikerül dugófúrót csinálnunk, egy izzó dróttal is átégethetjük a dugót és utána kör keresztmetszetű tűreszelővel tágíthatjuk a lyukat. A képen egyébként egy saját készítésű szilikongumi dugót fúrok ki. Úgy készült, hogy vékony, egyszer használatos műanyag pohárba tömítőanyagként használt szilikongumit öntöttem. Lassan szilárdul meg, napok alatt, utána letörtem róla a poharat. Az átfúrt dugóba a csövet, különösen az üvegcsövet a dugóhoz közel fogva csavarjuk be, és ugyanígy fogjuk a kicsavaráskor. A becsavarás könnyebb, ha a csövet megnyalazzuk. A dugót, ha szorul, az üveget két kézzel fogva és a dugót két hüvelykujjunkkal kétfelől nyomva szedjük ki.

1.3.13. Kísérlet. Szódavízhez való szén-dioxid patronnal vagy habszifon patronnal működő „rakétát” is készíthetünk. Készítsünk egy könnyű kis kocsit például fémépitőből. Könnyen guruljon, a csúszási pontokat kicsit olajozzuk meg. Erősítsünk rá vízszintes helyzetben egy patronnt! Ha körbe megtámasztottuk, elég egy erősebb gumival leszorítani. Olyan helyen, ahol jó nagy „kifutása” van a kocsinak, szúrjuk ki a patronnt! A nagy

sebességgel kiáramló gáz rakéta elven gyorsítja a kocsit. Vigyázat, nagyon felgyorsulhat! \square

1.3.14. Kísérlet. Van Newtonnak egy ritkán emlegetett negyedik törvénye is. Ez azt mondja ki, hogy ha több erő hat egy testre, akkor mindegyik, egymástól függetlenül okoz egy gyorsulást. Mivel a gyorsulások mint vektorok adódnak össze, azt is mondhatjuk, hogy az erőket mint vektorokat össze kell adni, és az eredmény okozza a gyorsulást, tehát az erők is vektorok.

Végezzünk erre egy kísérletet. Tegyük egy tálcára három vagy több egyforma golyót. A tálcát két ékkel vízszintezzük ki, amíg a golyók már nem gurulnak össze-vissza. A golyókra tegyük egy másik tálcát, arra pedig egy digitális mérleget. A mérlegre tegyük egy üvegpalackot. A palackot dugjuk be egy parafa dugóval, amibe egy szemescsavart hajtunk. A csavarra kötözünk két madzagot. A mérleget tárazzuk ki. Ha a madzagokat húzzuk, a mérleg leolvashatjuk az erők eredőjét. A golyók azért kellenek, hogy az eredő biztosan függőleges legyen: ha nem az, a felső tálca gurulni kezd. Akinek három vagy több keze van, több erő eredőjével is eljátszhat. \square

1.3.15. Kísérlet. Készítsük el a fényképen látható kis eszközt. A két golyóból az egyiket a lemez rugalmassága tartja (kicsit meg is hajlíthatjuk a lemezt), a másik alá van támasztva. Oldalról megütve a lemezt az egyik golyó leesik, a másik elrepül és leesik, de a koppanások egyszerre hallatszanak. A golyó függőleges irányú mozgását tehát a vízszintes mozgás nem befolyásolja. Videóra véve a mozgást, ki is mérhetjük, hogy a golyó mozgásának függőleges irányú összetevője egyenletesen változó, a vízszintes irányú összetevője egyenletes mozgás. \square

1.3.16. Kísérlet. Kérjünk meg valakit, hogy ferdén hajítson el egy kavicsot, és oldalról távolabbról figyeljük a mozgást. A kavics parabola pályán mozog, mozgása két mozgás összetétele: vízszintesen egy egyenes vonalú egyenletes mozgás, függőlegesen egy függőleges hajítás. Ugyanezt megfigyelhetjük a locsolócső vízugarán is. \square

Ha egy követ függőlegesen felfelé hajtunk, a mozgása egyenletesen változó mozgás lesz: sebessége egyre csökken, majd nulla lesz, végül negatív, és ugyanakkora abszolút értékű sebességgel ér földet, amivel elhajítottuk; a koordináta-rendszerre vonatkozó megállapodásunknak megfelelően a felfelé való elmozdulást tekintjük pozitívnak, így a gyorsulás $-g$. Ha ferdén hajtjuk el, mondjuk α szögben \mathbf{v}_0 sebességgel, akkor a függőleges kezdősebessége $v_0 \sin \alpha$, vízszintes irányú $v_0 \cos \alpha$. A függőleges irányú gyorsulás $-g$, a vízszintes 0. A program mutatja a mozgás pályáját 15, 30, 45, 60, 75 fokos szögre. A kő akkor jut legmesszebb, ha a szög 45° . \square

1.3.17. Kísérlet. Kísérletezzünk a rugalmas erőkkel! Ha egy csavarrugót összenyomunk, minél jobban összenyomjuk, annál nagyobb erő kell. Ugyanez a helyzet kihúzásnál. Mi a pontos törvényszerűség? Egy nehezebb üvegbe beleillő dugóhoz erősítsünk egy rugót a dugóba fúrt két lyukon átfűzött dróthurokkal, ahogy az 1.3.5. fénykép mutatja. Dugjuk az üvegbe a dugót. Mérjük meg a rugó hosszát. Tegyük az üveget mérlegre és tárazzuk ki. Előre meghatározott hosszakra kinyújtva illetve összenyomva a rugót, olvassuk le a mérleg az erőt. Számoljuk ki minden hosszra a relatív megnyúlást, azaz

a $\Delta\ell/\ell_0$ hányadost, ahol ℓ_0 az eredeti hossz, $\Delta\ell$ pedig a megváltozása. Én a következő eredményeket kaptam:

ℓ/mm	26,70	31,45	36,45	41,45	46,45
$\Delta\ell/\ell_0$	-0,267	-0,137	0	0,137	0,274
F/pond	341	209	0	-152	-318
F/N	3,35	2,05	0	-1,49	3,12
hányados, N	-12,5	-15,0	-	-10,9	-11,4

Mérésünk elég pontatlan, de az derül ki belőle, hogy a szükséges erő arányos a (relatív) megnyúlással. Ha hosszabb-rövidebb részét próbáljuk meg összenyomni vagy kihúzni a rugónak, hamar kiderül az is, hogy nem a hosszváltozástól, hanem a relatív megnyúlástól függ a szükséges erő. Ez mindenféle kis rugalmas alakváltoztatásra igaz: a szükséges erő arányos a relatív alakváltozás mértékével. Ez *Hook törvénye*.

1.3.18. Kísérlet. Az előző kísérlet alapján készíthetünk rugós erőmérőt. Ha csak húzóerőt akarunk mérni, nyomóerőt nem, akkor rugó helyett használhatunk gumikarikát is. Két vékony, de elég erős vasdrót között feszíthetjük ki a gumit egy műanyag csőben. Én műanyag injekciós fecskendőt használtam, amin mindjárt beosztás is van. A cső egyik végét, például melegragasztóval ragasszuk a vasdróthoz! Mindjárt hármat is készítettem, ahogy az 1.3.6. fényképen látható. Egy tüveg dugójába csavart kampós csavarba akasztva az erőmérőn mérleggel hitelesíthetjük a beosztást.

1.3.19. Kísérlet. Két rugós erőmérővel mindjárt le is ellenőrizhetjük a hatás ellenhatás elvét. Egymásba akasztva őket és széthúzva egyforma erőt mutatnak. \square

1.3.20. Kísérlet. A mozgást akadályozó erők közül a leggyakoribb a *súrlódás*. A folyadékokban és gázokban való súrlódást már említettük, később visszatérünk rá. Most a szilárd testek közötti súrlódással foglalkozunk. Ha például deszkalapra (rajztábla, vágódeszka) egy dobozt teszünk és megpróbáljuk elhúzni vagy eltolni, érezzük, hogy ehhez erő kell. Meg is mérhetjük ezt az erőt erőmérőnkkel. Ha egy téglatest alakú dobozzal dolgozunk, kimérhetjük, hogy mindegy, a doboz melyik oldalán csúszik: a súrlódási erő nem függ a felület nagyságától. Ha a dobozba tárgyakat teszünk, az elhúzásához nagyobb erő kell: a súrlódási erő arányos azzal az erővel, ami a felületeket egymáshoz nyomja. Hogy hanyadrésze, azt a *súrlódási együttható* adja meg. Például ha fa csúszik fán, akkor 50% körül van, ha vas csúszik vason, akkor körülbelül 24%, olajozott vasnál már csak 6%, szánnál havon nagyjából 2%. Ha követ próbálunk földön húzni, felmehet 100%-ra is. Ha nincs erőmérőnk, akkor is tudunk súrlódási együtthatót mérni a következő kísérlet szerint. \square

1.3.21. Kísérlet. Tegyük a dobozt egy deszkalapra (például rajztábla, vágódeszka, stb.) és döntsük meg a deszkát. Elég nagy megdöntésnél a doboz elkezd csúszni. Ha egy téglatest alakú dobozzal dolgozunk, kimérhetjük, hogy mindegy, a doboz melyik oldalán csúszik: ugyanakkora megdöntés kell. Hogy mekkora, abból megkapjuk a súrlódási együtthatót. Nézzük az ábrát! A dobozra az \mathbf{F} súlyerő hat. Ez részben a dobozt a deszkához nyomja, részben pedig a deszkán lefelé igyekszik mozgatni a dobozt. Ennek megfelelően bontsuk fel két erő, \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 összegére! Amikor \mathbf{F}_1 akkora lesz, mint a

maximális súrlódási erő, akkor indul meg a doboz. Az erőkből az a és b befogójú derékszögű háromszöghöz hasonló háromszög képezhető, amiből $F_1/F_2 = a/b$. A $\mu = F_s/F_2$ súrlódási együttható tehát a/b , amikor éppen elkezd csúszni a doboz. Nincs tehát más dolgunk, mint ekkor megmérni a -t és b -t!

Nem árt, ha még egyszer számbavesszük a dobozra ható erőket. Hat rá az \mathbf{F} súlyerő, amit két részre bontottunk, \mathbf{F}_1 -re és \mathbf{F}_2 -re. Az \mathbf{F}_2 erőt a deszka nyomása egyenlíti ki, az \mathbf{F}_1 erőt pedig a súrlódási erő, ami mindaddig pontosan akkora, mint \mathbf{F}_1 ellentettje, amíg el nem éri maximális értékét. Ha ez megtörténik, és tovább döntjük a deszkát, az $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_s$ különbség gyorsítja a dobozt, ami gyorsulva csúszik lefele. Ha valamit teszünk a dobozba, minden erő arányosan megnő, és a doboz ugyanannál a dőlésnél kezd csúszni. Próbáljuk ki!

Játszaduzzunk egy kicsit a dobozzal! Amikor elindul, legtöbbször gyorsul valamennyit. Ha már majdnem megindult, lökjük meg a dobozt! Előfordul, hogy mozgásban marad. A mozgás alatt a súrlódási együttható kicsit kisebb, mint a maximális értéke amíg még nincs mozgás. Ezt a maximális értéket *tapadási súrlódási együtthatónak* is szokás nevezni, a mozgás közbeni a *mozgási súrlódási együttható*. A kétféle együttható között a különbség nem nagyon nagy. Néha a csúszás egyenetlen: gyorsul, lassul, esetleg meg is áll. Ez azt mutatja, hogy a súrlódási együttható nem valami stabil szám, csak egy körülbelüli érték. Kis sebességeknél nagyjából állandó, de például nagy sebességeknél rezgések léphetnek fel, erősen lecsökkentve a súrlódást. A deszkára papír, műanyag, fém vagy más lapot téve, és esetleg a doboznak valami „talpat” csinálva, tanulmányozhatjuk a különböző anyagok hatását. Igen kicsi a súrlódás a teflonnál. Kenőanyaggal is lehet csökkenteni a súrlódást. Fát szilárd szappannal lehet kenni, fémekeket nagy sebességeknél gépolajjal (lényegében paraffinolajjal), kis sebességeknél gépszírral szoktak kenni. A konyhai olaj és zsír nem olyan jó erre a célra, mert idővel besűrűsödik. A paraffinolaj nem sűrűsödik be, például gépkocsik robbanómotorjainak csúszó felületeit ezzel kenik. Hátránya, hogy könnyen kifolyik a felületek közül, így mindig újra vissza kell juttatni. A gépszír lényegében valamilyen nem oldható szappannal kevert olaj. Nem folyik ki, amíg meg nem olvad. A legjobb *lítiumzsírok* még $100\text{ }^\circ\text{C}$ fölött is használhatók. \square

Mi a súrlódás oka? Az egymáson csúszó felületek apró kiemelkedései egymásba akadnak, rezgésbe jönnek, esetleg letörnek. A fémfelületek oxidálódnak (például rozsdásodnak). Ha például olyan súrlódási együtthatót találunk, hogy „réz rézen”, az részben némi réz-oxiddal bevont felületekre vonatkozik. Azt mondhatnánk, hogy akkor mérjünk légtüres térben tökéletesen megtisztított felületekkel! Ha valóban sikerül tökéletesen megtisztítani a felületeket, ó borzalom: azok teljesen egybehegednek (dörzshegesztés). Úgyhogy ne feledjük, a súrlódási együtthatók gyakorlati közelítések.

1.3.22. Kísérlet. Milyen irányú a súrlódási erő? Mindig olyan irányú, hogy a mozgást akadályozza. Döntsük meg a deszkát a dobozzal, de még ne csússzon a doboz! Kezdjük el oldalra húzni! Elkezd lefele csúszni. Mivel oldalra húzzuk, a súrlódási erő ezt a mozgást akadályozza, „nem jut belőle” a lecsúszás akadályozására. \square

1.3.23. Kísérlet. Egy másik, még egyszerűbb kísérlet ugyanerre: Egy kulcsot fűzünk fel egy kör keresztmetszetű ceruzára. Tartsuk ferdén a ceruzát, de még ne csússzon a kulcs! Ha a ceruzát elkezdjük forgatni, a kulcs csúszni kezd. \square

1.3.24. Kötélsúrlódás. Ha például egy hajót ki akarunk kötni, a kötelet egy oszlop köré szoktuk csavarni, így jóval kisebb erővel meg lehet tartani, nyilván a súrlódás miatt. Ha F_0 a húzóerő, és φ szögben tekertük az oszlop köré a kötelet, mekkora $F(\varphi)$ erő kell, hogy megtartsuk? ** Még $\Delta\varphi$ szögnyit felcsavarva, a $\Delta\varphi$ -hez tartozó kötélrészre a $-F(\varphi)$ és $F(\varphi + \Delta\varphi)$ nagyságú erők hatnak, amelyek $\Delta\varphi$ szöget zárnak be. Eredőjük $\approx F(\varphi)\Delta\varphi$ nagyságú és gyakorlatilag merőleges a kis kötélrészre: ez nyomja azt az oszlophoz. Így a súrlódási erő $\approx \mu F(\varphi)\Delta\varphi$, ahol a μ a súrlódási együttható. Ez csökkentti $F(\varphi)$ -t, tehát

$$F(\varphi) - F(\varphi + \Delta\varphi) \approx \mu F(\varphi)\Delta\varphi.$$

Innen az $\dot{F}(\varphi) = -\mu F(\varphi)$ szeparábilis differenciálegyenletet kapjuk, aminek megoldása $F(\varphi) = ce^{-\mu\varphi}$ valamilyen c konstánssal. Használjuk fel, hogy $F(0) = F_0$. ** A megoldás $F(\varphi) = F_0 e^{-\mu\varphi}$. \square

1.3.25. Kísérlet. Visszatérve a deszkához és a dobozhoz, tegyünk néhány kör keresztmetszetű ceruzát a doboz alá. A doboz meglepően kis erővel eltolható. Most *gördülő súrlódás* lép fel, ami jóval kisebb, mint a csúszó súrlódás, de egyebekben hasonló. Ezt már az ókorban is tudták: a piramisépítők a hatalmas kőtömböket kör keresztmetszetű farudakon gördítették. Kerék gördülő súrlódása jó úton pár százalék, vasúti kocsik kerekéé csak 0,2%. A *gördülőcsapágyban* két acél gyűrű között acél hengerek vagy golyók vannak, így a gyűrűk könnyen forognak egymáshoz képest. A súrlódási együttható mintegy 0,2%. \square

1.3.26. Kísérlet. Végezzünk egy gondolat-kísérletet! Képzeld el, hogy egy magas hegyen egy ágyúval vízszintes irányban egy ágyúgolyót lövünk ki! Az ágyúgolyó az első másodpercben 5 m-t, két másodperc alatt 20 m-t, három alatt 45 m-t, stb., 20 másodperc alatt 2000 m-t esik. Ha mondjuk ilyen magas a hegy, akkor a kezdősebességétől függően elég nagy távolságot tesz meg (a közegellenállástól eltekintünk). Ha mondjuk 250 m/s a kezdősebesség, akkor ez a távolság 5 km. Jó ágyúval elérhető az 1 km/s kezdősebesség is, ekkor a megtett távolság 20 km. Viszont a Föld nem lapos. Ilyen távolságon már érezhető a Föld görbülete, az ágyúgolyó még nem ér földet. Tovább növelve a sebességet, egyszer csak elérjük, hogy az ágyúgolyó nem esik le, hanem körpályán keringeni kezd a Föld körül; ugyanannyit „kanyarodik”, mint a Föld felülete: lásd a Newton-tól származó ábrát.

Mekkora kezdősebesség szükséges a körpályára álláshoz? Nézzük az ábrát! Legyen R a Föld sugara, 6366 km, s az első másodpercben való „esés” hossza, 5 m. Keressük az első másodpercben megtett x „vízszintes” távolságot. Egy geometriai tétel szerint derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság hossza a talppontja által kettéosztott magasság két darabja hosszának a mértani közepe, azaz $x = \sqrt{s(2R - s)}$. Mivel s igen kicsi, $2R$ mellett elhanyagolható, azaz $x \approx \sqrt{2Rs}$ igen jó közelítés. Behelyettesítve $x \approx 8$ km, azaz 8 km/s kezdősebességre van szükség. Newton arra gondolt, hogy a körpályán keringő ágyúgolyóhoz hasonlóan a Holdat is a Föld vonzóereje tartja körpályán, a bolygókat pedig a Napé. Hogyan változik ez a vonzóerő a távolsággal? A bolygómozgás akkor már ismert Kepler-féle törvényei alapján Newton úgy sejtette, hogy a vonzás a

távolság négyzetével fordítva arányos:

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

ahol M és m a két test tömege, r a távolságuk, G pedig az úgynevezett *gravitációs állandó*. Ez a *tömegvonzás törvénye* vagy *gravitációs törvény*. Tulajdonképpen az egyik test minden részecskéje vonzza a másik minden részecskéjét, de gömböknél elég a középpontok távolságát venni, hogy pontos értéket kapjunk.

Newton a gravitációs törvényt a Hold mozgásán ellenőrizte. A Hold 384000 km-re (csaknem) kör alakú pályán kering a Föld körül. Mivel 27,32 nap alatt kerüli meg a Földet, sebessége 1,022 km/s. Az előbbi ábra alapján most s -et kiszámolva az a sebesség négyzete osztva a Holdpálya átmérőjével, az esés az első másodpercben 1,36 mm, 3603-szor kisebb, mint a Földön. Ez jó egyezésben van azzal, hogy a Hold távolsága a Föld sugarának nagyjából 60,3-szorosa. Newton először hibás csillagászati adatok miatt rossz egyezést talált, és félretette elméletét, mint a tapasztalatokkal nem egyezőt. Későbbi újabb, pontosabb adatokkal újraszámolva, kitűnő egyezést tapasztalt.

Newton ennél sokkal többet tett: törvényeiből levezette Keplernek a bolygómozgásra vonatkozó híres törvényeit! Mi ezt szerényebb matematikai ismereteinkkel nem tudjuk megtenni, de numerikusan könnyen kiszámolhatjuk akár az összes bolygó mozgását — egymásra való hatásukat is figyelembe véve — millió évekre előre vagy vissza. A programban három csillag mozgásának számolása szerepel. A gravitációs törvényt csak egyszer, és nagyon kis mértékben kellett módosítani, amikor kiderült, hogy semmilyen hatás, még a gravitációs sem terjedhet a fény sebességénél gyorsabban. A módosítás az *általános relativitás elmélete*. □

1.3.27. Cavendish mérése. A csillagászati adatokból nem derül ki, mennyi pontosan a gravitációs állandó értéke. Először Cavendish, a XVIII. század legnagyobb kísérleti fizikusa mérte meg. A mérés elve a következő: egy könnyű rúd két végére két ólomgolyót erősítünk súlyzószerűen, és a rudat közepénél fogva nagyon vékony de erős hosszú szálon felfüggesztjük. Ez a *torziós mérleg*, magyarul *csavarási mérleg*. Ha most az egyik golyó mellé egy jó nagy ólomgolyót teszünk, vonzó hatására a „súlyzó” nagyon kicsit elfordul. A hatás megduplázható, ha a másik kis ólomgolyó mellé is egy nagy ólomgolyót teszünk úgy, hogy annak vonzása ugyanarra csavarja a rudat. Hogy mérni tudjunk, az eszközt rendkívül érzékenyre kell készíteni. Ekkor viszont minden légáramlás renkíven zavaró: az eszközt szekrénybe kell zárni. Házilag nem tudjuk ezt a mérést elvégezni. Iskolai célokra kapható is ilyen eszköz, de majdnem aranyárban van, pedig csak 5%-os pontossággal mér! A ma ismert legpontosabb érték $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$. Cavendish mérésének hibája mintegy 1% volt, összhangban a bizonytalansággal, amit megadott. * A konstans ismeretében kiszámolható a Föld átlagsűrűsége, nagyjából 5,5 kg/l, és viszont. Newton az átlagsűrűséget 5–6 kg/l-nek becsülte. * □

1.3.28. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a rugón függő test mozgását! Vegyük elő dugóra szerelt rugónkat, és kicsit húzzuk meg a dugót, majd engedjük el! Szapora rezgés kezdődik, ami a súrlódás miatt hamarosan megáll. Ha jobban meghúzzuk a dugót, a rezgés

kitérése nagyobb. Ha a dugót egy kisebb tüvegbe (vagy egy csipeszbe) szorítjuk, a mozgás lassabb. Nehéz lenne azonban a törvényszerűségeket kísérleti alapon megállapítani.

Lássunk a problémához elméleti fizikus módra. Először is hanyagoljuk el a súrlódást, majd később foglalkozunk vele. A tömeg nyugalmi helyzetétől való eltérését jelöljük x -szel, ami persze az időtől függ: $x(t)$. Newton jelölésével a sebesség $\dot{x}(t)$, a gyorsulás pedig $\ddot{x}(t)$. Newton második törvénye szerint $F(t) = m\ddot{x}(t)$. Viszont Hook törvénye szerint $F(t) = -kx(t)$, ahol k egy, a rugótól függő állandó. Azért írtunk mínusz előjelet, mert az erő ellentétes a kitéréssel. Ha mínusz előjelet írunk, k pozitív lesz. Így azt kapjuk, hogy $m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$, vagy átrendezve

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Ez egy differenciálegyenlet, és aki elolvasta a differenciálegyenletekről szóló részt, az azonnal meg is tudja oldani, de enélkül is boldogulunk. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk azt az esetet, amikor $k/m = 1$ (a megfelelő mértékegységekben). A kérdés tehát az, melyik az a függvény, amelynek második deriváltja saját magának az ellentettje? Aki tud egy kicsit differenciálni, mindjárt két ilyet is tud mondani: $x_1(t) = \sin(t)$ és $x_2(t) = \cos(t)$. Sőt, azt is látja, hogy $c_1x_1(t)$ és $c_2x_2(t)$ is megoldások tetszőleges c_1 és c_2 konstansokra, sőt, ezeknek az összege is. Aki a differenciálegyenletekről szóló részt is elolvasta, tudja, hogy így az összes megoldást megkaptuk. Próbáljunk erre fizikai indoklást adni! Ha a rugót kihúzzuk vagy összenyomjuk a tömeget elmozdítva, majd a $t = 0$ időpontban elengedjük, nyilván megfelel a $c_2x_2(t)$ megoldás: a nulla időpontban nulla a sebesség, ami teljesül, mert a \cos deriváltja \sin , ami a nullában nulla, a c_2 -nek pedig a kezdeti $x(0) = x_0$ kitérésnek kell lennie. Másképp is mozgásba hozhatjuk azonban a rendszert: a nulla időpontban hirtelen meglökjük a tömeget. Ekkor megfelel a $c_1x_1(t)$ megoldás: $x(0) = x_0 = 0$, c_1 -et pedig úgy kell választani, hogy a derivált a nulla időpontban (ami most éppen c_1) $v(0) = v_0$ legyen. Az általános esetben $t = 0$ -ban van kitérés is, kezdősebesség is, ezek az úgynevezett *kezdőfeltételek* megadják c_1 és c_2 értékét.

Lássuk most az általános esetet, amikor k/m tetszőleges. Néhány próbálkozás után rájöhethetünk, hogy az $x_1 = \sin(\omega t)$ és $x_2 = \cos(\omega t)$ függvényeket kell választanunk, mert ezek második deriváltja az ellentettjük ω^2 -szerese, és így $\omega = \sqrt{k/m}$ választással megoldásokat kapunk. Az általános megoldás $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, a konstansokat a kezdőfeltételek határozzák meg. Ezzel meghatároztuk az úgynevezett *harmónikus rezgőmozgást* a legáltalánosabb esetben.

Már éppen elégedetten dőlnénk hátra, amikor valaki egy új megoldással áll elő: $x(t) = a \cos(\omega t + \delta)$, ahol a és δ konstansok. Behelyettesítve látjuk hogy ez a függvény valóban megoldás, de akkor nem lehet új! Valóban,

$$a \cos(\omega t + \delta) = a \cos(\omega t) \cos(\delta) - a \sin(\omega t) \sin(\delta),$$

ahol $c_2 = a \cos(\delta)$, $c_1 = -a \sin(\delta)$ jelölésekkel látjuk, hogy ez egy „rég” megoldás. Azt is látjuk, hogy $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ és megfelelő δ választással minden „rég” megoldás felírható ebben az alakban is. Az a a legnagyobb kitérés, idegen neve *amplitúdó*: akkor

lép fel, amikor a koszinusz ± 1 . A δ neve *fáziseltolás*. Ugyanez a helyzet az $x(t) = a \sin(\omega t + \delta)$ megoldással, de ezt nem fogjuk használni. Egy további lehetséges alak $x(t) = a \cos(\omega(t - t_0))$, illetve $x(t) = a \sin(\omega(t - t_0))$.

Matematikus barátunk azzal áll elő, hogy keressük a differenciálegyenlet megoldását $e^{\lambda t + \gamma}$ alakban, ahol λ és γ komplex számok. Próbáljuk ki! Behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\lambda^2 e^{\lambda t + \gamma} = -(k/m)e^{\lambda t + \gamma}$. Osztvá a hatványfüggvénnyel, $\lambda^2 = -k/m$, azaz $\lambda = \pm \sqrt{-k/m} = \pm i\omega$ és γ tetszőleges. Kaptunk egy komplex megoldást. Az $\hat{x} = e^\gamma$ komplex szám a *komplex amplitúdó*, ezzel a komplex megoldás $\hat{x}e^{i\omega t}$. Írjuk a komplex amplitúdót $re^{i\delta}$ alakban. Így a komplex megoldás $re^{i\omega t + i\delta}$. Mondhatjuk, hogy a komplex értékű megoldások nem érdekelnek bennünket, de az egyenletnek ennek a komplex értékű függvénynek a valós része (és a képzetes része is) megoldása, mint az beírva a megoldást és véve a valós részt (vagy a képzetes részt) egyszerűen adódik. A valós rész viszont $x(t) = r \cos(\omega t + \delta)$, a legáltalánosabb valós megoldás. Igaz, az azonosan nulla megoldást nem kaptuk meg így, de ez nem olyan nagy baj, $\hat{x} = 0$ választással az is kiadódik. Ez a példa (és nehezebben kezelhető testvérei) mutatják, miért is érdemes megismerni a komplex számokkal.

Van-e ennek fizikai jelentése? Van! Vegyünk egy egyenletes körmozgást végző pontot a komplex síkon! A középpont legyen az origó és a sugár r . A pont helyzete $z(t) = re^{i\omega t + \delta}$, ahol δ a helyvektornak az x tengely pozitív felével bezárt szöge a nulla időpontban, ω pedig a szögsebesség. Az előbb azt kaptuk, hogy a pont „árnyéka” az x tengelyen (és az y tengelyen is, azaz a valós és képzetes rész) harmónikus rezgőmozgást végez. Ott $\omega = 2\pi n$ volt, ahol n a fordulatszám. Annak itt a ν rezgésszám felel meg, a másodpercenkénti teljes rezgések száma, és $\omega = 2\pi\nu$. Az ottani körülfordulási idő $T = 1/n$ itt a periódusidő, egy teljes rezgés ideje, $T = 1/\nu$.

Ugye csodálatos, mennyi mindent kaptunk meg Newton második törvényéből? \square

1.3.29. Kísérlet. A rezgés nem könnyű tanulmányozni, de nagyon hasonló a lengéshez, ami sokkal könnyebben követhető. Egy cérnán valamilyen nem túl könnyű tárgyat, például egy nagyobb csavaranyát függesszünk fel valahova, például nagy létra fokára vagy két kinyitott szekrényajtóra keresztbe tett lécre. Ha kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből vagy meglökjük, *lengésbe* jön. Ha azt akarjuk, hogy csak síkban tudjon lengeni, *bifiláris felfüggesztést* (a latin bifiláris kétfonalast jelent) alkalmazunk: két egyenlő hosszú fonalat kötözünk rá, amiket a vízszintes lécre egymástól távolabb kötözünk fel. Mivel a súrlódás kicsi, a lengés elég sokáig csaknem változatlan. Minél vékonyabb a fonal és minél nehezebb a súly, annál kisebb a súrlódás hatása. Ha garantáltan lökésmentesen akarjuk az ingát elindítani, kösünk rá egy cérnát, húzzuk oldalra a súlyt, várjuk meg, amíg megáll, majd égessük el a cérnát. Az inga egy síkban leng, mozgása nagyon hasonlít a rezgéshez. Miért? Nézzük meg az ábrát! A testre csak az \mathbf{F} súlyerő hat. Bontsuk fel két erőre: az egyik, \mathbf{F}_2 a fonalat húzza, annak egyenesébe esik, a másik, \mathbf{F}_1 köríven gyorsítja a testet. Az F_1/F arány megegyezik $\sin\varphi$ -vel, ahol φ a kitérés szöge. Másrészt $F = mg$ és $F_1 = ma$, ahol a a gyorsulás. Ez kifejezhető az α szöggyorsulással: $a = \ell\alpha$, ahol ℓ a fonál hossza. Vegyük figyelembe azt is, hogy a szöggyorsulás ellentétes a kitéréssel, így

a és F_1 is. Így azt kapjuk, hogy

$$\sin \varphi = -\frac{F_1}{F} = -\frac{a}{g} = -\frac{\ell \alpha}{g} = -\frac{\ell}{g} \ddot{\varphi}.$$

Kis szögekre $\sin \varphi \approx \varphi$ nagyon jó közelítéssel. Például 6° -nál a hiba csak 2% . Ezzel a közelítéssel azt kapjuk, hogy

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0.$$

Ez ugyanaz a differenciálegyenlet, mint amit a kis rezgésekre kaptunk, tehát kis lengések-nél a szögkitérés ugyanúgy változik, mint a rezgőmozgásnál a kitérés: $\varphi(t) = a \cos(\omega t + \delta)$. Itt most ω nem a szögsebesség, hanem az $\omega = \sqrt{g/\ell}$ konstans! Egy teljes lengés ideje $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, nem függ a kitéréstől! Ezt felismerve Huygens készített először ingaórát. A súly nem fonálon, hanem egy rúdon lengett, aminek felső részén egy kis pecek volt. Ez a lengésidő nagy részében megakasztott egy fogaskereket, ami ezért minden lengésnél csak egy foggal tudott elfordulni. Egyúttal a fogaskerék minden lengésnél egy kicsit meglökte az ingát, pótolva a súrlódás okozta veszteséget. A fogaskereket — áttételen keresztül — leeső súly vagy felhúzott rugó hajtotta. Ez volt az emberiség első pontos időmérő eszköze.

Ha a fél lengésidő 1 s, akkor a lengésidő képletéből $\ell = 99,4$ cm. Huygens azt javasolta, hogy ez legyen a hosszúság egysége. Így egy madzag és egy kő segítségével akárhol elég pontosan kimérhetünk 1 m-t. Végül nem ezt választották, mert kiderült, hogy g nem mindenütt ugyanannyi. Éppen fordítva, az inga lengését felhasználhatjuk g mérésére. Nagyobb kitérésnél kicsit megnő a lengésidő, pontos méréseknél ezt is figyelembe szokták venni. \square

1.3.30. Kísérlet. Térjünk vissza a rezgésekhez, vizsgáljuk meg a csillapított rezgést! Csillapított lengésekre, például egy hintára is gondolhatunk. Az egyenlet $m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(\dot{x}(t))$, mert általában az akadályozó erő a sebességtől függ. Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor az akadályozó erő arányos a sebességgel, és persze vele ellentétes irányú (például a rezgés valami sűrű olajban történik, mint a gépkocsi lengéscsillapítójánál). Célszerű lesz a csillapítatlan rezgésre vonatkozó ω helyére valamilyen új betűt, például ω_0 -at írni, mert azt várjuk, hogy a frekvencia is megváltozik. Ekkor az egyenlet

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = 0.$$

Hogy tudjunk m -mel egyszerűsíteni, írjuk a csillapításra jellemző c konstanst $c = 2m\beta$ alakba. Egyszerűsítve az egyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

Keressük a megoldást $\hat{x}e^{i\omega t}$ alakban! Azt kapjuk, hogy

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\hat{x}e^{i\omega t} = 0.$$

Ha $\hat{x} = 0$, az is egy megoldás. Egyébként végigosztva egy másodfokú egyenlet marad, aminek a megoldásai a $\omega = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ komplex számok! Tegyük fel, hogy a négyzetgyök alatt álló kifejezés pozitív. Legyen a négyzetgyök ω' . Ekkor $e^{i\omega t} = e^{-\beta t} e^{\pm i\omega' t}$. A szorzat második tényezőjének valós része a + és a - esetekben ugyan az, tehát elég a + esetet venni. Az első tényező viszont egy exponenciálisan csökkenő függvény. Azt kaptuk tehát hogy a mozgás egy harmónikus rezgő mozgás más frekvenciával és egy a csillapodást leíró tényező szorzata. A β a *csillapítási tényező*. (A $Q = \omega_0/(2\beta)$ *jósági tényezőt* is szokták használni helyette.) Ha β kicsi, akkor ω' alig kisebb, mint ω_0 . A többi esetet nem vizsgáljuk. Aki elolvasta a differenciálegyenletekről szóló részt, maga is megteheti. Csak annyit mondunk, hogy az $\omega_0 = \beta$ esetben már nincs rezgés, a kitérés exponenciálisan csillapodik, ha pedig $\omega_0 < \beta$, akkor a kitérés „lassan mászik” az egyensúlyi helyzet felé. \square

1.3.31. Kísérlet. Mi van, ha egy változó erő hat az egyébként csillapított rezgést végző rendszerre? Aki már hintáztatott valakit, tudja, mire gondolunk. Az egyenlet most

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = F(t)/m.$$

Elég egyetlen megoldást találni, mert két megoldás különbsége megoldása az előző pontban vizsgált úgynevezett *homogén egyenletnek*, így a homogén egyenlet megoldásait hozzáadva a talált egyetlen megoldáshoz, az összes megoldást megkapjuk. Mind elég hasonló, mert a homogén egyenlet megoldásai „lecsengenek”. Csak azt a fontos esetet fogjuk vizsgálni, amikor az erő harmónikusan oszcillál, azaz $F(t)$ az $\hat{F}e^{i\omega t}$ valós része, ahol $\hat{F} = F_0 e^{i\delta}$ az erő komplex amplitúdója. Keressük a megoldást $\hat{x}e^{i\omega t}$ alakban! Szinte alig kell számolni:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)\hat{x}e^{i\omega t} = \frac{\hat{F}}{m}e^{i\omega t},$$

ahonnan az

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)}$$

jelöléssel $\hat{x} = \hat{F}R$. Ha az R komplex számot $R = \varrho e^{i\vartheta}$ alakba írjuk, akkor azt is látjuk, hogy a komplex megoldás valós része

$$x(t) = \varrho F_0 \cos(\omega t + \delta + \vartheta).$$

Ez azt jelenti, hogy a „válasz” amplitúdója F_0 szorozva egy ϱ „nagyítási” együtthatóval. A rezgés nincs szinkronban az erővel, a fázis egy további ϑ mennyiséggel eltolódott. A ϱ és a ϑ definíciójából

$$\varrho^2 = \frac{1}{m^2((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)}$$

és

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

A ϑ szög mindig negatív, ez felel meg annak, hogy az elmozdulás késik az erőhöz képest. Látjuk, hogy ha $\omega = \omega_0$, akkor ϱ nagyon nagy lehet. Ekkor $\vartheta = -90^\circ$. \square

1.3.32. Kísérlet. Rezgések összetevését nehéz kísérletileg vizsgálni, ezért inkább lengések összetevésével kísérletezünk. Ha egy jó hosszú fonalingán lévő súlyt oldalirányban lökünk meg, kis kitérésnél nagyon jó közelítéssel ellipszisen mozog. A mozgás felfogható úgy, mint két, egymásra merőleges azonos lengésidejű síklengés összetétele. Szélső esetben (ha az egyik kitérése nulla) a lengés síklengés, ha pedig egyforma, de a fáziskülönbség 90° , körmozgás. Egyénként ha a két síklengés síkja nem merőleges egymásra, összetételük akkor is ellipszist ad. Ha nagyon nagy a kitérés, mindkét lengésidő megváltozik, a mozgás bonyolultabbá válik.

Nem egyforma rezgésidejű rezgések összetételét legegyszerűbb a számítógép képernyőjén tanulmányozni. Itt tetszés szerint állíthatjuk be az irányokat, a frekvenciákat, az amplitúdókat és a fázisokat. \square

1.3.33. Kísérlet. Vágjuk le egy lufi száját és a maradékot feszítsük egy pohár szájára! Ha rákoppintunk, hangot ad, tehát rezgésbe jött. (A hang a levegő rezgése, később foglalkozunk vele.) Ugyanígy működik a dob is: kifeszített bőr, ami ütésre rezgésbe jön. Háromdimenziós testek is rezeghetnek, például ha egy cérnaszálra függesztett talpas üvegpooharat vagy villát megkoccintunk egy kés fokával, hangot hallunk. A cérnaszál nélkül is működik a dolog, de azzal kebb a csillapítás. A két- és háromdimenziós rezgésekkel nem foglalkozunk tovább. \square

1.3.34. Kísérlet. Ha egy testet nem engedünk, hogy a rá ható erők eredőjének irányába gyorsuljon, *kényszererők* lépnek fel. Találkoztunk már ezzel, amikor a súrlódást vizsgáltuk lejtőn. A súlyerőt két, egymásra merőleges erőre bontottuk, és a lejtőre merőlegeset ellensúlyozta a lejtő. Ez a lejtő által kifejtett erő a *kényszererő*. A súrlódási erőt nem tekintjük a kényszererő részének! Ha egy hepe-hupás havas domboldalon csúszunk le szánkóval, a kényszererő mindig merőleges a felületre és mindig nyomóerő. Ha húzóerő kellene, hogy a felületen maradjunk, akkor felrepülünk, ami nagy sebességnél előfordulhat. \square

1.3.35. Kísérlet. Egy másik példa kényszererő felléptére az inga. Rögtönözünk ingát egy gumikötélből. Olyan nagy tömeget tegyünk rá, ami már jól észrevehetően megnyújtja. Tegyük a földre valamilyen könnyen boruló dolgot, például gyuhásdobozt, öngyújtót, sakkfigurát, és tartsuk fölé az ingát, úgy, hogy pár centi legyen a tömeg és a sakkfigura között. Ha jól lengésbe hozzuk az ingát, feldönti a sakkfigurát. Ez érthető, mert a mozgásnál a centripetális erőt is a gumikötélnek kell szolgáltatnia. A holtpontokon (amikor a lengő tömeg egy pillanatra megáll) viszont a gumikötél összehúzódik: a súlyerő egyik komponense a tömeget gyorsítja, csak a másik húzza a kötelet.

Egyébként mindenkinek van tapasztalata, ami ezt mutatja, aki hintázott már. A holtpontokon kisebb erőt érzünk, mint a testsúlyunk, alul, a legnagyobb sebességnél pedig nagyobbat. Ezt az erőt szolgáltatja a hinta lánc. Előre vagy hátra döntő erőt nem érzünk, az a gyorsításra „használdik el”.

Egy fonálon lógó csavart próbáljunk meg függőleges síkban körbe fordítani, de direkt kissé bátortalanul lássunk hozzá. Egy darabig szépen halad egy köríven felfelé, majd egyszer csak olyan mozgást kezd végezni, mint ferde hajításnál. A magyarázat, hogy a cérna csak húzó erőt tud szolgáltatni. Amikor nyomó erőre lenne szükség, a test úgy

mozog tovább (egy darabig legalábbis) mintha nem is lenne cérna. Ezért a nagyon nagy kilengésre, pláne teljes körülfordulásra is alkalmas hinták felfüggesztése nem lánc, hanem rúd, ami húzó- és nyomóerőt is tud szolgáltatni, és a hintázót rögzítik az üléshez. \square

Biztosan van, akinek szöveget ütött a fejébe, hogy a hintában nem a súlyerőt érezzük, hanem attól különböző erőt. A magyarázat az, hogy a hinta nem inerciarendszer. Foglalkozunk most ezzel részletesebben.

1.3.36. Kísérlet. Készítsünk egy műanyag palackra egymás fölé egyenletesen elosztva vagy négy lyukat! Töltsük meg a palackot vízzel és csavarjuk rá a kupakját! A legfelső lyukon levegő buborékol be, a többin víz spriccel ki, méghozzá annál gyorsabban, minél lejjebb van a lyuk. A spriccelést a lyuk fölött lévő víz súlya okozza. Ejtsük el a palackot! Amíg esik, nem spriccol ki a víz, a palackban súlytalanság van. Hasonlóan, ha egy lift felfelé gyorsul, súlyunkat nagyobbnak érezzük, ha lefelé, kisebbnek. Ha elszakadna a lift kötele, súlytalanság lenne (ne próbáljuk ki).

Próbáljuk ezeket a jelenségeket megmagyarázni a lifttel együtt mozgó koordinátarendszerből! Amikor a lift (állandó a gyorsulással) indul vagy megáll, nem inerciarendszer. Hogy egy m tömegű test (például mi) együtt mozogjon vele, szintén a gyorsulással kell mozognia, amihez ma erő kell. Úgy érezzük, mintha (a többi erőn, például a súlyerőn kívül) egy $-ma$ tehetetlenségi erő hatna ránk. Amikor a lift felfelé gyorsul, ez az erő lefelé mutat, mintegy megnöveli a súlyunkat. Amikor a lift lefelé gyorsul, a tehetetlenségi erő csökkenti a súlyunkat. Szabadon eső liftben (vagy bármi másban, például a palackban) éppen kiegyenlíti a súlyerőt. Az űrhajóban azért van súlytalanság, mert szabadon esik! Tehetlenségi erők csak gyorsuló rendszerekben lépnek fel, ha inerciarendszert használunk, nincsenek. Tehetlenségi erők lépnek fel a gyorsuló vagy lassuló, vagy kanyarodó járművekben is, a járműhöz rögzített rendszerben. \square

1.3.37. Kísérlet. Súlytalanság papírlappal téglák között.

1.3.38. Kísérlet. Szakítás fatuskóval.

1.3.39. Kísérlet. Egy műanyag palackot töltsünk meg vízzel félig, és kössünk rá mazdagot! A fejünk felett meg tudjuk forgatni úgy, hogy a víz nem ömlik ki. Ha egyenletes forgó mozgást végez ω szögsebességgel, akkor (mint tudjuk) $-\omega^2 \mathbf{r}$ a gyorsulása, ahol \mathbf{r} a kezünktől a palackhoz mutató vektor. Ha a palackban ülnénk, a palackhoz rögzített koordinátarendszerben a $-m\omega^2 \mathbf{r}$ centripetális erővel ellentétes $m\omega^2 \mathbf{r}$ centrifugális erőt (centrifugális= r öpítő) éreznénk (a súlyerőn kívül). Ugyanez a helyzet a körhintában, az ülést tartó láncok az erők eredőjének megfelelően állnak be, ugyanúgy, mint a vízfelszín a palackban. A palackot akár függőleges síkban is meg tudjuk forgatni úgy, hogy a víz nem ömlik ki. Ennek feltétele az, hogy a centrifugális erő a legfelső ponton is nagyobb legyen, mint a súlyerő. Ezen alapulnak azok a szerkezetek, amelyekben a kocsik (egy darabig) fejfelé lefelé száguldanak.

Ha ügyesek vagyunk, fél kézzel egy félig töltött pohár vizet is meg tudunk forgatni függőleges síkban úgy, hogy nem ömlik ki. Mindenesetre műanyag pohárral és ne a szobában próbáljuk ki először! \square

1.3.40. Kísérlet. A centrifuga, illetve a mosógép centrifugálásakor is a centrifugális

erőt használja. Ez sokszorososa — speciális centrifugákban akár milliószorososa is — lehet a súlyerőnek. Ennek hatására csorog ki a víz a ruhából. \square

A ábrán látható szerkezet a *centrifugális regulátor* (regulátor=szabályzó). Független tengely körül forgatva a súlyokat a centrifugális erő megemeli a fordulatszám függvényében. A tengelyen egy gyűrű csúszik, ami csuklókkal csatlakozik a súlyok karjaihoz; az ábrán a gyűrű keresztmetszetben látható. A gyűrűhöz a gőz mennyiségét szabályzó szerkezet csatlakozik. Ilyet alkalmazott Watt gőzgépein az egyenletes fordulatszám biztosítására.

1.3.41. Kísérlet. Vastagabb kartonpapírból vágjunk ki egy korongot, közepén fúrjuk ki, és szorítsuk alátétekkel és két anyával egy csavarra! A csavart fogjuk fűrőgépbe! A jól megpörgetett korong a centrifugális erőből olyan merev lesz, hogy fát lehet vele fűrészelni. \square

1.3.42. Kísérlet. Készítsük el egy rajztáblán vagy deszkán az 1.3.7. fényképen látható „berendezést”! Lengessük meg az ingát egy síkban, majd óvatosan fordítsuk el a deszkát! Az inga megtartja lengési síkját. Ezen az alapon bizonyította be Foucault, hogy a Föld valóban forog. Képzeljünk el egy jó nagy (hogy sokáig lengjen) síkingát az északi sarkon. A lengő inga megtartja lengési síkját, miközben a Föld egy nap alatt körbe fordul alatta. Az inga síkjának elfordulása a földhöz képes egy-két óra alatt már jól észrevehető. Más helyen bonyolultabb a helyzet, az egyenlítőn például nincs elfordulás, de mindenütt másutt van csak lassabb. Ilyen kísérletet magas épületekben szoktak végezni, nálunk is sok helyen látható. \square

1.3.43. Kísérlet. Játsszótereken néha találunk forgót. Ha ülünk vagy állunk rajta, érezzük a centrifugális erőt. Ha megpróbálunk befele vagy kifele sétálni, egy oldalirányú erőt is érzünk. Egy külső inercia rendszerből világos, hogy miért. A forgástengelytől távolabb nagyobb a sebesség, és így fel kell gyorsítani magunkat, ezt érzékeljük tehetetlenségi erőként, ez az úgynevezett Coriolis-erő. Hogyan lehet ezt kiszámítani? Célszerű lesz a szögsebességet vektornak felfogni. (Egy adott ponton átmenő tengelyek körüli forgások szögsebesség-vektorai vektorként adódnak össze.) A vektor iránya legyen a forgástengely, nagysága ω és irányítsuk úgy, hogy ha jobb kezünkön három ujjunkat széttartva a forgás a hüvelyujjunktól a mutatóujjunk felé irányul, akkor ω arra mutasson, mint a középső ujjunk. Ekkor ha a forgó rendszerhez képest \mathbf{v} sebességgel mozgunk, akkor a Coriolis-erő $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$. \square

1.4. Lendület és energia

Még nincs kész!

1.4.1. Kísérlet. Pénzermék ütközése.

1.4.2. Kísérlet. Ferde ütközések. Papíron körberajzoljuk. Merőleges egyforma pénzernél.

1.4.3. Kísérlet. Ballisztikus inga homokkal töltött műanyag zacskóból, parittyához és nyílhoz.

1.4.4. Kísérlet. Labda visszapattanása videón.

1.4.5. Kísérlet. Ütközési szám mérése.

1.4.6. Kísérlet. Egymásra ejtett labdák.

1.4.7. Kísérlet. Ütközési idő: kormozott márványlap.

1.4.8. Kísérlet. Ha egy szekrényt arrébb tolunk, munkát végzünk. A munka függ attól, hogy milyen hosszan toltuk a szekrényt, és mekkora erővel. Ha csak nekitámaszkodunk, nem végzünk munkát. Ha jégen toljuk, kisebb erő kell, kevesebb munkát végzünk. A munka illetve a munkavégző képesség egységének az a munkát választották, amit akkor végzünk, amikor 1 N erővel 1 m úton mozgatunk valamit, például 1 N súlyú testet 1 m magasra emelünk fel. Ennek a neve Joule (ejtsd dzsúl) angol fizikus nevéből joule (jele J). Másként 1 joule=1 newtonméter, azaz $1 \text{ J}=1 \text{ N}\cdot\text{m}$. A régi egység a méterkilopond, azaz $\text{m}\cdot\text{kp}$ volt.

A teljesítmény az időegység alatt végzett munka. A teljesítmény egységét Watt-ról nevezték el, aki az első nagy teljesítményű gőzgépeket készítette bányavíz szivattyúzására. Ez az egység a watt (jele W), másodpercenként 1 joule munka. Watt gőzgépeinek teljesítményét lóerőben adta meg: úgy találta, hogy nehéz testű, bányavíz szivattyúzására használt lovak másodpercenként $75 \text{ m}\cdot\text{kp}$ munkát képesek végezni. Ezt a teljesítményt nevezte lóerőnek. Az ember teljesítménye tartós munkában körülbelül $0,07\text{--}0,08$ lóerő. Hogy rövid időre mennyi, azt magunk is megmérhetjük, ismerve testsúlyunkat, ha felfutunk néhány emeletet, mérve az időt. Próbáljuk ki! Számoljuk ki a teljesítményünket $\text{m}\cdot\text{kp}$ -ban és lóerőben! Számoljuk át a lóerőt wattrá:

$$1 \text{ LE}=75 \text{ m}\cdot\text{kp}/\text{s}\approx 75 \cdot 9,81 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{s}\approx 736 \text{ J}/\text{s}=736 \text{ W}=0,736 \text{ kW}.$$

□

1.4.9. Kísérlet. Erőkifejtés ferde lejtőn.

1.4.10. Kísérlet. Az energia megmaradása. Hatásfok.

1.4.11. Kísérlet. Példák teljesítményre.

1.4.12. Kísérlet. Inga akadályozva.

1.4.13. Kísérlet. Motorteljesítmény mérése, két mérleggel.

1.4.14. Kísérlet. Alátámasztás szilárdsága.

1.5. Merev testek

Ebben az alfejezetben a mozgó testek elsősorban azt az esetét fogjuk tárgyalni amikor a test már nem tekinthető tömegpontnak, általában azért mert forog is, de alakját nem változtatja.

Még nincs kész!

1.5.1. Kísérlet. Dobjunk el egy lécekből, súlyokból, madzagokból összetákoltsunk egy darabot! Látjuk, hogy nagyjából parabola pályán mozog, mintha mérete elhanyagolható lenne. Pontosan mi az, ami parabola pályán mozog?

A test, amit elhajítottunk, nagy számú tömegpontból áll. Legyen az i -edik tömegpont tömege m_i , és a rá ható erők eredőjét jelöljük \mathbf{F}_i -vel, az oda mutató helyvektor legyen \mathbf{r}_i . Érvényes rá Newton törvénye:

$$\mathbf{F}_i = m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}$$

Nagyon sok egyenletünk van, adjuk eredőjüket! Jelöljük az erők eredőjét \mathbf{F} -fel, a tömegpontok eredőjét M -mel! Azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d^2}{dt^2} \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i.$$

Első pillantásra az \mathbf{F}_i erők eredőzése, amelyik mindegyik maga is sok erők eredője, teljesen reménytelennek látszik. Segítségünkre van azonban Newton harmadik törvénye: az egyes tömegpont-párok közötti belső erők párossá válnak lépnek fel és így kiejtik egymást. Ami marad, az a tömegpontokra ható külső erők eredője. Például hajítási példánknál minden m_i -re lefelé irányuló, gm_i nagyságú súlyerő hat, ezek eredője gM nagyságú lefelé mutató erő, a teljes súlyerő. A kétszeri differenciálás jele mögött álló eredő az a helyvektoroknak a tömegekkel súlyozott átlaga. Ahova mutat, az a tömegközéppont vagy súlypont, tehát a

$$\mathbf{R} = \sum_i \frac{m_i}{M} \mathbf{r}_i$$

vektor mutat a tömegközéppontba. A súlypont kissé pontatlan, de elterjedt elnevezés, onnan ered, hogy a földhöz képest kicsi testeknél ez tekinthető a súlyerő támadáspontjának. Mi is használni fogjuk a pontosabb, de kissé hosszadalmas tömegközéppont helyett. Végül is egyszerű eredőjelést kaptunk:

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2},$$

azaz a tömegközéppont úgy mozog, mintha a külső erők eredője az ott tömegpontból teljes tömegre hatna. \square

1.5.2. Kísérlet. Tömegközéppont meghatározása

1.5.3. Kísérlet. Golyó egyensúlya.

- 1.5.4. **Kísérlet.** Rúd, vonalzó egyensúlya.
- 1.5.5. **Kísérlet.** Keljfeljancsi, lejtőn is.
- 1.5.6. **Kísérlet.** Gyufaszálon lengő villák.
- 1.5.7. **Kísérlet.** Három erő egyensúlya guruló mérleggel, dinamométerekkel.
- 1.5.8. **Kísérlet.** Három párhuzamos erő egyensúlya guruló deszkával, dinamométerekkel.
- 1.5.9. **Kísérlet.** Tengelyezett merev test: csigák, mérleg, emelő.
- 1.5.10. **Kísérlet.** Hengerkerék, csörlő, ék, csavar.
- 1.5.11. **Kísérlet.** Tehetetlenségi nyomaték. Fő tehetetlenségi nyomatékok. Deviációs nyomaték illusztrálása.
- 1.5.12. **Kísérlet.** Impulzusmomentum forgó hintában.
- 1.5.13. **Kísérlet.** Szabad tengely körül: IV.3.2.
- 1.5.14. **Kísérlet.** III/6.3, de fonal alul, és másként.
- 1.5.15. **Kísérlet.** Energiamegmaradás jójával (kabát gombból).
- 1.5.16. **Kísérlet.** Művészi tornás karika.
- 1.5.17. **Kísérlet.** Cérnorsó gurulása.
- 1.5.18. **Kísérlet.** Hengerek versenye lejtőn.
- 1.5.19. **Kísérlet.** Pörgettyű. Kitérése erőhatásra.

1.6. Szilárd testek

Még nincs kész!

- 1.6.1. **Kísérlet.** Asztallap görbülése.
- 1.6.2. **Kísérlet.** Rugalmas nyúlás. Hook.
- 1.6.3. **Kísérlet.** Harántöszehúzódás. Poisson-szám.
- 1.6.4. **Kísérlet.** Lehajlás. Középen terhelve. Optimális alátámasztás.
- 1.6.5. **Kísérlet.** Kihajlás.
- 1.6.6. **Kísérlet.** Nyúlási határ, szakítószilárdság.
- 1.6.7. **Kísérlet.** Téglá, beton nyomószilárdsága.
- 1.6.8. **Kísérlet.** Csavarás kimutatása.

1.6.9. Kísérlet. Torziós inga, direkción nyomatók és nyírési modulusz mérése.

1.6.10. Kísérlet. Mohs keménység.

1.6.11. Kísérlet. Brinell keménység és mérése.

1.6.12. Kísérlet. Egyéb keménységek.

1.6.13. Kísérlet. Tank nem süllyed el. Pontozó, kés, borotva, olló működése. Miért élesítjük? Mennyire? Mérleg éle.

1.7. Folyadékok és gázok

Még nincs teljesen kész!

1.7.1. Kísérlet. A gázokra az jellemző, hogy teljesen kitöltik a rendelkezésre álló térfogatot. A folyadékok nem, viszont a felületük vízszintes, azaz merőleges a gravitációs erőre. Ezt látjuk, ha megdöntünk egy pohár vizet. Ha egy mézes üveget döntünk meg, lassítva figyelhetjük meg ugyanezt: a folyadékokban nyíró erők tartósan nem maradnak fenn. \square

1.7.2. Kísérlet. Az előző kísérletben szereplő megfogalmazás nem pontos, a felület a folyadékra ható erők eredőjére merőleges. Ezt láthatjuk, ha egy kanállal megkeverünk egy pohár vizet, majd kivesszük a kanalat. A felület paraboloid alakja olyan, mint amit egy tengelye körül megforgatott parabola rajzol ki. A vízfelület részecskéire két erő hat: a gravitációs erő és a centrifugális erő. A felület ezek eredőjére merőleges. Sokkal szebb a kísérlet, ha a vizes edényt egy egyenletesen forgó korongra, például egy régi lemezjátszó tányérjára tesszük. \square

1.7.3. Kísérlet. Néha sokkal kényelmesebb térfogatot mérni, mint tömeget. A szakácskönyvekben például ilyesmiket találunk, hogy 1 csapott evőkanál liszt, vagy 2 kávéskanál olaj. Hogy ez mennyi is, ahhoz tudnuk kell a kanál térfogatát és a liszt vagy az olaj sűrűségét: a tömeg és a térfogat hányadosát. A kanál térfogatát könnyen megmérhetjük, ha megmérjük 1 kanál víz tömegét. Ha nem elég érzékeny a mérlegünk, mérjük 10 kanál víz tömegét. Például azt találtam, hogy egy evőkanál víz tömege 8,8 g, egy kávéskanál víz tömege 3,6 g, egy mokkáskanál víz tömege pedig 1,7 g, így a térfogatok rendre 8,8 ml, 3,6 ml, illetve 1,7 ml. Persze a csanakak nem egyformák. Pontosabb méréshez készítsünk mérőkémcsövet: egy kémcsőre ragasszunk celluxszal egy milliméter beosztású papírszalagot (a beosztás legyen befelé) úgy, hogy a 0 mm a kémcső gömbölyű alja belső részének alsó harmadánál legyen. Ez azért kell, mert a gömb térfogata kétharmada az azonos keresztmetszetű henger térfogatának (Kepler hordó formulája!). A ragasztószalagot ne tekerjük körbe a kémcsövön, mert nagyon zavarja a leolvasást, hanem hosszában ragasszuk fel. A kémcső belső átmérőjéből is kiszámolhatjuk, hogy 1 mm hány ml-nek felel meg, de pontosabb lesz, ha majdnem a beosztás tetejéig megtöltjük a kémcsövet hideg vízzel, leolvassuk, hogy hány mm, majd kiöntve megmérjük a víz tömegét. \square

1.7.4. Kísérlet. Teljesen hasonlóan készíthetünk mérőhengert egy keskeny, magas üvegből. A 1.7.1. fényképek közül a bal oldali a mérőhengert, a jobb oldali pedig a skála leolvasását mutatja. A mérőhengernek vízszintes felületen kell állnia, és a felülről homorú vízfelület aljának (közepének) magasságát olvassuk le úgy, hogy a szemünk egy szintben van a víz szintjével. Mivel itt az üveg alja nem gömbölyű, kétszer kell megmérni a kiöntött hideg víz tömegét: egyszer úgy, hogy éppen csak ellepje az üveg alját, egyszer pedig, amikor már majdnem tele van, de még nem éri el az elkeskenyedő részt. Azért a kiöntött víz tömegét mérjük, mert a mérőhengert rendszerint folyadékok kimérésére használjuk, és ilyenkor a kiöntött folyadék számít. Egy kevés a mérőhenger falán marad. Például én 194,7 mm-nél 29,4 g vizet mértem, 269,1 mm-nél pedig 295,6 g vizet. (A skála nem 0 mm-nél kezdődött, de ez nem is lényeges.) Így 1 mm $(295,6 - 29,4)/(369,1 - 194,7) \approx 1,5264$ ml-nek felel meg. Ha például valamilyen folyadék a mérőhengerünket 212,5 mm-ig tölti meg, akkor térfogata $29,4 + (212,5 - 194,7) \cdot 1,5264 \approx 56,6$ ml. Persze az utolsó jegy bizonytalan. Ez a számítás feltételezi, hogy az üveg keresztmetszete mindenütt ugyanannyi. Igyekezünk olyan üveget választani, aminél nincs szemmel látható egyenetlenség. A gyári mérőhengerek közvetlenül ml beosztással készülnek és nem kell számolgatni. Egy jó mérőhenger skálája legalább 50 részre van osztva, és be van maratva az üvegbe. Ha rosszabb mérőhengerhez jutunk, magunk is ellenőrizhetjük hideg víz és mérleg segítségével, azaz idegen szóval *kalibrálhatjuk*. Az eltéréseket írjuk fel és pontos méréseknél vegyük figyelembe. Ugyanígy kalibrálhatjuk saját készítésű mérőhengerünket. Azt is megtehetjük, hogy felírjuk, hány mm a folyadék szintje, majd megmérjük, hogy addig a szintig feltöltve hideg vízzel, az hány gramm. Kisebb folyadékmennyiségek pontatlanabb kiméréséhez gyógyszerárban olcsón kapható, például 1, 2 vagy 5 ml-es orvosi fecskendőt is használhatunk.

Vegyszerek gyakran használnak mérőlombikot meghatározott mennyiségű, például 1 dl vagy 2 dl, 0,5 l vagy 1 l oldat készítéséhez. A gyári mérőlombikok nem olcsók, de könnyen készíthetünk helyettük például 1 l-es mérőüveget. Ragasszunk egy 1 l-es üveg nyakára cellulusszal mm beosztású papírszalagot. A skála befelé legyen. Tegyük a mérlegre, és öntsünk bele pontosan 1 kg tömegű hideg vizet. Olvassuk le a vízszint állását, és ezt a leolvasást írjuk rá az üvegre. Ha megmérjük az üveg nyakának belső átmérőjét, az 1 l-től kicsit eltérő folyadékmennyiségeket is bemérhetünk. Például az üveg nyakának belső átmérője nekem 16,75 mm volt, így 1 mm emelkedés 0,2204 ml-nek felel meg. Persze, igyekezünk olyan üveget választani, amelyik nyakának a keresztmetszete állandó, nincs szemmel látható egyenetlenség. Nem árt, ha néhány egészen kicsi mérőüveget is készítenek. □

1.7.5. Kísérlet. A gyógyszerészek kis folyadékmennyiségeket gyakran cseppszám alapján adagolnak. A cseppszám 1 g folyadék cseppjeinek a száma egy 3,2 mm átmérőjű, a hosszára merőlegesen elvágott és simára csiszolt végű üvegrúdról csepegtetve. Víznel 20, tömény szesznél 63, különböző olajoknál 36–57. A cseppszámot mérleggel magunk is meghatározhatjuk. Üvegrúd helyett használhatjuk egy golyóstoll külső műanyag burkolatát, aminél a végének a külső átmérője kb. 4 mm. A vége tiszta legyen, ha zsíros, csiszoljuk meg finom csiszolópapíron merőlegesen a hosszára. Mártssuk a folyadékba, fogjuk be a felső végét, esetleg kicsit megnyálazva az ujjunkat. Finoman lazítva

az ujjunk nyomását, csepegtessük a folyadékot. Próbáljunk meg kisebb vagy nagyobb cseppeket csepegtetni: nem nagyon fog sikerülni. Mindenesetre ha pontosan egyforma cseppeket akarunk, lassan csepegtessünk, mondjuk 10 másodpercenként egy cseppet. A vegyészek egy csiszolt üveg dugóval záródó úgynevezett bemérőedényben szoktak folyadékot lemérni, hogy a mérés alatt a folyadék ne párologjon. Nekünk megteszi egy jól záródó fedelű kicsi orvosságos üveg. Mérjük le a fedelével. Csepegtessünk bele minél több cseppet, zárjuk le, és mérjük le újra. Számítsuk ki egy csepp tömegét. Nekem vízre 0,057 g adódott. A 1.7.2. fényképen két gyári mérőhenger, egy bemérőedény és három mérőlombik látható. \square

Ha térfogat alapján adott tömegű anyagot akarunk kimérni, akkor tudnunk kell, hogy egy l hány kg. Ez a *sűrűség*.

1.7.6. Kísérlet. A sűrűség mérésének több módja is van. Folyadékok sűrűségét leg-egyszerűbben *piknométerrel* mérhetjük meg. A mi piknométerünk egyszerűen egy olyan üveg lesz, amelynek a dugója nem szívja be a folyadékot, sík vagy domború, hogy levegő ne szoruljon alá és perem van rajta, így mindig pontosan ugyanaddig dughatjuk a dugót az üvegbe. Mérjük meg az üveget szárazon a dugóval, majd töltsük meg hideg vízzel, dugjuk bele a dugót, kívülről töröljük szárazra, és így is mérjük meg. Ezzel megkapjuk a térfogatát, ezt rá is írhatjuk az üvegre. Ha hengeres a dugó, hosszában mélyen karc-oljuk be, különben nem tudjuk belenyomni a folyadékkal teli üvegbe. Próbáljuk ki: a folyadékok gyakorlatilag összenyomhatatlanok, ugyanúgy mint a szilárd anyagok, és nem úgy, mint a gázok. A pontos mérésekhez használt piknométerek üveg dugója hosszában ki van fúrva, és a furatban pontosan egy jelig állítják a folyadékszintet. Mivel nekünk nincs 0,1 mg érzékenységgű mérlegünk, erre nem lesz szükségünk. A piknométer kiszá-ritása után a mérendő sűrűségű folyadékkal ugyanígy járunk el, és megkapjuk ugyanannyi térfogatú folyadék tömegét. A tömeget osztva a térfogattal kapjuk a sűrűséget.

Például nekem az üres piknométer (dugóval) 613 g volt, ez a „tára”. Hideg vízzel megtöltve 970 g volt, ez a „bruttó” tömeg. Csak a víz tömege, a „nettó” tömeg tehát 357 g, azaz a piknométer térfogata 357 ml. A denaturált szesz sűrűségét mérjük meg, mert denaturált szeszre úgyszólván szükségünk lesz. Festékboltban kapható. Óvatosan bánjunk vele, mert gyúlékony. Ne legyen a közelben égő láng, és nyissuk ki az ablakot! Megtöltve a piknométert denaturált szesszel, nekem a bruttó tömeg 916 g, tehát a nettó tömeg 303 g, azaz a sűrűség $303/357 \approx 0,848$ g/ml volt. Egy táblázatból (a kémia részben találhatunk ilyen különféle oldatokra) megállapíthatjuk, hogy a ráírt 90 %-nál kicsit hígabb, kb. 86 %-os, de biztosan csak akkor állíthatnánk, ha 0,1 g pontossággal mérnénk. \square

1.7.7. Kísérlet. Kicsit bonyolultabb szilárd anyagok sűrűségét megmérni piknométerrel. Ha például a szép fehér, kicsit áttetsző és nagyon kemény, késsel nem karc-olható kavicsok sűrűségét szeretnénk tudni, akkor a tiszta és száraz kavicsokból annyit rakunk a megmért piknométerbe, amennyi csak belefér, újra megmérjük, a többlet a kavicsok tömege. Most teletöltjük a piknométert hideg vízzel, bedugjuk, szárazra töröljük és újra megmérjük. A növekmény megadja a kavicsok által szabadon hagyott térfogatot. Ezt levonva a piknométer térfogatából, megvan a kavicsok térfogata is. Nagyobb kavicsoknál persze széles szájú üveget kell használnunk. A kavicsok anyaga kvarc, sok kő legfontosabb összetevője. Sűrűsége 2,65 kg/l. \square

1.7.8. Kísérlet. Sokszor kényelmes lenne valamit térfogat alapján kimérni mint a háziasszony a lisztet. Ilyenkor az úgynevezett *halmazsűrűséget* kellene tudnunk: az anyag látszólagos sűrűségét, ha csak úgy beleöntjük egy üvegbe. Például egy vaspornál azt találták, hogy a halmazsűrűség 2,20 kg/l. Ha néhányszor, mondjuk harmincszor odaütjük az üveget az asztalhoz, a látszólagos sűrűség megnő. Ez a *rázott sűrűség* a vaspornál 2,69 kg/l volt, míg a sűrűség 7,86 kg/l. Van még *döngölt sűrűség* is. Legegyszerűbb, ha a műanyag edényben is tartható anyagok edényébe teszünk egy műanyag kiskanalat, és megmérjük, mennyi fér a laza anyagból a kiskanálba. Ha különböző kis mennyiségeket is ki akarunk így mérni, használjunk gyógyszerek adagolására használatos kis műanyag edényt. Használhatunk \square keresztmetszetű műanyag lécből levágott darabot is. Mérjük meg, hogy 1 mm hosszúnak mennyi anyag felel meg, és írjuk rá az üvegre. Így vonalzóval mérhetünk tömeget. Persze a két szélen lévő ferde résznek csak a fele hossza számít. Ennek a mérési módnak a hibája 10 % körül van; értelemszerűen nagyobb, mondjuk 25 mm feletti hosszúnál kisebb, kisebb hosszúnál jóval nagyobb. \square

1.7.9. Kísérlet. Egy másik sűrűségmérési módot fedezett fel Archimédész az ókorban. Ez azon alapul, hogy egy folyadékba mártott testre *felhajtóerő* hat. Ez felfelé irányul, és annyi, amennyi a test által kiszorított folyadék súlya. Látszólag tehát a test annyival könnyebb, amennyi az általa kiszorított folyadék súlya. Mivel valaminek tartania kell a testet, ha egy mérlegre teszünk egy vizes edényt, és egy cérnán vagy műanyag fonálon (például horgászszinóron, nylonharisnya vékony fonalán) belelógatjuk a testet, mi annyival kevesebbet tartunk, a mérleg viszont annyival többet mutat, amennyi a test térfogatának megfelelő víz súlya. Így megmértük a test térfogatát. Megmérve a tömegét is, megvan a térfogat és a tömeg. Így megmérhetjük például az alumínium, a vas, a vörösréz vagy az ólom sűrűségét, amelyek rendre 2,70 kg/l, 7,86 kg/l, 8,91 kg/l illetve 11,35 kg/l. (Sokféle anyagnak többféle adatát, így a sűrűségét is megtaláljuk a könyv végén lévő táblázatokban.) Megfordítva, esetleg el tudjuk dönteni, hogy valami miből van, ha megmérjük a sűrűségét. Például egy alumíniumnak látszó tárgy tömege 162 g volt, és a mérlegen lévő vízbe lógatva, a mérleg 61 g-mal mutatott többet, így a sűrűsége $\approx 2,66 \text{ g/ml} = 2,66 \text{ kg/l}$. Szinte biztos, hogy a tárgy alumínium. Egyébként folyadékok sűrűségét is meg tudjuk így mérni, ha ismert térfogatú testet lógatunk a folyadékba. \square

1.7.10. Kísérlet. Persze, ha a test sűrűsége kisebb, mint a vízé, akkor még el sem merül, máris annyit csökken a súlya, hogy nulla lesz: úszik a vízben. Így például a polietilénből (jele PE) és polipropilénből (jele PP) készült műanyag tárgyakat könnyen meg tudjuk különböztetni más műanyagoktól, mert csak ez a két műanyag könnyebb a víznél. Vékony tárgyaknál vigyázzunk, mert a tapadó levegőbuborékok könnyen becsaphatnak: tegyünk a vízbe pár csepp mosogatószert, akkor a buborékok nem tapadnak olyan jól. (A habok is azért úsznak a vízben, mert levegő van bennük.) A PE és PP egyébként áttetsző, de nem átlátszó, és a gyertya anyagához hasonló tapintású és kinézetű. Mindkettő ellenáll a legtöbb vegyszernek, ezért jó, ha meg tudjuk különböztetni őket más műanyagoktól. (Nagyobb tárgyakon, edényeken sokszor meg is találjuk a PE illetve PP jelzést.) Manapság gyakran használják őket laboratóriumokban, mert a vegyszereknek jobban ellenállnak, mint akár a tiszta kvarcból olvasztott *kvarcűveg* vagy a nemes fémek. Még jobban ellenálló műanyag a drága *tefflon* (jele PTFE). \square

1.7.11. Kísérlet. A harmadik sűrűségmérési módszer az úszáson alapul: minél kisebb egy folyadék sűrűsége, annál mélyebben merül bele egy úszó test. A beosztással ellátott úszó test a *sűrűségmérő* vagy idegen szóval *aerométer*. A mi sűrűségmérőnk egy kémcső lehet, amelybe belülről egy mm beosztású papírszalagot ragasztunk. A szalagot úgy vágjuk le, hogy, hasonlóan, mint a mérőkémcső készítésénél, a 0 mm a kémcső gömbölyű *külső* részének alsó harmadánál legyen, a teteje pedig pontosan a kémcső tetejénél. Ezután az aljából levágunk 1–2 cm-t, majd úgy ragasztjuk a kémcső belsejébe, hogy a mm beosztás kifelé nézzen, és a szalag teteje a kémcső tetejénél legyen. Most nehezeknek forrasztóon darabkákat dobálunk a kémcsőbe. Ha sűrűségmérőt csinálunk, legjobb, ha mindjárt kettőt készítünk. Az egyikbe csak annyi forrasztóon teszünk, hogy éppen megálljon a vízben. Ezt víznél könnyebb folyadékok sűrűségének mérésére tudjuk használni. A másikba annyi forrasztóon teszünk, hogy majdnem a pereméig merüljön a vízbe. Ezt víznél nehezebb folyadékok sűrűségének mérésére tudjuk használni. Mindkettőnél legjobb, ha gyertyaláng felett megolvasztjuk a forrasztóon, majd felírjuk, hogy pontosan hány mm-ig merül a sűrűségmérő hideg vízben. A gyári sűrűségmérők beosztását úgy készítik, hogy a skála egyből kg/l-ben mutassa a sűrűséget. (Az 1.7.3. fényképek közül a bal oldalin egy ilyen sűrűségmérőt láthatunk, a másik kettőn pedig saját készítésű sűrűségmérőt.) Nekünk egy kicsit számolnunk kell: ahányszor több millimétert merül az adott folyadékba a sűrűségmérőnk, mint a vízbe, annyiszor kisebb az adott folyadék sűrűsége, tehát egy osztással kapjuk a sűrűséget. A nagyon régi sűrűségmérőket úgy készítették, hogy ameddig a vízbe merül, oda 0° -ot írtak, ameddig pedig a 10% sós tartalmú vízbe (sűrűbb, mint a víz), oda 10° -ot, majd a skálát mindkét irányba egyenletesen folytatták. Ez a Baumé (ejtsd bomé) fok. Sajnos, nem írtak mínusz előjelet a másik irányba sem, így tudnunk kell, hogy víznél sűrűbb vagy ritkább anyagról van-e szó. Ha esetleg találkozánk ezzel a régi egységgel, annyit kell tudnunk, hogy ha sűrűségmérőnk 144,3 mm-ig merül a vízben, akkor rajta 1 mm éppen 1 Baumé foknak felel meg. \square

1.7.12. Kísérlet. Ha készítettünk 10% -os sóoldatot, felhasználhatjuk tojások korának a megállapítására. A friss tojás lesüllyed benne. Körülbelül három hetes korában a tojás lebeg a sós vízben. Régebbi tojások feljönnek a sós víz tetejére. Ez a kísérlet azon alapul, hogy a tojás lassan vizet veszít a héján keresztül. (Persze, ennek sebessége azon is múlik, hogyan tároljuk a tojást.) A víz helyére levegő kerül, a tojás sűrűsége csökken. \square

1.7.13. Kísérlet. Egész biztosan tudjuk lebegtetni a tojást, ha tömény sóoldatot készítünk, és abba tesszük. A tojás úszik a nagyobb sűrűségű sóoldaton. Döntsük meg a poharat, és óvatosan, a pohár oldalán végigfolyatva öntsünk tiszta vizet a sóoldat tetejére. A könnyebb tiszta víz úszik a nehezebb sós vizen. A tojás addig emelkedik, amíg a kiszorított sós víz és tiszta víz összsúlya egyenlő nem lesz a tojás súlyával. Ha pár napig hagyjuk állni az összeállítást, a sós és a tiszta víz összekeveredik, és a tojás vagy feljön a tetejére, vagy teljesen elmerül. A keveredést a diffúzió okozza, majd visszatérünk rá. Ha nem keveredő folyadékokat, például sós vizet és étolajat használunk, a tojás lebegve marad.

1.7.14. Kísérlet. Mérjük egy kisebb mérőüvegbe térfogatának 45% -áig vizet, majd

az üveget ferdén tartva, óvatosan öntsünk fölé denaturált szeszt (nem kell vízmentesnek lennie), majdnem a beosztás tetejéig. Látjuk, hogy a szesz úszik a vízen, tehát sűrűsége kisebb a vízénél. Dugjuk be az üveget, és rázzuk össze. Az üveg érezhetően felmelegszik. Ha lehült, nézzük meg a folyadékszintet: alacsonyabb lett, a térfogat csökkent. Nekem például 147 g víz és 182 g 90 %-os denaturált szesz összekeverés előtt 355,8 ml, utána lehülve 351,7 ml volt. A felmelegedés is, meg a térfogatcsökkenés is arra mutat, hogy a víz és a borszesz molekulái erősen vonzódnak egymáshoz. \square

Elég szerencsétlen módon a szesz összetételét, töménységét — idegen szóval *koncentrációját* — térfogatszázalékban szokták megadni, mi is ezt használtuk. Ez azt mutatja, hogy a tiszta borszesz térfogata hány százaléka a keverék térfogatának. Mivel a keveréskor összehúzódnás történik, a borszesz tartalom térfogatszázalékban és a víztartalom térfogatszázalékban együtt több, mint 100 %. Ráadásul melegedéskor másként tágul a tiszta szesz, a víz és a keverék, így változik a térfogat százaléka. Kicsit kevésbé problémás a vegyes százalék vagy ezrelék, ami azt mondja meg, hogy a tiszta anyagból hány gramm van a keverék 1 dl-ében illetve 1 l-ében, de hőmérséklet változáskor ez is változik. Ezért ha egy keveréknél egyszerűen százalékról vagy ezrelékről beszélünk, mindig tömeg százalékra illetve ezrelékre fogunk gondolni. Ez azt mondja meg, hogy 100 g illetve 1000 g keverékben hány g a tiszta anyag.

1.7.15. Kísérlet. Nehezebb lesz gázok sűrűségét megmérni. Szén-dioxid sűrűségét fogjuk megmérni, mert szódavíz készítéshez patronban kapható, így ha kiengedjük, könnyen megmérhetjük a gáz térfogatát és a tömegét is. Használható egy habszifon patron is, ami tejszínhab készítéshez kapható. Ez ugyan más gázt tartalmaz, de teljesen véletlenül annak a gáznak is ugyanannyi a sűrűsége. A „berendezés” az 1.7.4. fényképen látható. Megmérjük egy tele szén-dioxid patron tömegét, lehetőleg cg, de legalább dg pontossággal. Beletesszük egy vékony műanyag zacskóba, egy szűrőszerszámmal együtt, aminek a hegyére valamilyen műanyag kupakot teszünk, hogy ne szűrje ki a zacskót; én egy golyóstollnak csavartam le a végét. A szűrőszerszám lehet egyszerűen egy szeg, amit átütöttünk egy lécdarabon. A zacskót nagyjából lesimítjuk, kiszorítva a levegő nagy részét, majd szoros csomót kötünk a szájára. A csomón átfűzünk egy madzagot is. A madzaggal egy erős cső egyik végére kötözzük a zacskó száját. Legjobb, ha a cső vége át van fúrva, így könnyű hozzákötözni a zacskót. Most valamilyen nagy edényben (én egy polietilén hordót használtam) a rúdnál fogva teljesen víz alá nyomjuk a zacskót, és megmérjük, vagy megjelöljük, hogy meddig emelkedik a víz. Persze, nem buborékolhat a levegő, mert akkor lyukas a zacskó. Egy műanyag hőmérővel megmérjük és felírjuk a víz hőfokát is. (Ez azért kell, mert a gázok sűrűsége erősen változik a hőmérséklettel. Ezzel majd a hőtanban foglalkozunk.) Óvatosan levesszük a szűrőszerszámról a kupakot, és kiszűrjük vele a szénsavas patron. A szén-dioxid kiáramlik, lehül a patron, és köd is képződik a zacskóban. Várunk egy percet, majd újra víz alá nyomjuk a zacskót. Most is megmérjük vagy megjelöljük, hogy meddig emelkedik a víz. Kivesszük a zacskót, az alsó szintig feltöltjük az edényt vízzel, majd egy megmért edénnyel vizet töltögetünk, mindig megmérve az edény súlyát, egészen a felső szintig. Az utolsó adag megmaradt vizet megmérjük („visszamérjük”). A vízadagok össztömege adja a szén-dioxid térfogatát. Például én egy kancsóból öntögettem a vizet. A kancsó tömege 1115 g volt. Az első vízadag a

kancsóval együtt 2352 g, így maga a víz 1237 g, stb. Az utolsó vízadag a kancsóval együtt 2268 g volt, de maradt belőle a kancsóval együtt 1824 g, így csak 444 g vizet használtam az utolsó adagból. Összesen 4049 g vizet használtam, tehát a szén-dioxid térfogata $19,3\text{ °C}$ -on 4,049 l volt. Megmérve az üres patron tömegét, megkapjuk a a szén-dioxid tömegét, ez nálam 7,7 g volt, így a szén-dioxid sűrűsége $7,7/4,049 \approx 1,90\text{ g/l}$. Pontosabb értéket majd később számolunk, mert az is számít, mennyire nyomjuk a zacskót a víz alá. Azt kellene tudni, hogy milyen mélyen van az a pont, ahol a zacskó már nem domborodik, hanem amennyit az egyik irányba homorodik, a másik irányba domborodik. Ezt 30 cm-nek becsültem. A zacskó egyébként a mérés után néhány óra alatt teljesen leeresztett. Egyes műanyagok eléggé áteresztik a gázokat, főleg a szén-dioxidot, ezért nem szabad túl sokat vacakolni.

Tulajdonképpen még egy kísérletet végeztem. Az első vízbe merítés után a műanyag zacskót megtörölgettem. Mielőtt kiszúrtam a patron, megmértem — egy levágott tetejű műanyag palackba állítva — a lezárt zacskót, és a kiszúrás után is újra megmértem. Könnyebb lett 5,6 g-mal! Némi gondolkodás után rájöhettünk, mi ennek az oka. Megnőtt a térfogata, és 4 l levegő súlyának megfelelő felhajtóerő hat rá. (A hőmérséklet $21,6\text{ °C}$ volt.) Ezt a felhajtóerőt minden pontos tömegméréskor figyelembe kell venni. Mérésünk szerint a levegő sűrűsége $\approx 1,35\text{ g/l}$. A mérés elég pontatlan, mert ha a zacskón víz-cseppek maradnak, akkor azok egy része leesik, és ez meghamisítja a mérést. Pontosabb mérést úgy csinálhatnánk, hogy az első vízbe merítés után hagynánk a zacskót teljesen megszáradni. Arra is ügyelni kéne, hogy a víz hőmérséklete megegyezzen a levegőével. Egyébként a pontosabb érték 1,194 g/l lenne. Szerencsére ez a sűrűség nagyságrendben ezerszer kisebb, mint a szilárd anyagok és folyadékok sűrűsége. Így a levegő felhajtóereje nagyságrendben 1‰ hibát okoz. Ez a mi méréseinknél nem okoz gondot. \square

1.7.16. Kísérlet. Vajon gáznál is felül helyezkedik el a könnyebb gáz? Igen, de a diffúzió gyorsan összekeveri a gázokat. Egy levegővel töltött buborékot fogunk úsztatni szén-dioxidon. Készítsünk vízből és kevés mosószerből keveréket, és egy kisebb tölcserít belemártva fújjunk nagy buborékokat. A tölcserít egy kisebb műanyag palack tetejét levágva kaphatjuk. Eleinte nem nagyon sikerült tartós buborékokat kapnom. Ennek oka hogy a buborékban lévő víz párolog. Ezt úgy lehet megszüntetni, hogy valamilyen nedvszívó anyagot, rendszerint glicerint keverünk a vízhez. Ilyen keverékeket készen is lehet kapni gyermekjátékként. A másik módszer, hogy páradúsabbá tesszük a levegőt. Én ezt választottam: a konyhában kísérleteztem, és vizet forraltam egy lábasban.

Ha sikerül szép nagy, majdnem 10 cm átmérőjű buborékokat fújni, fogjuk be a tölcserít, mert különben a buborék leereszt, és enyhe rázással válasszuk le a tölcseréről. Ajánlatos a tölcserít is jól benedvesíteni a mosószeres vízzel, mert ha a buborék száraz felülethez ér, elpattan. Egy nagyobb tálba szórjunk pár teáskanál szódabikarbónát és öntsünk rá ecetet. Nagy pezsgéssel szén-dioxid fejlődik, és mivel nehezebb a levegőnél, pár percig megmarad a tálban, amíg a diffúzió el nem keveri. Egy szál gyufával kipróbálhatjuk, meddig van a tál szén-dioxiddal, mivel az nem táplálja az égést és a gyufa kialszik benne. Ha sikerül egy nagy buborékot fújni és a tál felett lerázni, besüllyed a tálba és úszik a szén-dioxidon. \square

1.7.17. Kísérlet. Ezen az elven működnek a levegőbe emelkedő léggömbök, léghajók.

A vékony de erős, gázt át nem eresztő burkolatot levegőnél könnyebb (kisebb sűrűségű) gázzal — esetleg meleg levegővel ami könnyebb, mint a hideg levegő — töltik. A meteorológiában használt léggömbök akár 30 km magasra is felemelkednek.

1.7.18. Kísérlet. Egy tortagyertyát tegyünk vízbe. Úszik a vizen, de oldalára fordulva. Hogyan érhetnénk el, hogy függőlegesen álljon? Szúrjunk az aljába egy tűt vagy egy szeget! Ha megfelelő súlyú a szeg, akkor függőlegesen állva úszik. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az úszási helyzet a súlypont helyzetétől függ. \square

1.7.19. Kísérlet. Az a következtetés azonban, hogy a súlypontnak lent kell lennie az úszáshoz, nem helytálló. Egy könnyű műanyag edény úszik a vizen, pedig a súlypontja jóval a vízbe merülő rész középpontja felett van. A lényeges az, hogy megdöntve a súlypontja és a kiszorított víz tömegközéppontja hogyan viszonyul egymáshoz. Az edényre két erő hat: a súlyerő támadáspontja a súlypont, a felhajtóerő támadáspontja pedig a kiszorított víz tömegközéppontja. A két erő forgatónyomatékat hoz létre. A kérdés az, hogy ez a forgatónyomaték visszabillenteni akarja-e a tárgyat: ha igen, stabilan úszik. Ha tovább fordítani, akkor felborul. Egy ping-pong labda minden helyzetben stabilan úszik. Könnyű hengeres tárgyak között találhatunk olyan, amely az alaplapjára fordítva is, de az oldalára fordítva is stabilan úszik. \square

1.7.20. Kísérlet. Gondolkodott-e már az Olvasó azon, hogy ha egy üveget megtöltünk vízzel, majd szájával lefelé kiemeljük a vízből, de csak annyira, hogy a levegő ne mehessen be, miért nem folyik ki a víz? Arisztotelész ezt úgy magyarázta, hogy a természet „irtózik az ürtől” (latinul horror vacui). Ezt aztán majd kétezer évig nem vonták kétségbe. Először a szívókutakkal kapcsolatos problémák mutatták, hogy nem így van.

Csináljunk mi is egy ilyen szívókutat magunknak! A modellt az 1.7.5. fénykép mutatja. Vegyünk egy jó nagy műanyag orvosi fecskendőt; én 100 ml-est használtam. Ha vízbe merítjük a végét, és felhúzzuk a dugattyút, felszívja a vizet. Tegyünk bele egy golyót, ami elzárja a víz visszaújtját. Most is felszívja a vizet, de ha lenyomjuk a dugattyút, a golyó mellett csak lassan szivárog ki a víz. Ha levegővel töltjük meg, a dugattyút lenyomva az gyorsan kiszökik: a levegő sokkal könnyebben áramlik át kis réseken, mint a víz. Ez egy *szelep*: a víz csak egy irányba áramlik át rajta. Persze, nem kell feltétlenül golyónak lennie, lehet például kúpos is. Itt most a súlya tartja a helyén, de sokszor ezt rugóval oldják meg. Én egy gombostűt használtam, aminek egy fél cm átmérőjű műanyag feje volt. A tűt visszahajlítva nem ugrik ki a helyéről. A szívókúthoz még egy szelep kell, ami lehetővé teszi, hogy a dugattyú lenyomásakor a víz a dugattyún keresztül felfelé áramoljon. Az igazi szívókutakon a dugattyú felett egy oldalcső van, ezen keresztül folyik ki a felemelt víz. \square

Akármilyen tökéletesre készítették is a szelepeket, a szívókúttal 10 m-nél magasabbra nem sikerült felemelni a vizet.

1.7.21. Torricelli kísérlete. Galilei tanítványa, Torricelli egy nagyon szellemes kísérletet eszelt ki. Nagyjából 1 m hosszú, egyik végén zárt üvegcsövet higannyal töltött meg, amely 13,6-szer sűrűbb, mint a víz. A csövet befogva megfordította és higanyba merítette. A higany szintje lesüllyedt és 76 cm magasán állapodott meg. Felette légüres tér volt (vákuum). Ilyen magas higanyoszlop nyomása nagyjából 10 m magas vízoszlop

nyomásának felel meg. Pascal igazolta minden kétséget kizáróan, hogy a higanyoszlop vagy vízoszlop nyomásának a levegő nyomásával kell egyensúly tartania. A levegő átlagos nyomását a tengerszinten, félúton az északi sark és az egyenlítő között 760 mm magas higanyoszlop nyomásával találta egyenlőnek, vagyis ahogy régebben mondták, 760 higanymilliméterrel (760 Hgmm). Ezt is választhatjuk a nyomás egységének, ez az *atmoszféra* („légkör”), jele atm. Ma már nem használjuk. Azt mondták, hogy értéke legyen 101325 P (pontosan). $1 \text{ atm} = 760 \text{ torr}$ (Torricelli nevéből), de a teljesen elavult Hgmm helyett (ami függ a hőmérséklettől és a helytől) bevezetett *torr* egységet sem használjuk már. \square

1.7.22. Kísérlet. Szeretnénk magunk megmérni, mennyi is a levegő (átlagos) nyomása. A mérést elvileg egy tapadókoronggal is elvégezhetjük. Tapasszunk fel egy tapadókorongot egy sima felületre, és próbáljuk meg leszakítani. Jelentős erővel sikerül csak. Egy horgászok által használt halméreggel megmérhetjük az erőt. Én egy 50 mm átmérőjű tapadókorongnál 15 kp erőt mértem. Ezek szerint a nyomás, azaz az egységnyi felületre eső nyomóerő $15 \text{ kp} / (\pi \cdot 2,5^2 \text{ cm}^2) \approx 0,76 \text{ kp/cm}^2$. Számoljuk át a régebben használatos kp/cm^2 -t szabványos egységre. A szabványos egység a N/m^2 , amit pascalnak is neveznek (jele: Pa). $1 \text{ kp/cm}^2 = 9,80665/0,0001 \text{ N/m}^2 = 98066,5 \text{ Pa}$. A pascal tehát kellemetlenül kis egység a régi egységhez képest. Ezért használják a bar-t is (ejtsd bár). $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hP}$, így a bar csak kb. 2 %-kal nagyobb a régi egységnél. Egyébként tapadókorongos mérésünk elég pontatlan volt, húzáskor a korong húzódik össze, levegő mehet alá, stb. Az átlagos levegőnyomás a Duna szintjénél 1 bar. \square

1.7.23. Kísérlet. Nagyobb légtér először Guericke, Magdeburg polgármestere hozott létre. Légszivattyúja egy üveggömbből állt, amelybe a tetején négy cső nyúlt be. Az egyik leért a gömb fenekéig; ehhez egy szívókút csatlakozott. A másik három csak kicsit nyúlt a gömbbe. Az egyik ahhoz a térhez csatlakozott, amiből ki kellett szivattyúzni a levegőt. A másik egy vízzel telt edényhez csatlakozott. A harmadik a szabadba vezetett. Mind a négy csövet csappal lehetett elzárni. Először a vízzel telt edényből megtöltötték a gömböt vízzel, a levegőt a szabadba vezetve. Elzárták az összes csapot, kivéve a szívókút felé vezetőt, és kiszivattyúzták a víz nagy részét. Ezután csak azt a csapot nyitották ki, amely a légritkítandó térhez vezetett. A nyomás gyorsan kiegyenlítőddött. Innen ismételték az egészet.

Guericke a levegő nyomását a nevezetes „magdeburgi féltékékkal” illusztrálta. Két, 50 cm átmérőjű fém félgömböt illesztett össze bőr tömítéssel. Kiszivattyúzva a levegőt nyolc–nyolc ló sem bírta széthúzni a félgömböket. Ha kinyitva egy csapot, bingedte a levegőt, a félgömbök maguktól szétváltak. Készített vízzel működő barometert is. A magas cső üvegebe vezetett, ami háza tetején kikandikált. Az üvegen a vízen egy ember figura úszott. Rossz időben, amikor a légnyomás csökkent, az emberke lesüllyedt. A magdeburgiak ezt az ördög művének tartották.

Úgynevezett *dugattyús légszivattyút* vagy régi magyar nevén *köpűs légszivattyút* Boyle részére Hook konstruált. Legjobban egy kerékpárpumpára hasonlított; ha tehetjük, szedjünk szét egy kerékpárpumpát. A fémrúd végén egy dugattyú van: két fémlemez között egy bőrkarika, amely nagyobb átmérőjű, mint a cső. Mielőtt a pumpa alját felcsavaroznánk, a dugattyút alulról húzzák be a csőbe. A bőr lefelé hajlik. Ha lefele nyomjuk a

dugattyút, a bőr a hengernek szorul, és a dugattyú összenyomja a levegőt. A sűrített levegő a szelepbe áramlik, amin keresztül a tömlőbe jut, de vissza nem tud jönni. Amikor felfelé húzzuk a dugattyút, a bőr mellett a levegő a hengerbe áramlik, tehát a bőr egyben szelepként is szolgál. A kerékpárszelep egy lezárt végű cső, aminek az oldalán lyuk van. A ráhúzott gumicső darabot a levegő nyomása felfeszíti, és beáramlik a tömlőbe. Az 1.7.6. fényképek közül a bal oldali egy ilyen kerékpárszelepet mutat szétszedve. Kicsit hasonlóan működik a *Bunsen-szelep*, amit a vegyészek használnak: egy rövid gumicső darabba vezetjük a levegőt, ami hosszában egy kis darabon fel van hasítva. A másik vége be van dugva például egy üvegbottal. Ha a belső nyomás nagyobb, a hasíték szétnyílik, ha a külső nagyobb, összezárul. A gépkocsitömlő szelepét rugó nyomja a helyére. Az 1.7.6. fényképek közül a jobb szélsőn láthatunk egy ilyet. \square

Hook légszivattyúja bőrtömítésű dugattyúval készült, de szelepek nem voltak. Helyette kézzel kellett nyitni-zárni két csapot. Az egyik a leszívandó térbe vezető csőben volt, a másik a szabadba vezető csőben. A henger zárt vége felfele állt, és az egész vízbe merült, hogy a dugattyú tömítése jobb legyen.

A légsűrítőknél a szelepek nem jelentenek gondot, mert a nyomáskülönbség nagy, a légszivattyúknál viszont igen, mert a nyomáskülönbség kicsi. A mai légszivattyúk rendszerint forgódugattyús rendszerűek, itt nincs is beömlő szelep, csak kipufogó szelep, ami kisebb gondot jelent. Mivel gyorsan működnek, a tömítetlenségek is kisebb gondot jelentenek. (Elvileg a mi szívókatunk is jó lenne légszivattyúnak, de persze a szelepek messze nem elég jól működnek.)

1.7.24. Kísérlet. Ha egy vízzel töltött, lezárt műanyag palackot megpróbálunk összenyomni, nem megy. Ha levegővel van töltve, valamennyire össze bírjuk nyomni. A folyadékok összenyomhatósága 10–100-szor nagyobb a szilárd testekénél, de kicsi a gázokéhoz képest. Néhány folyadék összenyomhatósága: 1 bar nyomás hatására a víz térfogata 48‰-kel, a szeszé 120‰-kel, a gliceriné 24‰-kel, a higanyé 4‰-kel, míg a vasé csak 1,5‰-kel csökken. A gázoké nagyságrendben 3‰-kel.

1.7.25. Kísérlet. Készítsünk egy Pascal-buzogányt! Szúrjunk túvel néhány kb. 1 mm átmérőjű lyukat egy műanyag palackon az alja közelében mindenféle irányba. Töltsük meg vízzel, csavarjuk rá a kupakját, és nyomjuk össze. A víz minden irányba egyforma sebességgel spriccel ki a lyukakon. Ebből arra következtethetünk, hogy a nyomás a folyadékokban (és a gázokban is) minden irányban egyformán terjed. (Ha nem nyomjuk a palackot, nem folyik ki a víz. Ennek oka a felületi feszültség, kicsit később tárgyaljuk.) \square

1.7.26. Kísérlet. Készítsünk újra egy Pascal-buzogányt, de most mindenféle magasságban és irányban szúrjunk túvel kb. 1 mm átmérőjű lyukakat! Töltsük meg vízzel, csavarjuk rá a kupakját, és nyomjuk össze! A víz minden irányban nagyjából egyforma sebességgel spriccel ki a lyukakon. Azért mondtuk, hogy „nagyjából”, mert ha nem nyomjuk a palackot, a kép megváltozik. A legfelső nyíláson levegő áramlik be, a vízszint alattiakon pedig láthatóan különböző sebességgel, és az előzőnél sokkal lassabban folyik ki a víz. Ez azért van, mert most csak a felette levő vízoszlop nyomása nyomja ki a vizet. Ez annál nagyobb, minél lentebb van a nyílás. A nyomás minden irányban egyformán terjed, de mindig hozzáadódik a szintkülönbségből adódó nyomás, amit a folyadék- vagy

gázoszlop súlya okoz. Csináljunk egy másik Pascal-buzogányt, csak négy lyukat fúrva egymás felett, nagyjából egyforma távolságban! Töltsük meg vízzel! A lentebb lévő lyukakon jobban folyik a víz. Csavarjuk rá a kupakot. Egy rövid ideig még folyik a víz, majd a legfelső lyukon levegő kezd bebuborékolni, a másik három lyukon folyik ki a víz. A kifolyó víz miatt nőtt a víz felett lévő levegő térfogata, csökkent a nyomása, végül a legfelső lyuk szintjénél is kicsit kisebb lesz a nyomás, mint a külső levegő nyomása, így az kezd befelé áramlani. Fogjuk be ezt a lyukat! Rövid idő múlva a felülről második lyukon buborékol be a levegő, az alsó kettőn pedig folyik ki a víz. \square

1.7.27. Kísérlet. A nyomás hatását a levegő térfogatára könnyen kimutathatjuk ha készítünk egy Galilei-hőmérőt. Ez egyszerűen egy üveg, aminek a nyakára egy papír mérőszalagot ragasztunk. Az 1.7.7. fényképek közül a bal oldalin látható. Merítsük egy nagyobb befőttes üvegben lévő vízbe a nyakát. (Nem árt, ha van egy kis víz a nyakában.) Mint a neve mutatja, eredetileg hőmérőnek készült: hogy a kezünkkel ne melegítsük, kötözzünk rá három madzagot, és azoknál fogva emeljük. (A fénykép már eleve így mutatja.) Ha megemeljük, az üveg nyakában lejjebb száll a vízszint, ha jobban beleengedjük a vízbe, akkor feljebb: a víz nyomásának változása tágtítja illetve összenyomja a benne lévő levegőt. Ha hőmérőnek akarjuk használni, ezt a hatást könnyen kiküszöbölhetjük, ha leolvasás előtt az üveget addig emeljük, míg a külső és a belső vízszint egyforma, azaz kiegyenlítjük a vízszint változását. A levegő nyomása egyébként is változik, a magassággal és az időjárással. \square

1.7.28. Kísérlet. A levegő nyomásának a magassággal való változást könnyen kimutathatjuk, ha liftes házban lakunk. Egy nagyon érzékeny Galilei-hőmérőt kell készítenünk; lásd az 1.7.7. fényképek közül a jobb oldalit. Kis átmérőjű csövet és elég nagy üveget kell használnunk. Én egy 7,5 dl-es üveget, csőnek pedig egy golyóstoll átlátszó műanyag burkolatát használtam, aminek belső átmérője 6,65 mm volt. Így vagy 12–15-ször akkora érzékenységet kapunk, mint a Galilei-hőmérővel. A papír skála a vékony csőre kerül. A műanyag csövet egy jól záró átfúrt dugóba kell tennünk, és ezzel zárjuk le az üveget. Mivel erre a „berendezésre” később is szükségünk lesz, ne sajnáljuk az elkészítésére a fáradságot. Én egy borosüveg műanyag dugóját használtam. A dugófúrásról már volt szó.

Ha megvan a „berendezés”, érzékeny nyomásmérőnek fogjuk használni. Tegyük ki a lift közelébe, hogy felvegye a hőmérsékletet. Mérjük meg a hőmérsékletet is, nekem $26\text{ }^{\circ}\text{C}$ volt. Állítsunk be jól leolvasható vízszintet. A felső üveget csak a madzagoknál fogva foghatjuk meg, mert egyébként változik a hőmérséklete is. A lifttel menjünk néhányszor fel-le. Nekem öt emeletnél 16 mm-t változott a vízszint. Ez a valódi nyomásváltozásnál kisebbnek felel meg, mert nem egyenlítettük ki a vízszintváltozást. \square

1.7.29. Kísérlet. Pontosabban úgy mérhetünk, hogy az üveg emelgetésével visszaállítjuk az üvegben az eredeti térfogatot. Menjünk fel a legfelső emeletre, olvassuk le, hogy hány mm-nél van a külső vízszint a vékony csőre erősített skálán, és 20–30 s múlva olvassuk le azt is, hány mm-nél van a belső vízszint ugyanazon a skálán. Nekem a külső vízszint 459 mm-nél volt (a skála nem nullától indult), a belső pedig 486,5 mm-nél. Most le a földszintre. A külső nyomás nő, az üvegben a levegő összenyomódik. Az üveg emelésével

állítsuk be a belső vízszintet pontosan ugyanahhoz a beosztáshoz, 486,5 mm-hez, aminél az előbb volt, várjunk 20–30 s-ot a belső szintet folyamatosan utánaigazítva, és olvassuk le a külső vízszintet. Nekem ez most 480 mm-nél volt (a skála lefele nőtt). A levegő térfogata nyilván ugyanannyi, az üveget pedig ehhez 21 mm-rel kellett emelnem. Ez azt jelenti, hogy a légnyomás változása 21 mm magas vízoszlop nyomásának felel meg. Még két mérést végeztem, a másodiknál 24 mm-t, a harmadiknál pedig 18 mm-t kaptam, az átlag 21 mm. (Látható, hogy a mérés nem valami pontos, a hőmérsékletingadozás nagy pontatlanságot okozhat.) Meg kell még mérnünk a magasságkülönbséget is. Vagy egy emelet magasságát mérjük meg, vagy madzagon leeresztünk valamit. A magasságkülönbség nekem 2056 cm volt. Ez azt jelenti, hogy 20560 mm magas levegőoszlop nyomása ugyanannyi, mint 21 mm magas vízoszlop nyomása, azaz a levegő sűrűsége nagyjából 1000-szer kisebb, mint a vízé. A légnyomás időjárással való változását légnyomásmérővel mérhetjük. Általában nem nagyobb, mint 1 %, de kivételes időjáráskor több százalék is lehet. Ez a Galilei-hőmérőnél néhány, kivételesen 10 °C-nak megfelelő változást okoz. Később majd készítünk magunknak légnyomásmérőt. □

A gyári légnyomásmérő egyébként általában egy rugalmas tetejű, fémlemezről készült doboz, amiből kiszivattyúzták a levegőt. A rugalmas tető a légnyomástól függően többé-kevésbé behajlik. Ezt a kis elmozdulást nagyítják fel mechanikusan és viszik át egy mutatóra. A levegőt azért kell kiszivattyúzni, mert egyébként a hőmérséklettel változna a belső nyomás. Ha gáz- vagy folyadéknyomást akarunk vele mérni, akkor a belsejét a mérendő nyomású térrel kötjük össze. Tulajdonképpen a belső és külső nyomás különbségét méri.

1.7.30. Kísérlet. A gázok összenyomásával kapcsolatos törvényszerűségnek a vizsgálatára legjobb egy 1, 2 vagy 5 ml-es orvosi fecskendő. Gyógyszertárban olcsón kapható. Olyat válasszunk, amelyre a cső keresztmetszetéhez képest lehetőleg kicsi a sűrűlódás. A sűrűlódást úgy tudjuk megmérni, hogy a dugattyút egy digitális mérlegre nyomjuk, és a füleket fogva megmérjük, mekkora erő kell a dugattyú megmozdításához. (Ha a fecskendő hengerét fogjuk, összeszorítjuk, és nagyon változik a sűrűlódás.) Én végül egy 2 ml-es fecskendőt választottam, amin azért 3 ml-ig volt beosztás. A 2 ml-es, azaz 2 cm^3 -es beosztás a nullától 2,65 cm-re volt, azaz a henger keresztmetszete $2 \text{ cm}^3 / 2,65 \text{ cm} = 0,755 \text{ cm}^2$. A sűrűlódási erő 200–300 p volt, elég nagy.

Nyomjuk be teljesen a dugattyút! Dugjuk be valamivel a fecskendő nyílását! Először egy hurkapálca hegyével próbálkoztam, de nem zárt elég jól, ezért olvasztott paraffinba áztattam. Így már használható volt. Még jobb, ha egy injekciós tűt használunk. Olvad paraffinba mártjuk a hegyét, vagy még jobb, ha gyertyalángban megmelegítve a tűt, fogóval kihúzzuk a kupakból, és utána a kupak nyílását a láng felett összeolvasztjuk. Húzzuk hátra a dugattyút! Elég erősen kell húzni, nagyjából állandó erővel. Ha elengedjük, visszavágódik a 0 ml-hez. Ha nem így lenne, nem jól dugtuk be, beszivárog a levegő. Mérjük meg, hogy mekkora erővel kell húzni! Kössük a dugattyút egy madzaggal egy nagyobb, vízzel töltött palackhoz, és a füleknél fogva emeljük a fecskendőt. Mivel nagy a sűrűlódás, azt próbáljuk megmérni, mennyi a legnagyobb erő, amivel húzni lehet a dugattyút, és mennyi a legkisebb, aminél még helyben marad, és a kettő átlagát vesszük. Az én méréseim:

Térfogat	Erő, max.	Erő, min.	Erő, átlag	Nyomás
ml	p	p	p	kp/cm ²
1	800	530	665	0,88
2	800	560	680	0,90
3	800	570	685	0,91

Nyilván hibát okoz a bedugott csőben maradó levegő, a fecskendő „holttere”. Az eredmény durván megfelel annak, hogy a levegő nyomása nagyjából 1 kp/cm². □

1.7.31. Kísérlet. Most engedjük a fecskendőbe 1 ml levegőt, és úgy dugjuk be. A külső levegő nyomóerejét 680 p-nak fogjuk tekinteni, mert most is ugyanannyi a holttér. MÉRJÜK MEG MOST IS, MEKKORA ERŐVEL KELL HÚZNI A DUGATTYÚT! Az eredmények:

Térfogat	Erő, max.	Erő, min.	Erő, átlag	Teljes erő
ml	p	p	p	p
1	0	0	0	680
2	580	100	340	340
3	600	300	450	230

Végül engedjük a fecskendőbe 3 ml levegőt, és nyomjuk a dugattyút a digitális mérlegre. Az eredmények:

Térfogat	Erő, max.	Erő, min.	Erő, átlag	Teljes erő
ml	p	p	p	p
3	0	0	0	680
2	580	210	395	1075
1,5	850	580	715	1395
1	1400	1100	1250	1930
0,5	3000	2700	2850	3530

Azt láthatjuk, hogy ha a térfogat nő, a nyomóerő, tehát a nyomás csökken, ha pedig csökken, akkor a nyomóerő, tehát a nyomás is nő. Azt is észrevehetjük, hogy ahányszorosára nő a térfogat, annyiadrészére csökken a nyomás, és ahányszorosára csökken a térfogat, annyszorosára nő a nyomás. Tehát a nyomás és a térfogat szorzata (adott hőmérsékleten) állandó! Más gázokkal is megismételhetjük a kísérletet és más hőmérsékleten is, az eredmény nem változik. Ezt a törvényt Boyle angol vegyész és (jóval később) Mariotte francia fizikus találta. Elég tehát adott gázra 1 g gáz térfogatát tudnunk egy adott nyomáson és egy adott hőmérsékleten, akárhányszor gramm gáz térfogatát ki tudjuk számolni azon a hőmérsékleten és akármilyen nyomáson. A gáz sűrűségét is elég ismerünk. „Adott nyomásnak” 1 bar nyomást szokás választani, ez a *normál nyomás*, jele p^0 . (Régebben az 1 atm-át használták normál nyomásnak.) □

1.7.32. Kísérlet. Biztosan van, aki nagyon pontatlannak találja előző mérésünket. A nagy sűrűldást kellene kiküszöbölni. A megoldás egyszerű: használjunk vizet dugattyúnak! Egy mérőhengerré átalakított üveget töltsünk meg felég-kétharmadáig vízzel. Dugjuk be az átfúrt dugóval, fordítsuk fel és húzzunk a dugóban lévő műanyag csőre

egy vízzel teljesen megtöltött hajlékony műanyag csövet, amelynek a másik vége egy lavór vízben van. Legjobb, ha a fürdőszobában dolgozunk. Ha emeljük az üveget, csökken benne a vízszint. Először emeljük ki a hajlékony cső másik végét a vízből, és emeljük fel addig, amíg egy szintbe nincs a két vízszint. Most leolvassuk a beosztást, megkapjuk a bezárt levegő térfogatát. Tegyük vissza a műanyag cső másik végét a lavórba. Mérjük meg, milyen messze van a lavór széle a padlótól, és a lavórban a vízszint a lavór szélé-től. Így megkapjuk a vízszint padlótól mért távolságát. Most emeljük fel valameddig az üveget, és olvassuk le a térfogatot, valamint mérjük meg a vízszint távolságát a padlótól. (Én a fregoli különböző állásaihoz állítottam a magasságot, így utólag is ráér az ember megmérni.) Így megkapjuk a vízszint távolságát a lavórban lévő vízszinttől. Kicsit változik ugyan a lavórban a vízszint, de ez jelentéktelen. Számoljuk ki több különböző magasságra a mért térfogat és a teljes nyomás szorzatát. (Két mérés közt legjobb, ha az üveget betesszük a vízbe, hogy ne nagyon melegedjen fel.) A levegő nyomását vehetjük a normál nyomásnak, 1020 p/cm²-nek. Én a következőket kaptam:

Térfogat cm ³	Magasság cm	Túlnyomás p/cm ²	Nyomás p/cm ²	Szorzat m·kp
204,4	0	0	1020	2,085
223,8	68	-68	952	2,131
242,3	161	-161	859	2,081
263,2	216	-216	804	2,116
282,5	273	-273	747	2,110
302,6	328	-328	692	2,094

Most nyomjuk össze a levegőt. Az üvegben lehet több levegő, a hajlékony műanyag cső végét pedig tegyük egy félig vízzel telt befőttes üvegbe. Ezt fogjuk felemelni, és megint a térfogatot és a vízszintek közötti magasságkülönbséget mérjük. Az alábbiakat kaptam:

Térfogat cm ³	Magasság cm	Túlnyomás p/cm ²	Nyomás p/cm ²	Szorzat m·kp
296,4	0	0	1020	3,023
284,5	60	60	1080	3,073
261,7	112	112	1132	2,962
252,4	206	206	1226	3,094
240,8	262	262	1282	3,087
221,6	316	316	1336	2,961

□

1.7.33. Kísérlet. Persze, a kísérlet úgy teljes, ha a levegő nyomását is megmérjük, és azzal számolunk. Tervezzünk egy ilyen kísérletet! Ehhez be kell szerzünk egy erős falú, például pezsgős üveget, mert a levegő nyomása egy kisebb autó súlyával nyomja össze az üveget, és könnyen összeroppanhat. (Egy ilyen „berobbanáskor” szerteszét repülnek az üvegdarabok, és könnyen megsérülhetünk.) A vizet forraljuk fel, mert az oldott levegő nagyon zavar, majd hűtsük le! A hideg vizet öntsük egy vederbe, buborékmentesen

töltsük meg vele az üveget és a hajlékony csövet, majd az üveget megfogva, a vedret egy kötélre engedjük le a negyedik emeletről vagy fentebbről. A cső nem túl kis átmérőjű és nagyon vastag falú úgynevezett vákuumtömlő (vákuum=légüres tér) kell legyen, hogy a légnyomás ne nyomja össze. Jelöljük be a kötélre, hogy mennyire kell leengedni, hogy az üvegben légüres tér jelenjen meg. Meglepő, de az üvegben a hideg víz felforr! A kísérletet ugyan megpróbáltam elvégezni, de nem sikerül, mert nem volt vákuumtömlőm. Egy 12 m hosszú vákuumtömlő elég drága. A hálózaton számos fényképet találunk a kísérletről. A vízszintkülönbségből megkapjuk a légnyomást vízoszlopmilliméterben, amit v.o.mm-nek szoktak rövidíteni. Ebből megkaphatjuk a nyomás pascalban, ha tudjuk a víz sűrűségét és 1 l víz súlyát. A sűrűséget, mivel hideg vízről van szó, 1 kg/l-nek tekinthetjük, 1 l víz súlyát pedig 9,81 N-nak. Mivel 1 l víz 1 mm magas, 1 m² alapterületű vízoszlopnak felel meg, tehát 1 v.o.mm \approx 9,81 P. Látjuk, hogy a v.o.mm nem lenne jó nyomásegység, mivel függ a víz sűrűségétől és a helytől, ezért már régen nem használják.

1.7.34. Kísérlet. * Gyakran van szükség légritkításra. Legegyszerűbb ilyenkor víz-sugárszivattyút használni. Üvegből készült víz-sugárszivattyú látható az 1.7.8. fényképen középen. Úgy működik, hogy a rövid bevezető csövet egy erős gumi vagy műanyag csővel a vízcsapra szereljük, csőbilincsekkel fogatva oda a hajlékony csövet. Ha megnyitjuk a vízcsapot, az erős beáramló víz-sugár összeszűkül és felgyorsul a bevezető cső nyílásában, és magával ragadja a kamrában lévő levegőt a 20–30 cm hosszú kifolyó csövön át. Az oldalsó csövet egy vákuumcsővel kötjük össze a légritkítandó térrel. A maradék nyomás ott 20–30 mbar-ig csökken. Műanyagból is készül, nem túl drágán kapható, de sokáig nem lesz szükségünk rá. Ha nem akarunk túl sok vizet pazarolni, fűrógéppel hajtott kis szivattyúval pumpálhatjuk bele a vizet a fürdőkádból. Levegő pumpálására is felhasználhatjuk, ha a befolyó csőre nem teszünk semmit, a kifolyó csövet pedig háromfuratú dugóval egy nagy, erős palackba vezetjük. A másik két csőből az egyik a palack fenekéig ér, ezen távozik a víz, a másik csak a tetejéig, ezen a levegő.

Ha magunk akarunk víz-sugárszivattyút készíteni, legegyszerűbben fából, két darabból tehetjük, fémcsővekkel. Hasznos, ha a kifolyócső belső vége enyhén összeszűkül (befelé), mert a kiömlő víz-sugár keresztmetszete annyiszor nagyobb kell legyen mint a beömlőé, ahányszor nagyobb a légkör nyomásánál a beömlő víz-sugár nyomása. Mivel a vízvezetékben a víz nyomása rendszerint 2–10 bar-ral nagyobb, mint a légkör \approx 1 bar nyomása, 3–11-szer nagyobb területű kiömlőnyílás kell, mint a néhány mm átmérőjű beömlőnyílás. A táguló csőben a víz-sugár mintegy „magát szabályozza”. A két fa felet kifaragva, vonjuk be epoxigyantával, hogy ne nedvesedjen. Összeállítva a fémcsővekkel, összeszorítva próbáljuk ki. Ha jól működik, epoxigyantával ragasszuk össze. * \square

1.7.35. Kísérlet. Sokszor elég az a légritkítás is, amit egy porszívó bír létrehozni. Egy tapadókorong letépéséhez a porszívó csővéről csak kb. 1 kp erő kellett. Mivel a cső átmérője 3,2 cm volt, a keresztmetszet területe $1,6^2 \cdot \pi$, így a légritkítás csak $9,8 \text{ N}/8,04 \text{ cm}^2 \approx 122 \text{ mbar}$. \square

1.7.36. Kísérlet. Hogyan mérhetnénk a nyomást? Egy mérőkémcsőből készítsünk egy Descartes-féle bűvárt: lásd az 1.7.9. fényképek közül a bal oldalit. Egyszerűen ragasszunk egy mérőkémcső szájához némi összetekert drótot, úgy, hogy szájával lefelé

ússzon a vízben. Tegyük bele egy műanyag palackba, ami majdnem tele van vízzel. Lezárva és összenyomva a palackot, a bűvár elsüllyed, mert a levegő térfogata csökken, és így a felhajtóerő is. Leolvassa a levegő térfogatát az összenyomás előtt és után, a Boyle-törvény alapján kiszámíthatjuk, hogy a nyomás hányszorosa a légköri nyomásnak. Ha van pezsgősüvegünk, a Descartes-búvárral nagyobb nyomásokat is mérhetünk, vagy 10 bar-ig. Megmérhetjük például, hogy egy pumpa mekkora nyomást bír létrehozni. Legyen az üveg majdnem tele vízzel, mert ekkor ha széttörük is, nem történik baj, a víz alig tágul. Ha sok lenne az üvegben a levegő, az kitágulva szerte repítené az üvegcserepeket. Az átfúrt dugót dróttal úgy kötözzük az üveg szájához, mint ahogy a középső fényképen látszik, vagy madzaggal ahogy a jobb szélső fényképen látszik. A légkörinél kisebb nyomást is mérhetünk így, kb. 0,1 bar-ig. \square

1.7.37. Kísérlet. Az ipari nyomásmérők elvét egy szilveszteri, „kitekeredős” papírtrombitán érhetjük meg, ami ha belfújunk, kiegyenesedik. Egy majdnem teljes köré hajlított, egyik végén zárt csövet szoktak használni, amibe a másik végén belevevetic a mérendő nyomású gázt vagy folyadékot. A cső kezd kiegyenesedni. A végének az elmozdulása felnagyítva mutatót mozgat. Egyébként ez is a belső és a külső nyomás különbségét méri. \square

1.7.38. Kísérlet. Szeretnénk megbecsülni a vízmolekulák méretét. Csak a felületi feszültséggel kell egy kicsit megbarátkoznunk. Ha varrótűt (lásd az 1.7.10. fényképeket) vagy egyéb vékony, egyenes drótot, esetleg zsilettpengét nagyon óvatosan vízre teszünk, akkor nem süllyed le, különösen, ha zsíros egy kicsit. Ha viszont egy kicsit is lenyomjuk a víz alá, akkor már lesüllyed. (Ha nem tiszta a víz felszíne, egy papírlap élével egyszerűen „letörölhetjük”.) Egyes rovarok, például a molnárkák is szaladgálni tudnak a víz felszínén. Olyan, mintha a víz felszínét valami rugalmas hártya burkolná. Még egy kicsit be is hajlik a molnárkák lába vagy a varrótű alatt. Ez a *felületi feszültség*. A jelenség oka, hogy a víz felszínén levő vízmolekulákat a víz belsejében levő molekulák befelé húzzák (kohézió). Ez okozza, hogy a folyadéksugár egyben marad. A víz — hasonlóan más folyadékokhoz — arra törekszik, hogy a felszíne minél kisebb legyen, és ha adhézió nincs, akkor gömbölyű cseppekké áll össze. Ezt egyébként olajcseppeken is megfigyelhetjük. Rázzunk össze üvegben vizet étolajjal. Fehéres, tejszerű folyadék keletkezik, víz és olaj *emulziója*. Ha sok vizet kevés olajjal ráztunk össze, akkor olajcseppek úsznak a vízben. Ha sok olajat kevés vízzel ráztunk össze, akkor vízcseppek úsznak az olajban. Nagyítóval megfigyelhetjük, hogy ahol nem érnek a falhoz, ott a cseppek gömbölyűek. Az olajcseppek illetve a vízcseppek ha találkoznak, egyesülnek, így még kisebb lesz a felszín. Idővel az olaj teljesen feljön a víz tetejére. Egyébként a tej is emulzió, zsírcseppek (és még sok minden más) vízben. \square

1.7.39. Kísérlet. Csavaros fedelű üveg fedelébe fúrjunk egymástól egyforma távolságra, a fedő szélé felé három lyukat. Töltsük meg az üveget vízzel, tegyük rá a fedőt és fordítsuk fel: ha függőlegesen tartjuk, a víz nem folyik ki. Ha megdöntjük, a legfelső lyukon bebuborékol a levegő, a legalsón pedig folyik ki a víz. A harmadik lyukon ha a legfelsőhöz van közel, szintén bebuborékol a levegő, ha viszont a legalsóhoz, akkor folyik ki a víz. Közte találhatunk olyan helyzetet, ahol a harmadik lyuknál semmi sem történik.

Nekem 2 mm átmérőjű lyukaknál 2–3 cm szintkülönbség kellett ahhoz, hogy meginduljon a víz kifelé. Nagyobb lyukaknál kisebb különbség is elég, 4 mm átmérőnél csak kb. 1 cm szintkülönbség kellett. Ha a lyukak átmérője 8 mm volt, már nem tudtam úgy tartani az üveget, hogy ne folyjon ki a víz.

A jelenség magyarázata a felületi feszültség. Mint valami vékony hártya akadályozza a felület a víz kifolyását illetve a buborékok kialakulását, és így a levegő beáramlását. Persze akármennyi lyuk is lehet, akkor se változik a helyzet. Ha egész kicsik a lyukak, akkor még nagyobb szintkülönbség esetén sem folyik ki a folyadék. Régen például az étolajos palackok száját csak egy vászondarabbal kötötték be. Még ha felborult is a palack, az olaj nem folyt ki. A levegő persze akadálytalanul átjut a lyukakon, ha nincs ott olaj. A gázoknak nincs felületi feszültsége, ezért mindig kitöltik az egész térfogatot. A kísérletnek sok más változata van: a befőttes üveget lyukacsos hálójával is beköthetjük, sőt, elég, ha egy kartonpapírt teszünk rá: ekkor az üveg szélénél akadályozza meg a felületi feszültség a levegő be- illetve a víz kijutását. \square

1.7.40. Kísérlet. Egy másik felületi feszültséggel kapcsolatos kísérlet szappanbuborékok fúvása. Folyékony mosogató-, kézmosó- vagy mosószert hígítsunk fel egy tálkában vízzel, esetleg oldjunk fel szappant vízben. Készen is kaphatunk szappanbuborék fúvásához oldatot. Egy szívószállal belefújva az oldatba szép buborékok képződnek. Ha kivesszük a szívószálat, a végén maradt oldatot néha sikerül buborékká felfújnunk. Még nagyobb buborékokat fújhatunk, ha drótból egy 3–4 cm átmérőjű karikát hajlítunk, és az összecsavart drótból álló szárát alkalmasan meghajlítva, belemártjuk az oldatba. Ha marad rajta folyadék, elég erősen belefújva szép nagy gömb alakú buborékot kaphatunk. Azért lesz gömb alakú, mert a felületi feszültség minél kisebb felületre próbálja összehúzni, a bezárt levegő térfogata viszont adott. Ha a tálkában szívószállal fújunk buborékokat, észrevehetjük, hogy ha egy szép nagy buborékban benn hagyjuk a szívószálat, az lassan „leereszt”. Némi ügyeskedéssel a szívószálon kiáramló levegőt kimutatathatjuk, ha egy gyertyalángra irányítjuk, esetleg sikerül el is fújni a gyertyalángot. \square

1.7.41. Kísérlet. De miért kell a mosogatószer vagy szappan a vízbe a szappanbuborékok fúvásánál? A szerepük az, hogy csökkentik a víz elég jelentős felületi feszültségét, és így könnyebben képződnek buborékok. Ennek kimutatására tegyünk egy tálkában tiszta vízre egymással párhuzamosan két fogpiszkálót, és közöttük érzünk a vízhez egy harmadik mosogatószerbe mártott végű hegyével. A fogpiszkálók szétugranak. A köztük levő víz felületi feszültsége csökkent, a másik oldalon viszont megmaradt, ez rántja arrébb a fogpiszkálót. Ugyanez történik, ha szappandarabbal érünk a fogpiszkálók között a vízhez. Nem véletlen, hogy éppen a mosogatószerek csökkentik a felületi feszültséget: kisebb felületi feszültségű folyadék könnyebben behatol a pizsok alá. \square

1.7.42. Kísérlet. Ebben a kísérletben nem csak a kohézióból származó felületi feszültség, hanem az adhézió is szerepet játszik. Két (tiszta!) üvegcsík közé egyik végüknél tegyünk egy vékonyabb csavart vagy egy gyufaszálat, középen pedig fogjuk össze őket egy csipesszel. Tökéletesen megfelelnek a mikroszkópoknál használt, 2 mm vastag, 24 mm-szer 50 mm-es úgynevezett *tárgylemezek*, de magunk is vágathatunk üvegcsíkokat. Mártsuk az egész összeállítást vízbe. A víz az üvegcsíkok között felemelkedik, minél kisebb a rés,

annál jobban: lásd az 1.7.11. fényképet. A víz és az üveg közötti adhézió erős, a víz nedvesíti az üveget, ezért emelkedik fel. Vékony üvegcsőben is felemelkedik a víz, minél vékonyabb a cső, annál jobban. A vegyészek gyakran kihasználják ezt: egy nagyon kis cseppet, ami még nem cseppen le, is felvihetünk egy üveglemezre, ha hozzáértetjük a vékony üvegcsövet. Ha vizet vagy más hasonló folyadékot töltünk, egy üvegbotot teszünk az üveg szájához: a vízszugár az üvegbot mentén folyik le, így könnyen irányíthatjuk.

Ha nem jutunk mikroszkóp tárgylemezekhez, magunknak kell üvegcsíkokat vágni vékony ablaküvegből (egy kitört darab is megfelel). Kétféle üvegvágót használnak, az egyikben gyémántszilánk, a másikban acélkerék végzi a vágást. Az üveglapot megtisztítjuk, sima asztallapra fektetjük, amelyre például papírt teríthetünk, hogy egyenletesen, teljes felületén feküdjön fel az üveglap. Vonalzó mellett vágunk, 2–3 mm-nél vastagabb üveg esetén egy rongyot terpentínbe, petróleumba, vagy a kettő keverékébe mártunk, és a vonalzó mentén bekenjük vele az üveget. Most egy mozdulattal az üveg egyik szélétől a másikig végighúzzuk az üvegvágót. Nem szabad többször végighúzni! Vékony, 2–3 mm-es üvegnél alig kell nyomni, vastagabbnál kicsit erősebben, minél vastagabb, annál jobban. A gyémánt vágót kicsit előredöntjük; a gyémánt akkor vág jól, ha halk hangot ad, „énekel”. A vágás után a vágásvonalat az asztal széléhez húzzuk, majd gyenge, de hirtelen mozdulattal letörjük a leeső részt. Néhány centiméter széles csíkok levágásánál az üvegvágó nyelét a leeső rész alá fogva törjük le azt. Különösen vastagabb üveg vágásánál a vágásvonalat az üvegvágó szélével alulról megkocogtatjuk: ilyenkor az üvegvágó által okozott repedés továbbterjed. Vastag üvegből keskeny csíkot nem fog sikerülni levágni. □

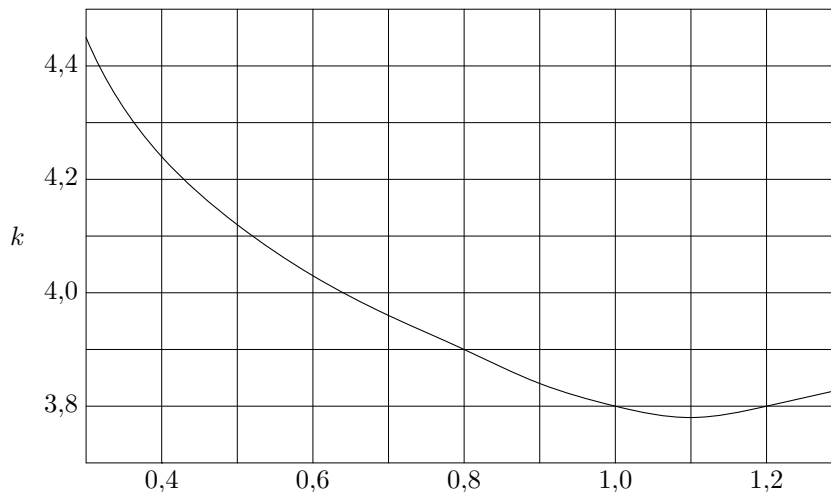
1.7.43. Kísérlet. Az előző kísérlet magyarázza, hogy száraz kréta, papír, gipsz, téglamiért szívja fel a vizet, márvány az olajat. Hogy a téglavalóba tele van finom lyukakkal, *hajszálcsövekkel*, idegen szóval *kapillárisokkal*, arról meggyőződhetünk, ha a két végébe két lyukat fúrunk, ezekbe két beleillő csövet teszünk, és az egyikbe belefújunk: a másikon kiáramló levegővel gyertyát fújhatunk el. □

1.7.44. Kísérlet. Régebben gyakran használtak borszeszégőt. Kapni is lehet, de magunk is csinálhatunk egy lehetőleg alacsony és széles üvegből, aminek a szája 1 cm vagy nem sokkal nagyobb átmérőjű, kívülről rátehető vagy rácsavarható kupakkal. Denaturált szeszt öntünk bele, és egy feltekert vászon- vagy posztócsíkból, vastag kötélből, redőnyhúzó gurtból vagy más hasonlóból készült kanócot teszünk bele. A lényeg az, hogy jól felszívja a szeszt, amit meggyújtunk. Ha nagyobb lángot akarunk, kijebb húzzuk a kanócot. Nagyon vigyázzunk, fel ne boruljon! Legjobb, ha valamibe beleállítjuk, például egy eldobható alumínium edénybe. Nagyobb lángot ad, mint egy gyertya, és nem kormoz. □

1.7.45. Kísérlet. Az, hogy a varrótű fennmarad-e a vízen, nem függ a hosszától, csak a vastagságától. A *felületi feszültséget* azzal a maximális erővel mérhetjük, amellyel a folyadék egységnyi hosszú tűre hat (ha levontuk a felhajtóerőt). Pontosabban, egységnyi hosszón a tű egyik oldalán, mert mindkét oldalon hat ez az erő. Hogyan mérhetnénk meg ezt az elég kis erőt? Tulajdonképpen már meg is mértük, mégpedig több különböző folyadékra is, amikor cseppszámot mértünk. A lecseppenő csepp addig „hízik”, amíg

a súlya egyenlő nem lesz a kerületen ható, a felületi feszültségből származó erővel. A gyógyszerész cseppentője 3,2 mm átmérőjű üvegrúd, aminek a kerülete ≈ 10 mm. A cseppszám víznél 20, tehát egy csepp tömege 0,05 g. A súlya tehát $0,05 \cdot g \approx 0,5$ mN. Így a felületi feszültség $\approx 0,5$ mN/cm = $5 \mu\text{N/m}$. Pontosabb értékhez azt is figyelembe kell venni, hogy a cseppek a lecseppenés előtt már egy kicsit „befűződnek”: ahol a folyadékoszlop el fog szakadni, annak a résznek a kerülete nem 2π -szer a cseppentő sugara, hanem kisebb. Hogy hányszor a sugár, azt az alábbi táblázatból vagy méginkább az 1.7.12. grafikonról olvashatjuk le.

	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
k	4,45	4,24	4,12	4,03	3,96	3,90	3,84	3,80	3,78	3,80	3,83



1.7.12. ábra: a cseppszámhoz

A grafikonon a függőleges tengelyen az a k érték van megadva, amivel a sugarat kell szorozni 2π helyett a számolásban. A vízszintes tengelyen $r\sqrt{\rho/(2\sigma)}$ van megadva, ahol ρ a fajsúly, σ pedig a felületi feszültség. De hiszen ez borzasztó! A felületi feszültség kiszámolásához tudnunk kéne a felületi feszültséget! Nem kell megijednünk. Tudunk egy közelítést a felületi feszültségre, és ennek segítségével kiszámolunk egy jobb közelítést, stb. A fajsúly az egységnyi térfogatnyi anyag súlya. Ez vízre 1 p/cm^3 , azaz $\approx 9,81 \text{ mN/cm}^3$. Innen a $\rho/(2\sigma)$ hányados $9,81 \text{ mN/cm}^3$ osztva 1 mN/cm -rel, tehát $9,81/\text{cm}^2$. Mint tudjuk, a $\sqrt{\quad}$ négyzetgyök jel a négyzetreemelés fordítottját jelenti, tehát azt, hogy a négyzetgyökjel alatti mennyiséghez olyan mennyiséget kell keresni, aminek ő a négyzete. Az eredményt szorozva $0,16 \text{ cm}$ -rel, $0,50$ -ot kapunk. A grafikonon ehhez $k = 4,13$ tartozik. Így felületi feszültségnek $0,62 \text{ mN/cm}$ adódik. Ezzel újraszámolva mindent, $k = 4,02$ és $\sigma = 0,72 \text{ mN/cm}$ adódik. Ha mégegyszer újraszámolunk mindent, már nincs lényeges változás, tehát ez a helyes felületi feszültség. (Ha az én csepptömeg méréssel és a 4 mm -es átmérővel számolnánk, a $0,45$, $0,71$ és $0,68 \text{ mN/cm}$ közelítések adódnának.) \square

1.7.46. Kísérlet. Most egy gondolat-kísérletet fogunk végezni. Csak elgondoljuk, mit csinálnák. Vegyünk egy 1 cm^3 -es vízkockát, és vágjuk ketté. A felülete 2 cm^2 -rel nőtt. Mennyi munkát végeztünk? Egy cm hosszon a felületi feszültség $0,72\text{ mN}$ erőt képvisel, és ez ellen dolgoztunk 2 cm hosszon, így $2\text{ cm} \cdot 0,72\text{ mN} = 14,4\ \mu\text{J}$ munkát végeztünk. Szeleteljük fel a „vízkockát” egy vízmolekula vastagságú rétegekre. Nyilván nagyon sokszor kell szétvágnunk. Nem tudjuk hányszor, jelöljük n -nel. Most egy másik oldallal párhuzamosan is ismételjük meg ezt, majd egy harmadikkal párhuzamosan is. Összesen $3n$ vágást végeztünk. Végeredményben vízmolekulákra bontottuk a vizet. Ugyanez a végeredmény akkor, ha a vizet elpárologtatjuk. Majd a hőtámban foglalkozunk azzal, mennyi energia kell ehhez; $20\text{ }^\circ\text{C}$ -on 2424 J , magasabb hőfokon valamivel kevesebb. Ez ugyanannyi kell legyen, mint a „szeleteléskor” végzett munka. (Ezek szerint a felületi feszültségnek lassan csökkennie kell a hőmérséklet növekedésekor. Ez így is van.) Tehát azt kaptuk, hogy $3 \cdot n \cdot 14,4\ \mu\text{J} = 2424\text{ J} = 2424 \cdot 10^6\ \mu\text{J}$. Innen $n \approx 56 \cdot 10^6$. Tehát a vízmolekulák mérete 1 cm -nek az ötvenhatmilliomod része, $0,18\text{ nm}$. Tűrhető közelítést kaptunk, bár a vízmolekulák persze nem kocka alakúak. A vízmolekulák számára 1 g vízben azt kapjuk, hogy az $n^3 \approx 1,76 \cdot 10^{23}$. Valójában $\approx 0,33 \cdot 10^{23}$. \square

Innen nics kész!

Sűrűség:

- 1.7.47. Kísérlet.** Vizes mérleg.
- 1.7.48. Kísérlet.** Víz mint gyertyatartó.
- 1.7.49. Kísérlet.** Bor és víz helycseréje.
- 1.7.50. Kísérlet.** Kémcsőben golyók, gyorsítva.

Nyomás:

- 1.7.51. Kísérlet.** Buvár vasdróttal.
- 1.7.52. Kísérlet.** Gyufafej bűvár.
- 1.7.53. Kísérlet.** Vízszivattyú fecskendőből.
- 1.7.54. Kísérlet.** Magdeburgi féltékék. Légritkítás.
- 1.7.55. Kísérlet.** Mariotte-palack
- 1.7.56. Kísérlet.** Megfordított úszó két kémcsőből.
- 1.7.57. Kísérlet.** Feldobott Pascal-buzogány.
- 1.7.58. Kísérlet.** Hidraulikus sajtó.
- 1.7.59. Kísérlet.** Gumihártyás üveg. Gumilap üvegtulipánon vagy Mattila légnyomásmérője.
- 1.7.60. Kísérlet.** Felhajtóerő nyomásból.

- 1.7.61. Kísérlet.** Örökmozgó.
- 1.7.62. Kísérlet.** Hidraulikus fék.
- 1.7.63. Kísérlet.** Különböző alakú edények aljára műanyag lap (henger, tölcser alul, felül; a lapra fonalat ragasztunk.) Inkább mérlegre nyomjuk.
- 1.7.64. Kísérlet.** Palack szétrobbantása (műanyaggal nem megy).
- 1.7.65. Kísérlet.** Mariotte-palack és működése. Teljes parabola, dugóba fúrt lyukkal.
- 1.7.66. Kísérlet.** Héron kútja.
- 1.7.67. Kísérlet.** Üvegpalack szétrobbantása.
- 1.7.68. Kísérlet.** Hidraulikus sajtó két fecskendővel. Szelepek működése.
- 1.7.69. Kísérlet.** Közlekedő edények. Vívezeték.
- 1.7.70. Kísérlet.** Aneorid barométer.
- 1.7.71. Kísérlet.** Sipoló papírcső. Gumicső? Bourdon-csőves nyomásmérő.
- 1.7.72. Kísérlet.** Vízmanométer.
- 1.7.73. Kísérlet.** Vérnyomásmérő.
- 1.7.74. Kísérlet.** Pumpa működése.
- 1.7.75. Kísérlet.** Centrifugálszivattyú.
- 1.7.76. Kísérlet.** Szivornya.
- 1.7.77. Kísérlet.** Vízszintező hosszú távra.
- 1.7.78. Kísérlet.** Vívezeték, mint közlekedő edény, vízszintjelző.
- 1.7.79. Kísérlet.** Hg-os vákuummérő.
- 1.7.80. Kísérlet.** Dugattyús szivattyúk. Légüres tér fecskendővel. pipetta.
- 1.7.81. Kísérlet.** Forgó olajszivattyú. Molekuláris szivattyú.
- 1.7.82. Kísérlet.** Nyitott szájú léggömb felfúvása: lyuk a palack aljára, gumitömítés vagy ragasztjuk.
- 1.7.83. Kísérlet.** Magdeburgi féltekék.
- 1.7.84. Kísérlet.** Fecskendőből és golyókból szivattyús kút.

Felületi feszültség:

1.7.85. Kísérlet. Csupa lyukas palack.

1.7.86. Kísérlet. Laza szövésű anyag, felülről átönthető a víz. Kartonlappal is. Cérnahurok keretben.

1.7.87. Kísérlet. Adhézió: a vízcsepp az ablakra tapad. Hg-nél is van. Süllyedés hajszálcsőben. Kapálás felér egy jó esővel. Nedves lakások.

1.7.88. Kísérlet. Szappanhártya cérnát feszít ki. Kétféle is.

1.7.89. Kísérlet. Szappanhártya rezgetése hangszóróval: FKGY I/31.3.2.

1.7.90. Kísérlet. Kámforos, (gyógyszertárban kapható) éteres, mosószeres kis hajó.

1.7.91. Kísérlet. Kámfor vízen és olajon, vízen szaladgál, olajon nem.

1.7.92. Kísérlet. Úszó a víz alatt. Egy csepp mosószer.

1.7.93. Kísérlet. Gézzel fedett üveg.

1.7.94. Kísérlet. Szemcseppentő, nyomásnövelés.

1.7.95. Kísérlet. Buboréksor PVC csőben.

1.7.96. Kísérlet. Borsozott víz és szappanoldat, 5 ‰.

1.7.97. Kísérlet. Borotvapenge úsztatása. Rajta alu nehezékek.

1.7.98. Kísérlet. Dugó és drótkarika a víz alatt.

1.7.99. Kísérlet. Szappanos hajó alu fóliából.

1.7.100. Kísérlet. Forgó fogpiszkáló.

1.7.101. Kísérlet. Buborékok fúvása: Siddon Colins.

1.7.102. Kísérlet. Csordultig töltött borosüveg és nem csordultig töltve. Uborkás üveg.

1.7.103. Kísérlet. Papírra tintával írni. Cipő zsírozása.

1.7.104. Kísérlet. Kör alakú cérnaszál.

Egyéb:

1.7.105. Kísérlet. Sósat vagy cukrosat eszünk (nem ide).

1.8. Áramlás

Még nincs kész!

1.8.1. Kísérlet. Közegellenállás. Kísérlet: ovec [52], 110–112. o. Pontos képlet (függ a sűrűségtől) és arányossági tényezők.

1.8.2. Kísérlet. Hajó vontatása.

1.8.3. Kísérlet. Függése az alaktól: oeva [50], 26. o. Kanalas szélesebbégmérő.

1.8.4. Kísérlet. Prandl törvénye: csak a határréteg.

1.8.5. Kísérlet. Prandl-féle áramlásmérő.

1.8.6. Kísérlet. Bernoulli törvénye.

1.8.7. Kísérlet. ovec [52], 95.o

1.8.8. Kísérlet. ovec [52], 96.–109. o.

1.9. Hullámok

Még nincs kész!

1.9.1. Kísérlet. Gumikötélen zavar terjedése. Visszaverődés kötött végről.

1.9.2. Kísérlet. Gumikötélen zavar terjedése. Visszaverődés szabad végről.

1.9.3. Kísérlet. Fémrúdban zavar. Pingponglabda elugrik a végétől.

1.9.4. Kísérlet. Transzverzális állóhullám gumikötélen.

1.9.5. Kísérlet. Transzverzális és longitudinális rezgés fémrúdban.

1.9.6. Kísérlet. Transzverzális elliptikus állóhullám gumikötélen. Polarizáció.

1.9.7. Kísérlet. Interferencia Y vagy T botra kötözött palackkal.

1.9.8. Kísérlet. Hullámkád tepsiből, rezgőfűrészsel. Kivetítés tükörrel.

1.9.9. Kísérlet. Videók a hálózatról. Törés, visszaverődés, interferencia, elhajlás. Doppler-effektus. Hangsebesség felett.

1.10. Hangtan

Még nincs kész!

1.10.1. Kísérlet. A hangsebesség mérése videóval.

1.10.2. Kísérlet. Hangvilla helyett villa.

1.10.3. Kísérlet. Biciklikerek.

1.10.4. Kísérlet. Sziréna.

1.10.5. Kísérlet. Longitudinális és transzverzális hullámok rúdiban.

1.10.6. Kísérlet. Decibel skála. A nulla szint: $2 \cdot 10^{-10}$ bar nyomás. 60 decibel. 120 decibel. Robbanás.

1.10.7. Kísérlet. Befőttes üvegek rezonanciája.

1.10.8. Kísérlet. Kémcsövek hangolása.

1.10.9. Kísérlet. Lebegés kémcsövekkel.

1.10.10. A hullámegyenlet hangnál. Csak síkhullámokat fogunk tekinteni levegőben (vagy más gázban), azaz azt az esetet amikor távol vagyunk a hangforrástól. Mielőtt a hang megérkezik, legyen a levegő nyomása p_0 , sűrűsége pedig ρ_0 . Miközben a hang áthalad, írjuk a nyomást $p = p_0 + p_e$ illetve a sűrűséget $\rho = \rho_0 + \rho_e$ alakban. Tudjuk, hogy p_e és ρ_e az időtől és a helytől függő, de nagyon kicsiny mennyiségek. Válasszuk x tengelynek azt az irányt, amerre a hang terjed, és vizsgáljuk egy kiszemelt, erre merőleges síkban lévő levegő elmozdulását. Ez csak x -től és a t időtől függ. Jelöljük $\chi(x, t)$ -vel, tehát az a levegő, ami a hang érkezése előtt az x helyen volt, a t időpontban az $x + \chi(x, t)$ helyen lesz. Az eredetileg az $x + \Delta x$ helyen átmenő síkban lévő levegő ugyanebben az időpontban az $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t)$ helyen lesz. A két sík közötti távolság Δx -ről $x + \Delta x + \chi(x + \Delta x, t) - x - \chi(x, t)$ -re változik. Mivel Δx kicsi, ez közelíthető $\Delta x + (\partial\chi/\partial x)\Delta x$ -szel; a furcsa ∂ jel a szokásos d helyett arra emlékeztet bennünket, hogy csak az x szerint kell differenciálni, miközben t nem változik, konstansnak tekinthető. Ez a *parciális derivált* x szerint; az x helyen és a t időpontban képezzük.

Mivel csak síkhullámot vizsgálunk, válasszuk a hang terjedési irányára merőleges keresztmetszetet egységnyinek. Eredetileg a két sík között a sűrűség ρ_0 volt, így a tömeg $\rho_0 \Delta x$. Az új sűrűséget a $\rho_0 \Delta x = \rho(\Delta x + (\partial\chi/\partial x)\Delta x)$ egyenletből kapjuk. A $\rho = \rho_0 + \rho_e$ helyettesítéssel az adódik, hogy

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial\chi}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

A második tag az első mellett elhanyagolható, mert ρ_e sokkal kisebb, mint ρ_0 . Így végül is arra jutottunk, hogy

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial\chi}{\partial x}.$$

minden x helyen és t időpontban.

Mi okozza az eredetileg Δx vastagságú levegőrétég elmozdulását? A két oldalán ható erők különbsége gyorsítja. Mivel tömege egységnyi keresztmetszetre $\rho_0 \Delta x$, Newton második törvénye szerint $\rho_0 \Delta x (\partial^2 \chi / \partial t^2)$ egyenlő kell legyen az erők különbségével, ami egységnyi keresztmetszetre

$$p(x, t) - p(x + \Delta x, t) = p_e(x, t) - p_e(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \Delta x.$$

Így azt kaptuk, hogy

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x}.$$

Nyilván a sűrűség függvénye a nyomásnak, amit fordítva is tekinthetünk, a nyomás függvénye a sűrűségnek: $p = f(\rho)$. Mivel p_e nagyon kicsi, nagyon jó közelítés, hogy $p_0 + p_e = f(\rho_0) + f'(\rho_0) \rho_e$. Nyilván $f(\rho_0) = p_0$, így $p_e = f'(\rho_0) \rho_e$. A derivált pozitív, jelöljük v^2 -tel. Kiszámításához ismernünk kell a hőmérséklet változását. Newton, aki először végezte el ezt a számítást, feltette, hogy a hőmérséklet nem változik. Ekkor pV állandó. Mivel a sűrűség fordítva arányos a térfogattal, azt kapjuk, hogy $p = k\rho$, ahol k egy állandó. Értéke p_0/ρ_0 kell legyen, ez a derivált. Így azt kapjuk, hogy $v^2 = p_0/\rho_0$, és az egyenlet

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} = -v^2 \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = v^2 \rho_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}.$$

A ρ_0 is kiesik, és a

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

hullámegyenletet kapjuk. Ez írja le a hang terjedését nem csak gázban, hanem szilárd anyagban és folyadékokban is. Hasonló egyenlet vonatkozik a fény terjedésére is. Egyébként Newton közelítése nem jó, ha a hullámhossz jóval nagyobb, mint a molekulák két ütközése között megtett közepes szabad úthossz. Sokkal jobb közelítést ad az a feltevés, hogy nincs hővezetés. Mint a hőtanban majd látni fogjuk, ekkor pV^κ állandó, ahol κ a gáz állandó nyomáson és az állandó térfogaton mért fajhőjének hányadosa. Ekkor teljesen hasonlóan $v^2 = f'(\rho_0) = \kappa p_0 / \rho_0$ adódik. Levegőre $\kappa \approx 1,40$. \square

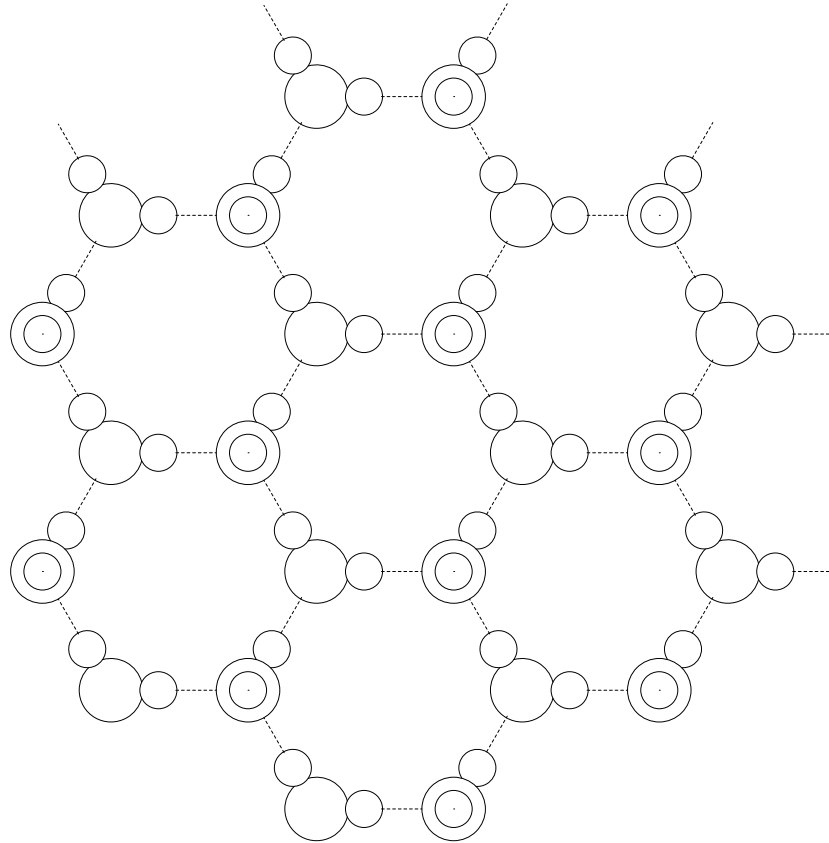
2. HŐTAN

2.1. Hőtan

2.1.1. Kísérlet. Mint mindenki tudja, ha a vizet lehűtjük $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ alá, megfagy, jég lesz belőle, ha pedig nagyon megmelegítjük, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ fölé, akkor felforr, és gőz lesz belőle. A jég, víz és gőz egy anyagnak, a víznek három halmazállapota: a szilárd, folyadék illetve gőz (vagy gáz) halmazállapot. Ha egy műanyag palackot megtöltünk vízzel és betesszük a mélyhűtőbe, megfagy, jég lesz belőle, és eléggé megnő a térfogata, tehát kisebb lesz a sűrűsége. Ezt tudjuk is tapasztalatból: a jégkocka úszik a vízben. A jég sűrűsége egyébként $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on $0,9168\text{ kg/l}$. Ha a vizet teljesen megtöltött és lezárt üvegpalackban tesszük be a mélyhűtőbe, széttöri a palackot: pont akkora erővel feszíti, ami ahhoz kellene, hogy a jeget összenyomjuk arra a térfogatra, amit vízként foglalt el. (A gyakori megfagyás-kiolvadás sziklákat, betont bír szétrepedtetni, szétrombolni.) Az, hogy megdermedéskor kitágul valami, igen ritka, a gyakran előforduló anyagok közül csak a víz ilyen. Ha például egy kis gyertyát, úgynevezett „teamécsest” alumínium tokjával (a belet kivethetjük belőle) egy kis lábasba teszünk, némi vizet öntünk alá (nem süllyed el, úszik a vízben) és a vizet melegítjük, akkor a gyertya anyaga, a *paraffin* megolvad, még mielőtt a víz felforrna, azaz $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ alatt. Ha hagyjuk lehűlni, a paraffin megdermed, és a teteje kissé behorpad: dermedéskor összehúzódik.

A jég különös viselkedését a jégkristály szerkezete magyarázza. A 2.1.1. ábrán látható a jégkristály egy rétege. A vízmolekulák egy nagyobb (oxigén, O) és két kisebb (hidrogén, H) atomból állnak. Nincsenek egy síkban, azok, amelyeken felül van az egyik hidrogén atom, feljebb vannak, mint a többi. Minden második molekula így áll. A hidrogén atomok kapcsolódnak egy másik vízmolekulához, a kapcsolódást szaggatott vonal jelzi. A felül lévő hidrogén atomok kapcsolódnak a következő réteg pontosan felettük lévő molekuláihoz: ezt a kapcsolódást csak egy pont jelzi, „a szaggatott vonal felülről csak pontnak látszik”. A következő réteg eggyel elforgatva (azaz 60° -kal elforgatva) jön erre a rétegre, így annak alul lévő molekulái pontosan az előző réteg felül lévő molekulái fölé kerülnek, és hozzájuk kapcsolódnak. A hidrogén atomok elmozdulhatnak a szaggatott vonalak mentén. Látható, hogy elég nagy „lyukak” vannak a jégben, ezért kicsi a sűrűsége. A szerkezet „hatszögletessége” magyarázza azt is, miért „hatszögletesek” a hópelyhek. □

2.1.2. Kísérlet. * Fémtárgyak készítése gyakran öntéssel történik. Fémeket általában homokformába öntünk. A rendszerint fából készült mintát csak alig nedves homokkal



2.1.1. ábra: a jég szerkezete

töltött dobozba tesszük, jól körülöngöljük homokkal, mint mikor a gyerekek „homoktor-tát” csinálnak, majd óvatosan kiszedjük a mintát. Megvárjuk, amíg a homok megszárad, és a formába beleöntjük az olvadt fémét. Bonyolultabb öntvényeknél a minta két vagy több részből állhat, például az alsó részét egy alsó dobozba, a felső részét egy felső dobozba formázzuk, és kiszáradás után a kettőt egymásra fordítjuk. Ilyenkor beöntőnyílást is kell hagynunk, és járatot a levegőnek, ahol kijöjjön. Üreges öntvénynél a „magot” előre elkészítik homokból, és beleteszik a formába. Tudni kell, hogy a fémek megszilárdulásakor mennyivel húzódnak össze, a mintát ennyivel nagyobbra kell készíteni.

Zsugorodás dermedéskor, térfogatarány:

Al	Zn	Sn	Pb	Fe	Ac	Öv	Bz	Sr
1:19	1:21	1:43	1:31	1:24	1:17	1:32	1:21	1:22;

a rövidítések a fémiparban szokásosak: Ac=acél, Öv=öntött vas, Bz=bronz, Sr=sárgaréz.

Acélt is lehet homokba önteni, de elég, ha egyszerű formák ónból, ólomból, cinkből

és esetleg alumíniumból való öntésével próbálkozunk meg, ezeknek alacsony az olvadáspontja. * \square

2.1.3. Kísérlet. A jég megolvasztásához hó kell, a víz felforralásához még több. Mi a hó? Foglalkozunk most ezzel. Szükségünk lesz két egyszerű műanyag szobahőmérőre. Ezzel pontosan megmérhetjük a hőmérsékletet. Készítsük el a 2.1.2. fényképen látható egyszerű szerkezetet, a *kalorimétert*. A hó mennyiségét fogjuk vele mérni, nem a hőmérsékletet. A külseje egy műanyag palackból készült, és 2 cm vastag kemény műanyag habból (úgynevezett polisztírol habból, jele PS) éles késsel vágunk néhány beleillő korongot. (Ilyen habot csomagolásra használnak, így hulladék anyag.) Egy korongot alulra teszünk, belerakunk két egymásba rakott 2 dl-es műanyag poharat, és körbetömködjük a műanyag hab szétmorzsolt darabjaival. (Nem árt, ha 1 dl-es és 3 dl-es műanyag poharakat is tartunk készenlétben.) A belső poharat kivesszük, kiborítjuk az esetleg behullott habdarabokat, öntünk bele fél dl vizet, visszatesszük. Egy harmadik pohár aljának a szélén néhány kis lyukat fúrunk vagy vágunk egy ollóval, teszünk bele vagy egy dl jéget, és lassan beleeresztjük a belső pohárba. A jég teljesen legyen átfagyva, legalább egy napig legyen a mélyhűtőben, mert ha víz maradt a belsejében, az hibát okoz! Egy korongon lyukat vágunk a műanyag hőmérőnek. Átdugjuk a hőmérőt a lyukon, lefedjük a koronggal a poharat, és a hőmérőt betuszkoljuk a jégkockák közé. A hőmérőt forgatva a koronggal, kevergetjük a jeges vizet.

Valószínűleg meglepetés ér bennünket: lehet, hogy a hőmérő nem mutat nulla fokot. Nem, nem a víz vagy a jég romlott el, hanem a hőmérő pontatlan. Ezeket az olcsó hőmérőket nem állítják be pontosan. Várunk egy pár percet, kevergetjük a jeges vizet: ha már nem mozdul a hőmérő folyadékszála, leolvassuk, hogy mennyit mutat. Az első hőmérő, amivel próbálkoztam $+2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot mutatott. Erre filettollal ráírtam, hogy $-2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ez arra emlékeztet, hogy mindig, amit mutat, abból $2,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot le kell vonni. A másik hőmérő $-0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot mutatott, erre ráírtam, hogy $+0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$; ez arra emlékeztet, hogy mindig, amit mutat, ahhoz $0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot hozzá kell adni. \square

2.1.4. Kísérlet. A kalorimétert azért burkoltuk be ilyen gondosan műanyag habbal, mert az jó hőszigetelő. Próbáljuk ki, mennyire jó a hőszigetelés! Tegyük mérlegre a kalorimétert, vegyük le a fedelét a hőmérővel, kapcsoljuk be a mérleget, és vegyük ki a belső, lyukas poharat, a vizet óvatosan visszacsorgatva. A súlycsökkenés a jég súlya. Rakjunk vissza mindent, és egy óra múlva ismételjük meg az egészet. Így látjuk, mennyi jég olvadt el egy óra alatt. Megint rakjunk vissza mindent, és hagyjuk a kalorimétert egészen addig, amíg már elég kevés jég marad. Nekem 62 g jégből az első 20 percen 4 g olvadt el, az első másfél órában 22 g, és három óra alatt 48 g, így óránként 16 g. Még jobb lenne a hőszigetelés, ha nem használnánk hőmérőt, hanem csak egy fedelet, de hát a hőmérőre szükség lesz. A hőmérő folyadékszála egész idő alatt nem mozdul: amíg víz is, jég is van, a hőmérséklet $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Azt is mérjük meg és írjuk fel, hogy a szobának mennyi a hőmérséklete: nekem $23,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ volt. \square

2.1.5. Kísérlet. A következő kísérletben azt vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha hideg és meleg vizet összekeverünk. Persze, langyos víz lesz, de megtanuljuk kiszámolni, hogy hány fokos. Nem nagy varázslat: minél több a meleg víz, annál melegebb lesz.

A kaloriméterünkbe legyen valamivel kevesebb, mint 1 dl víz, meg némi jég. Míg beáll a $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérséklet, melegítsünk egy lábasban vizet, hőmérővel mérve, hogy hány fokos. Ne melegítsük fel annyira, hogy a hőmérő folyadékszála teljesen felmenjen, mert széttöri a hőmérőt! Kapcsoljuk ki a melegítést, a kaloriméterből vegyük ki a jeget, tegyük fel a mérlegre, és kivéve a jéghideg vizet is, mérjük meg, hogy hány gramm. Tegyük vissza, és a megmért hőmérsékletű meleg vízből öntsünk hozzá körülbelül ugyanannyit, megmérve a tömegét. Tegyük fel a fedelét, és a hőmérővel megkeverve mérjük meg a hőmérsékletét. Például én 82 g jéghideg vízhez 89 g $35\text{ }^\circ\text{C}$ -os vizet öntöttem, és így 171 g vizet kaptam $19,6\text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérséklettel. Így számolhatunk: Azt a hőmennyiséget, ami 1 g víz hőmérsékletét $1\text{ }^\circ\text{C}$ -kal emeli, 1 *kalóriának* nevezzük. A 89 g meleg vízben a jéghideghez képest $89 \cdot 35 = 3115$ többlet kalória van. Ez oszlik el a 171 g vízre, így annak hőmérséklete $3115/171 = 18,2\text{ }^\circ\text{C}$ lesz. Nem ennyit kapunk, ez lehet például mérési hiba: a műanyag pohár tömegét, az általa felvett hőt, a hőmérőt, a beszivárgó hőt, stb. nem vettük figyelembe, a hőmérő pontatlan, stb. Az is lehet, hogy különböző hőmérsékleteken 1 g víz hőmérsékletének $1\text{ }^\circ\text{C}$ -kal való emeléséhez nem ugyanannyi hő kell. Ez is igaz, hideg és a forró víznél is kb. 1 %-kal több hő kell $1\text{ }^\circ\text{C}$ hőfokemeléshez, mint $30\text{ }^\circ\text{C}$ körül (így a kalória nem valami jó egység), ez azonban pont ellenkező irányú hibát okozna. Tehát mérési hibáról van szó, ami nem is csoda kezdetleges eszközeinkkel. Valószínűleg a pohár tömegének figyelmen kívül hagyása a legnagyobb hibaforrás. A digitális mérleg egy pohár tömegét nullának mutatja, de kettőét már 6 g-nak! Egyes digitális mérlegek direkt nem írják ki a kis tömegeket, erre vigyázzunk. Ha a pohár 3 g-os tömegét levonjuk a jéghideg víz tömegéből, a hőmérsékletre $3115/168 \approx 18,5\text{ }^\circ\text{C}$ -ot kapunk. \square

2.1.6. Kísérlet. Az első kísérletünkből sejtethetjük, hogy a jég elolvasztásához jelentős mennyiségű hő kell. Vajon mennyi? Ezt próbáljuk meg megmérni. Tegyük a kaloriméterünkbe kevés vizet, és valamivel kevesebb, mint egy dl jeget. Készítsünk meleg vizet, mint az előző kísérletben. Ha beállt a $0\text{ }^\circ\text{C}$ -os hőmérséklet, vegyük ki a jeget, megmérve a súlycsökkenést, és öntsünk a kaloriméterbe fél dl meleg vizet, majd tegyük vissza a jeget. Kezdjük el mérni az időt, és ha visszaállt a $0\text{ }^\circ\text{C}$, mérjük meg, mennyi jég maradt. Nekem például 84 g jéghez $37\text{ }^\circ\text{C}$ -os vízből hozzáadva 58 g-ot 8' múlva állt vissza a hőmérséklet nullára, és 52 g jég maradt. Így számoltam: 32 g jég olvadt el. Mivel óránként 16 g jég úgyis elolvad a beszivárgó hő miatt, 2 g-ot levontam. Így $58 \cdot 37 = 2146$ cal kell 30 g jég elolvasztásához, 1 g jég elolvasztásához tehát 72 cal kell. (Pontosabb mérések szerint 79,7 cal.) Ez a jég *olvadáshője*. Más szilárd anyagok olvadáshőjét hasonlóan mérhetjük meg. \square

2.1.7. Kísérlet. Nem minden anyagnak van meghatározott olvadáspontja. Vegyünk egy kis üveg mézet. Ha majdnem tele van, fordítsuk fel, és mérjük meg, a levegőbuborék mennyi idő alatt ér az üveg tetejére. Nekem ez 3" volt: a méz nem könnyen folyik, elég sűrűn folyós, nagy a *belső súrlódása*, idegen szóval *viszkózitása*. A mézet betéve a hűtőbe, $5\text{ }^\circ\text{C}$ -on már 30" kellett ugyanehhez, a mélyhűtőben, $-18\text{ }^\circ\text{C}$ -on pedig már 2 óra. Végül $-28\text{ }^\circ\text{C}$ -ra állítva a mélyhűtőt, 3 nap. Egy másik, sűrűbb mézből már kevés volt az üvegben, ezért azt mértem, mennyi idő alatt folyik le az üveg aljára. Szobahőmérsékleten 3' kellett, $5\text{ }^\circ\text{C}$ -on 15', végül $-18\text{ }^\circ\text{C}$ -on még 1 hét alatt is csak félig folyt le, talán 2 hét kellett volna, így tovább nem is próbálkoztam. A folyadékok viszkózitása a hőmérséklet

növekedésével csökken, a vízé például $^{\circ}\text{C}$ -onként kb. 2 %-kal.

Mi is a belső súrlódás? Két sima, egyenes fémlemez, például késpenge közé tegyük kevés mézet. Az egyik késpengét ide-oda mozgatva érezzük, hogy valamilyen erővel próbálja magával vinni a másik késpengét. Ha a pengék nagyobb felületen érintkeznek (a mézen keresztül), akkor nagyobb ez az erő, tehát a felületegységre eső erőt (ami nyomás jellegű) érdemes tekinteni. Minél vékonyabb a mézréteg, és minél gyorsabb a mozgás, azaz minél nagyobb az egységnyi távolságra eső sebességváltozás, annál nagyobb az erő. A viszkozitást tehát az egységnyi sebességváltozásnál felületegységre ható erővel mérhetjük. A hosszegységre eső sebességváltozás egysége $(\text{m/s})/\text{m}=1/\text{s}$, tehát a viszkozitás egysége $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$. Mérni úgy szokták, hogy egy álló hengerbe teszik a folyadékot, és abban forog egy másik henger, közel a külső henger falához. Azt az erőt mérik, amivel a folyadék igyekszik magával ragadni az álló hengert. (A víz viszkozitása például 20°C -on majdnem pontosan $1 \text{ mN}\cdot\text{s}/\text{m}^2$.) Egy másik mérési lehetőséget majd később látunk: bebizonyítható (nagyon nehéz), hogy az η viszkozitású folyadékban egy r sugarú kis gömb kis v sebességgel való mozgatásához $F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ erő kell; ez Stokes képlete. Így megmérve a mézben felszálló buborék sugarát és sebességét kiszámíthatjuk a viszkozitást.

A viszkozus anyagok hűtve egyre sűrűbbek lesznek, és végül már teljesen szilárdnak tűnnek, de igazából folyadékok. Ezeket *amorf* anyagoknak nevezzük. Ilyen például az aszfalt, a szurok és a pecsétviasz is. A legfontosabb amorf anyag az *üveg*. Nincs határozott olvadáspontja, és így olvadáshője sem, hanem melegítve fokozatosan meglágyul, majd egyre hígabb lesz. Tulajdonképpen nincs határozott különbség azok között az anyagok között, amelyek kristályosan illetve amelyek amorf állapotban szilárdulnak meg, csak annyi, hogy egyes anyagokban lassabban jönnek létre kristályok és lassabban növekednek, és hűtve olyan nagy lesz a folyadék viszkozitása, hogy már nem tudnak kristályok létrejönni és megnövekedni, mert a kristálynövekedés sebessége fordítva arányos a viszkozitással, és nagyobb viszkozitáskor a kristályok képződése is lassul. A méz például szobahőmérsékleten általában egy-két év alatt kikristályosodik. Az üveget is a lágyulási hőmérséklet közelében tartva hosszú idő alatt kikristályosodik. Másrészt olyan anyagokat, mint a víz vagy a fémek, nagyságrendben 1 ms alatt több száz $^{\circ}\text{C}$ -kal lehűtve, amorf állapotúak lesznek. \square

2.1.8. Kísérlet. Más anyagok felmelegítéséhez általában kevesebb hő szükséges, mint a víznél; például petróleumnál feleannyi, higanynál harmincadannyi. Az 1 g anyag hőmérsékletét 1°C -kal emelő hőmennyiséget az adott anyag *fajhőjének* nevezzük. Persze ez függhet a hőmérséklettől (bár általában nem nagyon gyorsan változik), így csak valami átlagfajhőt mérünk. Mérjük meg az alumínium átlagfajhőjét szobahőmérséklet és 100°C között! Keressünk egy minél nagyobb alumíniumdarabot, ami befér kaloriméterünk poharába, és öntsünk rá annyi vizet, hogy ellepje. Vegyük ki, mérjük meg a tömegét, kössünk rá valami cérnát, és tegyük bele egy lábasba. Öntsünk rá annyi vizet, hogy bőven ellepje, és melegítsük a vizet. Közben mérjük meg, hogy mennyi víz maradt a kaloriméterben, tegyük rá a fedelét, és mérjük meg a víz hőmérsékletét. Ha a lábasban már egy ideje fő a víz, vegyük ki az alumínium darabot, gyorsan csurgassuk le róla a vizet, és tegyük át a kaloriméterbe. Mérjük meg a víz hőmérsékletét. Például nekem 162 g forró alumíniumot $228 \text{ g } 20,7^{\circ}\text{C}$ -os vízbe téve, a víz hőmérséklete $30,8^{\circ}\text{C}$ -ra emelkedett,

tehát $(30,8 - 20,7) \cdot 228 \approx 2303$ kalóriát vett fel, az alumínium tehát ennyit adott le. Így 1°C -ra $2303/(100 - 30,8) \approx 33,28$, tehát 1 g -ra és 1°C -ra $33,28/162 \approx 0,208$ kalória esik. Táblázatban az alumínium fajhőjére $0,214\text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$ -ot találunk. Hasonlóan mérhetjük meg folyadékok és gázok fajhőjét is, bár a gázoknál gondot okoz, hogy kicsi a sűrűségük, és így nagy térfogattal kell dolgozni. Például a vízgőz fajhője kb. $0,5\text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$. \square

2.1.9. Kísérlet. Miért kellett mindig várni egy pár percet, miután a mélyhűtőből kivett jeget beraktuk a kaloriméter vizébe? Egyrészt a víznek le kellett hűlni 0°C -ra, másrészt a jégnek a mélyhűtő általában -18°C -os hőmérsékletéről fel kellett melegednie 0°C -ra. Eközben némi jég elolvad, de az is lehet, hogy némi víz megfagy! A jég fajhője $\approx 0,5\text{ cal}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{C})$. Tervezzünk egy kísérletet, amelyben megmérjük a jég fajhőjét! \square

2.1.10. Kísérlet. Foglalkozzunk egy kicsit a hővezetéssel. Tapasztalatból tudjuk, hogy egyes anyagok rossz hővezetők: ezeket megfogva melegnek érezzük, mert a kezünkkel érintkező réteg gyorsan átmelegszik, és nem vezetődik el a hő. Más anyagok, például a fémek (különösen az ezüst, a vörösréz és az alumínium) jó hővezetők, ezeket hidegnek érezzük, mert a hőt gyorsan elvezetik a kezünktől. Egyszerű kísérlet, hogy az egyik kezünkben tartott pénzdarabot melegítjük a másikban tartott gyufával. A pénzt hamarabb eldobjuk, mint az égő gyufát. (Ha esetleg megégetnénk a kezünket, csorgassunk rá pár percig hideg vizet.) Az ezüstöt akár meg is tudjuk különböztetni így más fémektől. Egy kis polisztírol habdarabot gyufával melegítve megolvad, esetleg meg is gyullad. Elég sokáig a kezünkben tudjuk tartani, amíg a „körműnkre ég”, mert nagyon rossz hővezető. (Azért 1 cm -nél ne engedjük közelebb az ujjunkhoz, mert — tapasztalatból mondom — nagyon megéget, ha az olvadt polisztírol az ujjunkra ragad.) A víz is elég rossz hővezető. Tegyük egy kémcsőbe egy-két darab jeget, valamilyen összetekert drótdarabot fölé, hogy nyomja le a víz alá. Töltsük fel a kémcsövet hideg vízzel. A ferdén tartott kémcső tetejét gyertyával melegítve, ott a vizet akár fel is forralhatjuk úgy, hogy a jégdarab nem olvad el. \square

2.1.11. Kísérlet. Fémek jó hővezetőképességét mutatja ez a kísérlet. Gázégő levegőnyílását zárjuk el teljesen. A lángba tartsunk egy vasdrótból készült sűrű hálót, például egy rozsdamentes teaszűrőt. A szűrő fölött a láng nem ég: a fémháló elvezeti a hőt, és fölötte a gáz-levegő keverék nem éri el a gyulladási hőmérsékletet. Vékony drótból készült háló hamar izzásba jön, ekkor felette is beindul az égés. Oltsuk ki a lángot, tartsuk a szűrőt a gázba, és a háló felett gyújtsuk meg a lángot. Most nem terjed alulra, amíg a háló izzásba nem jön. A láng kékes, hiszen a gáz alul már levegővel keveredik. Ha egy másik hálót is tartunk a lángba, a gáz csak a két háló között ég.

Ezen alapszik Davy találmánya, a biztonsági lámpa. Szénbányákban nagy gondot okozott, hogy a szén rendszerint metánt zár magába. Ez a levegővel robbanó keveréket, *sújtóléget* alkot, ami a lámpa lángjától meggyullad. Davy a lámpát drótketrecbe zárta. Metánt tartalmazó levegőben a láng megnagyobbodik, de ha a sújtólég elpuffan is belül, a láng nem jön át a dróthálón. Ma persze elektromos világítást használnak, de minden tűzveszélyes helyen nagyon kell ügyelni a szikraképződés elkerülésére. \square

2.1.12. Kísérlet. Időegység alatt annál több hő megy keresztül valamilyen anyagnak a rétegén, minél vékonyabb a réteg és minél nagyobb a hőfokkülönbség. Tehát a

hőmérsékletesés, azaz a hőfokkülönbség és a vastagság hányadosa számít. Természetesen a réteg teljes területével és az eltelt idővel arányos az átmenő hőmennyiség. A különböző anyagok *hővezetési tényezője* azt adja meg, hogy egységnyi hőfokesésnél egységnyi területen időegység alatt mennyi hő áramlik át. Becsüljük meg kaloriméterünk hőszigetelésének hővezetési tényezőjét. Az enyémben a hőszigetelő fal vastagsága kb. 2 cm, a pohár átmérője középen 56 mm, magassága 98 mm. Így a poharat alul és felül összesen kétszer $\pi \cdot 2,8^2$ cm², körben pedig $\pi \cdot 5,6 \cdot 9,8$ cm², összesen ≈ 220 cm² területű fal veszi körül. Mivel óránként 16 g jég olvadt meg, 1280 cal áramlott be óránként, azaz másodpercenként és négyzetcentiméterenként $\approx 0,0016$ cal. Mivel a hőmérsékletkülönbség 23 °C, a vastagság 2 cm, a hőmérsékletesés 11,5 °C/cm. Tehát 1 °C/cm hőmérsékletesésre $\approx 0,0016/11,5 \approx 0,00014$ kalória jut másodpercenként és négyzetcentiméterenként. Így a hővezetési tényező $\approx 0,14$ mcal/(s·cm·°C)=14 mcal/(s·m·°C); az átszámításnál a cm helyére egyszerűen beírjuk, hogy 0,01 m. Ez nagyságrendben annyi, mint a levegő hővezetési tényezője, annak kb. 2,5-szerese. Nem véletlen: azok a jó hőszigetelő anyagok, amelyekben sok levegő van: habok, parafa, ruhaneműk, összegyűrt papír, összegyűrt alufólia, stb., mert a levegő jó hőszigetelő. A hó is jó hőszigetelő: egy hóból készült jégkunyhó a benne lakók lehetétől is 0 °C-ig melegszik, ami nagyon jól jön, ha kint -40 °C van. Tökéletes hőszigetelő a *vákuum*, azaz a *légüres tér*. A termosz két üvegfala között légüres tér van. □

2.1.13. Kísérlet. Most próbáljuk megmérni valamilyen fém hővezető képességét. Válasszunk ki valamilyen kör keresztmetszetű rudat. (Én egy vastag, hosszú acél csavart választottam, amelynek csak a végén volt menet.) Ennek a hővezetési tényezőjét fogjuk megmérni. Kaloriméterünk egyik kerek tetején fúrunk lyukat úgy, hogy a rúd kényelmesen átmenjen rajta. Egy sima aljú műanyag dobozban (én egy nagy tejföls poharat használtam) szintén fúrunk lyukat, de ebben szoruljon a rúd. Próbáljuk ki, hogy ha vizet öntünk a dobozba, kifolyik-e? Ha igen, ragasszuk be a rudat. A rudat átdugva a kifúrt tetőn, az elég jól beleérjen a kaloriméter poharába, felfelé pedig a dobozba. A 2.1.3. fénykép mutatja az összeállítást. A kaloriméter lyukas poharába tegyünk majdnem a tetejéig jeget, öntsünk rá vizet, és várjunk pár percet, amíg beáll a nulla fok. Közben készítsünk kb. 40 °C-os vizet egy lábasban. Mérjük meg, mennyi a jég a kaloriméterben, az időt is felírva, majd tegyük fel a lyukas tetőt, dugjuk át rajta a rudat, az edénybe öntsünk meleg vizet, írjuk fel az időt, és hőmérővel kavargatva a meleg vizet, mérjük meg a hőmérsékletét. Én 10°52'-kor mértem meg a jeget, 80 g volt, 10°55'-kor öntöttem a felső edénybe kb. 8 dl vizet, a hőmérséklete 41,5 °C volt. Gyors fejszámolás: 80 g jég elolvasztásához kb. 6400 cal kell, azaz ennyinek kell a kaloriméterbe áramlani az edényből, így ott a hőmérséklet 8 °C-ot csökkenne. Mivel szeretnénk, ha a hőmérsékletkülönbség nem nagyon változna, az edénybe időről időre öntünk egy kis forró vizet, felírva a hőmérsékletet előtte, az időpontot és a hőmérsékletet némi kavargatás után. Én 11°10'-kor öntöttem utána némi forró vizet, előtte a hőmérséklet 37,5 °C volt, utána 39,5 °C lett. Végül felírva az időt, szedjük szét a berendezést, és mérjük meg a maradék jeget. Én 11°20'-kor szedtem szét a berendezést, és 11°21'-kor mértem meg a maradék jeget, ami 59 g volt. Látható, hogy akár háromszor annyi ideig is mérhettem volna, akkor sem fogyott volna el teljesen a jég. Mivel ez a mérés úgymint elég pontatlan, nem érdemes

megismételni.

Számoljunk: a kísérlet teljes ideje 29' volt, a szobahőmérséklet 21 °C. Ezalatt kb. 7 g jég mindenképp elolvadt volna a kaloriméter falán át beszivárgó hőtől. A csavaron át beszivárgó hő tehát 14 g jeget olvasztott el, ehhez 1120 cal kell. Mivel a csavar átmérője 16,5 mm, így keresztmetszete $\approx 214 \text{ mm}^2 = 2,14 \text{ cm}^2$ volt, 1 cm²-en 1120/2,14 ≈ 523 kalória áramlott át 25' = 1500" alatt, így másodpercenként 0,349 cal. A kaloriméterben a hőmérséklet végig 0 °C volt. Az első 15' elején a hőmérsékletkülönbség 41,5 °C, a végén 37,5 °C, tehát átlagosan 39,5 °C volt. A második 10'-ben átlagosan 38,5 °C volt a hőmérsékletkülönbség. Így átlagosan $(15 \cdot 39,5 + 10 \cdot 38,5)/25 = 39,1$ °C volt a hőmérsékletkülönbség. A legnagyobb probléma, hogy nem tudjuk, milyen hosszú darabon lépett fel ez a hőmérsékletkülönbség. Ha ezt 4 cm-nek vesszük, akkor a hőmérsékletesés 39,1/4 °C/cm, így 1 °C/cm hőmérsékletesésre 0,349/(39,1/4) cal/(s·cm²) jut, azaz a mért hővezetési tényező 0,036 cal/(s·cm·°C)=3,6 cal/(s·m·°C). Valójában az acél hővezetési tényezője sokkal nagyobb, kb. 12 cal/(s·m·°C). Így „mérésünk” legfeljebb nagyságrendi becslésnek jó. A durva hibát az okozza, hogy jelentős hőmérsékletkülönbség lép fel a víz és az acél közötti hőátadáskor. A hőt hosszabb úton kellene vezetni a kívülről hőszigetelt acélrúdban, és annak a belsejében kellene mérni két, pontosan ismert távolságú helyen a hőmérsékletet. Elvileg hasonlóan lehetne mérni folyadékok és gázok hővezetési tényezőjét, de itt külön gondot okoz a folyadék illetve a gáz áramlása. Folyadékok és szilárd anyagok hővezetési tényezője nem sokat változik, még több száz fokalos hőmérsékletváltozásnál sem. Kristályos anyagoknál általában csökken a hőmérséklet növekedésével, üvegeknél nő, de 100 °C növekedésnél a változás csak 2...20%. A gázok hővezetési tényezője a hőmérséklet növekedésével nő. □

2.1.14. Kísérlet. Eddig úgy beszéltünk a hőről, mintha valami folyadékszerű anyag volna, ami egyik testből átfolyik a másikba. Pedig elég a kezünket jó erősen összedörzsölni, hogy érezzük, hő keletkezik. Ugyancsak felmelegedést érzünk, ha egy fémdrótot hajtogatunk, fémet fűrészelünk, fúrunk, kalapálunk. Persze, ha fűrészelésekor is felmelegszik a fűrészlap. Az emberiség nagyon sokáig úgy gyújtott tüzet, hogy egy keményfa pálcát erősen nyomva egy puhafa lécebe gyorsan forgatott. Tulajdonképpen ha bármilyen más energiatípus „elvezni” látszik súrlódáskor, akkor hővé alakul. A hőenergia (pontosabban a belső energia) az energia egy fajtája, az anyag atomjainak mozgási-forgási-rezgési energiája. Ha például leejtünk valamit, a test helyzeti energiája mozgásivá alakul, közben kis része a levegőhöz való súrlódással hővé alakul, majd mikor a test a padlóhoz csapódik, az energia egy kis része tovaterjed hangként, egy másik kis része esetleg a test eltörésére fordítódik, de a nagy része hővé alakul. Miért nem vesszük ezt észre? Mert kevés a keletkezett hő, nagy a test, és így csak igen kicsit melegszik fel. Fontos felismerés volt, hogy az energiatípusok átalakulásakor energia nem vész el és nem is keletkezik. Ez az *energiamegmaradás törvénye*, vagy más néven a *hőtan első főtétele*. □

2.1.15. Kísérlet. Ha egy hőmérő gömbjét megdörzsöljük, felmeleg a hőmérséklet. Persze, felmerül, hogy nem a kezünk melegéről van-e szó. Jobb kísérlet, ha egy hőmérő vagy akár lázmérő folyadéktartályát egy ruhacsipeszbe fogva, a csipeszt forgatjuk. Akár 40 °C fölé is felmeleg a hőmérséklet. □

2.1.16. Kísérlet. Próbáljuk meghatározni, hogy mechanikai munkából mennyi hő

keletkezik. Ez többek között Joule mérte meg először. Igen nehéz mérés, de azt kipróbálhatjuk, hogy ha mondjuk két percig 3-4 dl vizet erősen keverünk egy 500 W teljesítményű háztartási keverőgéppel, akkor 2-3 °C-kal felmelegszik. Persze, ez így rendkívül pontatlan eljárás, például az elektromos munka egy része már a keverőgépben hővé alakul, a víz párolog, stb. Sokkal pontosabb eredményt kaphatunk, ha az elektromos munkát közvetlenül alakítjuk hővé egy elektromos vízforralóban. Én egy 2200 W-os vízforralót használtam (a teljesítmény rá van írva), 756 g vizet tettem bele, ami 29,6 °C-os volt. A vizet 2'15" alatt forralta fel. Mivel másodpercenként 2200 J munkát végez, összesen 297000 J munkát végzett, és ez $756 \cdot 70,4 \approx 53374$ kalóriának felel meg. Így $\approx 5,56$ J munka 1 kalória. A mérésünk pontatlan, például a vízforraló nincs hőszigetelve, a hálózati feszültség és ezzel a vízforraló teljesítménye ingadozhat, stb. A pontosabb mérések szerint $\approx 4,2$ joule 1 kalória, a pontos érték attól függ, a kalóriát hogyan értjük. Mivel már úgyis vagy négy féle kalória volt forgalomban, száműzték az energiamértékegységek közül, és csak a joule-t tartották meg. Pontosabban azt mondták, legyen ezentúl $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$. Mi is legfeljebb közbenső számításokhoz fogjuk használni a kalóriát. \square

2.1.17. Kísérlet. A következő kísérletünkben egy kávéfőző tűzálló üvegedényében vagy egy jénai üvegtálban vagy kémcsőben forraljunk fel vizet. Kívül szárazra törölve az edényt, kezdjük lassan, egy vaslemez lángelosztón vagy villanytűzhely főzőlapján, a kémcsőnél gyertyaláng felett melegíteni, és figyeljünk meg mindent gondosan. Gázlángon vagy gyertyalángon melegítve kezdetben némi víz csapódik ki a lángból a hideg edény külsejére. Később ez elpárolog, az edény belső falán apró buborékok jelennek meg. Ez a vízben oldott levegő, ami melegítésre kiválik. (Egy liter vízben 0 °C-on 29,18 ml, 10 °C-on 22,84 ml, 20 °C-on 18,68 ml, 30 °C-on pedig 15,64 ml levegő oldódik.) Közben a víz áramlik az edényben: a meleg víz sűrűsége kisebb, felemelkedik, a hideg víz lesüllyed. Az áramlás árnyképét ki is vetíthetjük egy erős, pontszerűen világító zseblámpával. Fehér papírra vetítve a vizen át jól látszik az áramlás. (Ez azon alapul, hogy a melegebb víznek nem csak a sűrűsége kisebb, hanem a fénytörése is megváltozik.) A buborékok az edény alján megnőnek, majd felemelkedve összeomlanak, nem jutnak el a felszínre, a víz „zubog”. Végül a buborékok már nem omlanak össze, eljutnak a felszínre, a víz forrni kezd. Figyeljük meg, hogy az edény falának némely pontjáról rengeteg buborék indul ki, míg máshonnan egy se. Forralva a vizet, az lassan fogy, tehát rengeteg hő kell az elforraláshoz. Kivetítéssel láthatjuk a feláramló gőzt: színtelen, csak feljebb látszik fehér pára, ahol hideg levegővel keveredik és finom vízcseppek válnak ki. Az edény felső, hidegebb részein a vízgőzből vízcseppek válnak le. Pár perc forralás után szüntessük meg a fűtést, majd ha lehűlt egy kicsit a víz, kezdjük újra melegíteni. Most nem képződnek apró buborékok, a levegőt már kiforraltuk a vízből. A forrás sokkal egyenetlenebbül indul meg, hirtelen egy-egy nagy buborék képződik, a víz lökdösve forr. (Ha az oldott gázokat el akarjuk távolítani a vízből, kiforralással megtehetjük. Akkor van vége a kiforralásnak, ha a víz lökdösve forr.) Lógassunk egy cérnaszálat a vízbe: a cérnaszál körül a vízből számtalan kis buborék képződik, a forrás egyenletes lesz. Ugyanígy hat bármilyen lyukacsos anyag, például fa, téglá- vagy porcelántörmelék, de éles szélű üveg- vagy kvarctörmelék is. Ha el akarjuk kerülni, hogy valamilyen folyadék lökdösve forrjon, ezeket is használhatjuk a legtöbb könyvben ilyen „forrkőnek” ajánlott horzsakő (lyukacsos megszilárdult láva)

helyett. Kikapcsolva a fűtést, a víz tetején legtöbbször apró vízkő lemezek látszanak. Kiöntve a vizet és megszáritva az edényt, rendszerint az alján is némi fehér vízkő lerakódás látható a vízben oldott anyagokból. A vízkő kiválása kémiai folyamat, a széndioxid tartalmú víz kémiailag kicsit oldja a mészkövet, de ez a vegyület forralásra elbomlik, és kiválik a mészkő. A többi jelenséget most még nem tudjuk megmagyarázni, de apránként mindet meg fogjuk. \square

Az edényben a melegedő víz áramlása nagyon sok hőt szállít. Egy szobában is a meleg levegő áramlása szállítja a legtöbb hőt a kályhától vagy fűtőtesttől a szoba többi részébe.

2.1.18. Kísérlet. Határozzuk meg a víz *forráshőjét*, azaz hogy 1 g víz gőzzé alakításához 100 °C-on mennyi hő kell. Vegyük elő újra a vízforralót, mérjük meg mondjuk benne félig vízzel. Hagyjuk nyitva a tetejét, hogy ne kapcsoljon ki, és forraljuk a vizet mondjuk 3'-ig, kapcsoljuk ki, fedjük be, és mérjük meg újra. Így megtudjuk, mennyi víz forrt el. Nekem ez 140 g volt, az elektromos munka pedig $2\,200\text{ W}\cdot 180\text{ s}=396\,000\text{ J}$. Innen a forráshő $396\,000/140 \approx 2829\text{ J/g}$. A pontosabb érték 2257 J/g. A nagy hiba nem meglepő, a vízforraló nincs hőszigetelve. \square

Anyagfajta	Égéshő J/g	Anyagfajta	Égéshő J/g
lőpor	≈ 3350	dinamit	≈ 5400
szén-monoxid	10130	lignit	8400-16800
keményfa	12500-18800	fenyőfa	16800-19060
barnakőszén	17600-22600	faszesz	22210
denaturált szesz	27810	feketekőszén	26800-33900
faszén	27600-30140	koksiz	≈ 30000
állati zsír	39000-41000	növényi olaj	39000-41000
paraffingyertya	43000	háztartási tüzelőolaj	44400-45600
benzin	≈ 46000	petróleum	46000-49000
propán-bután gáz	≈ 49400	acetilén	49440
földgáz	≈ 54000	hidrogén	140140

2.1.4. táblázat

2.1.19. Kísérlet. Bár a víz fajhője elég nagy, mégis, egyetlen gyufával is tudunk vizet forralni. Mérjünk mérőkémcsővel, fecskendővel vagy cseppszám alapján 0,5 ml vizet egy kémcsőbe. Ha ügyesek vagyunk, egy szál gyufával fel tudjuk forralni, pedig az égésnél keletkező hő nagy része veszendőbe megy, a levegőt melegíti. Valamely anyag *égéshője* az égésekor keletkező hőmennyiség. A 2.1.4. táblázat néhány anyag *égéshőjét* tartalmazza. \square

2.1.20. Kísérlet. A táblázatot felhasználva megmérhetjük különböző vízmelegítő eszközök (gázégő, borszeszégő, főzőlap) hatásfokát. Melegítsünk egy lábasban vizet, mérve a hőmérséklet emelkedést és a felhasznált tüzelőszer (gáz, borszesz) mennyiségét, főzőlaponál a teljesítményt ismerve az időt. Nagyjából 50 % körüli hatásfokot találunk.

Ha nagy a főzőlap vagy láng, akkor ennél is kisebbet, mert nagyrészt a levegőt melegítjük. Az elektromos vízforraló hatásfoka 100 % lenne, ha tökéletes lenne a hőszigetelése: az elektromos munka teljesen hővé alakul benne.

Némely kazánról azt írják, hogy 100 %-nál is több a hatásfoka. Hogyan lehetséges ez? Ha valamilyen tüzelőanyaggal fűtünk, akkor az égéstermékek között gyakran van víz, és maga a tüzelőanyag is lehet víztartalmú. Mivel a víz gőzalakban távozik, az elpárologtatásához szükséges hőmennyiséget eleve le szokták vonni az égéshőből, és az így kapott *fűtőérték*et adják meg. Az úgynevezett *kondenzációs kazán*ok a füstgázokat annyira lehűtik, hogy a vízgőz nagy része is lecsapódjon. Így leadhatnak annyi hőt, amennyi több mint a fűtőérték, de persze nem lehet több, mint az égéshő. \square

2.1.21. Kísérlet. Talán meglepő, de papírban is lehet vizet forralni. Készítsünk egy papírtölcsért a 2.5.2. fénykép alapján géppapírból. Kevés vizet öntve bele azt gyertyalángon felforralhatjuk. A papír nem ég meg, mert a víz állandóan hűti belülről. \square

2.2. Hőmérők

A Földön, szabadban mért leghidegebb hőmérséklet $-90\text{ }^{\circ}\text{C}$. A normális testhőmérséklet embernél $36,7\text{ }^{\circ}\text{C}$. A gáztűzhely lángjának hőmérséklete mintegy $1500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Izzólámpa szála kb. $3000\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os. A Nap felszínének hőmérséklete $5600\text{ }^{\circ}\text{C}$. Bár ilyen magas hőmérsékleteket ritkán kell mérnünk, mintegy $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$ -tól $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ig terjedő hőmérséklet mérése nem ritka, és elég könnyen meg is oldható. Ismerkedjünk meg a hőnek néhány hatásával, amelyre hőmérő alapozható. Legfontosabb a hőtágulás: melegítve kitérülnek a szilárd anyagok, még jobban a folyadékok, de legerősebben a gázok.

2.2.1. Kísérlet. Szilárd testek hőtágulásának bemutatására az egyik legegyszerűbb, de látványos kísérletet a 2.2.1. fényképek mutatják. Vágjunk alumínium fóliából egy $0,5 \dots 1\text{ cm}$ széles, elég hosszú csíkot, és a két végét szorítsuk könyvek közé. Teamécsekkel melegítve a csík megnyúlik, a közepe láthatóan belóg. Ha elveszük a mécseseket, a csík újra összehúzódik. A játék akárhányszor eljátszható. Ne tegyük a mécseseket túl közel a csíkhoz, mert megolvad! Megkérdezhetjük, hogy mi történik, ha nem engedjük a csíkot összehúzódni? Ilyenkor megfeszül és megnyúlik. \square

2.2.2. Kísérlet. A kísérletnek egy alig bonyolultabb, de mérésre is alkalmas formája a 2.2.2. fényképeken látható: a fémrúd (például kötőtű) vagy fémcső egyik végét rögzítjük, én egy háromszög keresztmetszetű reszelő éléhez nyomtam egy könyvvel, a másik végét pedig egy fémsínen vagy fém- vagy üveglemezen gördülő tűhöz nyomja ugyanannak a könyvnek a súlya. A tűt egy szívószál közepén szúrjuk át, ez lesz a mutató. Ellenőrizzük, hogy a tű közepén van-e? Ha valamelyik oldal nehezebb, akkor ott vágjunk le egy kicsit a szívószálból. Azt is ellenőrizzük, hogy a fémsínt vagy fémlemezt kicsit megmozdítva, a mutató szabadon mozog-e? Ha igen, kezdhethetjük a kísérletet, mécsesekkel melegítjük a rudat. Ha alumínium, akkor itt se melegítsük meg túlságosan, mert pár száz fokon már túl puha lesz, nekem egy kísérletnél elgörbült a könyv súlya alatt. Az elrendezés mérésre is alkalmas: ha például vízgőzt vezetünk át a csövön, akkor az $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra melegszik.

Megmérve a mutató szögelfordulását és a tű átmérőjét, kiszámíthatjuk, hogy mennyivel nyúlt meg a rúd a szobahőmérséklet és $100\text{ }^\circ\text{C}$ között. Vasnál ez minden $^\circ\text{C}$ -ra kb. 1‰ , azaz egy százvezred rész, vörösréznel ennek a másfélszerese, alumíniumnál a kétszerese. Ha több hőmérsékleten is mérünk, megállapíthatjuk, hogy a szokásos hőmérsékleteken a hőtágulási együttható nem nagyon függ a hőmérséklettől. A pontos értékeket számos anyagra megtalálhatjuk a könyv végén lévő táblázatban. (Közelítő a Grüneisen-szabály: a fémek teljes hőtágulása az elérhető legalacsonyabb hőmérsékletektől az olvadáspontig összesen $\approx 2\text{‰}$, nagy hidegben csökken a hőtágulási együttható, a szobahőmérséklet felett viszont csak kicsit növekszik. Így a magas olvadáspontú fémeknek kicsi a hőtágulási együtthatója.) Ha nem engedjük tágulni a rudat, akkor megfeszül, akkora erő lép fel, ami az adott arányban való összenyomásához szükséges, végül el is görbülhet. Nyáron, nagy melegben a táguló vasúti- vagy villamossínek, ha nem hagytak hézagot köztük és nem elég erősen vannak rögzítve, a fellépő hatalmas erők hatására néha meggörbülnek. Hidak egyik végét görgőkre szokták helyezni, itt mint két egymásba illesztett fésű úgy csatlakozik a híd a parti úthoz. Forró víz és gőz vezetékekbe „csőlírákat” illesztenek be, hogy tudjanak tágulni. \square

2.2.3. Kísérlet. Még egy kísérlet látható szilárd test hőtágulására a 2.2.3. fényképeken. Ha az egyik végén befogott ablaküvegcsíkot mécsesekkel melegítjük, akkor meggörbül. Az üveg nem nagyon jó hővezető, az alsó része melegebb, mint a felső. Az alsó rész jobban megnyúlik, mint a felső, ehhez a csíknak meg kell görbülnie. Ez ugyan elég kis elmozdulást okoz, de jól észrevehető, ha lupével megfigyeljük a csík vége felett lévő hegyes csavar (lehet facsavar is) hegye és annak a tükörképe közötti távolságot. Ha valaki ügyes, érintkezőt szerelve az üvegcsíkra, például zseblámpát kapcsolhat be a görbüléssel. Minél vastagabb az üvegcsík, annál nagyobb a két oldal közötti hőmérsékletkülönbség, és így a görbület. Ha az üveget nem engedjük meggörbülni, akkor lényegében nagy erővel görbítjük ellentétes irányba. Az üveg, mint rideg anyag, ezt rendszerint nem bírja ki és eltörik. Ezért törnek el a közönséges üvegből készült üvegtárgyak hőmérsékletkülönbség hatására, mégpedig minél vastagabbak, annál könnyebben. A laboratóriumokban kis hőtágulású üvegből készült elég vékony edényeket használunk. \square

2.2.4. Kísérlet. Nem minden szilárd anyag nyúlik meg melegítéskor. Egyes kristályok egyik irányba megnyúlnak, másik irányban összehúzódnak. Nagy molekulájú anyagok, például a gumi összehúzódnak. Egy minél hosszabb gumiszálát, gumiszalagot vagy gumicsövet egy kampóval függesztünk fel valahova; én egy fiók fogóját használtam. Egy másik kampóval akasszuk rá valamilyen súlyt; lehet, hogy a kampó is elég. Ha gázlánggal legyezve megmelegítjük a gumit, picit összehúzódik. Hogy jobban észrevehessük az összehúzódnást, tegyünk a súly alá könyveket és azokra egy üveglapot úgy, hogy majdnem hozzáérjen a súlyhoz. Nagyon lapos szögben figyelve a súlyt és a tükörképét az üvegben, kis elmozdulás is észrevehető. Ne melegítsük túl a gumit, mert megolvad és megnyúlik. Ha meggyulladna, gyorsan fújjuk el vagy tapossuk el. \square

2.2.5. Kísérlet. Sok hőmérő folyadék hőtágulásán alapul. A legegyszerűbbnek tűnik folyadék hőmérőnköt vízzel tölteni. Vizsgáljuk meg a víz hőtágulását. Egy kisebb, de lehetőleg hosszú nyakú üveg nyakára ragasszunk mm beosztású papírcsíkot, ugyanúgy,

mint a mérőkémcső készítésekor. Nem kell, hogy 0 mm-től kezdődjön. Én egy 3,5 dl-es pálinkásüveget használtam. A 2.2.4. fényképek közül a bal oldalin látható. Egy nagyobb műanyag palacknak vágjuk le a tetejét, tekerjük körül valamilyen hőszigetelő anyaggal, és alá is hőszigetelő anyagot téve, állítsuk valamilyen edénybe, hogy ne boruljon fel. Én egy két literes kólás palackot használtam egy nagy tejfölös pohárba állítva. Készítsünk vagy 4 liter 0 °C-os vizet: műanyag palackban tegyünk be a mélyhűtőbe vizet, és amikor egy része már megfagyott, tegyük át a hűtőbe, ahol lassan olvadozik. Először 0 °C-on fogjuk a víz sűrűségét mérni. A műanyag palack aljára tegyünk jégkockákat. Az üveget öblítsük át 0 °C-os vízzel, hogy lehűljön, majd töltsük fel a beosztás aljánál kicsit fentebbig megmért tömegű 0 °C-os vízzel. Tegyük bele a műanyag palackba az üveget. Töltsük fel a palackot is 0 °C-os vízzel, néhány jégkockát is téve bele. Egy kampón akasszunk a palackba egy hőmérőt. Az egész elrendezést a 2.2.4. fényképek közül a középső mutatja. Az üveget emelgetve, keverhetjük a palackban a vizet. Az üvegben a hőmérséklet jó ideig 0 °C marad. Mindig megkeverve, olvassuk le és írjuk fel a vízszintet. A jég elolvad, a hőmérséklet lassan emelkedik. Időnként kevergetve, olvassuk le a hőmérsékletet és a vízszintet. Mivel a palacknak jó a hőszigetelése, a hőmérséklet lassan fog emelkedni. Az üveg viszont nem olyan jó hőszigetelő, így feltehető, hogy az üvegben levő víz hőmérséklete ugyanannyi, mint a műanyag palackban. Ügyeljünk arra, hogy 4 °C-on feltétlenül olvassuk le a vízszintet.

Ha a hőmérséklet elérte a szobahőmérsékletet, a vízszint már nem emelkedik tovább. Vegyük ki az üveget és a hőmérőt, és tegyük át őket egy vízzel töltött nagy fazékba. Az üveg alá tegyünk egy alumínium szalagból vagy függönysínből hajlított háromágú csillagot. Így nem ér hozzá a fazék forró aljához, és nem fog elrepedni. (Ezt az elrendezést *vízfürdőnek* nevezzük, tehát röviden *vízfürdőben* melegítjük az üveget. Lehet *gőzfürdőben* is óvatosan melegíteni: a *gőzfürdő* ugyanolyan mint a *vízfürdő*, de a csillag alá csak annyi vizet töltünk, hogy ne lepje el, és a rajta lévő edényt csak a gőz melegíti. Ha magasabb hőfokot akarunk, akkor egy lábasba homokot teszünk, és abba tesszük az edényt.) Szóval melegítsük lassan a fazékban a vizet. Próbáljunk meg meghatározott hőmérsékleteket egy darabig tartani, az üveggel kevergetve a vizet, majd olvassuk le a hőmérsékletet és a vízszintet. Ha már olyan forró a víz, hogy a hőmérőnkkel nem bírjuk mérni, vegyük ki a hőmérőt és forraljuk fel a vizet. Mindaddig forraljuk, amíg a vízszint emelkedik. Ezt is írjuk fel, ez lesz a 100 °C-hoz tartozó vízszint. Én 343 g vízre az alábbi táblázatban szereplő eredményeket kaptam (első és második oszlop, a skála felfele csökken)

Meglepő, hogy kezdetben a vízszint melegedéskor nem hogy emelkedne, még csökken is egy kicsit, később pedig rohamosan emelkedik. A víz tehát biztosan nem jó hőmérő készítésére. Nem biztos, hogy a térfogatcsökkenést sikerül észlelnünk, mindenesetre az elején nincs emelkedés. Pontos mérések szerint a víz 4 °C-on a legsűrűbb, sűrűsége 0,999972 g/ml. Ezt a „legsűrűbb vizet” vették alapul a tömegegység megállapításánál, mint arról már volt szó. Más folyadékok nem viselkednek így, melegítésre kitérnek. A természetben nagyon fontos, hogy a víz ilyen furcsán viselkedik. Ha egy tó teteje 4 °C feletti hőmérsékletű, és lehűl, a víz nehezebb lesz, és lesüllyed az aljára. Ez a folyamat 4 °C-nál megáll. További hűtésre a víz könnyebb lesz és nem süllyed le. A tó teteje befagy, de az alja még 4 °C-os, és csak lassan hűl le, hővezetéssel. Így a mélyebb tavak

Hőm. °C	Skála mm	Mért g/ml	Számított g/ml	Táblázatból g/ml
0,0	167,0	0,999330	0,999446	0,999840
2,5	167,0	0,999330	0,999374	0,999952
4,0	168,0	0,999972	0,999972	0,999972
4,6	167,5	0,999651	0,999646	0,999969
5,8	167,0	0,999330	0,999278	0,999943
8,3	167,0	0,999330	0,999205	0,999829
9,5	166,5	0,999009	0,998849	0,999740
9,9	166,0	0,998689	0,998518	0,999708
11,3	166,0	0,998689	0,998477	0,999574
15,7	165,0	0,998048	0,997708	0,998991
19,5	164,0	0,996770	0,996321	0,998307
20,6	164,0	0,996770	0,996289	0,998079
31,5	161,5	0,995813	0,995017	0,995187
38,8	158,5	0,993905	0,992900	0,992672
45,8	156,0	0,992320	0,991114	0,98988
100,0	121,0	0,970658	0,967951	0,95835

soha nem fagynak be, és a halak életben maradnak. Ezért kell a jeges vizet gyakran megkeverni, nehogy csak a teteje hűljön le. A sűrűségkülönbség nem nagy: 0 és 8 °C között a víz sűrűsége kevesebb, mint 0,2 ‰-kel tér el az 1 g/ml-től. Ezt használtuk fel térfogatmérő eszközök hideg vízzel való „bemérésére”.

Számoljuk ki méréseinkből a víz sűrűségét a mért hőmérsékleteken. Mivel az üveg nyakának belső átmérője 16,75 mm volt, 1 mm emelkedés 0,2204 ml-nek felel meg. A 168,0 mm leolvasásnak 343 g és így 343/0,999972 ml felel meg, a sűrűség a 4 °C-ra érvényes 0,999972 g/ml. Ahány mm-rel kisebb a leolvasás, annyiszor 0,2204 ml-t kell a térfogathoz hozzáadni. A 343 g-ot osztva ezzel a térfogattal, kapjuk a víz sűrűségét az adott hőfokon. Ezek az értékek szerepelnek a harmadik oszlopban. Kicsit pontosabbá tehetjük méréseinket, ha figyelembe vesszük az üveg hőtágulását. Minden °C melegedésre az üveg hossza 9,7 milliomodrészrel, a térfogata pedig háromszor ennyivel megnő. Mivel 4,0 °C-ból indultunk ki, ahány fokkal ennél magasabb a hőmérséklet, annyiszor 29,1 milliomodrészrel meg kell növelni a térfogatot. Az így számított sűrűségértékek vannak a negyedik oszlopban. Ez a javítás némileg növeli a pontosságot, főleg a magasabb hőmérsékleteknél. Végül az utolsó oszlopban egy igen pontos mérések alapján készült táblázatból vett értékek vannak. Látható hogy az általunk mért értékek a negyedik tizedesjegyben nagyon bizonytalanok, néha a harmadik tizedesjegy is hibás, tehát az utolsó két jegyet kerekíteni kellett volna. Nem is várhatunk ennél nagyobb pontosságot, hiszen már a térfogatmérésünk is 0,1 ml körüli hibájú, és még sok más hibaforrás is van. Például az üveg hőtágulását sem mértük, hanem csak egy táblázatból vett értékkel becsültük, pedig különböző fajta üvegek hőtágulása különböző, stb. □

2.2.6. Kísérlet. Ha valaki szeretné pontosabban észlelni, hogy a víz melegedéskor először összehúzódik, és csak 4 °C-tól kezd tágulni, annak pontosabb formában kell meg-

ismételnie az előző kísérletet. Ehhez egyrészt több vizet, azaz nagyobb üveget használhatunk, másrészt az üveg nyaka helyett egy sokkal szűkebb csövet. Én a légnyomás magassággal való változásának észlelésére használt „berendezést” vettem elő: egy 7,5 dl-es üveget, és egy golyóstoll átlátszó műanyag burkolatát, aminek belső átmérője 6,65 mm volt. Így vagy 12–15-ször akkora vízszintemelkedést kaphatunk.

Hasonlóan járunk el, mint az előző kísérletnél. A műanyag csőre tegyünk alkalmi skálát mm beosztású papírszalagból, celluluszal odaerősítve. Megtöltve az üveget 0 °C-os vízzel, nyomjuk bele a dugót, és állítsuk a jeges vizes, hőszigetelt palackba. Ha túl magas a vízszint, összesodort papírcsíkkal szivathatunk fel a vízből. Ezután mindent úgy csinálunk, mint az előző kísérletnél. Az alábbi táblázat az én mérési eredményeimet tartalmazza. A víz tömege 762,1 g volt, és 1 mm vízszintemelkedés $\pi \cdot (6,65/2)^2 \approx 34,73 \text{ mm}^3$ -nek felel meg.

Hőm. °C	Skála mm	Mért g/ml	Számított g/ml	Táblázatból g/ml
0,3	556,0	0,999762	0,999870	0,999858
0,8	554,3	0,999840	0,999933	0,999887
1,1	553,3	0,999885	0,999969	0,999903
1,6	553,3	0,999885	0,999955	0,999966
2,0	552,8	0,999908	0,999966	0,999940
2,5	552,2	0,999936	0,999980	0,999952
3,0	552,0	0,999945	0,999974	0,999964
3,4	551,8	0,999954	0,999971	0,999967
4,0	551,4	0,999972	0,999972	0,999972
4,5	551,3	0,999977	0,999962	0,999968
5,0	551,0	0,999990	0,999961	0,999964
5,6	551,2	0,999981	0,999934	0,999950
6,1	551,2	0,999981	0,999920	0,999936
7,1	551,8	0,999954	0,999864	0,999897
8,0	552,3	0,999931	0,999815	0,999849
9,3	553,9	0,999858	0,999704	0,999767
10,3	555,1	0,999803	0,999620	0,999672
11,1	557,2	0,999708	0,999501	0,999595
11,9	559,2	0,999617	0,999387	0,999509
12,6	560,9	0,999539	0,999289	0,999426
13,6	563,0	0,999444	0,999165	0,999298
16,0	571,0	0,999080	0,998731	0,998944
24,4	583,9	0,998493	0,997899	0,997198

Igazság szerint nekem elsőre nem sikerült ez a kísérlet. Buborékok váltak ki, és a vízszint egyre csak nőtt. Ilyenkor nem kell elkeseredni, hanem inkább gondolkozzunk, mi lehet a baj. Ebből tanulhatunk a legtöbbet! Nyilván a buborékok a vízben oldott levegőből származnak. Felforraltam vagy öt liter vizet, forraltam egy pár percig, hogy minden

levegő eltávozzon, majd lehűlés után színültig töltött műanyag palackokban tettem be a mélyhűtőbe. Ekkor már nem jelentkeztek a buborékok.

Látható, hogy a pontosság egy nagyságrendet javult, de így is az utolsó számjegyet kerekíteni kellett volna. Természetesen bőven maradtak hibaforrások: az üvegben a víz hőmérséklete kisebb, mint a palackban mért hőmérséklet; az üvegnek némi „memóriája” van: a tágulásához és összehúzódásához is idő kell; stb. De az, hogy a víz kezdetben összehúzódik, ebből a kísérletből egyértelmű. □

* Vajon hogyan kerestem ki táblázatból az utolsó oszlopban álló számokat? Nem valószínű, hogy találunk olyan táblázatot, amely a víz sűrűségét 0,1 °C-onként tartalmazza. Én olyan táblázatot használtam a [11] könyvből, amely 1 °C-onként tartalmazza a sűrűséget. A trükk az, hogy feltesszük, ezen a kis közön egyenletesen (lineárisan) változik a sűrűség. *Elsőfokú közelítést*, idegen szóval *lineáris interpolációt* fogunk alkalmazni. Például ha $x_1 = 5$ °C-nál $y_1 = 0,999964$ g/ml, $x_2 = 6$ °C-nál pedig $y_2 = 0,999940$ g/ml a sűrűség, akkor kiszámoljuk az $y_{1;2} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ (elsőrendű) *különbségi hányadost* vagy idegen szóval *osztott differenciát*. Most ez $-0,000024$ g/(ml·°C). Ezután, mivel $x = 5,6$ °C-nál keressük a sűrűséget, az $x - x_1$ különbséget szorozzuk az osztott differenciával. Ez most (kerekítve) $-0,000014$ g/ml. Ezzel javítjuk y_1 értékét, azaz ezt hozzáadjuk. Képletben

$$y \approx y_1 + (x - x_1) \cdot y_{1;2}.$$

Azt kapjuk, hogy $y \approx 0,999950$ g/ml. Honnan tudjuk hogy ez elég pontos? A sűrűség $x_3 = 7$ °C-nál $y_3 = 0,999902$ g/ml. Számoljuk ki az $y_{2;3} = (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2)$ osztott differenciát is! Ez most $-0,000038$ g/(ml·°C). Az ezzel számolt javítás (kerekítve) $-0,000023$ g/ml. Az eltérés elfogadható. *

** Mi van, ha a táblázatban csak az $x_1 = 10$ °C-hoz tartozó $y_1 = 0,999700$ g/ml, az $x_2 = 0$ °C-hoz tartozó $y_2 = 0,999840$ g/ml, és az $x_3 = 20$ °C-hoz tartozó $y_3 = 0,998206$ g/ml sűrűség található meg? Most $y_{1;2} = -0,000014$ g/(ml·°C), és így a javítás (kerekítve) $0,000062$ g/ml. Az $y_{2;3}$ osztott differencia viszont $-0,0000817$ g/(ml·°C), amivel a javítás (kerekítve) $0,000360$ g/ml. Ez elég nagy eltérés. Ilyenkor a javítást is javítjuk. Számoljuk ki az $y_{1;2;3} = (y_{2;3} - y_{1;2})/(x_3 - x_1)$ (másodrendű) osztott differenciát. Javítsuk meg az $y_{1;2}$ osztott differenciát, hozzáadva $x - x_2$ -ször a másodrendű osztott differenciát. Ezzel a javított differenciával fogunk számolni. Képletben

$$y \approx y_1 + (x - x_1) \cdot (y_{1;2} + (x - x_2) \cdot y_{1;2;3}).$$

Ez a *négyzetes közelítés* vagy *kvadratikusan interpoláció*. Nekünk $y_{1;2;3} = -0,00000677$, így $y_{1;2}$ javítása $-0,0000379$. Innen y_1 javítása (kerekítve) $0,000228$, tehát $y \approx 0,999928$. Az eljárást tovább is lehetne folytatni, de ennyi nekünk bőven elég lesz. **

2.2.7. Kísérlet. Jó folyadék hőmérő készítéséhez olyan folyadékot kell használnunk, aminek a hőtágulása „egyenletes”. Az első használható hőmérőket Fahrenheit német fizikus készítette. Kezdetben tömény szeszt használt. Hogy ez tényleg használható, arról egy felbontatlan üveg pálinkával is könnyen meggyőződhetünk, vagy felhasználhatjuk az egy előző kísérletnél keletkezett víz-denaturált szesz keveréket. MÉRJÜK MEG, hogy hány mm-re áll a pálinka a dugó aljától. Nekem ez 14,5 mm volt 24,5 °C-on. Tegyük be a

hűtőbe, ahol egy nap alatt lehül ≈ 5 °C-ra. MÉRJÜK MEG ÚJRA: most a távolság 36,2 mm. Ha a dugó ugyanolyan, mint az előző üvegnél, akkor ez $0,2204 \cdot 21,7 \approx 4,783$ ml, azaz $4,783/19,5 \approx 0,245$ ml minden °C-ra. Ez, mivel az üveg fél literes volt, $0,49$ ‰ minden °C-ra. Tegyük be a mélyhűtőbe. Ne féljünk, nem fagy meg vagy -50 °C-ig. Egy nap alatt lehül ≈ -18 °C-ra. Ha lehet, újra mérjük meg, és számítsuk ki, most mennyi az összehúzódás 1 °C-ra. Nálam ennek már nem volt értelme, mert annyira összehúzódott, hogy lejjebb volt, mint ahol az üveg nyaka kezdődik. Ezért megismételtem a kísérletet egy előző kísérletnél kapott, mérőüvegben lévő víz–denaturált szesz keverékkel. Ennél $22,7$ °C-on 109,4, 5 °C-on 126,4, -18 °C-on 150,3, -28 °C-on 158,5 mm volt a leolvasás. Ez rendre 355,92, 352,17, 346,90 és 345,90 ml-nek felel meg. Így az 1 °C-ra eső térfogatváltozás a legkisebb térfogatnak rendre 0,61, 0,66 és 0,29 ‰-e. Nyilván nagy pontatlanságot okoz, hogy a hűtőszekrényben nem áll be gyorsan a hőmérséklet, és nem pontos a hőmérője.

Fahrenheit hőmérői már hasonlóan néztek ki, mint a mai (szintén általában borszeszes) hőmérők, bár nagyobbak voltak. Nagy hőmérőnél, mint például egy pálinkásüvegnél nagy a *hőkapacitás* (azaz a fajhő és a tömeg szorzata), és a hőmérő nagyon lassan, sok hőt felvéve vagy leadva veszi fel a környezet hőmérsékletét. Ez persze rontja a pontosságot. Fahrenheit alsó alappontnak (nullának) a legalacsonyabb hőmérsékletet vette, amit elő tudott állítani. Ez kb. a mélyhűtő hőmérséklete. Az emberi test hőmérsékletéhez tette a beosztás tetejét. Az olvadó jég hőmérséklete 32 °F lett, az emberi testé pedig 96 °F (nagyon pontatlan). A beosztást felezéssel készítette. Az USA-ban ma is az ő skáláját használják. Később áttért a higanyra a szeszről. Felső alappontnak a víz forráspontját vette, de a skálát nem változtatta meg, így a víz forráspontja 212 °F lett. (Szesznél nem lehetett a víz forráspontját alappontnak használni, mert alacsonyabb hőfokon forr, mint a víz.) A ma használt skála Celsius svéd csillagász nyomán alappontnak a víz fagyáspontját (0 °C) és forráspontját (100 °C) használja. □

2.2.8. Kísérlet. Sok megfigyelés mutatja, hogy a gázok is kitágulnak melegítéskor, méghozzá jelentős mértékben. Például frissen elmosogatott poharat vagy üveget sima felületre letéve, néha arrébb táncol: a melegedő és táguló levegő emeli meg. Hűtőbe, pláne mélyhűtőbe tett lezárt műanyag palack behorpad, mert benne a levegő vagy — szénsavas ásványvíznél — a szén-dioxid összehúzódik. Ha viszont előbb lehűtjük, és úgy zárjuk le, akkor felmelegedve erősen megfeszül: a benne lévő levegő tágulna. Ha kinyitjuk, levegő áramlik ki. A meleg levegő felszál: felmelegedve kitágult, sűrűsége kisebb lett, felhajtóerő hat rá. A gázok hőtágulására alapozva a világon először Galilei készített hőmérőt. Ilyen hőmérő látható a 2.2.5. fényképek közül a bal oldalin: egy mérőüveg fejjel lefelé egy szűk nyakú, vízzel jól megtöltött üvegbe állítva. Elég érzékeny: ha kezünkkel megfogjuk, máris láthatjuk a levegő tágulását. Felhasználhatjuk tehát a hőmérséklet változásának jelzésére, *termoszκόpnak*. Ha letakarjuk valamilyen fekete ronggyal vagy papírral és kitesszük a napra, elég sok levegő buborékol ki belőle. Ha viszont alumínium fóliával takarjuk le, akkor még a napon is jóval kevésbé tágul ki a levegő. Nekem kb. 20 mm különbség adódott. Mint majd látni fogjuk, ez durván 4 °C-nak felel meg. Ezért nem szabad a hőmérőket a napon használni. A napon a sötét anyagok elnyelik a nap fény- és hő sugarait, és nagyon felmelegszenek. A világos anyagok sokkal kevesebb hő- és

fénysugarat nyelnek el, nem melegszenek fel annyira. Napon tehát nem a hőmérsékletet, hanem a hőmérő hősugár elnyelő képességét mérjük. Ha a levegő hőmérsékletét akarjuk megmérni, akkor a hőmérőt árnyékba, levegő járta helyre állítsuk. Vizsgáljuk meg sorra részletesebben az említett jelenségeket. □

2.2.9. Kísérlet. Azt, hogy a felmelegített levegő könnyebb lesz és felszáll, könnyen kimutathatjuk, ha például egy főzőlap, gázláng, gyertya felett felszálló levegő kavargását pontszerű fényforrással (zseblámpával) kivetítjük a falra: jól látható árnyképet kapunk. Ez azon alapul, hogy a meleg levegőnek nem csak a sűrűsége, hanem a fénytörése is megváltozik. □

2.2.10. Kísérlet. Napsütésben a száraz, napos földterületek jobban átmelegednek, és felfelé áramlik felettük a levegő. Az ilyen *termik*ben a feláramlás 3–5 m/s, kivételesen akár 10 m/s sebességű is lehet. Ezt használják ki a vitorlázó repülőgépek. Egy jó vitorlázó gép *siklószáma* akár 40 is lehet, ami azt jelenti, hogy miközben 40 m-t halad előre, csak 1 m-t süllyed. Egy termikben körözve magasba emelkedhetünk vele, majd átsiklunk egy másik termikbe, stb. A feláramló levegő ha elég magasra emelkedett, rendszerint kicsapódik belőle a vízpára, és felhő képződik. Erről lehet észrevenni a termikeket. □

2.2.11. Kísérlet. A kémény is azon alapszik, hogy a felmelegített levegő felszáll. Készítsünk egy teamécses köré feltekert alumínium fóliából kéményt, amire alul több nyílást vágunk. A nyílásokon keresztül meggyújtva a teamécsest, a forró levegő kizárólag felül áramlik ki. Gyufa lángjával meggyőződhetünk róla, hogy a kémény a nyílásokon keresztül beszívja a levegőt. Jól húzó kémény esetén egy bélyeg nagyságú nyílás elég, hogy egy kályha elegendő levegőt kapjon. □

2.2.12. Kísérlet. Egy gyertya vagy gázégő által melegített levegő a 2.2.5. fényképek közül a jobb oldalin látható módon kis „gázturbinát” hajthat. Ez ugyan csak egy kis modell, de ezen az elven alapulnak például a repülőgépek gázturbinás hajtóművei is: elől beszívják a levegőt, összenyomják, és a felforrósodott (hogy miért, lásd később) levegőbe üzemanyagot fecskendeznek, ami azonnal meggyullad és elég. A nagyon forró égési gázok hajtják a turbinát, az pedig a légcsavart. A turbina elvben hasonlít a vízturbinához, de sokkal drágább, mert a magas hőfok és a nagyon magas fordulatszám miatt nagyon drága anyagokból készül. Lökthajtásos gépeknél a turbina csak a levegőt sűríti és a kiáramló nagy sebességű gázok rakétaelven lökik előre a gépet. Gázturbinát nemigen érdemes sokkal 1000 kW teljesítmény alatt építeni. Hatásfoka 30% körüli. Üzemanyagra érzéketlen: lehet gáz, benzin, petróleum, gázolaj, stb., de mindegyik elég drága. Gyorsan felfuttatható teljesítményű erőművekben is használják. Néha a forró kiáramló gázokkal gőzt fejlesztenek, amivel gőzturbinát (lásd később) hajtanak. Ilyen kombinált erőműben érték már el 60%-os hatásfokot is.

2.2.13. Kísérlet. A szobában a levegő a kályhánál vagy fűtőtestnél felemelkedik, ezt könnyen kimutathatjuk árnykép vetítéssel. Ezért szokott a kályha illetve a fűtőtest felett elpizskolódni a festés: az áramló levegő felhordja a port, ami kicsapódik a mennyezetre. Nagyrészt ez a „hőáramlás” biztosítja a szoba egyenletes átmelegedését. A hővezetés mellett egy harmadik módja a hőátadásnak a hősugárzás: ezt is érezhetjük a kályha közelében, elsősorban az arcunkkal. Vizsgáljuk meg ezt is részletesebben. □

2.2.14. Kísérlet. Tartsuk az arcunk mellé egy alumínium fólia darabot a „tükrös” oldalával. Meleget érzünk: a fényes lap visszaveri arcunk hőszugárzását az arcunkra, annak melegét érezzük. Hasonlóan ha egy csővé tekerjük össze az alumínium fóliát és beledugjuk az ujjunkat, meleget érzünk. □

2.2.15. Kísérlet. Tartsuk az arcunkat egy hideg, lehetőleg parabola- vagy gömbfelület alakú hőszugárzó elé. A hőszugárzó visszaveri arcunk hőszugárzását az arcunkra, meleget érzünk. □

2.2.16. Kísérlet. Amelyik felület jobban nyeli el a hőszugarakat, az jobban is sugározza ki őket. Ezt könnyen kimutathatjuk egy ollóval szétvágott sörös vagy kólás dobozból kapott, lehetőleg kiegyenesített alumínium lappal. Vágjunk bele egy parafadugóba, és tegyük bele a lapot. A festett felét gyertyaláng felett kormozzuk be. A még meleg vagy újra megmelegített lap kormos felét tartsuk az arcunk mellé. Meleget érzünk. Fordítsuk meg: a másik oldal kevesebb hőt sugároz. Néhányszor megfordítva amíg a lap ki nem hűl, érezhetjük a különbséget. Az alumínium jó hővezetése miatt a két oldal hőmérséklete gyakorlatilag egyenlő. □

Ez a kísérlet magyarázza a Galilei-hőmérővel a napon kapott eredményünket. Ezért szokták a termoszkóp üvegedényét beüzüstözni, hogy kevés hőszugarat bocsássonak ki illetve nyeljenek el.

2.2.17. Kísérlet. Tartsuk a kézfejünket olyan közel egy nem energiatakarékos lámpához, hogy jól érezzük a meleget, de ne égessen. Egy régi típusú volframszálas izzólámpa a bevezetett elektromos energiának csak körülbelül 5 %-át alakítja fénné, a maradékból hő keletkezik, aminek nagy része hőszugárzásként lép ki a lámpából. Egy lapos üveget tartva a kézfejünk és a lámpa közzé, az kevésbé melegít. Az üveg elnyeli a hőszugarakat. Még kifejezettebb a hatás, ha a lapos üvegbe vizet töltünk: a víz különösen jó hőszugár elnyelő. Ezért melegszik fel a tavakban a víz csak a felszín közelében. Polietilén fólia néhány rétegével is sikerül a kísérlet. Ez magyarázza az üvegház hatást: a Nap kisugárzott energiájának nagy része fény formájában érkezik a Föld felszínére. Ott elnyelődik, és hőszugarak formájában sugárzódik ki újra. A hőszugárzás rokona a fénynek, részletesebben lásd a fénytantban. Egy üvegházban az üveg elnyeli a kilépő hőszugárzást, így visszatartja a meleget. Hasonló a hatása egy polietilén fóliasátornak is. A levegő molekuláinak nagy része nem nyeli el a hőszugárzást, de egyes alkotórészei igen, elsősorban a vízgőz és a szén-dioxid. □

2.2.18. Kísérlet. Végső soron a fényszugárzás is hővé alakul, ha elnyelődik. Ezt könnyű kimutatni. Konyhában vagy más kövezett helyiségben egy minél nagyobb átmérőjű erős nagyítólencsével gyűjtsük a Nap minél több réteg üvegen át beáradó fényét gyufaszál fejére. Hogy könnyebb legyen megtalálni az összegyűjtött fénnel a gyufa fejét, szorítsuk a gyufát papírlapra. A gyufa rövidesen meggyullad, és a papírt is meggyújtja. Gyorsan tapossuk el. Ha biztosak akarunk lenni benne, hogy tényleg csak a fényszugarak jutnak a gyufára, tartsuk a gyufát a vízzel töltött laposüveg mögé. Hogy az üveg ne hűtse, ne érjen hozzá az üveghez: például támasszuk alá egy keresztbe tett gyufaszállal. Gyűjtsük a Nap fényét gyűjtőlencsével a gyufa fejére. Így is meggyullad, ha nehezebben is. □

2.2.19. Kísérlet. Mérjük meg a levegő hőtágulását. A Galilei-hőmérő nagy üvegét nehéz lenne pontosan egy adott hőmérsékletre beállítani. Többek között ezért azt az eljárást fogjuk inkább használni, amit a szén-dioxid sűrűségének meghatározására használtunk. Most azonban egy közönséges uzsonnás zacskó használnunk, amiben nagyjából fél liter levegőt hagyva, szoros csomót kötünk rá és rákötözzük az ott is használt csőre. Egy nagy befőttes üvegbe fogjuk belenyomni, amit a mérlegre rakunk. Nem érhet hozzá az üveg falához vagy aljához, mert a súrlódás nagy mérési hibát okoz. Ezt abból is észrevesszük, hogy nagyon ingadozik a mérleg által mért súly. Ha kell, több helyen is kötözzük a zacskót a rúdhoz. Először a befőttes üveget megtöltjük hideg vízzel, és jégkockákat is rakunk bele. Jól megkavarjuk, és belenyomjuk a zacskót, leolvassa a súlynövekedést. Ez adja a térfogatot. Utána megmérjük a hőmérsékletet. A sok víz hőmérséklete lassan változik, nem kell sietnünk. Öntsük ki a hideg víz felét, engedjük a helyére csapvizet, és ismételjük meg az egészet. Ezután csapvízzel, majd kicsit langyos vízzel, langyos vízzel, stb. mérünk, amíg csak a hőmérőnk engedi. Igyekezzünk mindig ugyanolyan mélyre nyomni a zacskót. Nem árt, ha a csapvíz hőmérsékletén újra mérünk a végén, hogy nem szivárogo-e a zacskó. Legvégül ollóval több helyen vágjuk ki a zacskót, és így ismételjük meg a mérést. Ez adja azt a térfogatot, amit a rúd, zacskó és madzag elfoglal. Nekem ez a térfogat 21 g volt. A mérés eredményeit az alábbi táblázat mutatja:

Hőmérséklet °C	Bruttó tömeg g	Nettó tömeg g
1,7	404	383
10,9	419	398
18,9	431	410
28,8	451	430
36,0	455	434
50,6	466	445

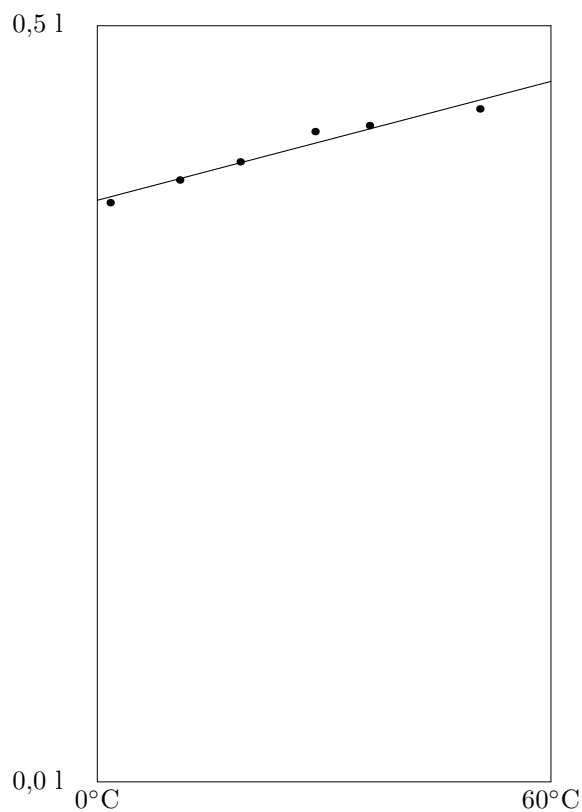
Tulajdonképpen 100 °C-on is megpróbáltam mérni, de a zacskó belsejében apró víz-cseppek jelentek meg. Vízgőz került bele, ami nyilván meghamisítja a mérést. (Néhány műanyag eléggé átengedi a vízgőzt.) Ha felrajzoljuk az eredményeket egy „kockás” papírra — még jobb milliméterpapírra —, látszik, hogy nagyjából egy egyenesre esnek. (Lásd a 2.2.6. ábrát.) Mi a legjobban illeszkedő egyenes? Jelölje x a hőmérsékletet, y a térfogatot. A legjobban illeszkedő egyenes valamilyen $y = ax + b$ egyenletű egyenes. Részletes magyarázat nélkül elmondjuk, hogyan lehet az a és b számokat meghatározni. (A magyarázat megtalálható a könyvsorozat matematikai részében.) Először ki kell számolnunk a mért x -ek átlagát. Összeadjuk őket, és elosztjuk a mérések számával, itt most 6-tal. Az eredmény nekem $\bar{x} = 24,48$. Ugyanígy kiszámoljuk a mért y -ok átlagát, ez nekem $\bar{y} = 416,67$. Az egyenes átmege az \bar{x}, \bar{y} ponton, azaz $\bar{y} = a\bar{x} + b$. Ha most a értékét meg tudjuk határozni, b értékét már ki tudjuk számolni. Minden mért x -re számoljuk ki $(x - \bar{x})^2$ -et, és ezeket adjuk össze. Ez 1568,1 lett. Ugyancsak minden mért x, y párra számoljuk ki $(x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y})$ értékét is, és ezeket is adjuk össze. Ez 2054,95 lett. Az utóbbi összeget osztva az előbbivel, kapjuk a értékét, ami tehát 1,31. Kiszámolva b -t, az 384,6. A levegő tehát — amennyire méréseink pontosak — egyenletesen

tágul, minden $^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletemelkedésre ugyanannyival nő a térfogata, és minden $^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletcsökkenéssel ugyanannyival csökken. Ez viszont azt jelenti, hogy előbb-utóbb nulla lesz! Számoljuk ki, hogy mikor! Ha $y = 0$, akkor $x = -b/a = -294^{\circ}\text{C}$. Pontosabb mérések szerint ez $-273,15^{\circ}\text{C}$. Ami meglepő, más gázokra is ugyanezt az értéket kapjuk! Például megismételhetnénk a mérést szén-dioxiddal vagy a habpatronban lévő gázzal, hasonló eredmény kapnánk. Ennek oka, hogy a gázok nagyon hasonlóak: szabadon száguldozó és ütköző molekulák. Ezt a törvényt Charles francia fizikus fedezte fel, de sokszor Gay-Lussac francia fizikus nevéhez kapcsolják, aki később végezte méréseit. Kíséremény következtetéssel arra gondolhatunk, hogy ennél alacsonyabb hőmérséklet nincs is, mert azon a gázok térfogatának negatívnak kellene lenni! A $-273,15^{\circ}\text{C}$ az abszolút nulla pont, és innen érdemes mérni a hőmérsékletet. Ez valóban így van, ez az abszolút nulla pont, és ennél alacsonyabb hőmérséklet nincs. Ha innen mérjük a hőmérsékletet, de a skála beosztása ugyanolyan sűrű, mint Celsius skáláján, akkor a Kelvin angol fizikusról elnevezett abszolút hőmérsékleti skálát kapjuk, ezen az egység a kelvin (jele: K). Ezen a skálán a víz fagyáspontja $273,15\text{ K}$ (nem kell fok), forráspontja pedig $373,15\text{ K}$. Charles törvénye ekkor úgy hangzik, hogy a gázok térfogata arányos az abszolút hőmérséklettel. Ez azonban csak addig igaz, amíg a gáz nem cseppfolyósodik, és előbb-utóbb minden gáz cseppfolyósodik.

A gázhőmérők bevezetésével egyúttal az a kérdés is megoldódott, hogy melyik folyadék az „igazi” a hőmérőkészítéshez, mert például a szesz másként tágul, mint a higany. Legjobb a gáz, és akármelyik jó, mert mind egyformán tágul! A Galilei-hőmérővel mindjárt kelvinben mérhetjük a hőmérsékletet. \square

2.2.20. Kísérlet. A Gay-Lussac törvény szerint a térfogat (adott nyomáson) arányos az abszolút hőmérséklettel. Így ha a nyomás és a térfogat szorzatát osztjuk az abszolút hőmérséklettel, a hányados állandó. Tehát Boyle és Gay-Lussac törvényét összekombinálva kapjuk az *egyesített gáztörvényt*: ha p a gáz nyomása, V a térfogata, és T az abszolút hőmérséklete, akkor pV/T mindig ugyanannyi egy adott gáz adott mennyiségére. Elég tehát adott gázra 1 g gáz térfogatát tudnunk egy adott nyomáson és egy adott hőmérsékleten, akárhány gramm gáz térfogatát ki tudjuk számolni akármilyen hőmérsékleten és nyomáson. A gáz sűrűségét is elég ismernünk. Legtöbbször 25°C -ot, azaz $298,15\text{ K}$ -t szokás „adott hőmérsékletnek” választani. Ezt *normál hőmérsékletnek*, idegen kifejezéssel *standard hőmérsékletnek* (ejts sztenderd) nevezzük, és T^{θ} -lal fogjuk jelölni. (Régebben a 0°C -ot használták normál hőmérsékletnek.) „Adott nyomásnak” 1 bar nyomást szokás választani, ez a *normál nyomás*, jele p^{θ} . (Régebben az 1 atm -át használták normál nyomásnak.)

Nézzünk egy példát az egyesített gáztörvénnyel való számolásra. A szén-dioxid sűrűségét 30 cm mély vízoszlop alatt $19,3^{\circ}\text{C}$ -on $1,90\text{ g/l}$ -nek mértük. Mennyi a sűrűsége normál körülmények között? A 30 cm -es, 1 cm^2 keresztmetszetű vízoszlop súlya 30 p . Így a nyomás a normál nyomásnál $0,03\text{ kp/cm}^2$ -tel, körülbelül 3% -kal nagyobb, a térfogat tehát ennyivel lesz nagyobb a normál nyomáson. A normál hőmérséklet $298,15/(273,15 + 19,3) \approx 1,0195$ -ször nagyobb, mint a mérés hőmérséklete, tehát a térfogat $1,0195 \cdot 1,03 \approx 1,05\text{ l}$, így a normál sűrűség $1,81\text{ g/l}$. (Pontosabb mérés szerint $1,77\text{ g/l}$. A hibát részben az okozza, hogy nem mértük a légnyomást.) \square



2.2.6. ábra: gáz hőtágulása

Próbáljuk meg megérteni az egyesített gáztörvényt! Ha a gázmolekulák által elfoglalt térfogat nulla lenne, és a molekulák között semmilyen taszító vagy vonzó erő nem hatna, akkor egy ilyen „*ideális gáz*” térfogatát a fecskendőben a dugattyúval felére csökkentve, egy adott molekula kétszer annyiszor ütközne a dugattyúba, azaz a nyomás, ami a molekulák „lökődéséből” ered, kétszeresére nőne. Ha növeljük a hőmérsékletet, a molekulák gyorsabban mozognak, egyrészt gyakrabban ütköznek a dugattyúba, másrészt lökéseik is erősebbek, a nyomás nő. Az abszolút nulla fokon a molekulák mozgása megállna, adott térfogaton a nyomás (vagy adott nyomáson a térfogat) nullára csökkenne.

Mennyire pontos az egyesített gáztörvény? Nem lehet tökéletesen pontos, mert nagyon nagy nyomáson a térfogatnak kisebbnek kellene lennie a gázmolekulák össztérfogatánál. Mivel a gázok sűrűsége légköri nyomáson nagyságrendben ezerszer kisebb a folyadékok sűrűségénél, a molekulák által elfoglalt térfogat a teljes térfogatnak nagyságrendben ezredrésze. Ennek megfelelően nagyságrendben ezer bar nyomáson az egyesített gáztörvény már nagyon pontatlan a molekulák által elfoglalt térfogat és a köztük igen erős összenyomáskor fellépő taszítás miatt, viszont a nyomás csökkentésével egyre pontosabb lesz. Légköri nyomáson a hiba a legtöbb gáznál csak ‰ nagyságrendű, elhanyagolható.

Nagyobb, néhány %-os hiba csak akkor tapasztalható, ha a gáz már közel van a cseppfolyósodáshoz. Ennek oka, hogy itt a gázmolekulák között fellépő vonzás már úgy hat, mintha csökkenne a molekulák száma.

2.2.21. Kísérlet. Ha van légnyomásmérőnk, akkor Galilei-hőmérőnként jól használhatjuk hőmérőnek. Mivel hőmérőhöz könnyebb hozzájutni, inkább *légnyomásmérőt*, idegen szóval *barométert* készíthetünk Galilei-hőmérőnkéből. Mérjük a hőmérsékletet, és leszámítjuk a hőmérséklet okozta térfogatváltozást, így megkapjuk a légnyomás okozta térfogatváltozást. Egyszer azonban meg kell tudnunk a légnyomást. Ezt a világhálóról tudhatjuk meg az adott időpontban lakóhelyünkre. Azonban nem a tényleges légnyomást adják meg, hanem a tengerszintre átszámítottat. Hogyan számoljuk ki belőle a ténylegest? A levegő normál sűrűsége 1,17 g/l. Először kiszámoljuk a levegő sűrűségét az aznapi hőmérsékleten és tengerszinti nyomáson. Ha mondjuk ez 1,1 g/l, akkor a következőképpen számolhatunk tovább: 1 m² keresztmetszetű, 1 m³ térfogatú levegőoszlop súlya 1,1 kp, tehát $1,1 \cdot 9,81 \approx 10,8$ N. Ezek szerint minden méter emelkedéssel 10,8 P-lal csökken a nyomás. (Egyébként pont ezt mértük meg „liftes” kísérletünkkel, úgyhogy annak eredményéből kiszámolhatjuk a levegő sűrűségét. Sajnos, az elég pontatlan mérés volt.) Ha mondjuk a térképről azt olvastuk le, hogy 200 m magasan lakunk, akkor 2160 P-lal, azaz 21,6 mbar-ral kisebb a nyomás, mint a tengerszinten. Most tudva a valódi légnyomást és a hőmérsékletet, kiszámolhatjuk, hogy normál állapotban mit mutatna Galilei-hőmérőnk. Ezt írjuk fel rá. Ha gáztérfogatot mérünk, és ennek a normál nyomásra és hőmérsékletre való átszámolásához kell a légköri nyomás, akkor tulajdonképpen nem is kell kiszámolnunk a nyomást, csak megnézni, hogy Galilei-hőmérőnk a normál térfogat hányszorosát mutatja, és ezzel osztani a mért gáztérfogatot, hogy megkapjuk a gáz térfogatát normál állapotban.

Az az eljárás, amivel kiszámoltuk a valódi légköri nyomást, közelítő. Ezzel számolva, kb. 8500 m magasan nulla lenne a nyomás, egyáltalán nem lenne levegő. Valójában ott a nyomás a tengerszinten mért nyomásnak kb. a harmada. A hibát az okozza, hogy nem vettük figyelembe, felfelé haladva a nyomás csökken és ezzel együtt csökken a levegő sűrűsége is. Egyébként a hőmérséklet is változik. □

2.2.22. Az általános gáztörvény. A hidrogén elem, egyforma atomokból áll, vegyjele H. (A legtöbb elem vegyjele nevének első betűje vagy két betű a nevéből.) Az oxigén is elem, vegyjele O. Honnan tudjuk, hogy elemek? Onnan, hogy vegyészek szorgos serege próbálta meg felbontani őket, és nem sikerült. Kémiai kísérletek szerint két térfogatrész hidrogénből és egy térfogatrész oxigénből meggyújtva víz keletkezik, és egyik gázból se marad. (Ennek a kísérletnek a fordítottját, a víz felbontását az áram kémiai hatásának vizsgálatánál mi is el fogjuk végezni.) Ebből arra gondolhatunk, hogy egy molekula vízben két atom hidrogén és egy atom oxigén van, azaz a víz képlete H₂O. A lenti kis kettes a képletben azt jelenti, hogy abból az atomból kettő van egy molekulában. Mindkét gázt lehet kapni palackban is, úgyhogy ugyanúgy mérhetnénk meg a sűrűségüket, mint a széndioxidét. A hidrogén az összes gáz közül a legkisebb sűrűségűnek bizonyult, 1 g normál állapotban $\approx 12,3$ l. Az oxigén körülbelül 16-szor sűrűbb. Viszont a vízgőz sűrűségét is nemsoká meg fogjuk mérni, és némi számolással arra jutunk, hogy kb. 9-szer sűrűbb, mint a hidrogén. Ez olyan, mintha egy vízmolekula egy H atomból és egy fél O atomból állna.

Ezt sokáig nem értették, pedig Avogadro olasz tudós elég régen megadta a magyarázatot. *Minden gáznak adott térfogatában adott nyomáson és hőmérsékleten ugyanannyi molekula van* — ez Avogadro törvénye —, de az elemek gáz halmazállapotban (általában) kétatomosak. Tehát két molekula víz két molekula H_2 -ből és egy molekula O_2 -ből keletkezik. Avogadro magyarázatát sokáig azért nem hitték el, mert elképzelhetetlennek tartották, hogy egy elem saját magával reagáljon. A kémiai reakciókat ugyanis ellenkező előjelű töltések vonzásával magyarázták. Az elektromosságnak, az elektronoknak tényleg szerepe van, de a dolog nem ilyen egyszerű. Természetesen nem látjuk, hogy egy anyag saját magával reagál, mert mindjárt a keletkezéskor megtörténik. Azt az anyagmennyiséget, amiben ugyanannyi molekula van, mint ahány *atom* 1 g hidrogénben, *mol*-nak nevezték el. Mivel a hidrogén messze nem minden elemmel képez vegyületet, az oxigén pedig szinte mindegyikkel, később áttértek arra, hogy *mol*-nak azt az anyagmennyiséget nevezték, amiben ugyanannyi molekula van, mint ahány *atom* 16 g oxigénben. (Ezzel a *mol* mint egység nem sokat változott.) Később két különböző *mol*-t is használtak, a vegyészek az oxigénezen alapulót, a fizikusok egy másik, szénezen alapulót. Avogadro még nem tudta, hogy hány molekula van egy mól anyagban. Mi már csináltunk egy nagyságrendi becslést erre: 1 mol víz 18 g (pontosabban 18,016 g) és megbecsültük, hogy 1 cm^3 vízben hány molekula van. A ma használt *mol* az oxigénezen alapuló *mol*-nál kicsit kisebb, és egyszerűen darabszámban van megadva: az 1 *mol*-ban levő molekulák száma, az Avogadro-szám $A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$. Ebben az új egységben egy *mol* hidrogén atom $\approx 1,007947$ g, egy *mol* oxigén atom pedig $\approx 15,999943$ g.

Avogadro törvényéből az következik, hogy egy *mol* gáz térfogata adott nyomáson és hőmérsékleten minden gázra ugyanannyi. Például 0 °C-on és 1 atm nyomáson $\approx 22,41397$ l, normál hőmérsékleten és normál nyomáson pedig $\approx 24,78957$ l. Mivel az egyesített gáztörvény szerint pV/T állandó, azt kapjuk, hogy egy *mol* akármilyen gázra pV/T ugyanaz az állandó. Ez a *gázállandó*, amit R -rel szokás jelölni. Értéke $\approx 8,3144626$ J/(K·mol). Természetesen n *mol* gázra pV/T értéke n -szer ennyi, azaz $pV = nRT$. Ez az *általános gáztörvény*. Persze, mindezek csak ugyanolyan pontossággal érvényesek, mint az egyesített gáztörvény: minél kisebb a nyomás, annál pontosabban.

Avogadro törvénye felhasználható egy *mol* gáz tömegének kiszámítására. Például a szén-dioxid normál sűrűsége (azaz normál nyomáson és hőmérsékleten vett sűrűsége) 1,77 g/l, így 24,790 l szén-dioxid tömege $43,88 \approx 44$ g. Ennek a könysorozatnak a kémia részében megmutatjuk, hogy ha szenet égetünk oxigénben, akkor a térfogat nem változik, így egy molekula szén-dioxidban egy molekula O_2 van. Egy *mol* szén-dioxidban tehát 32 g O_2 van, a maradék 12 g pedig szén. Akármilyen széntartalmú gázt vizsgáltak, egy *mól*ban soha nem találtak 12 g-nál kevesebb szenet, hanem mindig ennyit vagy ennek a többszörösét. A szén móltömege tehát 12 g, pontosabban $\approx 12,01078$ g és a szén-dioxidban 1 atom szén és 2 atom oxigén van, mint ahogy az 5.1.8. ábrán is ábrázoltuk. A szén vegyjele latin nevének (carbonium) a kezdőbetűjéből C. A szén-dioxid képlete tehát CO_2 . Innen a neve is: di kettőt jelent.

2.2.23. Kísérlet. Sajnos, a gázhőmérőkkel elég nehéz mérni. A gyakorlatban ezért másféle hőmérőket használnak, amiket a gázhőmérőkhöz igazítanak. Leggyakrabban folyadék hőmérőket. Fémek hőtágulásán alapulnak az úgynevezett bimetal („két fém”)

hőmérők. Ezek működési elvét már megismertük az „üvegcsíkos” kísérletnél. Két különböző hőtágulású fémből, például vörösrézből és vasból készült csíkot egymásra fektetnek és gondosan összeerősítik. Hőmérsékletváltozás hatására ez egyik fém jobban megnyúlik mint a másik, a csík elgörbül. A kis görbülés hosszú mutatót mozgat. A ma leggyakrabban használt hőmérők a hőelemes hőmérők. Ha van érzékeny voltmérőnk, akkor ezt könnyen kipróbálhatjuk: egy réz- és egy vasdrót végét összecsavarjuk, és ezt a helyet gyertyalángba tartjuk. A drótok másik vége között 1–2 mV feszültség mérhető. Sajnos, a vas és réz esetén ez csak kb. 200 °C-ig nő, aztán csökken. Még visszatérünk ilyen hőmérő készítésére, de készen is kapható például konyhai hőmérőként. Ha nincs érzékeny voltmérőnk, akkor is elvégezhetjük ezt a kísérletet. Érzékeny feszültségérzékelőként egy fülhallgatót fogunk használni, de erősítő bemenete, főleg egy érzékeny mikrofon vagy egyéb előerősítő bemenete még jobb is lehet. Az összecsavart drótvégeket melegítve, érintgessük a másik két drótvéget a fülhallgató csatlakozójának két érintkezőjéhez. A fülhallgatóban halk, de határozott zörgés, kattanások hallhatóak, jelezve a fennálló feszültségkülönbséget. Más elektromos hőmérők is vannak, ezekkel az elektromágnességnél fogunk részletesen foglalkozni. Egyes fajtáik azt használják ki, hogy fémek és más anyagok ellenállása változik a hőmérséklettel. Más fajtáik azon alapulnak, hogy diódák nyitóirányú feszültsége függ a hőmérséklettől: 2 mV-tal változik (csökken) °C-onként, ha az áram 100 μ A. A változás csökken, ha az áram nő, mégpedig minden tízszeresre növekedésnél 0,3 mV/°C-kal. Ez germánium és szilícium diódákra is igaz. A diódák záróirányú árama is felhasználható hőmérsékletmérésre. Ez 10 °C hőmérsékletemelkedéskor megduplázódik, úgy (nem véletlenül), mint a kémiai folyamatok sebessége. \square

2.2.24. Kísérlet. Mivel nehéz hőmérőnket egy gázhőmérőhöz hasonlítani, azt csinálták, hogy gázhőmérővel pontosan megmérték néhány anyag olvadáspontját illetve forráspontját. Hőmérőnket ilyen *hőmérsékleti alappontok* segítségével kalibrálhatjuk. Néhány alappontot a víz fagyás- és forráspontján kívül egy táblázatban adunk meg.

higany olvadáspontja	−38,87 °C	glaubersó olvadáspontja	32,38 °C
fixirsó olvadáspontja	48,0 °C	ón olvadáspontja	231,8 °C
ólom olvadáspontja	327,3 °C	cink olvadáspontja	419,45 °C
antimon olvadáspontja	630,50 °C	alumínium olvadáspontja	660,1 °C
ezüst olvadáspontja	960,8 °C	arany olvadáspontja	1063,0 °C
réz olvadáspontja	1083,0 °C	vas olvadáspontja	1539 °C
platina olvadáspontja	1773 °C	molibdén olvadáspontja	2600 °C
volfram olvadáspontja	3380 °C		

A hitelesítés úgy történik, hogy kis edénykében kevergetjük az adott anyagot, lassan melegítve. Az olvadás illetve a forrás alatt a hőmérséklet az olvadáspont, illetve a forráspont, és a hőmérő végig ugyanannyit mutat. Felírjuk az eltérést. Ha az anyag fémdrót, elég, ha a hőmérő érzékelője köré csavarjuk. Ezen az alapon lángok hőmérsékletét is megbecsülhetjük. A gyertyalángban egy vékony alumínium fólia csík láthatóan megolvad, bár nem cseppen le. (A felületén elég, és a keletkező timföld csak 2000 °C-on olvad.

Ha sokáig tartjuk a lángba, a timföld réteg olyan vastag lesz, hogy már nem látjuk, belül olvadt-e vagy sem.) A hőmérséklet tehát legalább $700\text{ }^{\circ}\text{C}$. Valami elromlott készülék hálózati vezetékéből vékony rézdrótot szerezhetünk. A drót vékony legyen, mert a réz jól vezeti a hőt, és a vastag drót egyrészt nem melegszik eléggé fel, másrészt megégeti a kezünket. A gyertyaláng külső szélén, ha átdugjuk a lángon, esetleg sikerül a végét legömbölyíteni. Itt tehát $1100\text{ }^{\circ}\text{C}$ van. A borszeszegő lángjában így cseppé tudjuk olvasztani a rézdrót végét. A gázlángban a rézdrót könnyedén megolvad. Egy ruhacsipeszbe fogott acél varrótű finom végét sem a borszeszegő lángjában, sem a gázlángban nem tudjuk megolvasztani, bár a gázlángban nem csak izzik, de szikrázik is. A következő táblázat azt mutatja, hogy a különböző izzási színek milyen hőmérsékletet jelentenek.

sötétben kezdődő vörös	$525\text{ }^{\circ}\text{C}$
kezdődő sötét barnászvörös	$550\text{ }^{\circ}\text{C}$
barnászvörös	$600\text{ }^{\circ}\text{C}$
sötétvörös	$700\text{ }^{\circ}\text{C}$
sötét cseresznyepiros	$800\text{ }^{\circ}\text{C}$
cseresznyepiros	$900\text{ }^{\circ}\text{C}$
világos cseresznyepiros	$1000\text{ }^{\circ}\text{C}$
narancssárga	$1100\text{ }^{\circ}\text{C}$
sárga	$1200\text{ }^{\circ}\text{C}$
fehéressárga	$1300\text{ }^{\circ}\text{C}$
fehér	$1400\text{ }^{\circ}\text{C}$
hegesztési fehér	$1500\text{ }^{\circ}\text{C}$
vakító fehér	$>1500\text{ }^{\circ}\text{C}$

Ez a táblázat vasra vonatkozik, ami a lángban sötét szürke, majdnem fekete lesz. (Kovácsok az acél edzésénél az izzási színek alapján ítélik meg a hőmérsékletet.) Kevésbé sötét anyagok, például alumínium izzítva nem világítanak annyira, ezért nehéz megítélni a hőmérsékletüket. Például a borszeszegő lángja kevésbé világít, mint a gyertya lángja, amiben izzó koromszemcsék vannak, pedig melegebb. Kempingvilágításra használt gázlánggal például úgynevezett izzóharisnyát izzítanak, ami tízszeresére növeli a láng fényét. \square

2.2.25. Kísérlet. Ha hőmérővel mérjük például víz hőmérsékletét, azt vehetjük észre, hogy eleinte a hőmérő hőmérséklete gyorsan változik, majd egyre lassabban „kúszik” a tárgy hőmérsékletéhez. Miért van ez így? A hőmérő hővezetéssel veszi fel a folyadék hőmérsékletét. Ha adott idő alatt mondjuk megfelelődött a hőmérséklet különbség, akkor a hővezetés is felére csökken és ugyanannyi idő kell, hogy a hőmérséklet különbség újra felére csökkenjen. Ez Newton hőkiegyenlítődési törvénye. \square

2.2.26. Kísérlet. Mindig hasonló a helyzet, ha két tárgy közötti hőmérsékletkülönbség hővezetéssel egyenlítődik ki: ha később kezdjük figyelni, már kisebb a hőmérsékletkülönbség, így kisebb a hővezetés is, a hőmérsékletkülönbség egyébként az időben hasonlóan változik, de egy konstansszor kisebb. *Newton hőkiegyenlítődési törvénye* szerint ha egy

adott idő, a *felezési idő* alatt felére csökken a hőmérsékletkülönbség, akkor ugyanennyi idő alatt újra a felére csökken, stb. Ha például szeretnénk tudni, hogy egy nagy tál vízbe állított pohár víz mennyi idő alatt hül le annyira, hogy már csak jelentéktelenül különbözik a hőmérséklete a tál vízétől, akkor mérjük meg a felezési időt! Egy nagy tál víz hőmérsékletét mérjük meg. Keverjünk egy pohárban kb. 40 °C-os vizet. Tegyük bele a hőmérőt. Ha beállt, számoljuk ki a két hőmérséklet számtani közepét (összegük felét). Állítsuk a poharat a tálba, és mérjük az időt, amíg a hőmérséklet eddig csökken. Nekem ez 1,5' volt. Ez a felezési idő. Valójában kisebb, mert a hőmérő is némi késlekedéssel mutatja a hőmérsékletet, és a tálban a víz is melegszik valamennyit. Ha ennek az időnek a tízszereséig várunk, a hőmérsékletkülönbség jelentéktelen, az eredetinek kb. 1‰-e lesz, mert tízszer feleződik. □

Pontosan milyen függvény írja le a hőmérséklet különbség csökkenését? Tekintsük az a^t függvényt! Ha csak a c időpontban kezdjük el figyelni, akkor az a^{t+c} függvényt kapjuk. Ez viszont $a^c a^t$. Ez lehet pont a fele az a^t -nek, ha $a^c = 1/2$. Tehát ha az a alapot ebből az egyenletből határozzuk meg, akkor a megfelelő függvényt találtuk meg? Nem egészen: az a^t a $t = 0$ időpontban mindig egy. Ezen könnyű segíteni: tekintsük a Ca^t függvényt, ahol C -t úgy választjuk, hogy éppen a nulla időpontban mért hőmérséklet különbség legyen. Erre is $Ca^{t+c} = Ca^c a^t = Ca^t/2$. Tehát a hőmérsékletkülönbség az idővel exponenciálisan csökken. Ez Newton *hőkiegyenlítődési törvényének* matematikai alakja.

2.2.27. Kísérlet. Szó esett már a pumpáról. Mindenki tapasztalta, hogy ha huzamosabb ideig pumpálunk például egy biciklipumpával, akkor felmelegszik. Ezt főleg az okozza, hogy a levegő összenyomáskor felmelegszik. A pumpa is alul a legmelegebb, nem feljebb, tehát nem a sűrűlódás játssza a fő szerepet. Hogy pontosabban megértsük, honnan is ered ez a felmelegedés, kezdjük egy egyszerű kísérlettel. Egy kémcsőbe tegyünk harmadáig vizet, és egy uzsonnás zacskóból kinyomva a levegőt, ragasszuk cellulsszal a kémcső szájára a zacskó száját úgy, hogy jól zárjon. A zacskót például egy ruhacsipesszel megfogva, lógassuk a kémcsövet borszeszegő vagy gázláng fölé. A víz felforr, a gőz egy része lecsapódik, felmelegíti a kémcsövet, majd a zacskót is, végül a gőz felfújja a zacskót. Ne melegítsük tovább, mert kidurran! Mi itt a meglepő? Ha jól meggondoljuk, a gőz munkát végzett, amikor a zacskót felfújta. Ne mondjuk rögtön, hogy ez nekünk haszontalan munka! Vezethettük volna a gőzt egy hengerbe, amiben egy dugattyú van, például egy felfelé fordított fecskendőbe. Ha engedjük az egészet lehűlni, a levegő nagy erővel nyomná vissza a dugattyút, és valamit felemelhetnénk vele. Tehát hóból munkát kaphatunk! Így működött az első gőzgép, Papin gőzgépe. Mennyi munkát kaphatunk így? Tudnunk kellene, 1 g vízből mennyi 100 °C-os gőz fejlődik. Ezt majd később megmérjük, 1 bar nyomáson kb. 1,7 dm³. Ha ezt egy 1 cm² keresztmetszetű hengerbe vezetjük, akkor a dugattyú 1,7 dm³/1 cm²=1700 cm=17 m hosszon mozdul el, az erő pedig 1 bar·1 cm²=100000 N/m² · 0,0001 m²=10 N (nagyjából 1 kp). Innen a végzett munka 10 N·17 m=170 J. Ha a keresztmetszet valahányszor nagyobb, az erő is annyiszor nagyobb, viszont az út annyiszor kisebb: a munka mindig a nyomás szorozva a térfogattal. Mennyi hőt fektettünk be? Ha 20 °C-ról indultunk, akkor 80 · 4,1868 + 2257 ≈ 2592 joule-t. Ennek legjobb esetben is csak 5,7 százalékát kaptuk vissza. Mégis, a munka

megdöbbenően sok, hiszen nagyjából annyi hőről van szó, ami egy gyufa elége-seker keletkezik! Később majd foglalkozunk a gőzgép tökéletesítésével. \square

2.2.28. Kísérlet. Térjünk vissza a pumpához. Az összenyomáskor munkát végzünk. Ez a munka alakul át hővé, ezért melegszik fel a levegő. Mivel a gáznak kicsi a tömege, nem olyan könnyű a felmelegedést kimutatni, pláne pontosan mérni, pedig elég erős. A fordítottját egyszerűbb kimutatni: a kitágulásakor lehűlés következik be, mert a gáz munkát végez a környezetén (arrébb tolja a levegőt). Egyszer már észrevettük ezt, amikor a szén-dioxid sűrűségét mértük meg: a lehűlés igen jelentős volt. Sokkal egyszerűbben is észrevehetjük a lehűlést. Ha a kézfejünkre lehelünk, meleget érzünk: a kilehelt levegő olyan meleg, mint a testünk belseje. Ha azonban jól felfújt szájjal, vékony sugárban fújuk a levegőt kézfejünkre, hideget érzünk, minél nagyobb nyomással fújuk, annál inkább. Az összenyomott, testhőmérsékletű levegő tágulásakor lehül, mert munkát végez (arrébb nyomja a többi levegőt). \square

2.2.29. Kísérlet. * Az, hogy összenyomáskor felmelegedés, kiterjesztéskor lehűlés van, méréssel is kimutathatjuk, ha hozzájutunk egy vékony konstantán dróthoz. Vegyünk egy hasonló vastagságú rézdrótot. Az egyiknek szigeteltnek kell lennie. Egy minél nagyobb (én 100 ml-est használtam) fecskendőre való injekciós tűből megmelegítve húzzuk ki a tűt. Mindkét drótot dugjuk át a lyukon, (esetleg külön lyukakon), és letisztítva a szigetelést, a kettőt finom tűlánggal vagy forrasztócsővel hegesszük össze (lásd a könyvsorozat kémia részét). Ha túl hosszú az összehegedt drótrész, vágjuk rövidebbre. Ily módon egy nagyon kis tömegű hőelemet kaptunk. Ha millivoltmérővel mérjük a két szabad vég közötti feszültséget, megfogva a hőelemet néhány tized millivolt feszültséget kell kapnunk; a konstantán a pozitív. A drótokat melegragasztóval ragasszuk be a lyukba. Ha a hőelemet betesszük a hengerbe, a dugattyút benyomjuk, illetve kihúzzuk, és mérjük a hőelem feszültségét, nyomásnövelésnél felmelegedést, nyomáscsökkenésnél lehűlést tapasztalunk. Ez a hőelem $42 \mu\text{V}$ feszültséget ad 1°C hőmérsékletváltozásra. Én néhány tized mV feszültséget mértem, ami nagyságrendben 10°C -nak felel meg. A pontos mérés lehetetlen, mert nagyon gyors a hőkiegyenlítődés.* \square

Az még csak világos, hogy összenyomáskor munkát végzünk, de munkát végzünk a dugattyú kihúzásakor is! Nem ekkor is felmelegedést kellene tapasztalunk? Képzeljük el, hogy légüres térrel körülvéve végezzük el a kísérletet. Ekkor a bezárt levegő nyomja ki a dugattyút, munkát végezve nekünk. Ha levegő vesz körül bennünket, akkor is ez a helyzet, a munkát csak a külső levegő nyomása ellenébe végzünk, arrébb nyomva azt. Összenyomáskor a külső levegő munkája segít bennünket.

2.2.30. Kísérlet. Mégis, hogyan mérhetnénk meg a levegő felmelegedését összenyomáskor illetve lehűlését kitágulásakor? Mivel a levegő sűrűsége kicsi, a tömeg kicsi, így nagyon kicsi, de rendkívül érzékeny hőmérőre lenne szükségünk. Ilyen pontos műszerünk nincs, mégis boldogulhatunk! A trükk az, hogy érzékeny hőmérőnek magát a levegőt fogjuk használni. A „berendezés” egy nagy üvegpalack. Én egy 5 l-es demizsont használtam. Száraz legyen és hagyjuk a mérés helyén állni, hogy felvegye az ottani hőmérsékletet. Mérjük meg a hőmérsékletet és a nyomást is. A palackot dugjuk be egy jól záró kétfuratú dugóval. Az egyik furat 3–5 mm átmérőjű legyen. A másik furatba jön egy

cső, amire egy elég hosszú, 2–3 m-es átlátszó hajlékony műanyag (PVC=poli-vinil-klorid) csövet húzunk. Könnyebb felhúzni, ha forró vízbe mártva megpuhítjuk; melegítésre lágyul. Engedjük le a műanyag csövet és töltjük meg nem túl hosszasan buborékmentesen vízzel; ez könnyebb, ha egy-két csepp mosogatószert adunk a vízhez. Dugjuk be a dugó másik nyílását. Lassan emeljük fel a műanyag csövet. A víz összenyomja az üvegben lévő levegőt, ami picit felmelegszik. Várjunk egy kicsit, 1–2 perc alatt újra lehül és a vízszint megállapodik. (Ha nem állapodik meg, nem jól zár a dugó.) Az asztalra tegyünk egy derékszögű vonalzó, még jobb fém derékszöveget, és olvassuk le a vízszintek különbségét. Legjobb, ha a palack felőli csőben a skála nulla osztásához állítjuk a vízszintet, és a másikat leolvassuk. Húzzuk ki a dugót a lyukból egy másodpercre, majd azonnal dugjuk be újra. A palackból levegő áramlik ki, a bennmaradó levegő pedig lehül. Az ideális az lenne, ha eközben a palackban lévő levegő semmi hőt nem venne fel a palack melegebb falától, a változás *adiabatikus* lenne. (A görög eredetű szó jelentése a=nem dia=át b=innen=menni.) Nyilván ekkor a legnagyobb a lehülés. Ezt akkor várhatjuk, ha a fal jó hőszigetelő, illetve a változás gyors. A levegő 1–2 perc alatt újra felmelegszik a környezet (és a palack) hőmérsékletére. A vízszint megint megállapodik: ezt a különbséget is leolvassuk. Ismételjük meg a mérést többször, más-más magasságban tartva a csövet a kezdeti összenyomást megelőzően. Jelölje p_1 a kezdeti vízszintkülönbségnek megfelelő nyomást, p_2 pedig a végső vízszintkülönbségnek megfelelő nyomást. Milyen hőmérsékletnek felelnek ezek meg? Jelölje p a nyomást, V az edény térfogatát, T a hőmérsékletet. A lyuk kinyitása után beálló T_2 hőmérsékletet keressük. Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{pV}{T_2} = \frac{(p + p_2)V}{T},$$

ahonnan T_2 -t kiszámolhatjuk:

$$T_2 = T \frac{p}{p + p_2} \quad \text{és} \quad T - T_2 = T \frac{p_2}{p + p_2}.$$

Az én mérésemnél a légnyomás 999 mbar volt, a hőmérséklet 21,5 °C. A következő eredmények adódtak:

p_1 /v.o.mm	38	33	34	24	33
p_2 /v.o.mm	15	8	5	10	12
$(T - T_2)$ /mK	433	231	145	289	347

Látjuk, hogy minél nagyobb a kezdeti túlnyomás, annál nagyobb a végső túlnyomás. A v.o.mm átszámításához vegyük figyelembe, hogy 1 mm-es, 1 m² területű vízréteg térfogata 1 dm³, így súlya ≈1 kp, azaz ≈9,81 N. Innen 1 v.o.mm≈9,81 P.

A mérés nem valami pontos. Azt gondolhatjuk, hogy a térfogat változik egy kicsit. Ez is igaz, de ez nem okoz jelentős hibát. A fő hibaforrás, hogy a palack falának közelében nagyon gyorsan felmelegszik a levegő. Ezen segít valamit, ha nagy palackot választunk, hogy a faltól való átlagos távolság minél nagyobb legyen. A másik hibaforrás, hogy a kiáramlás nem szűnik meg azonnal, ahogy a nyomás kiegyenlítődtött, hanem tovább folytatódik, majd visszaszívás következik be, aztán újra kiáramlás, stb. Elvileg legjobb lenne addig nyitvahagyni a palackot, amíg a külső és belső nyomás egyenlő nem lesz, de nyomásmérőnk túl lassú, még akkor is, ha kevés vizet hagyunk a PVC csőben. Ha kicsi a túlnyomás (6–20 v.o.mm) és nagy a palack (akár 70 l) akkor pontosabb a mérés. □

Vajon akkor is lehül a táguló levegő, ha nem végez munkát? Ezt először Joule vizsgálta meg. Egy tartályból egy légüres tartályba engedett át levegőt, amíg a nyomás ki nem egyenlítődtött. Az egészet kaloriméterbe tette. Nem tapasztalt hőmérsékletváltozást. (Későbbi, pontosabb mérések a legtöbb gáznál némi lehülést, néhánynál némi felmelegedést mutattak ki, és a hőmérséklettől meg a nyomástól is függ, hogy mi történik. Ezt a molekulák közötti erők okozzák, és kis nyomásváltozásoknál a hatás elhanyagolható, jóval kisebb, mint amit a kézfejükön érzünk.) Fontos, hogy jól megértsük: „ideális gáz” esetén lehülés akkor következik be, ha a gáz munkát végez, és a lehülés a végzett munkának megfelelő. Ha egy henger dugattyúval elválasztott egyik felében valamilyen gáz van, a másik felében légüres tér, akkor ha a dugattyút fogva, engedjük a gázt kitágulni, az munkát végez nekünk, és lehül. Ha csak elengedjük a dugattyút, az jól felgyorsul, nekiütözik a henger másik végének, energiája hővé alakul, és visszamelegíti a gázt, végül is nincs hőmérsékletváltozás. Hasonló jelenség játszódik le, ha a dugattyú helyén csap van. Ha kinyitjuk a csapot, a gáz nagy sebességgel áramlik át a légüres térbe. Ha útjába egy kis gázturbinát teszünk, és ezen keresztül munkát végeztetünk a gázzal, akkor lehül. Ha ki se vezetjük a gázturбина tengelyét, jól felpörög, majd lassan megáll, mozgási energiáját visszaadja a gáznak, és végeredményben a hőmérséklet nem változik. Ha mi hajtjuk kívülről a gázturбина tengelyét, akkor tovább melegíti a gázt.

A molekuláris magyarázat egyébként az, hogy a gázmolekulák mozgásának, forgásának, rezgésének energiája adja a gáz energiáját, az úgynevezett belső energiát. Ez csak a hőmérséklettől függ, nem függ attól, hogy a molekulák milyen sűrűn vannak. Tehát nem függ a nyomástól mindaddig, amíg a molekulák közötti erők nem játszanak lényeges szerepet. Például ha a 100 °C-os 1 atm nyomású gőzt kiterjesztjük, akkor nincs hőmérsékletváltozás. Az „ideális gáz” fajhője sem függ a nyomástól. Ez is azért van, mert a gáz hőmérsékletének emelése a belső energiát növeli, és ez csak a hőmérséklettől függ. Pontosabban, ez csak akkor igaz, ha a gáz térfogata állandó. Ha a nyomása állandó, akkor a gáz melegítéskor munkát végez: a munkája a nyomászor a térfogatváltozás. Ezt a munkát is hő alakjában veszi fel, a belső energia növeléséhez szükséges hő mellett. Tehát a gázok állandó nyomáson mért fajhője nagyobb, mint az állandó térfogaton mért fajhője. Azonban „ideális gáz” esetén a térfogati munka sem függ a nyomástól: ahányszor kisebb a nyomás, annyszor nagyobbak a térfogatok, és így a térfogatváltozás is. A továbbiakban, ha külön nem mondjuk, az állandó nyomáson vett fajhőre gondolunk, mivel rendszerint állandó, légköri nyomáson dolgozunk. Van, amikor az állandó nyomáson mért fajhőnek az állandó térfogaton mért fajhő csak a 60 %-a, a hőfelvétel 40 %-a a térfogati munkára fordítódik. Tulajdonképpen nem csak gázoknál van térfogati munka, de szilárd anyagoknál és folyadékoknál, mivel a térfogatváltozás kicsi, közönséges nyomáson elhanyagolható. Ennek ellenére a szilárd anyagok és folyadékok állandó térfogaton mért fajhője jelentősen kisebb az állandó nyomáson mért fajhőnél — bár nem annyival, mint a gázoknál — mert állandó térfogaton óriási erők lépnek fel.

2.2.31. Kísérlet. Az előző kísérletben sokkal több van, mint első látásra gondolnánk. Meg tudjuk belőle határozni a levegő állandó térfogaton és állandó nyomáson mért fajhőjét is. A vegyészek gyakran használják azt a megállapodást, hogy ha valamit úgy mérnek, hogy egy másik mennyiség állandó, akkor a mért mennyiség jelének lábához

odaírják annak a mennyiségnek — vagy esetleg mennyiségeknek — a jelét, ami állandó. Mivel c jelöli a fajhőt, c_p az állandó nyomáson vett mólhő, c_V pedig az állandó térfogaton vett mólhő. Nem is kell új kísérletet végeznünk, csak gondolkodnunk. Az egyesített gáztörvény szerint a nyomás szorozva a térfogattal és osztva az abszolút hőmérséklettel állandó. Persze, ez az állandó függ a gáz mennyiségétől is, de nagyon egyszerűen: adott hőmérsékleten és nyomáson kétszer annyi tömegű gáz térfogata kétszer annyi, stb. Tehát azt írhatjuk, hogy nyomásszor térfogat osztva a hőmérséklettel egyenlő tömegszer egy másik állandó, amely már nem függ a gáz mennyiségétől, csak a fajtájától. Ebben az alakban írva fel a gáztörvényt a kísérletre,

$$\frac{(p + p_1)V}{T} = mK \quad \text{és} \quad \frac{(p + p_2)V}{T} = m_2K,$$

ahol K az állandó, m a palackban lévő gáz tömege a kinyitás előtt, m_2 pedig a palackban maradó gáz tömege. A kiáramló gáz $m_1 = m - m_2$ tömegét innen kiszámolhatjuk: mindkét egyenletet szorozzuk végig T -vel, és az első egyenletből vonjuk ki a másodikat. Azt kapjuk, hogy

$$TK(m - m_2) = TKm_1 = (p_1 - p_2)V.$$

Az m_1 tömegű gáz (legalábbis majdnem pontosan) p nyomáson és T hőmérsékleten áramlik ki, így térfogata $(p_1 - p_2)V/p$, az általa végzett munka pedig ennek p -szerese, azaz $(p_1 - p_2)V$. Ez a munka a teljes gáz belső energiájából fedeződik, ebből ered a lehűlés, azaz

$$mc_V(T - T_2) = (p_1 - p_2)V.$$

Behelyettesítve a $T - T_2$ -re kapott kifejezést,

$$mc_V = \frac{p_1 - p_2}{p_2} \frac{(p + p_2)V}{T}.$$

A jobb oldali törtben p_2 nagyon kicsi p -hez képest. Elhagyva p_2 -t a kapott tört az egyesített gáztörvény szerint $p^\theta V^\theta / T^\theta$. Mivel $m/V^\theta = \rho^\theta$, a levegő normál sűrűsége (1,17 g/l), azt kapjuk, hogy

$$c_V = \frac{p_1 - p_2}{p_2} \frac{p^\theta}{\rho^\theta T^\theta}.$$

Egyszerű képletet kaphatunk a c_p/c_V hányadosra is. Gondoljuk el, hogy a felmelegedés során a gázt állandó p nyomáson, vagyis a cső két szárában a vízszintet egyforma magasan tartjuk. A levegő persze jobban kiterjed, a térfogata legyen V_2 . A végzett munka $p(V_2 - V)$. Mivel $pV_2 = (p + p_2)V$, az kapjuk, hogy a végzett munka p_2V . Most a teljes hőfelvételt

$$mc_p(T - T_2) = mc_V(T - T_2) + p_2V;$$

picit csaltunk, mert itt m helyett m_2 -nek kellene szerepelnie, de a különbség igen kicsi. Osszuk el ezt az egyenletet azzal az egyenlettel, amiből c_V -t számoltuk. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{(p_1 - p_2)V + p_2V}{(p_1 + p_2)V} = \frac{p_1}{p_1 - p_2}.$$

Ebből kiszámolhatjuk c_p -t is. Másrészt ellenőrizhetjük mérésünket is, mert a hányados mért értéke levegőre szobahőmérsékleten 1,40. Az én méréseimből számolt eredmények:

$p_1/v.o.mm$	38	33	34	24	33
$p_2/v.o.mm$	15	8	5	10	12
$c_V/(mJ/(g\cdot K))$	440	896	1663	401	502
c_p/c_V	1,65	1,32	1,17	1,71	1,57

Mint látjuk, az eredmények nagyon ingadoznak. Ennek okairól már volt szó. A két szélsőt elhagyva, a három középső átlaga $c_p/c_V = 1,51$ és $c_V = 613$ mJ/(g·K). Egyébként c_V értéke pontos mérések szerint 721 mJ/(g·K). \square

2.2.32. Összefüggések adiabatikus állapotváltozásra. ** Vajon milyen összefüggések állnak fenn adiabatikus állapotváltozás esetén p , V és T között? Jelöljük egy adott, m tömegű gáz belső energiáját $E(T)$ -vel. (Szokásos az $U(T)$ jelölés is.) Joule mérése szerint jó közelítéssel ez csak a hőmérséklettől függ. Egyébként úgy szokás megállapodni, hogy $E(0) = 0$, mert az abszolút nulla ponton nincs mozgás. Ha állandó térfogaton a hőmérsékletet megemeljük ΔT -vel, akkor a teljes bevitt energia a belső energiát növeli, így $mc_V\Delta T = \Delta E$. Ha ezt adott p nyomáson tesszük, akkor a bevitt hő egy része munkavégzésre fordítódik: $mc_p\Delta T = \Delta U + p\Delta V$. A két egyenlet különbsége $m(c_p - c_V)\Delta T = p\Delta V$. Írjuk az egyesített gáztörvényt $pV = mKT$ alakba, ahol a K konstans csak a gáz fajtájától függ. A kezdeti és a végállapotra felírva ezt, és a kettőt kivonva, $p\Delta V = mK\Delta T$. Ezt összehasonlítva az előbb kapott egyenlettel, $c_p - c_V = K$. Adiabatikus változásnál nincs energiabevitel, így $\Delta U + p\Delta V = 0$ (kis változás esetén a nyomás állandónak tekinthető). Kifejezve p -t az egyesített gáztörvényből és K helyére beírva, hogy $c_p - c_V$, azt kapjuk, hogy

$$0 = mc_V\Delta T + p\Delta V = mc_V\Delta T + \frac{mKT}{V}\Delta V = mc_V\Delta T + m(c_p - c_V)T\frac{\Delta V}{V}.$$

Osztva $mc_V T$ -vel,

$$0 = \frac{\Delta T}{T} + (\kappa - 1)\frac{\Delta V}{V}.$$

Ez $\Delta T \rightarrow 0$ esetén egy szeparábilis differenciálegyenletet ad:

$$0 = \frac{dT}{T} + (\kappa - 1)\frac{dV}{V}.$$

Integrálva

$$\ln T + (\kappa - 1)\ln V$$

állandó, amire alkalmazva az exponenciális függvényt kapjuk, hogy $TV^{\kappa-1}$ (egy másik) állandó. Az egyesített gáztörvény segítségével kiküszöbölve V -t, az kapjuk, hogy $p^{\kappa-1}/T^{\kappa}$ állandó, ha pedig T -t küszöböljük ki, a Poisson-féle összefüggést, hogy pV^{κ} állandó.

** \square

2.3. Gőznyomás

2.3.1. Kísérlet. Mint tudjuk, a víz nem csak $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on párolog el. Ha üveglapra egy csepp vizet cseppentünk, szobahőmérsékleten kb. fél óra alatt elpárolog. Gyorsabb a párolgás, ha melegítjük, például egy fekete alátétre téve erős (nem energiatakarékos!) lámpával melegítjük felülről. A lámpa hőszugarai felmelegítik a fekete alátétet, az pedig az üveglapot. A meleg vízcseppben gyorsabban mozognak a vízmolekulák. A leggyorsabb molekulák elhagyják a cseppet: a víz párolog. Az is gyorsítja a párolgást, ha levegőt fújunk a csepre. Ilyenkor a csepp feletti gőzből a vízmolekulák nem tudnak visszalépni a cseppbe, mert a levegő kicserélődött. Zárt edényben a párolgás megáll: egy idő után ugyanannyi vízmolekula lép vissza a vízbe, mint amennyi kilép belőle. Még a jég is párolog, csak lassan: télen, nagy hidegben a megfagyott nedves ruhák lassan megszáradnak és az autó belülről fűtött ablakáról néha anélkül párolog el a jég, hogy megolvadna. \square

2.3.2. Kísérlet. Nyilván érdekel bennünket, hogy a vízzel végzett Torricelli-kísérletnél miért forrt fel a víz? Tegyük egy kémcsőbe harmadáig-feléig vizet, és gyertyaláng felett forraljuk fel. Forraljuk pár percig, hogy minden levegőt kiűzzünk a vízből és a kémcsőből is. Megfigyelhetjük, hogy a kiáramló vízgőz színtelen. Dugjuk be egy nagyon jól záró *gumidugó*val. (Dugókat borászati szaküzletben kaphatunk.) Először csak tegyük bele a dugót a kémcső szájába, és forraljuk még egy kicsit a vizet, majd nyomjuk be erősen a dugót és egyúttal vegyük is el a kémcsövet a láng felől. A víz lassan tovább forr. Ha a dugónál fogva felfordítjuk a kémcsövet, a víz lassan forr. Ha hűtjük a felfordított kémcső alját egy nedves ronggyal, a forrás megélénkül, a gőz felül, a hűtött részen lecsapódik. Végül már kézzel is meg tudjuk fogni a kémcsövet, és a víz még mindig forr, miközben felül, a hűtött részen lecsapódik a gőz. Előbb-utóbb a beszivárgó vagy bentmaradt levegőnyomok tönkreteszik a kísérletet, de elvileg még a jégből is gőz képződne. A kísérlet után elég nehéz kihúzni a gumidugót: a kémcsőben majdnem nulla a nyomás. \square

2.3.3. Kísérlet. Ugyanezt egy nagyobb (10 vagy 20 ml-es) orvosi fecskendővel is kipróbálhatjuk. Töltsük meg a fecskendőt meleg vízzel félig, dugjuk be, és húzzuk hátra a dugattyút. A vízben buborékok jelennek meg. Ezek nagy része gőz és ha visszaengedjük a dugattyút, újra lecsapódik. Marad egy kis levegő ami a vízben volt oldva. Kinyitva a fecskendőt, ezt kinyomjuk, majd megismételjük az előbbit. A víz felforr, de visszaengedve a dugattyút a gőz újra lecsapódik. Figyeljük meg, hogy miközben a víz forr, a dugattyú húzásához állandó erő kell, tehát a nyomás nem változik. Egyébként hiába hűl a víz, többször megismételhetjük a játékot, míg végül a beszivárgó levegő tönkreteszik a kísérletet.

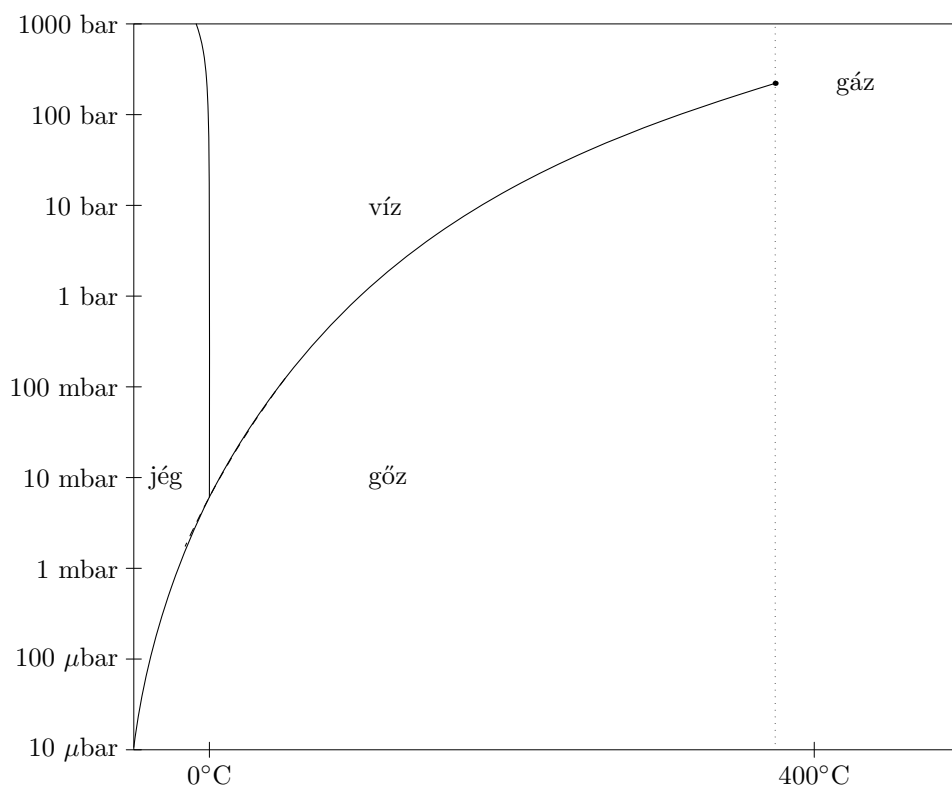
Mi is történik itt? Csökkentettük a nyomást (vagy a kémcsőnél csökkent a gőz lecsapódása miatt), de a meleg víznek van valamekkora gőznyomása. Ha ez meghaladja a nyomást, a víz belsejében is buborékok képződnek: a víz felforr. A hidegebb részeken a gőz lecsapódik, csökken a nyomás, a víz tovább forr, stb. A víz tehát annál alacsonyabb hőfokon forr, minél kisebb a nyomás. Ezért a víz forráspontja nem is mindig $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, hanem függ a nyomástól. A $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ normál légköri nyomásra, 1 atm-ra vonatkozik. \square

2.3.4. Kísérlet. Vajon a nyomás növelésekor meg nő a forráspont? Igen, például a kukta fazékban ezt használjuk fel: megnövelt nyomáson nő a víz forráspontja, a forróbb vízben gyorsabban puhul meg az étel. Nézzünk erre is egy kísérletet. Egy nagyobb (20, 50 vagy 100 ml-es), felfelé fordított, üres orvosi fecskendőbe *szabadban, a közelben minden lángot eloltva, izzást megszüntetve* spricceljünk egy kevés butángázt vagy öngyújtógázt. A „gáz” (bután vagy propán-bután keverék, főleg bután) tulajdonképpen nyomás alatt cseppfolyósított folyadék. Gyorsan elpárolog, hátranyomja a dugattyút, és a fecskendő lehül. Ha maradt még folyadék, felfelé fordítva a fecskendőt, mert a butángáz nehezebb a levegőnél, várjuk meg, míg mind elpárolog. Közben a fecskendő szájánál kiáramló gőzön átnézve, láthatjuk az árnykép-jelenséget. Dugjuk be a fecskendőt, és jó erősen nyomjuk előre a dugattyút. Elég nagy nyomásnál a gőz (vagy legalábbis egy része) cseppfolyósodik. Ha hátraengedjük a dugattyút, a folyadék elpárolog. Gyorsan dolgozzunk, mert a hideg gáz kisebb nyomásnál cseppfolyósodik. Többször próbálkozva észrevehetjük, hogy ha felmelegszik a fecskendő, nagyobb nyomás kell a cseppfolyósításhoz. A propán-bután keverékkel is megy a kísérlet, de nagyobb nyomás kell, a propán nehezebben cseppfolyósodik, mint a bután. Egyébként a „bután” is keverék, mert kétféle bután van, és nem egyforma a forráspontjuk. □

2.3.5. Kísérlet. Vajon összenyomással minden gázt sikerül cseppfolyósítani? Gondolkozzunk el az előző kísérleten. Ha nő a hőmérséklet, nő a forráspont, és sokkal nagyobb nyomás kell a butángőz cseppfolyósításához. A nagyobb hőmérsékleten a folyadék sűrűsége kisebb. A sokkal nagyobb nyomás miatt viszont a butángőz sűrűsége nagyobb. Egyszer csak elérünk egy olyan hőmérséklethez és olyan nagy nyomáshoz, hogy a cseppfolyós bután és a butángőz sűrűsége egyforma. Ekkor mindkettőben butánmolekulák mozognak össze-vissza, és átlagosan egyforma sűrűn vannak. Mi különbözteti meg ekkor a kettőt? Semmi! Valóban van ilyen hőmérséklet, nyomás és sűrűség minden anyagra. Ezt szokás *kritikus hőmérsékletnek, kritikus nyomásnak és kritikus sűrűségnek* nevezni. Ezen hőmérséklet felett nincs külön cseppfolyós és gőz halmazállapot, csak kisebb-nagyobb sűrűség. Szokás csak e fölött gázzól beszélni, ez alatt gőzről, de ezt nem nagyon fogjuk betartani. Persze a kritikus nyomás jó nagy, nagyságrendben 100 bar kell legyen, hiszen közönséges nyomáson a gázok sűrűsége több százszor kisebb, mint a folyadékoké. A kritikus hőmérséklet általában a forráspontnak másfélszerese, ez a *Guldberg–Guye-szabály*. (Hasonló, közelítő szabály az olvadáspontra, hogy az nagyjából a kritikus hőmérséklet 44%-a.) Az anyagok a kritikus hőmérséklet felett kis nyomáson tipikus gázok, nagyon nagy nyomáson, úgynevezett *szuperkritikus* állapotban viszont inkább a folyadékokhoz hasonlítanak, sok anyagot feloldanak, de a viszkozitásuk kicsi, inkább a gázokéhoz áll közel. Sok szép ásvány ilyen szuperkritikus vízből vált ki.

Jó lenne a kritikus állapotot látni is. Egy vastag falú üvegcsőbe zárva a butánt és melegítve, látható a kritikus állapot bekövetkezése. Ez azonban elég veszélyes kísérlet, mivel ha az üvegcsővön akár csak egyetlen karcolás van, a nagy nyomástól könnyen szétrobbanhat. Biztonságosabb egy acélcső, és anyagnak választhatjuk a szén-dioxidot, aminek kritikus hőmérséklete 31,0 °C, kritikus nyomása 73,8 bar (ezt az acélcső kibírja). De hogy fogjuk észrevenni a kritikus állapot bekövetkezését? A trükk, hogy egy szén-dioxid patronból kis mérleget készítünk, a 2.3.1. fényképeken látható módon. Melegben,

vagy langyos vízben 31 °C fölé felmelegítve a kis mérleget, a patron tologatásával elérhetjük, hogy nagyjából egyensúlyban legyen, és kibillentve az egyensúlyi helyzetből, abba visszabilenjen. Tegyük be a mérlegecskét a mélyhűtőbe! A szén-dioxid egy része cseppfolyósodik. Most kibillentve az egyensúlyi helyzetből, a folyadék a lentebbi részre folyik, és a mérlegünk úgy marad. Ha a másik fele billentjük, ott is megáll; lásd a bal oldali és a középső képet. Ha felmelegszik, a szén-dioxid homogén gáz lesz, a patron újra mérlegként billeg: lásd a jobb oldali képet. Ez csak akkor következik be pontosan a kritikus hőmérsékleten, ha a patronban éppen a kritikus sűrűségnek ($0,468\text{ kg/l}$) megfelelő tömegű szén-dioxid van. Ha kevesebb van, akkor már a kritikus hőmérséklet alatt az összes elpárolog, és homogén gőz tölti meg a patronot. Ha több van, akkor a folyadék egyre tágul, és homogén folyadék tölti be a patronot, mielőtt elérnék a kritikus hőmérsékletet. Ezért is nehéz bemutatni a kritikus állapotot. Ha mégis látni szeretnénk, keressünk képeket a világhálón. A kísérlet egyébként a habszifon patronban lévő gázzal is elvégezhető: annak kritikus hőmérséklete $36,43\text{ °C}$, kritikus nyomása $72,7\text{ bar}$, kritikus sűrűsége pedig $0,4525\text{ kg/l}$. \square



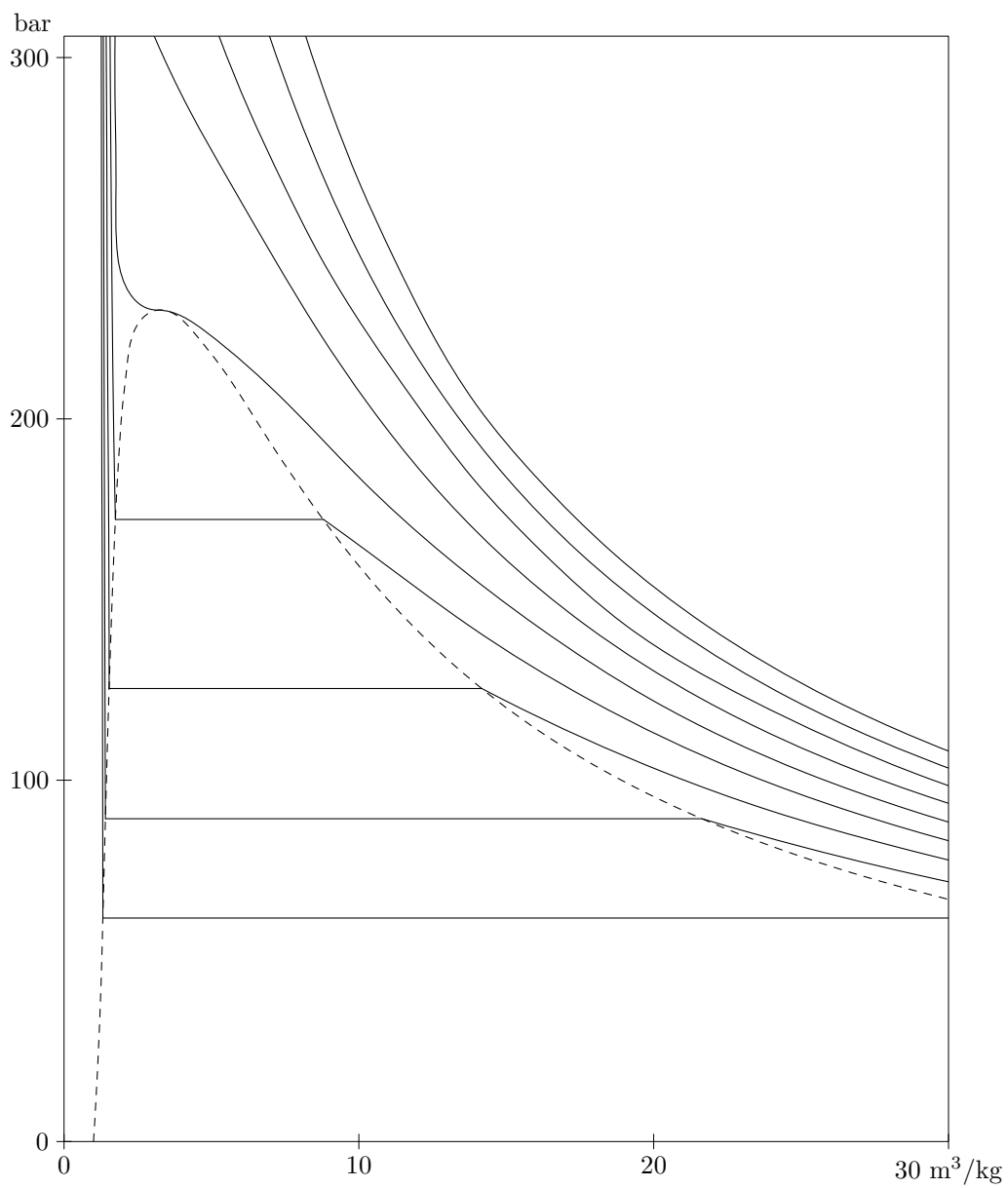
2.3.2. ábra: víz állapotábrája

2.3.6. A víz állapotábrája. A 2.3.2. ábra a víz úgynevezett állapotábrája. A hő-

mérséklet és a nyomás függvényében megadja, hogy a víz milyen halmazállapotban van. Alacsony nyomáson gőz (pontosabban *telítetlen gőz*) állapotban, magasabb nyomáson a hőmérséklettől függően vízként (azaz folyadékként) vagy jégként (azaz szilárd anyagként) van jelen. A kritikus hőmérséklet, $374,5\text{ °C}$ felett, a pontozott vonaltól jobbra már gázhalmazállapot van, a nyomástól függetlenül. Nyilván mindegyik (jég, víz, gőz, gáz) fázis tartományában — bizonyos határok között — a hőmérséklet és a nyomás is szabadon változhat. Erre azt mondjuk, hogy a rendszer *szabadsági foka* kettő. A víz és gőz tartományának közös határán levő görbe a víz gőznyomását adja meg a hőmérséklet függvényében, ez a *gőznyomásgörbe*. Fordítva is felfoghatjuk, hogy a görbe a forráspontot adja meg a gőznyomás függvényében; ekkor azt mondjuk, hogy ez a *forráspontgörbe*. A görbén mozogva két fázis van, víz és gőz, de csak egy szabadsági fok: a hőmérséklet meghatározza a nyomást, és fordítva is. Ebben a helyzetben, amikor a gőz vízzel érintkezik, *telített gőzről* beszélünk. Ennek a görbének a végpontja a kritikus pont. A jég és víz tartományának közös határa az *olvadási görbe*. Mint látjuk, a nyomás növekedésével az olvadáspont csökken. Végül a jég és gőz tartományának közös határát alkotó görbe a jég párolgásának felel meg, ez a *szublimációs görbe*; ezen mozogva a jég (telített) gőzzel van egyensúlyban. Ezekon a görbéken mozogva is két fázis van és egy a szabadsági fok. Végül ahol a három görbe találkozik, ott három fázis van és nulla szabadsági fok. Ez a víz *háromspontja*. Figyeljük meg, hogy az anyagok száma (itt egy) plusz kettő a fázisok száma plusz a szabadsági fokok száma. Ez bonyolultabb rendszereknél is így lesz, ez a *fázisszabály*.

Mi a helyzet a térfogattal? Amikor csak egy fázis van, az anyagmennyiség (azaz a tömeg) a nyomással és a hőmérséklettel meghatározza a térfogatot. Ha két fázis van, akkor a nyomásból és a hőmérsékletből csak az egyiket, de mindkét fázis tömegét ismernünk kell, hogy meghatározzuk a térfogatot. Végül ha három fázis van, azaz a háromspontban, a nyomás és a hőmérséklet adott, de mindhárom fázis tömegét ismernünk kell, hogy meghatározzuk a térfogatot. A 2.3.3. ábra a kritikus pont közelében ábrázolja a nyomás függését a térfogattól (folytonos görbék), rendre $275, 300, 325, 350, 374,15$ (ez a kritikus hőmérséklet), $400, 425, 450$ és 475 °C -on. A kritikus hőmérséklet alatti görbéken látjuk, hogy a telítetlen gőz nyomása a térfogat csökkentésével nő, majd megkezdődik a víz lecsapódása, és a térfogat csökkentésével a nyomás nem nő tovább. Ez felel meg a vízszintes szakasznak. Ekkor telített gőz és forráspontján lévő víz van jelen. Ez addig tart, míg a telített gőz mind le nem csapódik, utána a további térfogatcsökkentéstől a folyadék nyomása igen gyorsan emelkedik. A kritikus hőmérsékleten is a térfogat csökkentésével nő a nyomás, de a kritikus pontnál, azaz a kritikus térfogatnál ($3,18\text{ l/kg}$), amikor a nyomás a kritikus nyomás ($221,29\text{ bar}$), a görbe vízszintesbe fordul, de aztán tovább emelkedik. Még magasabb hőmérsékleten a görbe jobban hasonlít egy ideális gáz összenyomási görbéjéhez. Egyébként a kritikus hőmérséklethez közeledve a párolgási hő egyre gyorsabban csökken, és a kritikus hőmérsékleten nullává válik.

* Van-e valamilyen, legalább közelítő összefüggés a sűrűségre? Igen: a T hőmérsékleten a folyadék vagy szilárd anyag $V(T)$ térfogatának illetve $\rho(T)$ sűrűségének és a V_k



2.3.3. ábra: a víz nyomása

kritikus térfogatának illetve ϱ_k kritikus sűrűségének hányadosa nagyjából

$$\frac{V_k}{V(T)} = \frac{\varrho(T)}{\varrho_k} = 1 + 2,73\sqrt{1 - 0,95T/T_k},$$

ahol T_k a kritikus hőmérséklet. (A képlet a kritikus hőmérséklet közvetlen közelében nem érvényes.) Például vízre a térfogatot 273,15 K-en 1 l/kg-nak véve, a kritikus térfogatra 3,11 l/kg-ot kapunk; egész tűrhető közelítés. *

2.3.7. Kísérlet. Miközben a víznek fecskendőben, alacsony hőmérsékleten való forrását vizsgáltuk, először mindig kivált az oldott levegő. A nyomást növelve, és rázogatva a vizet a levegővel, egy része visszaoldódik, de jobb lesz ezt a folyamatot a vízben jobban oldódó gázzal megvizsgálni. A szén-dioxid sokkal jobban oldódik vízben, mint a levegő. A vízben való oldásával készül a szódavíz. Szívjunk fel egy nagyobb fecskendőbe kb. félig szódavizet vagy szénsavas ásványvizet. Kinyomva a levegőt, dugjuk be a fecskendőt. Hátrahúzva a dugattyút, buborékok keletkeznek, de visszaengedve nem tűnnek el azonnal. Ezek nem gőz, hanem szén-dioxid buborékok. Nyomjuk erősen a dugattyút és rázogassuk a fecskendőt. A szén-dioxid jó része újra elnyelődik. A játékot többször megismételhetjük. Elég sok szén-dioxidot felszabadítva a szódavízből, óvatosan nyomjuk ki a víz egy részét a kicsit meglazított dugó mellett. Elég nagy nyomással még mindig szinte az összes szén-dioxidot el tudjuk nyeletni a kevesebb vízzel is. A gázok folyadékokban való oldódását idegen szóval *abszorpciónak* nevezzük. (A *szorpció* szó elnyelést jelent, ellentette a *deszorpció*.) Az abszorpcióra *Henry törvénye* érvényes: az oldott gáz mennyisége (egyensúlyban) arányos a nyomással. A magyarázat egyszerű: adott hőmérsékleten az időegység alatt a folyadékfelületbe ütköző gázmolekulák száma arányos a nyomással, ezek lépnek be a folyadékba. A folyadékból kifelé haladó, a felületen átlépő gázmolekulák száma pedig a oldatbeli koncentrációval arányos. Egyensúlyban a kettőnek meg kell egyeznie. Ez a törvény mégis csak közelítés, akkor érvényes, ha a gázmolekulák nem reagálnak a folyadékkal. Ha van kémiai reakció a folyadék és a gáz között, akkor rendszerint nagyon nagy az oldhatóság, tehát Henry törvénye általában akkor érvényes, ha nem túl nagy az oldhatóság. A legtöbb folyadékra és gázra szokásos nyomásokon jó közelítés. A gázok oldhatósága folyadékban függ a hőmérséklettől is, a hőmérséklet növekedésével általában erősen csökken. Egyébként egyéb anyagok oldása is csökkenti a gázok oldhatóságát: megszóva a szódavizet, felpezseg. □

2.3.8. Kísérlet. A butámmal végzett kísérletnél észrevettük, hogy erősen lehűlt a fecskendő, mikor belespicceltük a „gázt”. A párolgás lehüléssel jár. Ezért szoktuk megfűjni a forró levest: gyorsítjuk a párolgást, és ezzel a lehülést. A párolgáskor a leggyorsabban mozgó molekulák hagyják el a folyadékot, ha a felszínen éppen kifelé mozognak. A visszamaradó molekulák átlagsebessége kisebb lesz, így a folyadék lehül. Tévedés lenne azonban azt hinni, hogy a gőzben lévő molekulák átlagsebessége nagyobb lesz: gyorsabb mozgásuk többletenergija arra használódik el, hogy elszakadjanak a folyadéktól, tulajdonképpen hogy legyőzzék a felületi feszültséget. Mennyi hő kell a párolgáshoz, például víznél? Ha felmelegítjük a vizet a forráspontra, elforraljuk, kiterjesztjük a gőzt, és lehűtjük, ugyanott vagyunk, mintha elpárologtatjuk a vizet. Mivel minden °C melegítéshez grammonként $\approx 4,2$ J kell, aminek a felét visszkapjuk a gőz lehütésekor, a párolgáshő 1 g-ra 100 °C alatt fokként 2,1 J-lal nagyobb a forráshőnél. A párolgáshőt kimutathatjuk, ha például vizes vattát tekerünk egy hőmérő gömbje köré és egy befőttes gumival odafogatjuk. A hőmérőt kössük egy madzagra, és kb. 1 percig forgassuk, majd olvassuk le. A forgatás célja, hogy élénk levegőáramlás legyen a hőmérő körül. Vegyük le a vizes

vattát, hagyjuk vagy 10 percig így a hőmérőt, és újra olvassuk le a hőmérsékletet. Én a forgatás után $16,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot mértem, később $22,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot. (A kísérlet nem mindig sikerül, lásd egy kicsit később.) Még nagyobb különbséget kaphatunk denaturált szesszel (ez mindig sikerül). A borszesznek ugyan kisebb a párolgáshője, mint a víznek, de alacsonyabb a forráspontja, így gyorsabban párolog. Bután „gázzal” a különbség drasztikus: pillanatok alatt akár $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal is csökkenhet a hőmérséklet. \square

2.3.9. Kísérlet. Még nagyobb hőmérsékletesést kaphatunk egy szén-dioxid patronnal. Tegyük be a mélyhűtőbe egy szűrőszerszámmal, egy konyhai kesztyűvel és egy vászondarabbal együtt. Egy nap múlva vegyük ki, a kesztyűvel fogva a vászondarabból formáljunk a patronra kis zsákot, majd ezen keresztül szűrjük ki a patronnt. A kiáramló folyékony szén-dioxid olyan gyorsan párolog, hogy egy része megfagy. Ez a szilárd szén-dioxid a „szárazjég”, $-78,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os. A 2.3.4. fényképeken az így készült szárazjeget láthatjuk fél percenként fényképezve. (A patron külsején a levegőből kifagyott vízpára van.) Figyeljük meg, hogy a szárazjég nem olvad el, hanem megolvadás nélkül elpárolog: innen a neve. Ez a jelenség a szublimálás. Az magyarázza, hogy a szárazjég gőznyomása jóval előbb eléri az 1 atm-át, mint ahogy megolvadna. Az olvadáspontja $-56,4\text{ }^{\circ}\text{C}$, itt a gőznyomása már $5,13\text{ atm}$. Fa hengerben fa dugattyúval szokták összepréselni és így hozzák forgalomba. Így 20 g akár három-négy óráig is megmarad. Hűtő hatása még erősebb, ha olyan folyadékkal keverjük össze, amely nem fagy meg, például szesszel. Még erősebb lesz a hűtő hatás, ha csökkentjük a nyomást: Faraday így ért el először $-100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot. Egyébként a levegőből a vízgőznek a patron külsejére való kifagyása a szublimálás ellentéte.

Hogy van ez? Amikor arról volt szó, hogy a gázok táguláskor lehűlnek, a szén-dioxidot hoztuk fel példának, most meg azt állítottuk, hogy a lehülést a folyékony szén-dioxid párolgása okozza. Valójában mindkét jelenség szerepet játszik. Most jól lehűtöttük a patronnt, így főleg a folyadék párolgása játszott szerepet. Ha viszont a szén-dioxid kritikus hőmérséklete, $31,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ felett szűrjük ki a patronnt, biztosak lehetünk benne, hogy csak a gáz tágulásáról van szó. \square

2.3.10. Kísérlet. Ha nagyobb darab szárazjéghez jutunk, érdekes jelenséget láthatunk, ha egy vasgolyót teszünk rá. Ropogó hang hallatszik, és a golyó forgásba jön. A jelenség magyarázata, hogy a csaknem $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal melegebb jó hővezető vasgolyó alatt gyorsan szublimál a szén-dioxid. Ez adja a ropogó hangot és hozza forgásba a golyót. Hasonló jelenséget tapasztalunk, ha elég forró vaslapra ($240\text{--}350\text{ }^{\circ}\text{C}$) vizet cseppentünk: kis gömb alakú vízcseppek szaladgálnak sietve összevissza. Gőzréteg választja el őket a vaslaptól, és az egyenetlenül fejlődő gőz lökdösi ide-oda. Elég sokáig szaladgálnak, mert a gőz rossz hővezető. Alacsonyabb hőfokon szétfolynak és gyorsan elpárolognak. \square

2.3.11. Kísérlet. Más anyagok is vannak, amelyek szublimálnak. Mindenki ismeri a mondást: „eltűnt, mint a kámfor”. A kámfor is szublimál, ezért látszólag nyomtalanul eltűnik, valójában elpárolog. * A gyakran kezünkbe kerülő anyagok közül a *koffein*, a tea és a kávé hatóanyaga szublimál. Ezen az alapon könnyen ki is nyerhetjük. Egészen kis méretekben csak két mikroszkóp tárgylemezre lesz szükségünk. Ha tudjuk, az egyiket vágjuk hosszában félbe. Ezt a keskeny üvegcsikot fogjuk a bal kezünkbe és a végére

tegyünk pár tealevelet, egy összetört kávészem darabkáit, vagy egy kevés neszkávét. A másik üveglemezt fogjuk jobb kezünkbe, és a bal kezünk felőli élével támasszuk a keskeny csíkra a bal kezünkhöz közel, úgy, hogy elég kis szöveget zárjon be a kettő. Kis gyertyaláng felett, először magasabban, kezdjük az anyagot melegíteni. 5–10 másodperc után vegyük el a láng felől, és csúsztassuk fölé a felső üvegcsíkot. Kis folt jelenik meg a felső lemezen. Ha már nem nő tovább, csúsztassuk vissza a felső üvegcsíkot, és melegítsük újra 5–10 másodpercig az anyagot. Az első néhány alkalommal csak a vízgőz desztillál a felső lemezeire és el is párolog. Ha már kiszáradt az anyag, esetleg kicsit erősebben melegítve, a kis folt megmarad. (Számítsunk arra, hogy túl erős melegítéstől az üvegcsík elpattan.) Tovább ismételve a játékot, ha már úgy érezzük, nem nő tovább a folt, csúsztassuk arrébb a felső lemezt. Ha nem keletkezik újabb folt, a szublimáció befejeződött. A koffein rúd alakú kristálykái a felső lemezen csak mikroszkópban, kb. 100-szoros nagyításban látszanak. * □

2.3.12. Kísérlet. Tegyük egy lábasba valamennyi vizet, és tegyük bele az alumínium szalagból vagy függönysínból hajlított háromágú csillagot. Egy csavaros fedelű üveget töltsünk meg kb. 2/3-ig vízzel, csavarjuk rá a fedelét, majd fejjel lefelé tegyük a lábasba, és a víz alatt csavarjuk le a fedelet és vegyük ki. Kezdjük az egészet melegíteni. Az üveg az alumínium csillagon álljon, hogy a lábas forró aljától nehegy elpattanjon. Az üvegben a „levegő” elkezd tágulni, és még mielőtt a víz felforr, kezd kibuborékolni az üvegből. Hogy lehet ez, mikor az abszolút hőmérséklet legfeljebb 1/3-ával emelkedett, és a levegő még a feléig sem tölthetné meg az üveget? A víz is párolog, a vízgőz nyomása hozzáadódik a levegőéhez, az üvegben a kb. 1 bar nyomás nagyjából felét a levegő nyomása, másik felét a vízgőz nyomása adja ki. Ha forraljuk egy darabig a vizet, majd hagyjuk az egészet lehűlni, látjuk, hogy alig maradt levegő az üvegben. Ami kibuborékol, annak kezdetben a fele, később már nagy része vízgőz. □

2.3.13. Kísérlet. Végezzük el a kísérletet mérésre is alkalmas formában. Egy borosüveget dugjunk be nagyon jól záró gumidugóval, amit átfúrtunk, és például fémcső nyúlik át rajta. A fémcsőnek az üvegből kiálló végére húzzunk vagy 2–3 m-es átlátszó hajlékony PVC csövet. A cső nagy részét töltsük meg vízzel buborékmentesen. A víznek a cső két szárában egyforma magasan kell állnia, ha buborékmentes. Dugjuk be a dugóval az üveget, a csövet az üveg nyaka mellett vezessük lefele. Kötözzük ki valamihez az üveg nyakát a csővel, nehogy felboruljon, és a cső másik végét is megfelelő magasan. (Én a konyhaszekrény felső részének fogantyúin dugtam át egy csövet, és ahhoz kötöttem.) Ha az üveget bedugjuk a dugóval, a cső két szárában beáll valamilyen vízszint. Egy hosszabb injekciós tűt szúrjunk át a gumidugón. Óvatosan, lassan nyomjuk, mert könnyen elhajlik! Derékszögű vonalzóval vagy inkább fém derékszöggel mérjük meg mindkét szárban a vízszint magasságát az asztaltól. (Egyformának kell lennie.) A tűhöz csatlakoztatott fecskendőből meghatározott mennyiségű gázt nyomjunk az üvegbe. Én 20 ml öngyújtógázt használtam. A cső emelésével újra állítsuk be az üveghez közeli szárban a vízszintet az előzőre, és mérjük meg a másikban. Nekem a beállított vízszint 20 mm volt, a mért vízszint 288 mm. A nyomásnövekedés $268 \cdot 9,81 \approx 2629$ P. A légnyomás 1003,2 mbar volt. A palack térfogata 767 ml, a cső belső átmérője 4 mm, és mintegy 30 cm-ben volt levegő, így a teljes térfogat 771 ml. A gáz nyomása a palackban a levegő nélkül

$1003,1 \cdot 20/771 \approx 26,02$ mbar, azaz 2602 P lenne. Megállapíthatjuk, hogy a gázok saját *részleges nyomása* — idegen szóval *parciális nyomása* összeadódik. Ez *Dalton törvénye*. Mivel az általános gáztörvény nem pontos, ez is csak közelítő jellegű. A kísérletet könnyen megismételhetjük más gázokkal, illetve más mennyiségekkel is: a fecskendő kivesszük, esetleg más méretre cseréljük, és más gázzal, például szén-dioxiddal, habpatronban lévő gázzal töltjük meg egy műanyag zacskóból, amelyet úgy töltünk meg a gázzal, mint a széndioxid sűrűségének mérésekor tettük.

2.3.14. Kísérlet. Bár mérésre nem alkalmas, a kémiai szempontjából fontos az előző kísérletet megismételni gőzökkel. Dugjuk be az száraz üveget a gumidugóval, és határozzuk meg a vízszint magasságát az asztal felett mindkét szárban (most nem egyforma). Egy kis, mondjuk 1 ml-es fecskendőbe szívjunk fel néhány tized ml gyógyszerári benzint. A tűt szúrjuk át a gumidugón, és lassan csepegtessük a benzint a palack aljára. Állítsuk be az üveghez közeli szárban a vízszintet az előző magasságra, és olvassuk le az új szintkülönbséget. Húzzuk ki a tűt, és egy másik fecskendőből csepegtessünk vizet a palack oldalára, megdöntve a palackot és lassan forgatva. Újra mérjük meg a nyomásnövekedést: az nagyobb lett. Érthető, a palackban most már benzingőz mellett vízgőz is van. Csak tájékoztatásul: nekem a kezdeti 10 v.o.mm túlnyomás a benzintől 133 v.o.mm-re nőtt, majd a víztől tovább nőtt 263 v.o.mm-re. A kísérlet azért nem alkalmas mérésre, mert a benzin összetétele változó, és mindig tartalmaz a levegő valamennyi vízpárát. Ráadásul a párolgás lehűléssel is jár.

Ismételjük meg a kísérletet, de most denaturált szeszszel és vízzel. A kezdeti 15 v.o.mm túlnyomás a denaturált szesztől 151 v.o.mm-re nőtt. A víz beadásakor tovább emelkedett, de hamarosan elkezdett csökkenni, és 98 v.o.mm-nél állapodott meg. Mi magyarázza ezt? A víz és a benzin nem keverednek. Ha egy vízmolekula a benzinfelülethez ütközik, visszapattan. Hasonlóan, ha egy benzinmolekula vízfelülethez ütközik, visszapattan. A víz és a benzin gőznyomása egymástól független. Nem így a szesz és a víz: ezek keverednek. Kezdetben a palack oldalán lévő vízcseppekből elpárolgó víz megnöveli a nyomást. Azonban a szeszecseppekhez ütköző vízmolekulák belépnek a cseppbe, és felhígítják azt. Ebből már ritkábban lépnek ki szesz-molekulák. Hasonlóan, a vízcseppekhez ütköző szesz-molekulák belépnek a cseppbe, és az ilyen cseppből már ritkábban lépnek ki vízmolekulák. Végül az összes cseppben a szesz és a víz koncentrációja egyenlő lesz. Egy ilyen cseppből vegyesen lépnek ki víz- és szesz-molekulák, gőznyomása nagyobb, mint a vízé, de kisebb, mint a denaturált szeszé. □

Mi történik, ha vizet és benzint együtt desztillálunk? NE PRÓBÁLJUK KI! A kettőnek a gőznyomása összeadódik, így a keverék gőznyomása mindkettőnél hamarabb eléri a külső légnyomást. Mindkettő párolog, és a lecsapódott gőz szétválik vízre és benzinre. A benzint ugyan nincs értelme így desztillálni, mert magában is kiválóan desztillálható, de az elvet felhasználják *illóolajok* lepárlására, például a rózsa, levendula olajának és más illatos olajoknak a kinyerésére. Ezek az olajok olyan magas hőfokon forrnak, hogy ott már el is bomlanak, így egyszerű lepárlással nem nyerhetők ki. A vízzel nem keverednek, így ha (rendszerint külön fejlesztett) vízgőzt vezetünk egy tartályban lévő rózsaszirmokhoz, a rózsaoilaj gőznyomása hozzáadódik a víz gőznyomásához, így az is párolog: innen az illóolaj elnevezés. A gőzöket lecsapatva az illóolaj elválik a víztől. Ez az eljárás a

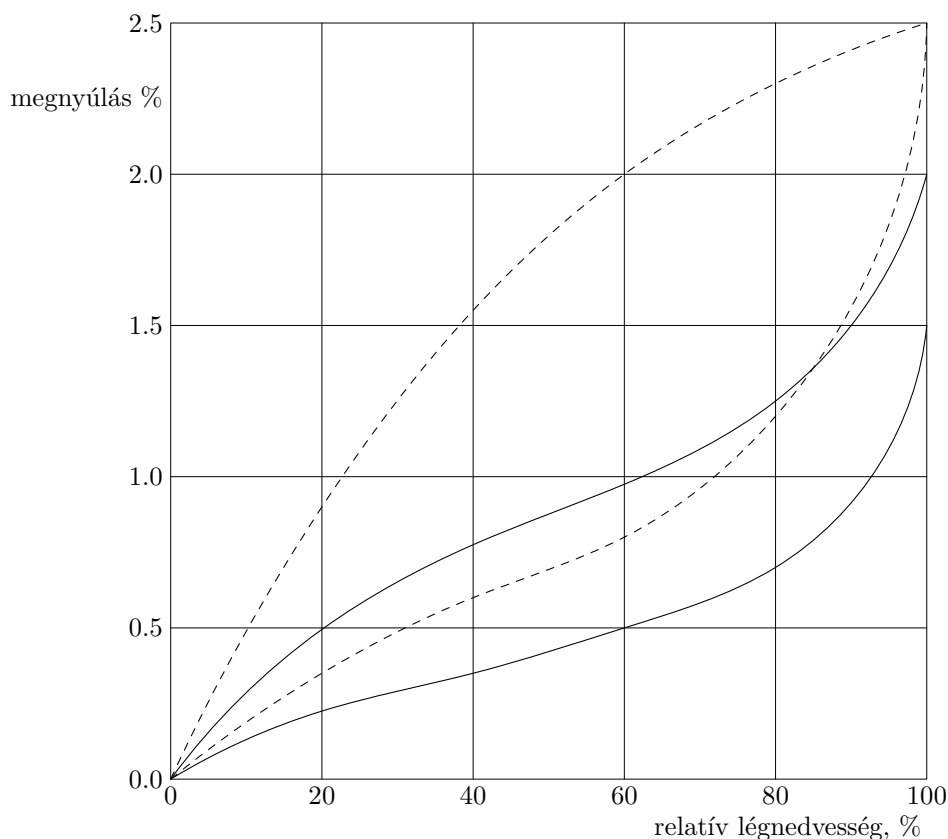
vízgőzdesztillálás.

2.3.15. Kísérlet. Egy lehetőleg fekete kólásdoboznak vágjuk le a tetejét. Tegyük bele felég-harmadáig vizet, egy hőmérőt, amivel előzőleg megmértük a levegő hőmérsékletét, egy jégkockát, és kezdjük el kavargatni. Figyeljük a külsejét, hogy mikor lesz párás. Ezért jó, ha fekete a külseje, mert azon hamarabb meglátszik a pára. Amikor bepárasodik, olvassuk le a hőmérőn a hőmérsékletet. Ez a *harmatpont*. Nekem 28,2 °C-nál a harmatpont 19,1 °C volt. A magyarázat az, hogy a levegő általában nem teljesen telített vízgőzre, kivéve ha minden úszik a vízben. Alacsonyabb hőmérsékleten kisebb a víz gőznyomása. Azon a hőmérsékleten, amin a levegő telített lesz vízgőzre, tehát amikor a víz parciális nyomása (ami a hűtéssel nem változik) egyenlővé válik a víz gőznyomásával az adott hőmérsékleten, akkor kezd kiválni a pára „harmatként”. Az én kísérletemben a harmatpont 19,1 °C volt. Ezen a hőmérsékleten a víz gőznyomása 2209 Pa. A levegő hőmérséklete 28,2 °C volt. Ennél a víz gőznyomása 3824 Pa. Tehát a páratartalom a maximálisnak csak $2209/3824 \approx 0,5778$ -ed része, azaz nagyjából 58%-a. Ez a *relatív páratartalom*. Legtöbbször a relatív tartalmat adják meg.

Most meg tudjuk magyarázni, a vizes vattás hőmérő forgatásánál miért mondtuk, hogy a hőmérő rendszerint lehül: mert 100%-os relatív nedvességtartalomnál nincs párolgás, nincs lehülés, de ez ritka. Szesztes vattánál biztos a lehülés: 100%-os relatív szesztartalom nem szokott lenni a levegőben. □

2.3.16. Kísérlet. Közvetlenül a relatív páratartalmat is lehet mérni. Növényi és állati anyagok nedvesség hatására változnak. Például a fenyőtoboz szárazon kinyílik, nedvesen összecukódik. Gyapjú, viszkóz műselyem (például celofán), selyem, de mindegyik az emberi haj 1,5–2,5 százalékkal megnyúlik, a relatív páratartalomtól függően. A megnyúlás sajnos nem egyenletes, a 2.3.5. ábra mutatja a relatív megnyúlást a relatív páratartalom függvényében. Az anyagok felülről lefele a bal oldalon emberi hajszál, gyapjú, műselyem és nyerselyem. A mi műszerünk fő alkatrésze egy lesz. Készítsünk például rézdrótból egy könnyű mutatót. Egyik végére „szemet” csavarunk vagy kilapítjuk és átfúrjuk. Ebbe jön egy gombostű, ez a forgástengely. Nem messze van egy másik „szem” vagy lyuk, ezen fűzzük át a hajszálat. A végét az előző lapításra merőlegesen lapítjuk ki. Az állvány műanyag (nem fa, mert az is nyúlik). A fentre erősített hajszálat a mutató súlya feszíti ki. A végleges összeállítás előtt a hajszálat gyógyszerári benziben (tűzveszélyes, szabadban!) többször átmosva zsírtalanítjuk. Az egészet a 2.3.6. fénykép mutatja. A beosztás egyik alappontja a 100 %-os relatív páratartalom: egy nagy doboz oldalára nedves kendőket teszünk, beletesszük a műszert, és egy óráig a lefedett dobozban hagyjuk. A skála többi pontját sók tömény vizes oldatai feletti relatív páratartalom alapján jelölhetjük ki. Elég a sót kevés vízzel jól összekeverni, és ezt a keveréket tenni a lefedett doboz aljára. 25 °C-on kálissóval 85, konyhasóval 75, ammónsalétrommal 60, kristályos kalcium-kloriddal 29 %-os relatív páratartalmat kapunk. Az utóbbinak az előállítását lásd a kémia részben. A harmatpont alapján is kijelölhetünk skálapontokat. □

2.3.17. Kísérlet. Nagyon egyszerű eszközökkel egy nagyon fontos kísérletet fogunk elvégezni. Csak egy jó erősen nagyító lupéra van szükségünk. Fogjunk egy jól zárható kis üveget, vagy még jobb, egy kis téglatest alakú műanyag dobozt, és leheljünk bele. Pára



2.3.5. ábra: anyagok megnyúlása nedvesség hatására

csapódik le a belső felületen. Zárjuk be, világítsuk meg oldalról erősen zseblámpával, és figyeljük a nagyítóval a parányi cseppeket. Kezdetben valószínűleg nem is látjuk őket, olyan kicsik. Pár perc alatt egyes cseppek megnőnek, a pára nagy része pedig eltűnik, különösen a nagyobb cseppek közelében. Valóságos „udvar” alakul ki a nagyobb cseppek körül. Ez a folyamat egyre lassabban, de tovább folytatódik, a kis cseppek elpárolognak, a gőz a nagy cseppekre csapódik le. A folyamat a 2.3.7. fényképsorozaton is megfigyelhető, de egy tízszeres nagyítású jó lupéval még jobban látható.

Mi is történik itt? Emlékezzünk vissza a vízmolekulák méretét meghatározó gondolat-kísérletünkre, amelyben egy 1 cm^3 -es vízkockát vágunk szét $\approx 0,2 \text{ nm}$ -es vízmolekulákra. Ha csak minden tizedik vágást csináljuk meg, akkor 1000 vízmolekulából álló kis kockákat kapunk, és a munka tizedrészét végezzük el. Ezek a kockák 10 %-kal kevesebb munkával párologtathatók el, tehát gőznyomásuk 10 %-kal nagyobb, mint a nagy kockáé. Ha csak minden századik vágást végezzük el, akkor 1 000 000 vízmolekulából álló kockákat kapunk, amelyek gőznyomása 1 %-kal nagyobb, mint a nagy kockáé. Végül ha ezerszer kevesebb vágást végzünk, akkor az 1 000 000 000 vízmolekulából álló kocka gőznyomása

még mindig 1‰-kel nagyobb, mint egy nagy kockáé. Persze, nem kell, hogy kockák legyenek, ugyanez a helyzet kicsi cseppeknél. Az 1 000 000 000 000 vízmolekulából álló csepp mérete már 2–3 μm , mikroszkópban már jól látható, és még mindig 1‰-kal jobban párolog, mint egy nagy vízcsepp.

Ez egyúttal megmagyarázza azt is, miért húznak a repülőgépek néha „kondenzcsíkot” a levegőben. Hiába tútelített már a levegő vízgőzre, ha nagyon tiszta, nem tud megindulni a vízcseppek kiválása, mert a nagyon kicsi, mondjuk 1000 molekulából álló cseppek gőznyomása jóval nagyobb. Ha ilyen levegőbe szilárd szennyeződések (például koromrészecskék) kerülnek, azokon válnak ki — idegen szóval kondenzálódnak — a vízmolekulák, és a képződő kis cseppek már könnyen tovább híznak. Az így keletkező kondenzcsík nem mindig marad meg: ha a tútelítettséget csak az üzemanyag égésekor keletkező víz okozta, a cseppek gyorsan el is párolognak. (Az anyag szilárd és cseppfolyós állapotát egy szóval szokás *kondenzált állapot*nak is nevezni.)

Nyáron a párás, meleg — ezért könnyebb — levegő felszáll, mivel fenn kisebb a nyomás, kitér és lehül. Tútelítetté válik, és egy bizonyos hőmérséklet alatt megindul a vízcseppek kiválása, felhő képződik. Ez a határ jól látható, a felhő alja vízszintes. A lefelé hulló vízcseppek a tútelített rétegben kövérré híznak, záporosó képződik. A kicsapódó víz visszadott párolgáshője melegíti a levegőt, a sűrűségkülönbség még nagyobb lesz, a feláramlás erősödik. Így jön létre a zivatar. Ha a levegő fagypontra alá hűl, jégkristályoknak kellene kiválnia, de itt is az a helyzet, mint a kis vízcseppeknél: a piciny jégkristályok gőznyomása magasabb, mint a nagyoké, a levegő tútelítetté válik. Ha végül magasabban, erősebb tútelítésnél megindul a jégkristályok kiválása, a lefelé hulló jégkristályok a tútelített rétegben kövérré híznak, jégeső képződik. Télen az ilyesmi ritka, a levegő a föld közelében nem melegszik fel annyira és kevesebb vízpárát tartalmaz. A tútelítés nem lesz annyira erős, a növekedés lassúbb, szép hópelyhek képződnek.

Egyébként a víz is túlűthető néhány fokkal, ha nagyon tiszta és rázkódásmentesen hűtjük. Egy apró jégkristály hatására azonban azonnal megindul a fagyás. Olvadáskor viszont nem tapasztaltak „túlmelegedést”. \square

2.3.18. Kísérlet. Most meg tudjuk magyarázni a „vízforralós” kísérletünk néhány jelenségét is. Tiszta vízben egy piciny buborék egy „negatív csepp” belsejében kisebb — amíg nagyon kicsi, jóval kisebb — a gőznyomás, mint egy nagy buborékban. Így nagyobb hőmérséklet kell, hogy elérje a külső nyomást. Amíg van levegő a vízben, a kiváló levegőbuborékokba könnyen „belepárolog” a vízgőz, de ha elfogy a levegő, akkor inkább csak szilárd anyagok kis darabjain, az üvegfal apró kis egyenetlenségein képződnek a gőzbuborékok. Ha ilyenek nincsenek, akkor a víz jelentősen túlmelegedhet, és ha végül létrejön egy kis buborék, az nagyon gyorsan megnő, a folyadék „lökdösve” forr. Ezt elkerülhetjük, ha lukacsos, állandóan apró buborékokat leadó tégladarabkát vagy mázatlan porceláncserépet teszünk a folyadékba. Különösen könnyen túlhevül a víz a mikrohullámú sütőben, ha nem is mozog. Amikor megmozdítjuk, vagy pláne beletesszük a kávé vagy teát, kifut. \square

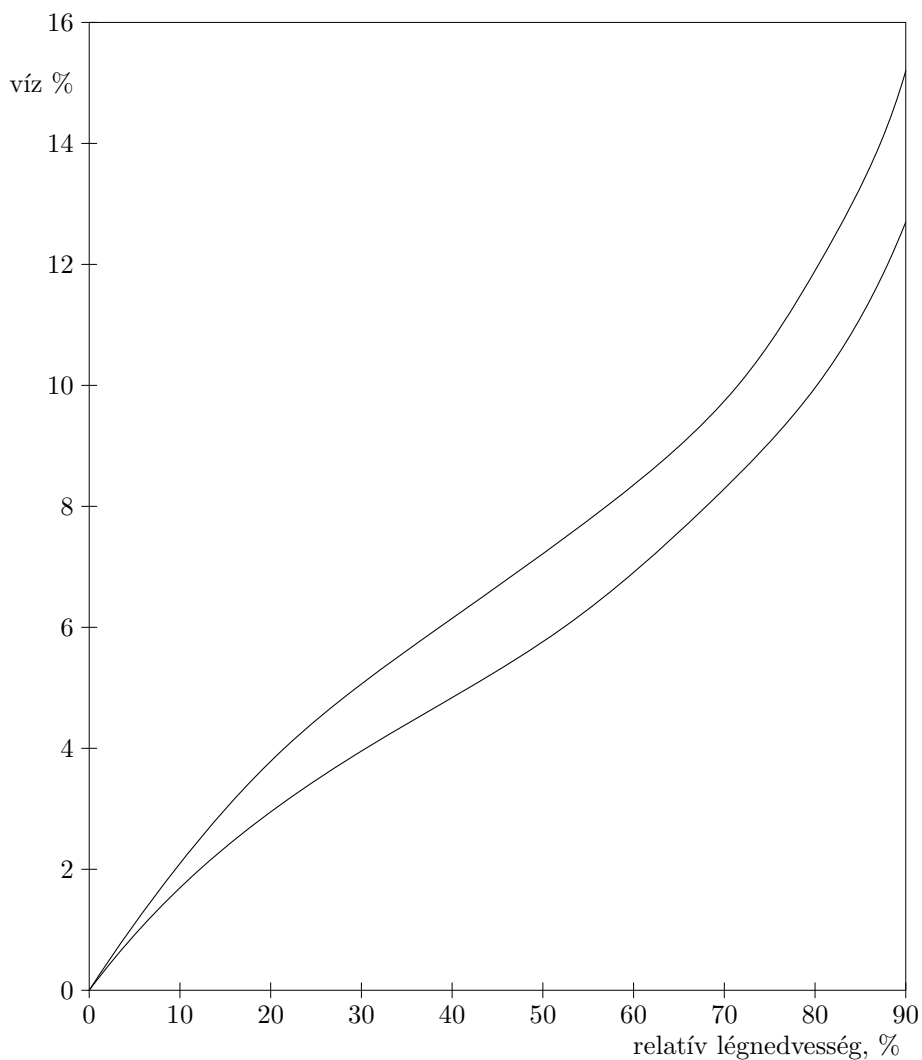
2.3.19. Kísérlet. Meg tudnánk-e mérni a vízpára cseppjeinek átmérőjét? Igen, elég egyszerűen. Belelehelve egy kis téglatest alakú átlátszó kis műanyagdobozba és lezárva, gyorsan nézzünk rajta keresztül sötétben pontszerű fényforrás (mondjuk egy zseblámpa)

felé. Elég nagy átmérőjű színes kört látunk, a külseje vöröses, a belseje kékes. A jelenség annak megfelelő, mint mikor párás levegőben a Hold körül vagy az utcai lámpák körül fényudvart látunk. A kör átmérője gyorsan lecsökken, a színek is kifakulnak, ahogy a cseppek növekednek, és átmérőjük már nem egyforma. A kísérletet mérésre is alkalmas formában úgy végezhetjük el, hogy sötétben lézermutatóval átvilágítjuk a párás dobozkat. Fehér lapra világítva egy fényes pont körül szórt fényű gyűrűt látunk. Ahogy a cseppek növekednek, a gyűrű átmérője gyorsan csökken. Ezt mutatja a 2.3.8. fényképsorozat. Az elméleti számítások szerint a fényes gyűrű átmérőjének és távolságának a hányadosa $\approx 0,82$ -ször a fény hullámhosszának és a cseppek átmérőjének hányadosa. Mivel 120 cm-ről vetítve a gyűrű átmérője (az első képen) 20 cm volt, a hullámhossznak $\approx 6 \cdot 0,82 = 4,92$ -szerese a cseppek átmérője. A lézerre rá van írva a fényének hullámhossza: 650 nm (vörös lézer). Innen a vízcseppek átmérője kezdetben $\approx 3,2 \mu\text{m}$. A fehér fényű zseblámpával azért látszanak színes körök, mert a fehér fény különböző tiszta színű fények keveréke: vörös, narancs, sárga, zöld, kék és ibolya, a szivárvány színei. Ezek hullámhossza ebben a sorrendben csökken, így egyre kevésbé térülnek el. A jelenség okaira és alkalmazásaira az optikában visszatérünk. \square

2.3.20. Kísérlet. Azt, hogy a vízgőzzel telített kitáguló gáz lehül és túltelítetté válik a vízre, mindenki tapasztalta már. Ha kinyitunk egy szénsavas italt tartalmazó palackot, a kivált szén-dioxid egy része távozik, a maradék lehül és köd gomolyog, a vízgőzből keletkező vízcseppek. \square

2.3.21. Kísérlet. Jó lenne olyan közvetlen kísérlet, ami kimutatja a kondenzációs magvak szerepét. Egy átlátszó borosüvegbe öntsünk némi vizet, és rázzuk meg az üveget, hogy az oldala is nedves legyen. Az üvegben lévő levegő hamar telítődik vízgőzzel. Alljunk egy tükör elé és jó erősen szívjuk meg az üveget. Esetleg gyenge ködképződést vehetünk észre. Ha egy jó erős porszívóval szívjuk a levegőt az üvegből, gyenge köd gomolyog benne. Engedjük meggyújtott, lassan parázsló cigaretta füstjét az üvegbe. Ha most szívjuk meg, határozottan köd képződik. Porszívóval elég erős ködöt tudunk létrehozni. A cigarettafüst tele van finom koromrészecskékkel. \square

2.3.22. Adszorbción. Mit tehetünk, ha levegőből meg akarjuk kötni a vízgőzt? Ezt megtehetjük például 150 °C-on jól kiszáritott (és jól záró üvegben tárolt) vattával. Mi a száraz vatta „működésének” magyarázata? Általában megfigyelhető, hogy nagy felületű anyagok, amilyen a vatta anyaga, a gyapot is, a felületükön gázokat, gőzöket, oldott anyagokat kötnék meg. Ennek az oka általában az adhézió, ezért *adszorbciónak* nevezük. Tulajdonképpen nem csak nagy felületű anyagoknál történik ez meg, de csak ott válik jelentőssé, mert ezeknél a felület több száz négyzetméter is lehet grammonként. Az anyag általában egy vagy néhány atom vastagságú rétegben kötődik meg a felületen. A megkötésben az adhézió mellett kémiai erők vagy elektromos vonzás is szerepet játszhat. Ha kémiai erők játszódnak a főszerepet, akkor *kemisorpción*ról beszélünk. Az is szerepet játszhat, hogy a finom lyukak, hajszálcsövek belsejének felületén megkötött gőz mintegy buborékot, „negatív cseppet” képez. Ebben a gőznyomás kisebb, esetleg jóval kisebb, mint a folyadék normál gőznyomása, így a gőz lecsapódik, a hajszálcső megtelik folyadékkal. Ez az úgynevezett *kapillárkondenzáció*. Általában minél közelebb van egy gáz a cseppfolyósodáshoz, annál több kötődik meg belőle.



2.3.9. ábra: víz adszorbcíója gyapoton 20 °C-on

Az 2.3.9. ábra a víz adszorbcíóját ábrázolja gyapoton. Hasonló anyagoknál hasonló ábrát kapunk, például papír esetén, de a rongyból készült, jóminőségű papír 1,2–1,3-szor, a fából készült, rossz minőségű papír, például újságpapír $\approx 1,7$ -szer több vizet köt meg. Más megkötő anyag — *adszorbens* — vagy megkötött anyag — *adszorbátum* — esetén más jellegű görbét is kaphatunk. Itt természetesen a relatív páratartalom helyén a gáz vagy gőz vagy az oldott anyag koncentrációja (például g/l-ben) szerepel a vízszintes tengelyen. Például ha az adhézió a fő ok, akkor a görbe hasonlóan kezdődik, de vízszintesbe hajlik, az anyag telítődik, stb. Miért van két görbe? Tulajdonképpen nagyon

hosszú idő, napok alatt általában egyensúly áll be, de mivel a finom lyukakban a diffúzió nagyon lassú, az adszorbciónál ezért rövid idő alatt adott koncentrációnál kevesebb anyag kötődik meg, deszorbciónál viszont fordítva, több anyag marad megkötve, mint egyensúly esetén.

2.3.23. Kísérlet. Biztosan vannak, akik észrevették, hogy az ebben a fejezetben tanultak szerint a Galilei-hőmérő még akkor sem pontos, ha a légnyomás változását figyelembe vesszük: mivel a zárófolyadék víz, a belsejében lévő levegő vízgőzzel telített, és a vízgőztartalma a hőmérséklettel változik. Szerencsére ezen könnyen segíthetünk: használjunk zárófolyadéknak valamilyen, észrevehető mértékben nem párologó folyadékot. A legegyszerűbb az étolaj lenne, de sajnos könnyen avasodik, ezért jobb, ha gyógyszerárban kapható paraffinolajat használunk. □

2.4. Gőzgépek, gázgépek, örökmozgók

Már volt szó Papin gőzgépéről. Úgy, mint a mi kísérletünkben is, ha egy edényben, ami dugattyúval van elzárva, vizet forralunk, a víz lecsapódásakor létrejövő (majdnem) légüres tér munkát képes végezni. A hő munkává alakított része azonban az ott kiszámoltnál is jóval kisebb, mert nagy része az edény melegítésére fordítódik. Ezen kívül a gép igen lassan is működik, mert mindig meg kell várnunk, amíg a gőz lecsapódik. Az első, aki ezeket a problémákat megoldotta, és az első használható gőzgépeket készítette a XVIII. század elején, Newcomen volt. A vizet külön kazánban forralta, a gőzt onnan vezette a hengerbe. Amikor a gőz a dugattyút hátranyomta, hideg vizet fecskendezett a hengerbe, így a gőz hirtelen lecsapódott. Persze, a gőz nagy része még így is kárbavesztett, mert a lehűlt hengert melegítette. Lényegesen jobb, nagyobb *hatásfokú* gőzgépeket Watt készített. Mit is értünk itt hatásfokon? Azt, hogy a kazánba hő formájában bevitt energia hagyad része alakul át hasznos munkává. Watt nagyobb nyomású gőzt használt, és azt felváltva vezette a dugattyú két oldalára. A másik oldalról kitóduló „fáradt” gőzt hideg vízbe, „kondenzátorba” vezette, így a gőz lecsapódott, növelve a nyomáskülönbséget, de a henger nem hűlt le. Ezek a gőzgépek indították el az ipari forradalmat: már nem kellett patakok mellé építeni a meghajtást igénylő gépeket. A dugattyús gőzgépek hatásfoka a javításokkal együtt sem éri el a 25 %-ot.

2.4.1. Kísérlet. Egyébként modell szinten már akkor is léteztek gőzturbinák. Ma már szinte csak gőzturbinákat használunk, nem dugattyús gépeket. Magunk is készíthetünk gőzturbina-modellt. Egy felbontatlan kólás doboz aljába fúrjunk egy 1 mm-es lyukat, vagy egyszerűen üssünk bele egy vékony szeget. Engedjük ki a kólát a lyukon. Ha már nem jön több, a dobozt tartjuk forró víz alá: felmelegszik, és további folyadék folyik ki. Hűtsük le: levegő vagy víz áramlik be, attól függően, hogy hogy tartjuk. Ezt használva mossuk ki, majd szívassunk bele valamennyi vizet és tegyük fel a tűzhelyre vagy melegítsük gyertyalánggal. A víz felforr, és gőz áramlik ki. Figyeljük meg, hogy a kiáramló gőz láthatatlan. Ha légturbina modellünket a gőzsugár útjába tartjuk, forogni kezd. Az erőművekben működő gőzturbinák 40 % feletti hatásfokot érnek el. □

* Vajon meddig lehet a hatásfokot javítani? Talán tudnánk 100 % hatásfokú gőzgépet vagy más hasonló gépet készíteni? Akkor például a tengervíz hőjét vezetnénk bele, és a tenger egy kicsit lehülne, mi viszont nagyon sok munkát kapnánk. Ez gyakorlatilag egy örökmozgó lenne, egy „másodfajú örökmozgó”, amely az energiamegmaradás tételének nem mondana ellent. Óvatosságra inthet bennünket az, hogy soha nem látunk olyan folyamatot, amiben valami önként lehül, és hőjének egy része mozgási energiává alakul. Például ha egy pingponglabda pattog, végül megáll, a padló és a labda kicsit felmelegszik. Olyat azonban nem látunk, hogy a labda felpattan, miközben a padló és a labda kicsit lehül. Ehhez a padló illetve a labda molekulái rendezetlen mozgásának kellene rendezett mozgássá átalakulni. Ilyet azonban nem tapasztalunk. *Nincs olyan folyamat, aminek a végén semmilyen más változás nincs, csak a hőenergia egy része kerül át hidegebb testről melegebb testre.* Ez a hőtan második főtétele. Ebből már következik, hogy nem lehet másodfajú örökmozgót készíteni, ugyanis vele (például dörzsöléssel) egy akármilyen meleg testet még melegebbé tehetnénk. Megmutatjuk, hogy a másodfajú örökmozgó lehetetlenségéből következik a második főtétel, és az is, hogy ha egy hő munkává alakító gép, egy hőerőgép körfolyamatban valamilyen T_1 abszolút hőmérsékleten („kazánban”) felvesz Q_1 hőmennyiséget, és egy $0 < T_2 < T_1$ hőmérsékleten („kondenzátorban”) lead Q_2 hőmennyiséget, akkor $Q_2/T_2 \geq Q_1/T_1$, azaz a kinyert $Q_1 - Q_2$ munka és a bevitt Q_1 hő hányadosa, a hatásfok legfeljebb $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$, mert $(Q_1 - Q_2)/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1 \leq 1 - T_2/T_1 = \eta$. *

A bizonyításhoz egy gondolat kísérletet fogunk végezni. A gondolat kísérlet felhasznál egy szerkezetet, a regenerátort. Képzeljük el, hogy gázzal fűtünk egy kemencét. A füstgázokat vezessük felülről két kavicsal lazán telerakott, álló hengerbe. A füst felmelegíti a kavicsot, felül jobban, alul kevésbé. Mikor már elég meleg, vezessük alulról a gázt az egyik, a levegőt a másik hengerbe. Az így előmelegített gázzal és levegővel tápláljuk a lángot. Nyilván forróbb lesz, mint az előmelegítés nélkül. A füstgázokkal két másik regenerátort fűtünk. Amikor az első két regenerátor már valamennyire lehült, megcseréljük a két regenerátorpár szerepét, stb. Ezt a regeneratív tüzelést Siemens találta fel, és üveglvasztó kemence fűtésére használta, de így működnek az acélolvasztó Siemens–Martin-kemencék is.

** Gondolat kísérletünkben egy gázzal működő hőerőgépet tervezünk. A gép két dugattyús hengerből és egy, a csövéket összekötő regenerátorból áll. A regenerátor egy jól hőszigetelt cső rossz hővezető anyagból, rossz hővezető, lyukacsos, nagy tömegű szilárd anyaggal töltve, amelynek az egyik vége (majdnem) T_1 hőmérsékletű, a másik pedig (majdnem) $T_2 < T_1$ hőmérsékletű, közben egyenletesen csökkenő hőmérséklettel. Kezdetben az egyik hengerben T_1 hőmérsékletű, p_1 nyomású, „ideális” gáz van. Az ideálisba most nem csak azt értjük bele, hogy eleget tesz az egyesített gáztörvénynek, hanem azt is, hogy a fajhője nem függ a hőmérséklettől és a nyomástól. Az úgynevezett nemes gázok, például a hélium, nagyon jól megközelítik ezt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a készülék körül légüres tér van. Ez nem lényeges, de egyszerűsíti a számolásokat.

Legyen a kezdeti térfogat $V_{1,1}$. Lassan terjesszük ki a gázt $p_2 < p_1$ nyomásra állandó T_1 hőmérsékleten. Mivel a hőmérséklet állandó, a gáz belső energiája nem változik. Valamennyi munkát végez, ami megegyezik a kiterjesztés során felvett Q_1 hőenergiával. A

térfogata megnő, a kiterjesztés végén legyen $V_{1,2}$. Most állandó p_2 nyomáson nyomjuk át a regenerátoron a másik hengerbe. A gáz a regenerátortól lehűl. Közben a regenerátort kicsit felmelegíti, de mivel a regenerátor tömege nagy, ez nem jelentős. Az átnyomáshoz persze kell egy kis nyomáskülönbség, de ha elég lassan nyomjuk át a gázt, akkor ez jelentéktelen. Végül a másik hengerben van a teljes gázmennyiség T_2 hőmérsékleten és p_2 nyomáson. Legyen a térfogata $V_{2,2}$. Lassan nyomjuk össze állandó T_2 hőmérsékleten. Mivel a belső energia nem változik, a leadott Q_2 hőenergia megegyezik az összenyomás alatt végzett munkával. Amikor a nyomás p_1 , legyen a térfogat $V_{2,1}$. Végül lassan engedjük át a gázt a regenerátoron a másik hengerbe. Eközben felmelegszik. Visszajutunk a kezdő állapotba, tehát *körfolyamatot* végeztünk. Az egész körfolyamat során a nyomás és a térfogat változását a 2.4.1. ábra mutatja. Mivel a gáz fajhője nem függ a nyomástól és a hőmérséklettől, az utolsó lépésben éppen annyi hőt vesz fel a regenerátorból, amennyit a második lépésben leadott neki. Az utolsó lépésben a gáz által végzett munka $p_1(V_{1,1} - V_{2,1})$, a második lépésben az általunk végzett munka pedig $p_2(V_{1,2} - V_{2,2})$. (Ezek megfelelnek az ábrán a vízszintes egyenes szakaszok alatti téglalapok területének.) Mivel ideális gárról van szó, az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{p_1 \cdot V_{1,1}}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_{1,2}}{T_1} = \frac{p_1 \cdot V_{2,1}}{T_2} = \frac{p_2 \cdot V_{2,2}}{T_2} = K,$$

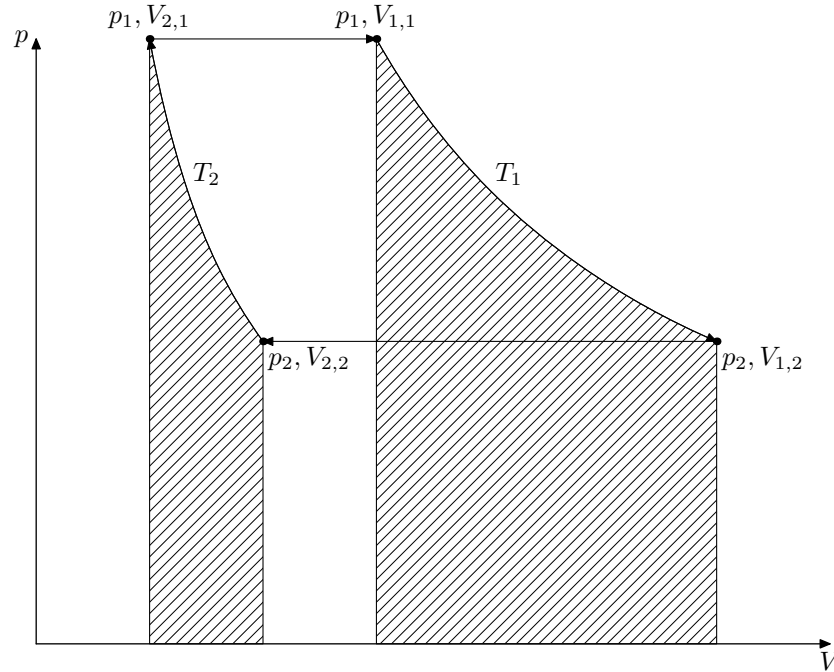
valamilyen állandó, idegen szóval *konstans*. Innen a térfogatok kifejezhetők, pl. $V_{1,1} = K \cdot T_1/p_1$, stb. Ezeket behelyettesítve, azt kapjuk, hogy a negyedik lépésben a gáz által végzett munka és a második lépésben az általunk végzett munka is $K \cdot (T_1 - T_2)$, egyenlők, tehát kiejtik egymást.

Hátra van még a Q_1 és Q_2 munkák kiszámítása. Ezt nem tudjuk könnyen megtenni, mert nem csak a térfogat, hanem a nyomás is változik. Szerencsére azért össze tudjuk hasonlítani őket. Ezek a munkák a 2.4.1. ábrán a vonalkázott területeknek felelnek meg. Miközben az első lépésben T_1 hőmérsékleten a nyomás p -ről egy tőle csak kicsit kisebb p' -re csökken, a térfogat $V = K \cdot T_1/p$ -ről $V' = K \cdot T_1/p'$ -re nő. A gáz által végzett munka közelíthető a

$$\frac{p + p'}{2} (V' - V) = \frac{p + p'}{2} K \cdot T_1 \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right)$$

szorzattal. Ez egy kis trapéz területe, amely a T_1 jelű görbe alatti terület egy részét közelíti. A harmadik lépésben teljesen hasonló adódik az általunk végzett munkára, de T_1 helyett T_2 -vel. Egyszerűen a Q_2 -nek megfelelő terület a Q_1 -nek megfelelő terület T_2/T_1 -szerese, belőle vízszintes irányban való összenomással keletkezett! Innen a hatásfok $\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - T_2/T_1$. Így azt kaptuk, hogy gépünk hatásfoka $(T_1 - T_2)/T_1$, vagy legalábbis ezt tetszőlegesen megközelítheti.

Gépünk azt is mutatja, hogy ha a második főtétel nem lenne igaz, akkor lehetne másodfajú örökmozgót csinálni: ha valamilyen folyamat alacsonyabb hőmérsékletű testről magasabb hőmérsékletűre vinne át hőt, a magasabb hőmérsékletű gépünkkel visszavinnénk a hőenergia egy részét az alacsonyabb hőmérsékletre, és közben a maradékát megkapnánk munkaként. Ezt ismételve, másodfajú örökmozgót kapnánk.



2.4.1. ábra: körfolyamat

Honnan tudjuk, hogy ennél jobb hatásfok nincs? Tegyük fel, hogy valakinek sikerül egy jobb hatásfokú gépet csinálni. Ez T_1 hőmérsékleten $Q'_1 > Q_1$ hőenergiát vesz fel és T_2 hőmérsékleten Q_2 hőenergiát ad le, miközben $Q'_1 - Q_2 > Q_1 - Q_2$ munkát végez. Működtessük a munka $Q_1 - Q_2$ részével gépünket VISSZAFELE: a 2.4.1. ábrán minden nyilat megfordítva, a lépéseket ellenkező irányba hajtjuk végre. Ekkor a gép *hűtőgépként* működik: az alacsonyabb T_2 hőmérsékleten Q_2 hőt vesz fel és a magasabb T_1 hőmérsékleten Q_1 hőt ad le, miközben $Q_1 - Q_2$ munkát használ fel. Marad $Q'_1 - Q_1$ munka, másodfajú örökmozgót kaptunk! Ellenvetés lehet, hogy nem tudjuk pontosan megfordítani a gép működését, de az is elég, ha majdnem meg tudjuk fordítani: ekkor (elég lassan működtetve) $Q_1 - Q_2$ -nél több, de $Q'_1 - Q_2$ -nél azért kevesebb munkát használ fel a gépünk, és még mindig örökmozgót kaptunk, ami ellentmond a hőtan második főtételének.

Ez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy *megfordíthatóan* működő gép hatásfoka pontosan $(T_1 - T_2)/T_1$ kell legyen, hiszen több nem lehet, ha pedig kevesebb lenne, akkor a két gép szerepét megcserélve kapnánk az előző gondolatmenettel örökmozgót. A nem megfordíthatóan működő gépek hatásfoka ennél kisebb. Persze, valójában megfordítható gép nincs is, csak arról van szó, hogy elég gondosan építve meg a gépet és elég lassan működtetve, a megfordíthatósághoz tetszőlegesen közel kerülhetünk. Más körfolyamatok is használhatók (közel) megfordítható gépek építéséhez. A gáz felmelegítését az alacsonyabb hőmérsékletéről a magasabbra például hőszigetelt hengerben való összenyomással is végezhetnénk. Ilyen gépet Carnot vizsgált először. A mi általunk vizsgált gép a

Stirling-motor egyik fajtájához áll közel. Azért ezt vizsgáltuk, mert itt tudtuk elvégezni a számításokat. A gyakorlatban nem használnak olyan gázgépeket, amelyekbe a hőt kívülről vezetik be. Inkább a hőt az üzemanyagnak a henger belsejében való elégetésével előállító *belsőégésű gépek* terjedtek el. **

2.4.2. Kísérlet. Hogyan működik a robbanómotor (benzinmotor)? Két szék támlájára tegyünk egy falapot, amibe lyukat fúrtunk. Szükségünk lesz egy *gázgyújtóra*: ugyanúgy működik mint egy öngyújtó, de hosszú szára van. A lyukon fogjuk alulról átdugni. A lyuk csak akkora legyen, hogy a gázgyújtó kényelmesen átférjen. Hogy a kicsapó láng meg ne pörkölje a kezünket, alumínium fóliából vágjunk egy nagy korongot, mintha szűrőpapírt vágnánk, és a sarkát is levágva a közepére készítsünk egy lyukat. Ez lesz a kézvédő: átdugjuk rajta a gázgyújtót, és védi a kezünket, mint a tör markolata. Egy 2–3 literes átlátszó műanyag veder aljára ragasszunk egy darab vattát. A vattára szemcseppentővel cseppentsünk négy csepp gyógyszerári benzint, majd borítsuk rá a deszkára. Csavarjuk rá a benzines üvegre a tetejét. Dugjuk át a lyukon a gázgyújtót egészen addig, hogy a nyele elzárja a lyukat. Várjunk türelmesen pár percet, amíg a benzin elpárolog és a gőze elkeveredik a levegővel. Húzzuk vissza a gázgyújtót, hogy a hegye a deszkánál legyen és gyújtsuk meg. Valószínűleg semmit se látunk, a gázláng nyugodtan ég. Fordítsuk meg a vedret, várjunk vagy 10 percet, amíg a benzin elpárolog, szellőztessük ki, és négy cseppel megemelve a benzinadagot, ismételjük meg a kísérletet. Ahogy emeljük a benzinadagot, azt látjuk, hogy a gázgyújtó lángja egyre nagyobb lesz a benzingőzös levegőben. Egyszer csak elérünk egy olyan benzinmennyiséget, amelynél a benzingőz-levegő keverék kisebb durranással felrobban, és a veder is felrepül. Vigyázzunk, a veder aljánál kisebb láng csap ki, **NEHOGY MEGPÖRKÖLJÖN BENNÜNKET.** Ha nagyon sok benzint teszünk a vattára, szinte eláztatjuk, akkor a gázgyújtó meg se gyullad: a benzingőzben nem ég, a benzingőz önmagában, levegő nélkül nem robban. Ha nem sikerül a kísérlet, próbálkozzunk különböző várakozási időkkel és cseppszámokkal. Szinte lehetetlen pontos leírást adni, mert különböző forráspontú benzinek vannak, és a hőmérséklettől függ, hogy milyen gyorsan párolognak. Én nyári melegben dolgoztam, 2 3/4 literes vedrevel. Három percet vártam. Az első robbanást 12 csepp benzinnél kaptam; 16, majd 20 csepp benzinnél a robbanás erősebb lett. Végül 24 és 28 cseppnél gyengült, 32 cseppnél pedig már nem gyulladt meg a gyújtó. Azt nem árt tudni, hogy a benzingőz nehezebb a levegőnél, így a deszka közelében gyűlik össze.

A kísérlet mutatja a benzinmotorok elvét: a robbanómotor a dugattyús hengerébe benzingőz-levegő keveréket szív be, azt összesűríti, és elektromos szikra gyújtja meg a keveréket. A robbanás nagy erővel löki meg a dugattyút, ez hajtja az autót. A benzin gyors elpárolgását Bánki Donáth és Csonka János magyar gépészmérnökök találmánya biztosítja, a *porlasztó*. Úgy működik, mint egy parfümszóró: a levegőbe a minimálisan szükséges mennyiségű benzint szétporlasztja, így az pillanatok alatt elpárolog. Ha nyomjuk a gázpedált, növeljük a benzin mennyiségét, a robbanások erősebbek lesznek. □

Hasonlóan működnek a Diesel-motorok, de itt a motor csak levegőt szív be, azt sokkal jobban összesűríti, mint a benzinmotor, és az 5–600 °C-os forró levegőbe gázolajat spriccelnek be. A gázolaj elpárolog, meggyullad és elég, nagyon magasra emelve a hőmérsékletet és a nyomást. A forró füst nagyon nagy erővel nyomja hátra a dugattyút. A Diesel motor

hatásfoka 45 % is lehet, de erőműben már 54 %-ot is elértek. A benzinmotoré 35 %-ig terjedhet.

2.4.3. Hűtőgépek. A másodfajú örökmozgóval kapcsolatban láttuk, hogy gázgépünket „visszafele” működtetve hűtőgépet kapunk. A hűtőszekrény kicsit másként működik. Valamilyen könnyen cseppfolyósítható gázt, például ammóniát (NH_3) használnak benne. Az ammónia közönséges nyomáson -33°C -on cseppfolyósodik. A gázt egy kompresszorral néhány bar nyomásra összenyomják, és a felforrósodott gázt a hűtőszekrény hátulján lévő csőkígyóba vezetik. Itt lehűl és cseppfolyósodik. A folyadékot egy szűk lyukon át a hűtőszekrény belsejében lévő bővebb csőbe vezetik. Itt a nyomás jóval kisebb, mivel innen szívja a kompresszor a gázt. A cseppfolyós ammónia elpárolog, lehűtve a hűtőszekrény jól hőszigetelt belsejét. Ugyanígy működik a fűtésre használt hőszivattyú. A földet hűti, és a lakás belsejében adja le a hőt.

2.4.4. A Clapeyron-egyenlet. * Most levezetünk egy fontos összefüggést. Meg tudnánk-e mondani, mennyit nő a forráspont a nyomás növelésekor? Legyen az eredeti forráspont abszolút hőmérséklete T , a nyomás p , és növeljük a nyomást egy kicsit, Δp -vel, azaz legyen az új nyomás $p + \Delta p$. Ekkor a forráspont is nő valamilyen ΔT -vel, és most már $T + \Delta T$ lesz. Szeretnénk összefüggést találni Δp és ΔT között. A forráskor a folyadék hőtartalma megnő a (T hőmérsékleten mért) H elforralási hővel, és a térfogata is megnő. Jelölje a térfogatnövekedést ΔV . A keresett összefüggés a *Clapeyron-egyenlet*:

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \approx \frac{H}{T\Delta V}.$$

Az összefüggés tulajdonképpen egyenlőség abban az értelemben, hogy minél kisebb Δp és ΔT , annál közelebb van az egyenlőséghez. Ezt — mint tudjuk — úgy szokás kifejezni, hogy

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \rightarrow \frac{H}{T\Delta V}, \quad \text{ha } \Delta T \rightarrow 0,$$

és úgy olvassuk ki, hogy $\Delta p/\Delta T$ tart $H/(T\Delta V)$ -hez, ha ΔT tart nullához; azt fejezi ki, hogy annál jobb közelítéssel áll fenn egyenlőség, minél közelebb van ΔT nullához.

Milyen mennyiségű folyadékra vonatkozik? Akármilyenre: ha nő a folyadékmennyiség, nő az elforraláshoz szükséges hőmennyiség, de nő a térfogatváltozás is. A kettő hányadosa állandó marad.

Mivel kis nyomáson a folyadék térfogata elhanyagolható a gőz térfogata mellett, ΔV -t helyettesíthetjük a gőz V térfogatával. A gőzt ideális gáznak tekintve, $pV/T = K$. Innen kifejezve V -t és beírva a Clapeyron-egyenletbe,

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \rightarrow \frac{p\Delta H}{KT^2}, \quad \text{ha } \Delta T \rightarrow 0.$$

Számítsuk ki például, hogy mennyi a víz gőznyomása 1 K-nel a forráspontja alatt. 1 g gőz térfogata 100°C -on 1 atm nyomáson $\approx 1,700$ l, így $K \approx 101325 \cdot 0,001700/373,15$ J/K, azaz $K \approx 0,4616$ J/K és

$$\frac{H}{KT} \approx \frac{2257}{373,15 \cdot 0,4616} \approx 13,1.$$

(Ez a szorzó egyébként a legtöbb 0 és 200 °C közötti forráspontú folyadékra a forráspontján $\approx 10,5$. Ez a *Trouton-szabály*. Borszeszre 13,7.) Így vízre $\Delta p/p$ a $\Delta T/T$ -nek 13,1-szerese, azaz $13,1 \cdot 1/373,15 \approx 0,035$, tehát $\Delta p \approx 0,035 \cdot 1,01325$ bar, azaz 35 mbar. Ha a víz forráspontját használjuk hőmérsékleti alappontnak, akkor annak a nyomástól való függését így figyelembe tudjuk venni!

Mint a levezetésből is látni fogjuk, az egyenlet akármilyen halmazállapot változásra is érvényes. Ha azt kérdezzük, hogy mennyit változik a jég olvadáspontja, ha a nyomás 1 bar-ral nő, akkor 1 g jéggel számolva,

$$\frac{10^5 \text{ Pa}}{\Delta T} \approx \frac{79,7 \cdot 4,1868 \text{ J}}{273,15 \text{ K} \cdot (1 - 1/0,9168) \text{ cm}^3},$$

ahonnan

$$\Delta T \approx \frac{273,15 \cdot 10^5 \cdot (1 - 1/0,9168) \cdot 10^{-6}}{79,7 \cdot 4,1868} \text{ K} \approx -0,0074 \text{ K}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a jég olvadáspontja a nyomás növelésével csökken!

Ha azt kérdezzük, hogy 1 K hőmérsékletváltozásra mennyit változik a gőznyomás 0,01 °C-on víznél illetve jégnél, akkor a $\Delta T/T$ értéket $H/(T\Delta V)$ -vel kell szorozni, ahol $T = 273,16 \text{ K}$ és ΔV is majdnem ugyanannyi, de H a jégnél jóval nagyobb, mert a 0,01 °C-os víz párolgáshőjéhez hozzáadódik a jég olvadáshője is. Így a jég gőznyomása gyorsabban csökken, mint a vízé. Egyébként 0,01 °C az a hőmérséklet, ahol a víz gőznyomása ugyanannyi, mint a jégé. Ha más anyag nincs jelen, ezen a hőmérsékleten, a víz és jég közös gőznyomásán egymás mellett létezhet víz, gőz, és jég: már volt szó róla, ez az úgynevezett hármaspont. Ez alatt a hőmérséklet alatt légmentes térben csak jég és gőz, e fölött csak víz és gőz létezhet egymás mellett, egészen a kritikus pontig. Egyébként eredetileg az abszolút hőmérsékleti skála két alappontjának az abszolút nulla pontot és a víz hármaspontját választották, ez 273,16 K. *

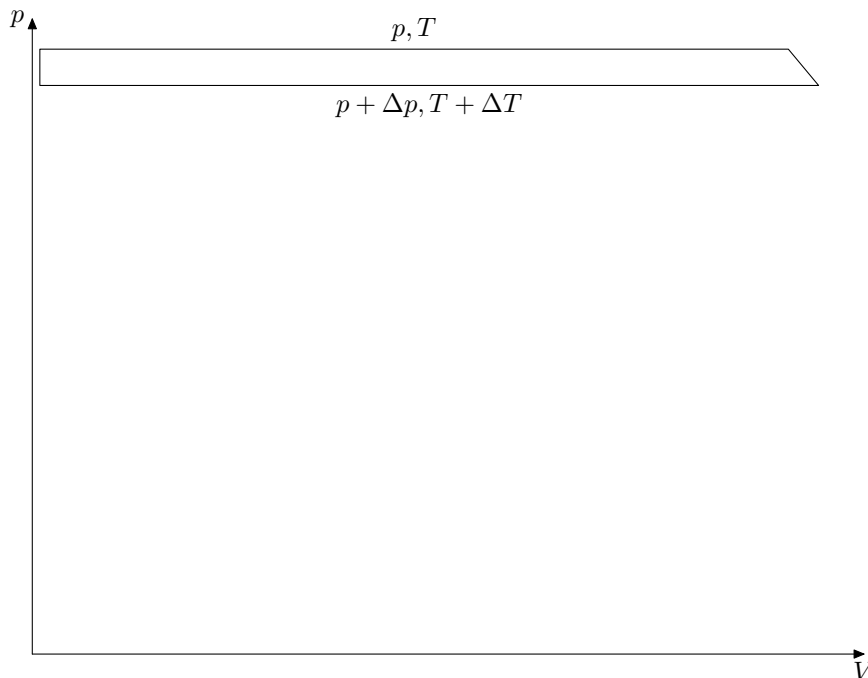
** Ha valaki nagyon szemfüles, biztosan észrevette, hogy az előző bekezdésben azt mondtuk, a hármaspont 273,16 K, az azelőttiben meg megállapítottuk, hogy a jég olvadáspontja 1 bar nyomásnövelésre 0,0074 K-nel csökken, így 1 atm \approx 1 bar nyomáson 273,1526 K = 0,0026 °C-nak kellene lennie. A magyarázat az, hogy a hármaspont a tiszta, levegőmentes vízre vonatkozik, a 0 °C viszont a levegővel telített víz fagyáspontja. Így a 0 °C néhány tizedes K hibával 273,15 K. **

* Számoljuk ki a víz gőznyomását a hármaspontban! Észrevehetjük, hogy a Clapeyron-egyenlet egy differenciálegyenlet. Ezt oldjuk meg numerikusan. Lényegében ugyanazt csináljuk, mint mikor kiszámoltuk, hogy 1 K hőmérsékletcsökkenésre mennyit csökken a gőznyomás, csak százszor megismételjük ezt a lépést, minden lépésben figyelembe véve azt is, hogy változik a hőmérséklet és változik a párolgáshő is. Mivel a víz illetve a gőz fajhője $\approx 1 \text{ cal/g}$ illetve $\approx 0,5 \text{ cal/g}$, a párolgáshő minden °C hőmérséklet-csökkenéskor $\approx 0,5 \text{ cal/g}$ -mal nő. A jobb trapéz módszerrel számolva és korrekciót is végezve az eredmény 6,5421 mbar. A mért érték 6,1129 mbar. (A víz illetve a gőz fajhője nem pontosan 1 /g illetve 0,5 cal/g és változik is; a számolási hibák mellett ez okozza az eltérést.)

Aki tud differenciálni, könnyen kipróbálhatja, hogy ha H nem függ T -től, akkor

$$\frac{dp}{dT} = \frac{pH}{KT^2}$$

differenciálegyenlet megoldása $p(T) = p_0 e^{-H/(KT)}$, ahol p_0 a T_0 hőmérsékletnél vett gőznyomás. Osztván p_0 -al és mindkét oldal logaritmusát véve azt kapjuk, hogy $\ln(p/p_0)$ az $1/T$ -nek lineáris függvénye (az egyenes meredeksége $-H/K$). Mivel kis hőmérsékletváltozásnál H nem nagyon változik, ennek alapján két érték között a gőznyomás logaritmusát érdemes ábrázolni $1/T$ függvényeként és ezt érdemes interpolálni is. *



2.4.2. ábra: a Clapeyron-egyenlethez

* A Clapeyron-egyenlet levezetéséhez egy gondolatkísérletet végzünk. Körfolyamatot hozunk létre. A nyomás és a térfogat változását a 2.4.2. ábrán követhetjük nyomon. Forraljuk el a teljes folyadékmennyiséget T hőmérsékleten, H hőenergiát elhasználva. A térfogat ΔV -vel nő, így $p\Delta V$ munkát végez a gőz. A gőzt terjesszük ki egy kicsit, hogy a nyomása lecsökkenjen $p + \Delta p$ -re (ahol most Δp negatív). Egy kis része cseppfolyósodik, és hőmérséklete $T + \Delta T$ lesz (ahol ΔT is negatív). Eközben még történik némi munkavégzés, de ez jelentéktelen. Nyomjuk össze a gőzt: lecsapódik, és $(p + \Delta p)\Delta V$ munkát kell végeznünk. Végül a folyadék nyomását — jelentéktelen munkavégzéssel — növeljük p -re. A hőmérsékletet növeljük T -re. Ha jól meggondoljuk, ez egy (majdnem) megfordítható

körfolyamat, így a hatásfoka $-\Delta T/T$. Másrészt viszont H hőt vittünk be, és $p \cdot \Delta V - (p + \Delta p)\Delta V = -\Delta p\Delta V$ munkát kaptunk. Így

$$-\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{\Delta p \cdot \Delta V}{H},$$

ez a keresett egyenlet. *

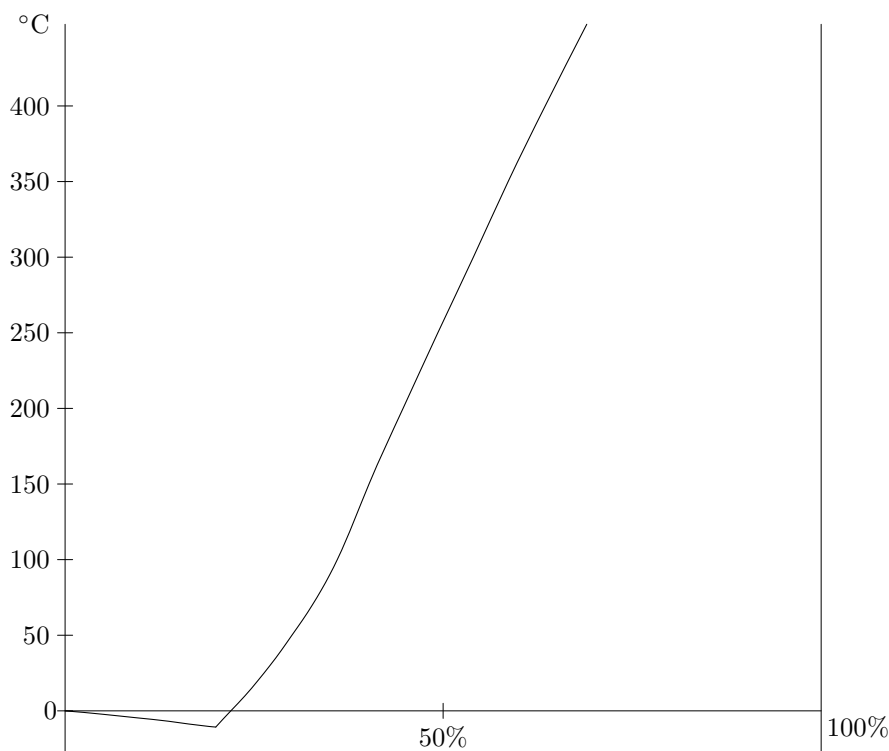
2.4.5. A Clapeyron-egyenlet és a szorbció. ** Mint a levezetés is mutatja, a Clapeyron-egyenlet minden térfogatváltozással járó folyamatra alkalmazható, így az abszorpcióra és az adszorpcióra is. Ismernünk kellene a szorbciókor felszabaduló hőmennyiséget. Az adszorpció esetén ez közepes adszorbeált anyag tartalom esetén, ha adhézió játsza a fő szerepet, a szublimációs hőhöz áll közel, kis adszorbeált anyag tartalom esetén annál magasabb. Például vízre 25 °C-on a párolgáshő ≈ 2400 J/g, a szublimációs hő ≈ 2800 J/g, kis víztartalmú gyapoton való adszorpciónál ≈ 3600 J/g. Az egyensúlyi nyomás a Clapeyron-egyenlet szerint hasonlóan változik, mint a víz gőznyomása, de ugyanakkora hőmérsékletváltozásra nagyobb nyomásváltozás esik. Ezért érdemes az adszorbeált anyagmennyiséget a relatív páratartalom függvényében megadni, mert ez a görbe lassan változik a hőmérséklettel. **

2.5. Oldatok

2.5.1. Kísérlet. Ha egy pohár vízbe egy kávéskanál konyhasót teszünk, és kicsit kevergetjük, hamarosan nem látjuk, *feloldódik* a vízben. Ha megkóstoljuk a vizet, sós ízű, tehát a só nem tűnt el, csak a molekulái elkeveredtek a vízmolekulákkal. Ha ebből az *oldatból* egy cseppet egy forró vaslapra, például egy gázelosztó lapra cseppentünk, a víz elpárolog, és ottmarad, *kikristályosodik* a konyhasó. □

Bár a kristályosítással a kémiában foglalkoznak, nem árt, ha mi is elvégezzünk pár kísérletet oldatokkal. A konyhában használt *zománcozott* edények vaslemezből vannak, amit nagyon vékony üvegszerű — a laboratóriumi üvegekéhez hasonló összetételű— réteggel vonnak be, így a kémiai anyagoknak ugyanúgy ellenállnak, mint az üveg, és a melegítést is jól bírják. A műanyagokat is használhatunk, bár nagy hátrányuk, hogy nem bírják a meleget. A rozsdamentes acél és a műanyagok is sok vegyszernek ellenállnak. A műanyagok közül nekünk a polietilén (PE) és a polipropilén (PP) lesz a leghasznosabb; az utóbbi a 100 °C-ot is kibírja.

2.5.2. Kísérlet. A vegyész gyakran használja a *kristályosítást* anyagok megtisztítására. Először nem konyhasót, hanem egy másik sót, *kálisót* fogunk kristályosítani. Műtrágyaként használják, olcsó anyag. Nemigen kapunk belőle kevesebbet, mint 5 kg-ot. Rendszerint az egyébként fehér kristályok erősen szennyezettek egy vörös színű, olajos anyaggal. Ez akkor kerül bele, amikor a kibányászott konyhasó–kálisó keveréket nagyjából szétválasztják kálisóra és konyhasóra. Azt fogjuk a tisztításra felhasználni, hogy a kálisóból 100 g vízben melegen kb. 50 g, hidegen viszont csak kb. 25 g oldódik. (A különböző anyagok oldhatóságát különböző hőmérsékleteken ábrázolva vagy táblázatba



2.5.1. ábra: kálisó oldhatósága vízben

összefoglalva találhatjuk; megmérésével a kémia részben foglalkozunk. A kálisót lásd a 2.5.1. ábrán.) Vegyünk egy nagy, hibátlan zománcozású vagy rozsdamentes acél fazekat, és öntsük jó félig kálisóval, majd öntsünk rá csapvizet jó bőven, és melegítsük. (Jobb lenne persze desztillált vizet használni, de az anyag annyira szennyezett, hogy az a kevés szennyezés, amit a vízzel beviszünk, nem számít.) Egy rozsdamentes kanállal kevergetjük az egészet. A tetejére olajos, vörös hab jön fel, ezt amennyire lehet, szedjük le. Sajnos, ilyen egyszerűen nem szabadulhatunk meg a vízben oldhatatlan szennyezésektől, az oldatunkat meg kell szűrni. Ez úgy történik, hogy a 2.5.2. fényképen látható módon egy papír törlőkendőt vagy papírzsebkendőt negyedébe hajtunk, ollóval levágjuk kör alakúra, majd úgy hajtjuk szét, hogy az egyik oldalon három, a másikon egy réteg maradjon, és így beletesszük egy műanyag tölcserbe. A vegyészek egyébként *üvegtölcsért* és *szűrőpapírt* használnak a szűréshez. Ez hasonló anyagú, mint a papír törlőkendő, de egyenletes, sima, erősebb, és gondosan kimostak belőle minden oldható anyagot.

Ha felkészültünk a szűrésre, a tölcserbe beleállítottuk egy műanyag palackba, melegítsük tovább a fazékban a kálisót. Egyre több oldódik fel. Amikor már majdnem forr, és nem bír több kálisót oldani — az oldat *telített* — elkezdi a tetején „bőrösödni”: a víz egy része elpárolog, és kálisó kristályok válnak ki a forró oldat tetején, egy ideig ott úszkálnak, majd lesüllyednek. Most megkezdhetjük a szűrést: rozsdamentes mérőkanállal vagy egy már

nem használt üveg vagy porcelán füles csészével, kávéscsészével a tölcsérbe meregetjük a forró oldat tisztáját. A porcelán hátránya, hogy ha valahol (rendszerint az alján) nem borítja üvegmáz, akkor magába szívja az oldatot, és ha másfajta anyaghoz használjuk, azt elszennyezi. A szűrőn átfutó *szűrlet* nem lehet zavaros, szép tisztának kell lennie. Ha kezdetben zavaros, ne ijedjünk meg, nyugodtan merjük tele a szűrőt, szűrjünk egy darabig, és ha úgy látjuk, hogy a tölcsér alján már tiszta oldat folyik ki, akkor tegyük át a tölcsért egy másik palackba, a zavaros oldatot pedig öntsük vissza a fazékba, a palackot öblítsük ki forró vízzel. Néha kétszer–háromszor is el kell ezt játszsanunk, míg a szűrlet szép tiszta lesz: a szűrőpapír likacsait valamennyire eltömik az oldhatatlan szennyezések, lassabban, de jobban szűr. Az oldatot óvatosan öntögessük utána. Ha szép tisztán akarunk dolgozni, a szűrőpapír ne lógjon ki a tölcsérből, hanem a széle a tölcsér szélétől fél–egy cm-re legyen, mert az oldat végigcsorog a tölcsér külsején, lecsepeg, mindent beszenyez, a vastárgyakat megrozsdásítja, stb. Az oldatból csak annyit öntsünk a szűrőre, hogy a papír szélétől kb. fél cm-re legyen, mert felszívódik a papíron, és a szennyezések a szűrletbe kerülhetnek. Nem kell irdatlan sok szűrletet egy palackba gyűjteni, mert ha túlóntjuk a szűrőt, az egész elszennyeződik, és kezdhethetjük a szűrést előlről; időnként tegyük át a tölcsért egy másik palackba, vagy öntsük ki a szűrletet a palackból egy műanyag edénybe. Ha a szűrőn fennmaradó csapadékra nincs szükségünk — mint nekünk most — hajtogathatunk *redős szűrőt*, ami még gyorsabban szűr; illet láthatunk a 2.5.2. fényképen a jobb oldalon. Vékony, gyenge papírból nem biztos, hogy sikerül jó redős szűrőt hajtogatni.

A szűrlet lehűlésekor a kálisó nagyon szép, hófehér, csillogó kristályokban válik ki. A kristálykiválás már a palackban megindul, ezért jól rázzuk össze a palack tartalmát, és hirtelen öntsük át a kristályosító edénybe. Sajnos, már a szűrőn is válnak ki kristályok. Ha már tele van kivált kristályokkal a szűrőpapír, tegyük át a tölcsért egy másik palackba és öntsünk a szűrőre forró vizet. A víz leoldja a kristályokat. Ezt a vizet nem érdemes a szűrlethez önteni, mert nem telített, lehűtéskor kevés, vagy egyáltalán semmi kálisó nem válik ki belőle, sőt még az is lehet, hogy a már kivált kristályok egy részét is feloldja. Tehát ha a kristályok zöme leoldódott és a szűrlet lecsepegett, a fazékba öntjük, és ha újra telítődött a fazékban az oldat, tovább folytatjuk a szűrést. Persze, ennek az egyszerű megoldásnak az a hátránya, hogy a szűrlet csak azon a hőmérsékleten telített, amelyre a tölcsérben lehül, például 80 °C-on. Nagyon valószínű, hogy egy idő után a szűrő már szinte teljesen eltömődik és nagyon lassan szűr. Ekkor oldjuk le a szűrőről a kristályokat és cseréljük ki a szűrőpapírt. Az egész szűrést addig folytatjuk — szükség esetén még öntve kálisót illetve vizet a fazékba — amíg már csak kevés oldatlan kálisó marad a fazékban. Nem érdemes az utolsó kristályig mindent feloldani, mert lehet hogy valami nehezen oldódó szennyezéssel kínlódunk.

Ha vége a szűrésnek, 5 kg kálisóból kb. 15 l szűrlet lesz. A szűrlet tiszta, átlátszó, de rendszerint kissé sárgás. Ezt vasvegyületek okozzák, ezektől csak kémiai úton lehetne teljesen megszabadulni. Hűtsük le minél jobban, ha lehet, –5 °C-ig, vagy legalábbis jéggel (de nem az oldatba tesszük a jeget, hanem például egy műanyag pohárba, ami úszik az oldatban). Nagyjából a kálisó fele kristályosodik ki. Az oldat a kristályok felett az *anyalúg*: ez most is telített, de azon a hőmérsékleten, ameddig lehűtöttük. A kristályokat az anyalúgtól ismét szűréssel választhatjuk el. Bár lehetséges, nem érdemes

szűrőpapírt használnunk, mert a kristályok elég nagyok. Egy tiszta vászonzacskót — vászon bevásárlószatyrot — használnunk. Ha színes, hypozzuk ki, öblítsük ki néhányszor (nem kell öblítőszer, az csak szennyezést visz az oldatba), és fordítsuk ki, akasszuk fel valahova, például két székre tett rúdra, majd öntsük bele a zagyot. A kristályok fennmaradnak, az anyalág lefolyik. Várjunk míg lecesepeg, majd ki is facsarjuk. Egy kevés jéghideg vízzel mossuk le a kristályokat. Azért lényeges, hogy a víz jéghideg legyen, mert a hideg víz kevesebb kristályt old fel, és az oldódás is lassabb hidegben. Különösen apró kristályoknál lényeges ez, mert azok — a nagyobb felület miatt — gyorsabban oldódnak. Facsarjuk ki a mosóvizet is, de ne öntsük a szűrlethez, hanem öntsük ki. A facsarást most nyugodtan elvégezhetjük kézzel, de utána mossunk kezet. Maró, mérgező anyagoknál gumikesztyűt kell használnunk. A kálisó — mint általában a műtrágyák — nem minősül mérgezőnek, bár nem teljesen ártalmatlan: 15 g-nál több lenyelve halálos lehet. (Nagy adagban még a konyhasó is halálos.) Ezért, ugyanúgy mint a többi vegyszert, semmiképpen se kóstolgassuk.

A kapott tiszta kálisót meg kell szárítanunk. Mivel csak vöröszízáson olvad meg, a szárítást végezhetjük melegítve vagy csak langyos helyen, időnként egy rozsdamentes kanállal megkeverve az anyagot. Ha hosszú ideig szárítunk, takarjuk le egy újságpapírral. Ha teljesen megszáradt, tegyük jól záró fedelű műanyag dobozba vagy befőttes üvegekbe, ráírva, hogy „kálisó, 1x tisztított”, azaz egyszer tisztított. A befőttes üvegek csavaros teteje a kálisótól biztos, hogy idővel megrozsdásodik, ezért mezőgazdasági vastag polietilén fóliából vágjunk kör alakú lapokat. Bármilyen vegyszert is tárolunk befőttes üvegben, tegyünk a teteje alá egy ilyen lapot, így ha a tető megrozsdásodik is, a vegyszer tiszta marad. Kálisónkat tovább úgy tisztíthatnánk, hogy még egyszer átkristályosítjuk (célszerűen desztillált vízből), vagy kémiai módszereket használnánk; lásd a kémia kötetet. □

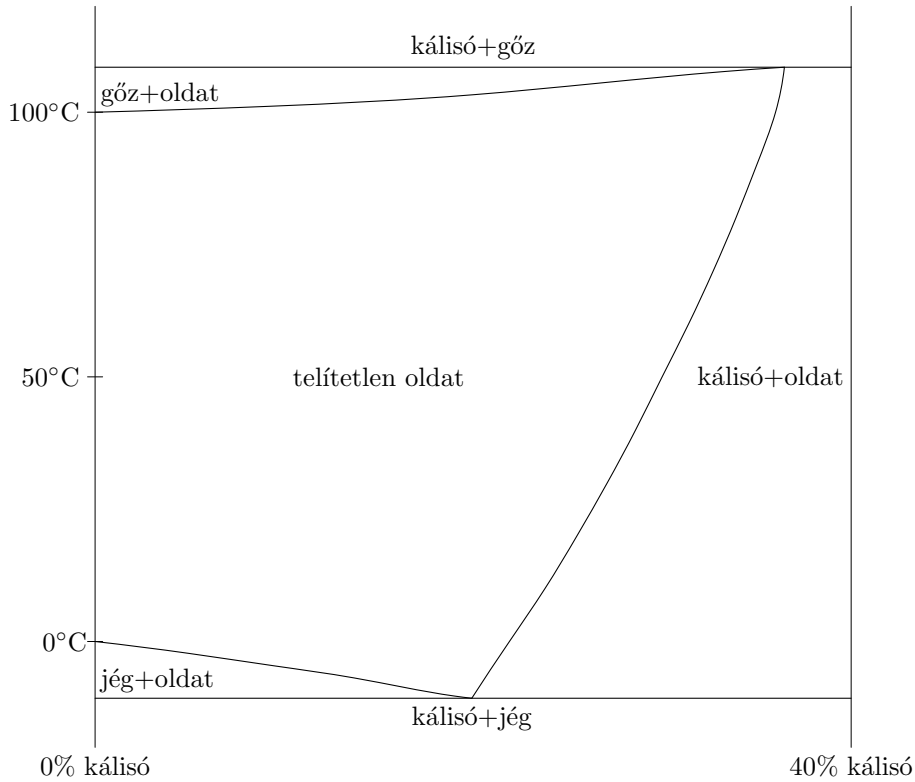
2.5.3. Kísérlet. Második kristályosítási kísérletként konyhasót fogunk tisztítani. Sajnos, ennek az oldhatósága nem változik annyira a hőmérséklettel, mint a kálisóé, ezért a fenti módszer nem használható. Bármilyen kősóból kiindulhatunk, én útszóró sót használtam, de persze jó a boltban vásárolható konyhasó is. Ne vásároljunk finomított sót, mert éppen azt fogunk készíteni. Itt is érdemes forrón oldani a sót, mert úgy gyorsabban oldódik, de lehűléskor alig valami válik ki. (Természetesen akkor is gyorsabban oldódik, ha kisebb darabokban van. Gondoljunk az összerágott savanyúcukorra. Ha nagy darabokba állt össze a só, akkor egy rongyba csavarva kalapáccsal törjük össze.) Ezért el kell párologtatnunk a vizet. Az oldatot a szokásos módon megszűrjük. Ha a szennyezések könnyen leülepednek, akkor elkerülhetjük a szűrést: várunk, amíg kitisztul az oldat, és a tisztáját egyszerűen leöntjük. Ezt az eljárást *dekantálás*nak szokták nevezni. Ha szűrünk, akkor is érdemes lehet a szennyezéseket leülepíteni, és az oldat tisztájával kezdeni a szűrést, hogy a szűrő ne hogy gyorsan eltömődjön. A tiszta oldatot egy hibátlan zománcozású vagy rozsdamentes acél fazékban bepároljuk kb. a felére; ha nagyon bepároljuk, a szennyezések is kiválnak. (A következő kísérlet ezt a forró, tömény sóoldatot használja.) Sok só válik ki, a sókristályok „felkúsznak” az edény oldalán; pontosabban, a kiváló só felszívja a sóoldatot, abból újabb só válik ki, stb. Ezt a sót visszaterelgetjük az oldatba. Ha a kiváló só tiszta, akkor finom szemcsés, ha szennyezett, akkor nagyobb darabokba áll össze. A maradék szennyezéstől csak kémiai úton tudnánk megszabadulni. Ha kész a

bepárlás, hagyjuk lehűlni az egészet. A kristályokat ugyanúgy választjuk el az anyalúgtól, mossuk és szárítjuk, mint a kálisónál. Amit kaptunk, az a *párolt só* vagy *főzött só*. □

2.5.4. Kísérlet. A sófőzést felhasználjuk a vízgőz sűrűségének meghatározására. A sóoldat magasabb hőfokon forr, mint a víz, kb. $108\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on. Ha tehát egy zacskóba zárt pár csepp vizet teszünk bele, az felforr, és felfújja a zacskót. Sajnos, az összes zacskó, amit kipróbáltam, szétolvadt, kilyukadt. Végül egy gyümölcsleves dobozt használtam. Ezek a papírdobozok belül műanyag és alumínium fólia réteggel vannak bevonva, hogy ne engedjék át a levegőt, tehát a gázokat. Mossunk ki egyet nagyon gondosan, a „füleket” hajtsuk fel, hogy jól össze lehessen lapítani, és a csavaros tetejébe keressünk egy (vízvezetékcsatlakozáshoz használt) gumi tömítést. Próbáljuk ki, hogy a tömítéssel jól zár-e a fedele? Összenyomva nem jöhet ki a levegő. Ha jól zár, gondosan szárítsuk ki: előbb csepegtessük ki a vizet, majd hajszárítóval hosszabb ideig fűjjünk bele levegőt a nyílása egyik felén, hogy ki is tudjon jönni. Ha teljesen kiszáradt, lapítsuk le amennyire tudjuk, mérjük bele $0,5\text{ g}$ vizet (én műanyag fecskendővel használtam) és zárjuk le a tetejét. A derekán kössük körbe egy madzaggal egy fémcsőhöz. A forrásban lévő sóoldat alatt elzárva a gázt, mérjük meg, hogy milyen távol van az oldat teteje az edény peremétől (nekem ez $34,40\text{ mm}$ volt), majd nyomjuk bele a dobozt. A víz elpárolog, a gőz felfújja a dobozt. Most is mérjük meg, hogy milyen messze van az oldat teteje az edény peremétől (ugyanazon a helyen). Ezt $17,45\text{ mm}$ -nek találtam, tehát a vízszintnövekedés $16,95\text{ mm}$. Hátra van még annak megmérése, hogy a hidegebb sóoldatban mennyi a szintemelkedés, ezt $2,70\text{ mm}$ -nek találtam, így a gőz $14,25\text{ mm}$ szintnövekedést okozott. Végül megmérve az edény átmérőjét, számítsuk ki, hogy 1 mm szintemelkedés hány ml-nek felel meg. Ez nekem $51,87\text{ ml}$ -nek adódott. Így fél gramm gőz térfogata $739,2\text{ ml}$ -nek, azaz 1 g - $\approx 1,48\text{ l}$ -nek adódott. (Pontosabb mérések szerint 1 atm nyomáson $1,674\text{ l}$.) □

2.5.5. Kísérlet. Ha a sófőzés anyalúgját betesszük a mélyhűtőbe, nem fagy meg, legfeljebb egy kevés só válik ki belőle. Más oldatoknál is tapasztalhatjuk ezt, például cukros szörp, narancslé sem fagy meg. Hogy pontosabban megértsük a jelenséget, a kálisó kristályosítás anyalúgjából egy keveset egy műanyag edénykében hígítsunk fel nagyjából háromszor annyi vízzel, tegyünk bele egy hőmérőt, és tegyük be a mélyhűtőbe. Ne hagyjuk keményre fagyni, hanem gyakran nézzünk rá. Nagyjából -2 – $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál jég kezd kifagyni az oldatból (a sós tengervízből kifagyó jéghegyek sem tartalmaznak sót), az oldat pedig töményedik. Kb. $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál már az oldat fele jégként kifagy. Tovább hűtve az oldatot, $\approx -10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál a az egész maradék tömény oldat megfagy. Só és jég kristályok vegyesen vannak az utoljára megfagyott, legkönnyebben olvadó részletben, de ez általában csak erős nagyításnál látható. Ezt *eutektikum*nak nevezzük; a görög szó „jól olvadót” jelent.

Nagyítsuk ki az előző ábra alacsony hőmérsékleteknek megfelelő részét: lásd a 2.5.3. ábrát. Az eutektikum a görbe töréspontjának felel meg, a hőmérséklet $-10,7\text{ }^{\circ}\text{C}$, az összetétel $19,34\%$ kálisó. Az eutektikus hőmérsékletnek megfelelő vízszintes vonal alatt csak jég és szilárd kálisó van. Az eutektikus ponttól balra eső görbe a *fagyáspontgörbe*, a jobbra eső pedig az *oldhatósági görbe*, ami a telített oldatnak felel meg. De mi az ábrán a felső görbe vonal? A másik ábrán ilyen nem volt! Ez az oldat *forráspontgörbéje*, a forráspont az összetétel függvényében. Ez az ábra 1 atm nyomásra vonatkozik, míg a



2.5.3. ábra: kálisó oldhatósága vízben normál nyomáson

másik ábra nagyon nagy nyomásra. Amikor a hőmérséklet eléri a forráspontgörbét, az oldatból a víz egy része elpárolog, az oldat összetétele pedig eltolódik a forráspontgörbe mentén. Amint elérjük a telített oldat forráspontját, kálisó kezd kiválni és víz párolog el. E felett a hőmérséklet felett már csak kálisó és gőz van jelen. Kirajzolhattuk volna a több mint 40 % kálisónak megfelelő részt is, de ott semmi izgalmas nincs: felül kálisó és gőz, a forráspontgörbe vízszintes, középen kálisó és oldat, alul kálisó és jég. Az oldhatóságot a nyomás csak kis mértékben befolyásolja, a forráspontot viszont nagyon. Ezt az ábrát is szoktuk állapotábrának nevezni, bár a nyomástól való függést nem ábrázolja.

* Könnyen elképzelhetjük azonban, mi történik, ha a nyomást változtatjuk. A nyomás lehet egy harmadik koordináta (dimenzió), mondjuk a papír síkjára merőlegesen befelé haladva csökken. A nyomás csökkentésével a fagyáspontgörbe alig változik, például a tiszta víznek megfelelő bal oldali végpontja a víz hármaspontjának megfelelő $\approx 0,0061$ bar nyomásnál $0,01$ °C-ig emelkedik. A fagyáspontgörbe tehát a nyomás csökkentésével a térben egy felületet rajzol ki, amely majdnem merőleges a papír síkjára. Hasonlóan alig változik a nyomás csökkentésével az oldhatósági görbe, és így a két görbe metszéspontja, az eutektikus pont is. Annál jelentősebben változik a nyomás csökkentésével a forráspontgörbe: fokozatosan jön lefelé. Végül a víz hármaspontjának megfelelő nyomásnál a

bal oldali végpontja összeér a fagyáspontgörbével. Ennél kisebb nyomáson megjelenik egy vízszintes vonal, amely a kálisó+jég részt választja el a kálisó+gőz résztől, és a jég szublimációs hőmérsékletének felel meg. A telítetlen oldat tartománya egyre kisebb lesz, végül egy ponttá húzódik össze. Ezt a pontot nevezhetjük „négyespontnak”, mert itt négy fázis érintkezik: kálisó, jég, gőz és oldat.

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet a víznél talált

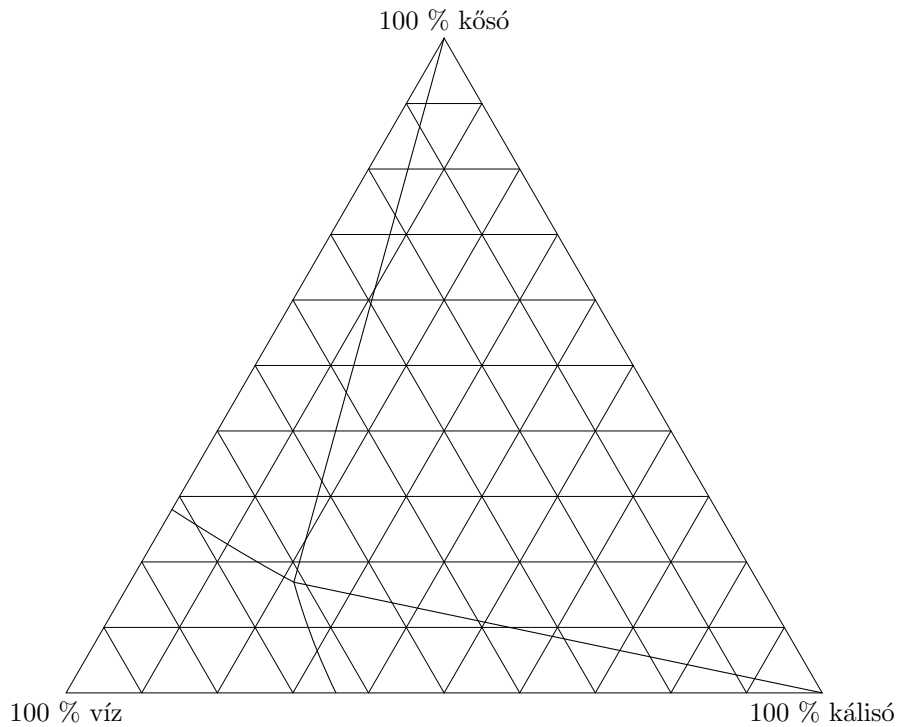
$$\text{fázisok száma} + \text{szabadsági fokok száma} = \text{anyagok száma} + 2$$

fázisszabállyal. Az anyagok száma most 2, tehát a jobb oldal 4. A „négyespontban” a nyomás, a hőmérséklet és az egyetlen változtatható összetételű fázis, az oldat összetétele adott, így a szabadsági fokok száma nulla. Ez alatti nyomáson csak két fázis van, kálisó és gőz, de a nyomás és a hőmérséklet változtatható, tehát két szabadsági fok van. E fölötti nyomáson, például az ábrának megfelelő 1 atm nyomás közelében több tartomány van. Legfelül két, nem változó összetételű fázis van, kálisó és gőz, a nyomás és a hőmérséklet változhat, tehát a szabadsági fokok száma kettő. Ugyanez a helyzet legalul, ahol kálisó és jég van. A telítetlen oldat tartományában csak egy fázis van, viszont három szabadsági fok: az oldat összetétele, a nyomás és a hőmérséklet. Az oldhatósági görbétől jobbra két fázis van, kálisó és telített oldat. Mivel a telített oldat összetételét a nyomás és a hőmérséklet már meghatározza, a szabadsági fokok száma kettő. Ugyanez a helyzet a fagyáspontgörbétől balra: két fázis van, jég és oldat, de az oldat „jégre telített”, összetételét a nyomás és a hőmérséklet már meghatározza, így itt is két szabadsági fok van. Hasonló a helyzet a forráspontgörbétől balra. *

2.5.6. Kísérlet. Az eutektikumok létezését hűtőkeverékek készítésére szokták kihasználni. Leggyakrabban a konyhasót szokták felhasználni, az eutektikus hőmérséklet $-21,2\text{ }^{\circ}\text{C}$, az összetétel $22,41\text{ }\%$ konyhasó. Ha tehát 2 rész konyhasót 6–7 rész apróra tört jéggel — még jobb, ha hóval — keverünk össze, a keverék $\approx -20\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra hűl le — közben a jég egy része megolvad — és ezen a hőmérsékleten is marad, amíg minden jég el nem olvad. A hőt tulajdonképpen a jég olvadáshője „viszi el”. Persze nem kell tiszta sót használnunk, a szennyezett is megfelel. Próbáljuk is ki: sima aljú konzervdobozt, sörösdobozt, kólásdobozt, vékonyfalú alumínium edényt megtöltve a keverékkel, az edény vizes deszkára azonnal odafagy, és a külsejére ráfagy a pára. Hőmérővel mérve látjuk, hogy $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ közelébe süllyed a keverék hőmérséklete. Régen ezt használták fel fagyaltkészítésre: a jeget nagy, jól hőszigetelt vermekben téltől nyárig tárolták. Ha nincs szükségünk $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra, akkor például $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot úgy is elérhetünk, hogy jeget vagy havat nagyjából ugyanannyi telített sóoldattal keverünk össze, $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$ -hoz pedig kétszeresére hígított telített sóoldattal. A keverék hőmérséklete a fagyáspontgörbének megfelelő hőmérsékletre áll be. Egyébként az utakat is ezért sózzák télen: ha a fagyáspontgörbe felett van a hőmérséklet, a jég elolvad.

2.5.7. Kísérlet. Vajon hogyan választják szét a kálisót a kősótól, amivel gyakran összekeveredve található? (Ilyen keverékek valamikori tengerek bepárolódásakor jönnek létre, és eltemetődve találhatóak, bányásszák őket.) A legrégebbi és legegyszerűbb módszer kristályosítással dolgozik. A kísérlet elég hosszadalmas, nem is érdemes megcsinálni,

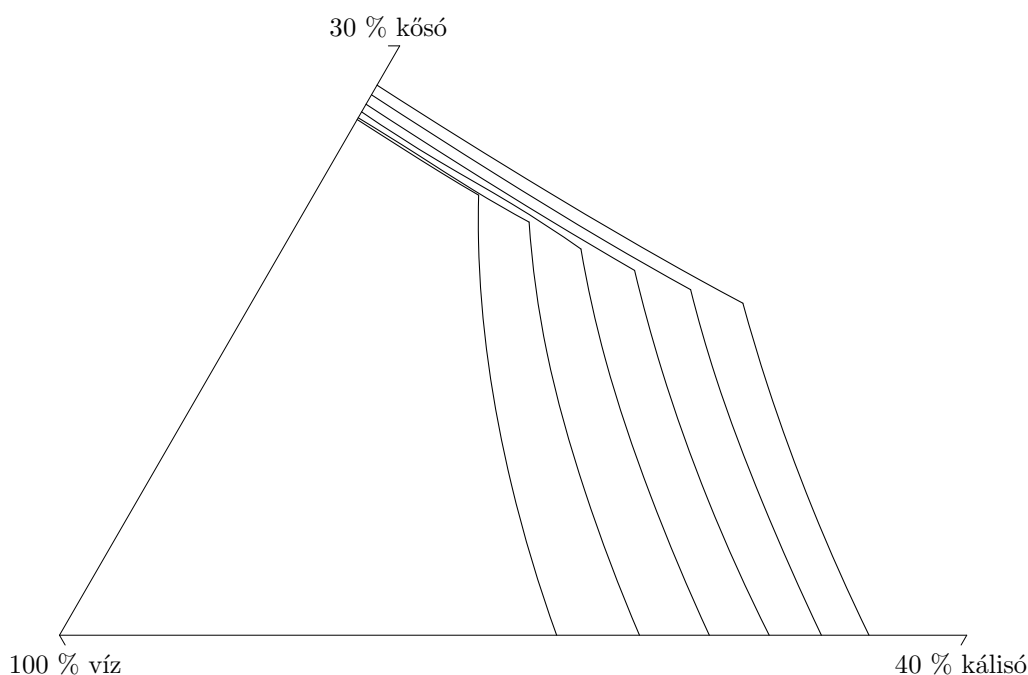
de az elv érdekes. A kálisó oldhatósága elég erősen változik a hőmérséklettel, a kősóé nem. Ha a keverék egy részét forrón vízben oldjuk, majd lehűtjük, kősó nem is válik ki, csak kálisó. Ha most ezt az oldatot felmelegítjük, és újabb keveréket próbálunk meg benne oldani, csak a kálisó oldódik, kősó nem, mert arra telített az oldat. Ha éppen megfelelő mennyiségű keveréket próbálunk meg oldani, akkor minden kálisó feloldódik, és gyakorlatilag tiszta kősó marad vissza, lehűtéskor viszont tiszta kálisó válik ki. Így szét tudjuk választani a két anyagot. Persze a szétválasztás nem tökéletes, mert sem az oldáskor, sem a kristályosítás után az anyalúgot nem tudjuk tökéletesen elválasztani a szilárd anyagtól. Mindkét só kristályosítással tovább lehet tisztítani. A pontos munkához a szétválasztandó keverék összetételén kívül a két só együttes oldhatóságát is ismerni kell.



2.5.4. ábra: kősó és kálisó oldhatósága vízben

** A 2.5.4. ábra 100 °C-on ábrázolja a két só együttes oldhatóságát. A háromszög bal alsó csúcsa a tiszta víznek, a jobb alsó a tiszta kálisónak, a felső pedig a tiszta kősónak felel meg. A megtört görbe vonal a két só együttes oldhatósági görbéje. A töréspont a mindkét anyagra telített oldatnak felel meg. Az innen kiinduló két egyenes között mindkét sóra telített oldat van kálisóval és kősóval. Ez alatt a rész alatt kálisó van kálisóra telített, de kősóra telítetlen oldattal, felette pedig kősó kősóra telített, de

kálisóra telítetlen oldattal. A megtört görbe vonal felső szakasza kősóra telített, kálisóra telítetlen oldat, alsó fele pedig kálisóra telített, kősóra telítetlen oldat összetétele. A megtört görbe vonaltól a víznek megfelelő csúcsig tartó rész telítetlen oldatnak felel meg. Minden pontnak egy összetétel felel meg: ahányszor közelebb van az adott pont a szembelevő oldalhoz, mint egy adott tiszta anyagnak megfelelő csúcshoz, annyiszor kevesebbet tartalmaz az adott anyagból a tiszta anyagnál. A segédvonalak segítségével könnyen leolvashatjuk a százalékos összetételt.



2.5.5. ábra: kősó és kálisó oldhatósága vízben változó hőmérsékleten

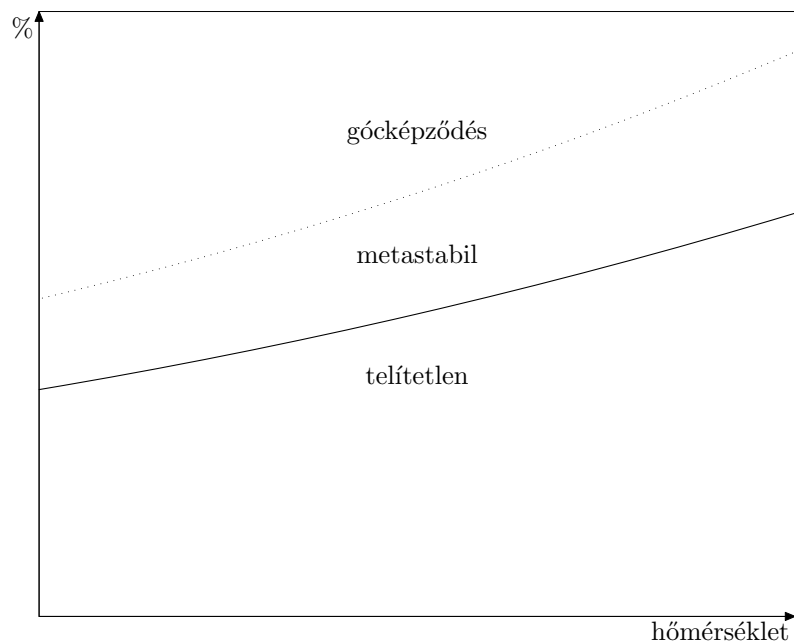
A hőmérséklet csökkenésével az oldhatóságok csökkennek, a megtört görbe vonal a víznek megfelelő csúcs felé mozdul el. A 2.5.5. ábra 0, 20, 40, 60, 80 és 100 °C-ra ábrázolja a megtört görbe vonalakat, kinagyítva a tiszta víznek megfelelő csúcs környezetét. Az áttekinthetőség kedvéért az egyeneseket és a segédvonalakat elhagytuk. Látható, hogy a kősó oldhatósága sokkal kevésbé csökken, mint a kálisóé. Az ábra 1 atm-ra vonatkozik. Ha a hőmérsékletet harmadik koordinátának (dimenzióknak) tekintjük, amely mondjuk a papír síkjára merőlegesen befelé csökken, akkor a megtört görbe vonal mozgása egy felületet rajzol ki. Természetesen 100 °C felett illetve 0 °C alatt az ábra bonyolultabb lenne, megjelenne a gőz, illetve a jég, és ezzel újabb felületek. Például a mindkét sóra telített oldat fagyáspontja $-22,9$ °C, alacsonyabb, mint a kősó, illetve a kálisó eutektikus hőmérséklete, és persze jóval alacsonyabb, mint a legalacsonyabb fagyáspontú kősó-kálisó keverék fagyáspontja (658 °C, 43,94 % kősó; a kősó olvadáspontja 800 °C, a kálisóé

775 °C). És még a nyomás hatását figyelembe se vettük, ehhez egy negyedik dimenzió (koordináta) kellene! Szerencsére az oldhatóságok a nyomással kevésbé változnak. Most is érvényes a fázisszabály:

$$\text{fázisok száma} + \text{szabadsági fokok száma} = \text{anyagok száma} + 2,$$

de most az anyagok száma 3. Például a mindkét sóra telített oldat fagyáspontja ugyan kicsit megváltozik a nyomás csökkentésével, de valahol $-22,9\text{ °C}$ közelében van egy „ötös-pont”, ahol mindkét sóra telített oldat, gőz, jég, és még kétféle szilárd anyag van jelen, de a szabadsági fokok száma nulla: a nyomás megfelel a jég gőznyomásának ezen a hőmérsékleten, és az egyetlen, általában változó összetételű fázis, az oldat összetétele is adott: kálisóra és kősóra is telített ezen a hőmérsékleten és nyomáson. Ha telítetlen oldat az egyetlen fázis, akkor a kálisó és a kősó koncentrációja, a hőmérséklet és a nyomás is változhat. Ha három fázis: oldat, szilárd kősó és kálisó is van jelen, akkor a mindkét anyagra telített oldat összetétele a hőmérséklet és a nyomás megadásával adott, stb.

** □



2.5.6. ábra: túltelítés

2.5.8. Kísérlet. Hogyan növeszthetünk nagy kristályokat? A kristályokkal ugyanaz a helyzet, mint a gőzből kiváló apró cseppekkel: ahogy a kis cseppeknek nagyobb a

gőznyomása, ugyanúgy a kis kristályoknak nagyobb az oldhatósága, mert közelebb állnak az oldott állapothoz. Ezért a kristályok képződése nehezen indul meg. A helyzetet vázlatosan a 2.5.6. ábra ábrázolja. A folytonos vonal az oldhatósági görbe, ez alatt az oldat telítetlen, e fölött túltelített: ha vannak az oldatban kristályok, az oldott anyag azokra kiválik. Egy bizonyos, az oldott anyagra és az oldószerre jellemző túltelítettség felett a kis kristályok, „góccok” képződése megindul. Ezt jelzi a pontozott görbe. Ezt nem egy éles határként kell elképzelni, csak e felett a gócképződés gyors, pillanatok alatt sok apró kristály válik ki, alatta pedig lassú, esetleg hetekig nem képződnek kristályok, és ha keletkezik egy-két kristályka, azok fognak növekedni, nem képződnek újak. Az ilyen oldatot *metastabilnak* nevezzük; a szó azt jelenti, hogy „túl az állandóságon”. Tehát nagy kristályok keletkezéséhez a kevés kristálykát tartalmazó oldatot metastabil, azaz enyhén túltelített állapotban kell tartanunk. Ez kétféleképpen lehetséges: lassan hagyjuk lehűlni, vagy lassan elpárologtatjuk az oldószert. A természetben a szép ásványkristályok lassan lehűlő oldatokból vagy olvadékokból váltak ki. Például vulkánkitöréskor a gyorsan lehűlő láva nagyon finomszemcsés, apró kristályokból áll, míg a mélyben igen lassan lehűlő, lassan megdermedő láva akár centiméteres kristályokból. Azt is megmagyarázhatjuk, miért áll az eutektikum összekeveredett apró kristályokból? Ha valahol egy jégkristályka válik ki, a környezete túltelített lesz a sóra, így sókristályok kezdenek kiválni, amiktől az oldat túltelített lesz jégre, stb.

Nagy kristályok növesztéséhez számunkra az oldószert lassú elpárologtatása lesz a kényelmesebb. Legegyszerűbb, ha az oldatot — megsűrve, hogy ne maradjon benne sok apró kristály — egy befőttes üvegbe öntjük és egyenletes hőmérsékletű helyen hetekig, esetleg hónapokig állni hagyjuk. Hogy ne menjen bele por, és a párolgás is lassabb legyen, takarjuk le egy újságpapírral. Ha több réteg újságpapírt teszünk rá, és azt egy befőttes gumival lefogadjuk, a párolgás még lassúbb lesz. Ha papírtörölt használunk, a párolgás gyorsabb. A 2.5.7. fényképek közül a bal oldali kősó, a középső kálisó, a jobb oldali cukor így növesztett kristályait ábrázolja. Ha a kristályok elég nagyra nőttek, az anyalúgot leöntjük róluk, a kristályokat vastag papírrétegre kiöntjük, és papírral (legjobb a papírtörölt) gondosan leitatjuk róluk az anyalúgot, egyébként kis kristályok száradnak rájuk. Ennek az egyszerű kristálynövesztési módszernek a hátránya, hogy a kristályok nem teljesen szabályosak, hiszen lefelé nem tudnak növekedni. Ezen segíthetünk, ha időnként óvatosan megforgatjuk őket. Más anyagokkal is próbálkozhatunk: kálisóval, szalmiáksóval, kálsalétrommal, nátronsalétrommal, és még számtalan más anyaggal. Ha nátronsalétromot sikerül kristályosítanunk, megfigyelhetjük, hogy ha nyomtatott papírra tesszük, rajta keresztül a betűk duplán látszanak. Ennek a *kettőstörésnek* nevezett jelenségnek a magyarázatát az optika részben találhatjuk meg. □

2.5.9. Kísérlet. Ha sikerült nagy kősókristályokat növesztenünk, elvégezhetünk velük egy egyszerű kísérletet. Egy lángelosztó lapra tegyünk néhány nagy kristályt, és gázlángon melegítsük őket. Ha már nagyon forrók, akkor némelyik hangos csattanással szinte szétrobban, darabjai szerte repülnek. Tegyük fel egy szemüveget, hogy védjük a szemünket! A jelenség oka, hogy a nagyobb kristályok rendszerint anyalúgot zárnak magukba. Ez melegítve elpárolog, és a gőz nagy nyomása szinte szétrobbantja a kristályt. Apró kristályokkal megismételve a melegítést nem tapasztalunk ilyesmit. Ezért

tisztításakor gyors hűtéssel apró kristályokat igyekszünk előállítani, mert azok rendszerint tisztábbak. \square

2.5.10. Kísérlet. Még egy anyagot, ammonsalétromot fogunk kristályosítással előállítani. Ezt nitrogén műtrágyának használják. Kémiai neve ammónium-nitrát, és általában szinte tisztán is árulják ezen a néven. A csomagolásra rá van írva, hogy hány százalék a nitrogén tartalom (néha csak N tartalmat írnak), általában 34 %. A tiszta ammonsalétrom nitrogéntartalma 35 %, így látjuk, hogy az anyag majdnem tiszta. Ha nem kapunk ilyen tiszta anyagot, akkor „péti sót” vásároljunk. Ebben általában 70–80 % az ammonsalétrom. Mivel a nitrogéntartalom rá van írva, kiszámolhatjuk, hogy pontosan mennyi. A többi rendszerint a dolomit nevű ásvány pora. Nem egy ritka ásvány, ebből van a Gellérthegy és az egész Bakony. Először a péti sóból való ammonsalétrom előállítását fogom leírni. Az ammonsalétrom, mint általában a műtrágyák, nem tekinthető mérgezőnek, de azért ne kóstolgassuk. Veszélyesebb tulajdonsága, hogy táplálja az égést, és kb. 160 °C-tól elbomlik, a bomlástermékek veszélyesek! Ipari robbanóanyagként is használják, tisztán vagy 6 % tüzelőolajjal keverve. Szerencsére még ez a keverék is csak más robbanóanyagok erőteljes robbanásától robban fel, különben nem is árulnák az ammonsalétromot tisztán. Mindenesetre óvatosan bánjunk vele, ne melegítsük, és ne keverjük éghető anyagokkal. A péti só már nem robbantható, ez az egyik előnye.

A kristályosításnál azt használjuk fel, hogy a dolomit nem oldódik vízben, az ammonsalétrom viszont nagyon jól oldódik. Ezt, hogy *nagyon jól oldódik*, akkor szoktuk mondani egy anyagra, ha ugyanannyi súlyú oldószerben feloldódik. Ha legfeljebb 10-szer annyi oldószer kell, akkor azt mondjuk, hogy *jól oldódik*, ha legfeljebb 100-szor annyi, akkor *mérsékelten oldódik*, ha legfeljebb 1000-szer annyi, akkor *kevésbé oldódik*, ha legfeljebb 10000-szer annyi, akkor *alig oldódik*, ha még ennél is több, akkor *gyakorlatilag oldhatatlan*. Persze, ezek csak nagyságrendi kategóriák. A vegyész kristályosításnál azt szereti, ha az anyag jól oldódik, mert egyébként nagyon sok oldószer kell, vagy nagyon jól oldódó anyagoknál nagyon kevés, így nagyon tömény és nagyon kevés anyalúg lesz, amit nehéz elválasztani a kristályoktól. Az ammonsalétromból 100 g vízben 0 °C-on 118,3 g, 20 °C-on 192 g, 30 °C-on 241,8 g, 100 °C-on pedig már 871 g oldódik! Az eutektikus hőmérséklet $-16,9$ °C, itt 73,3 g oldódik. Az ammonsalétrom oldására grammonként 0,5 ml vizet fogunk számítani. Lemérjük a péti sót, kiszámítjuk, mennyi benne az ammonsalétrom, mennyi víz kell, és ennyi forró vizet adunk hozzá. A víz jó forró legyen, mert adott mennyiségű vízben ugyanannyi ammonsalétromot feloldva a hőmérséklet 25–27 °C-kal csökken, többet oldva még többel is. (Ezt is felhasználhatjuk hűtésre!) Itt tehát majdnem 50 °C-os lehűlésre számíthatunk. Hogy miért csak majdnem, az kiderül a következő kísérletből, amit ide be is iktathatunk. Az oldat nagyjából 22 °C-on lesz telített, ez alá nem szabad hűlnie. Tartsuk langyos helyen, vagy ha kristályok válnak ki, tegyük langyos helyre, hogy oldódjanak fel. Megpróbálhatjuk leszűrni, de nekem nem sikerült. Az ammonsalétrom kémiai reakcióba lép a dolomittal, és kicsit oldja azt, majd az oldatból újra finom por válik ki. Megpróbálkozhatunk azzal, hogy a csapadékos folyadékot hagyjuk állni: mivel az igen apró kristályok jobban oldódnak, mint a nagyobbak, lassan feloldódnak, és kiválnak a nagyobb kristályokra, ez azonban elég lassú folyamat, mert a folyadékokban lassú a diffúzió, különösen hidegen, melegíteni viszont

nem tanácsos az oldatot, mert akkor még jobban oldódik a dolomit. Ülepítéssel boldogulhatunk: fél-egy nap alatt a dolomit leülepszik. Leöntjük, azaz dekantáljuk az oldat tisztáját, majd egy másik edénybe a zavaros részt. Legegyszerűbb ezt úgy csinálni, hogy egy nagyobb edénybe egy kisebb, megfelelő méretű, lehetőleg lapos edényt teszünk. Ebbe öntjük a zavaros oldatot, és a nagyobb edényt lefedjük. Ha leülepedett, a kisebb edény egyik szélét megemelve, átöntjük a tiszta folyadékot a nagyba. A zavaros részt máshova öntjük. A sűrű csapadékot félretesszük, a zavaros résszel pedig megismételjük az ülepítést. Persze, lehet hogy még így is szűrünk kell a tisztáját, ha a tetején is úsznak szennyezések. Ha végül sikerült tiszta oldatot kapnunk, azt só-jég keverékben hűtjük és a kristályokat vászonzacskóval gyorsan leszűrjük. Legfeljebb nagyon kevés nagyon hideg vízzel lehet mosni, különben feloldódik. A tisztított ammonsalétromot persze nem száríthatjuk sütőben, hanem csak meleg helyen, száraz levegőben. A maximális szárítási hőmérséklet 100–110 °C. Ha a levegő relatív páratartalma 70 % alatt van, nem köt meg vizet. A dolomit port is kinyerhetjük többszöri *dekantálással* kimosva: bő vízzel felkavarjuk, ülepítjük, és leöntjük a tetejét. Ha egy dekantálással mondjuk a 9/10-ét sikerül az ammonsalétromnak eltávolítani, akkor hatszori dekantálással már csak a miliomod része marad. Néhányszor megismételve a dekantálást tehát kimossuk belőle az ammonsalétromot, majd (akár sütőben) megszáritjuk. Tisztább ammonsalétrommal teljesen hasonlóan járunk el, de persze a leszűrt szennyeződést eldobjuk.

Biztosan volt akinek feltűnt, hogy a kősó oldásakor nem észlelünk hőmérsékletváltozást, és az oldhatósága nem nagyon nő a hőmérséklet növelésével, a kálisó oldásakor lehűlést tapasztalunk, az oldhatósága nő a hőmérséklet növekedésével, az ammonsalétrom oldásakor erős a lehűlés, és az oldhatósága nagyon gyorsan nő a hőmérséklet növelésével. Ez speciális esete a kémia egyik fontos alapelvének, a *Le Châtelier-elv*nek. E szerint ha a körülményekben változás áll be, akkor az egyensúly úgy tolódik el, hogy csökkentse a változást. Itt a hőmérsékletet növelve azoknál az anyagoknál, amelyeknek az oldódása hőfelvétellel jár, idegen szóval *endoterm*, nő a feloldott anyagmennyiség, ezzel csökkentve a hőmérsékletváltozást. Van néhány anyag, amelynek az oldódása hőleadással jár, idegen szóval *exoterm*. Ezeknek az oldhatósága a hőmérséklet növelésével csökken, és melegítésre részben kiválnak az oldatból, ami hőelvonással jár, így csökkenti a hőmérsékletet. Általában is, ha egy reakció egyensúlyra vezet, akkor a hőmérséklet növelése endoterm, a csökkentése exoterm irányba tolja el az egyensúlyt. Jelentős térfogatváltozással járó reakciók a nyomás növelésére a térfogatcsökkenéssel — és így nyomáscsökkenéssel — járó irányba, nyomáscsökkentésre viszont fordítva tolódnak el, gondoljunk például a forrásra.

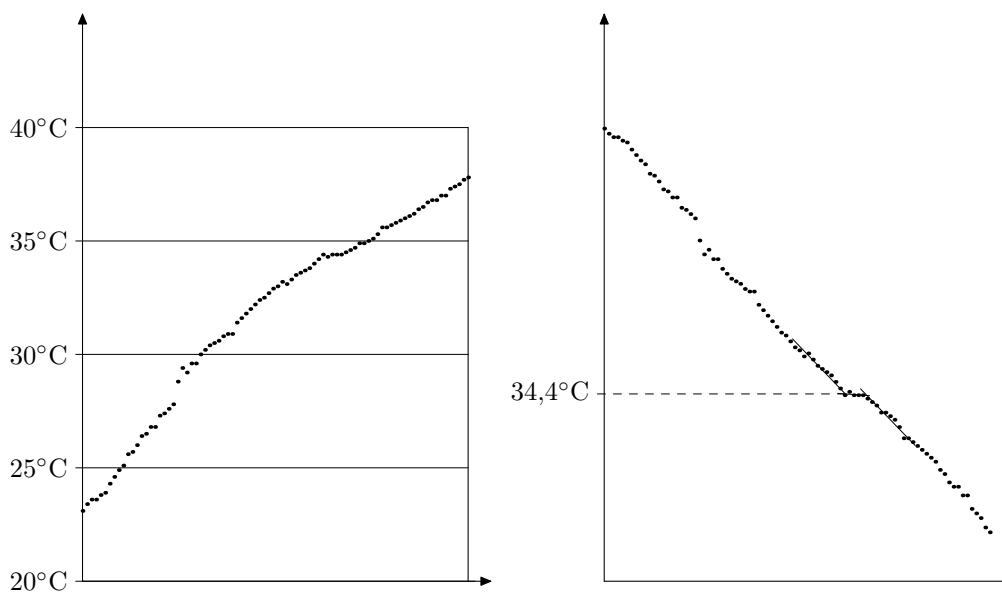
A forrásnál pontos összefüggést is találtunk erre, a Clapeyron-egyenletet. Kémiai folyamatokra is hasonló összefüggést lehet találni. ** Az oldódásra az alábbi összefüggés érvényes:

$$\frac{\Delta c}{c} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H}{KT},$$

nagyon hasonlít a Clapeyron-egyenletből forrásnál a nyomásváltozásra kapott összefüggésre. Itt c a koncentráció, legtöbbször g/l-ben, Δc a változása, H az oldáshő valamilyen adott anyagmennyiségre. A K konstans arányos ezzel az anyagmennyiséggel, függ az oldószertől és az oldott anyagtól. Meghatározható a minden kémiai változásra érvényes általános összefüggésből, amivel a kémia részben foglalkozunk. Ügyelnünk kell az oldáshő

előjelére: a forrásnál a forráshőt pozitívnak vettük, pedig a forrás endoterm folyamat. Itt is ezt a megállapodást kell követnünk: a hőmennyiséget a rendszer szempontjából kell vennünk, ha a rendszer hőt vesz fel — tehát ha az oldódás endoterm — akkor a hőmennyiség pozitív, és így lesz Δc is pozitív. **

2.5.11. Kísérlet. Az előző kísérlet során, amikor az ammónsalétromot oldjuk fel, de a szükségesnél még kevesebb vizet adtunk hozzá, beiktathatunk egy kísérletet. Kevergessük egy darabig a szilárd-folyadék keveréket, a zagyot, öntsünk le a folyadékból valamennyit (nem baj, ha piszkos), és mérjük meg a hőmérsékletét. Keverjük lehetőleg pontosan ugyanilyen hőmérsékletű vizet és adjuk az oldathoz. Az egész lehül. Nekem $19,3\text{ °C}$ -os oldatból 1046 g -hoz hozzákeverve $18,5\text{ °C}$ -os vízből 870 g -ot, a keverék hőmérséklete $13,8\text{ °C}$ lett. Az oldáskor tehát az összes oldáshőnek csak egy részét veszi fel az anyag akkor, amikor a már majdnem telített oldatban feloldódik (ez a tulajdonképpeni oldáshő). A többi részét csak akkor, amikor hígítjuk. Ezt a részt *hígításhőnek* nevezzük. Ha már elég híg az oldat, a további hígításkor csak jelentéktelen mértékben történik hőfelvétel. Az összes felvett hő a *teljes oldáshő*. □



2.5.8. ábra: ammónsalétrom átalakulása I

2.5.12. Kísérlet. Az ammónsalétrom kristályai többfélék lehetnek: más szerkezetűek a kristályok -18 °C alatt, -18 és 32 °C között, 32 és 84 °C között, 84 és 125 °C között, és 125 °C felett az olvadáspontig, 169 °C -ig. Ezt a jelenséget *többalakúságnak*, idegen szóval *polimorfíának* nevezzük; a görög poli sokat, a morf pedig alakot jelent. Ha már van tiszta ammónsalétromunk, azt melegítve kényelmesen megfigyelhetjük ezt a változást, mert — mint a Le Châtelier-elv alapján várhatjuk — endoterm, azaz hőelnyelő

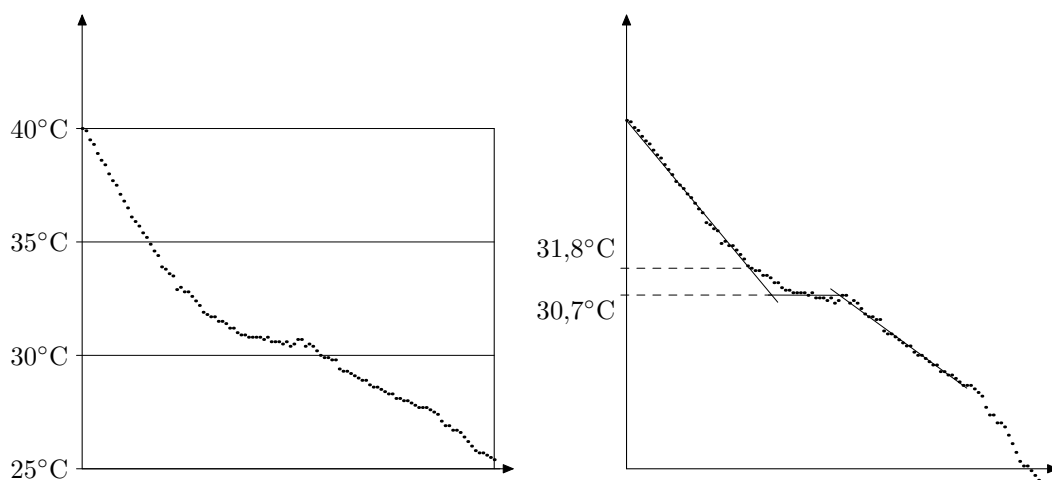
folyamat. Legkönnyebb a 32 °C-on lejátszódó változást megfigyelni, de esetleg a 84 °C-on lejátszódóval is megpróbálkozhatunk, ha van megfelelő hőmérőnk. Feljebb ne menjünk, mert az anyag bomlik, mérgező gázokat fejleszt, megtámadja a fémeket! Egy kisebb befőttes üvegbe tiszta, száraz ammónsalétromot teszünk néhány centiméter vastagon, és a közepébe egy hőmérőt állítunk. Gondosan lezárjuk a csavaros fedéllel. Egy lábasba betesszük a háromágú alumínium csillagot, vizet, és egy hőmérőt. A vizet 10–15 °C-kal a várt átváltozási hőmérséklet fölé, például 45 °C-ra melegítjük, majd beleállítjuk a befőttes üveget. A fűtést igyekezzünk úgy szabályozni, hogy a külső hőmérséklet lehetőleg végig állandó legyen. Ha a belső hőmérő elérte a 25 °C-ot, félpercenként leolvassuk a belső hőmérsékletet és feljegyezzük, egészen kb. 40 °C-ig. Ekkor kiöntjük a víz nagy részét, vízvezetéki víz hozzáadásával 10–15 °C-kal az átváltozási hőmérséklet alá, például 20 °C-ra állítjuk a víz hőmérsékletét és igyekszünk itt tartani, miközben félpercenként leolvassuk a belső hőmérőt. Mindkét görbét ábrázoljuk.

Az én mérésemet a meleg vízben (45,8 °C) a 2.5.8. ábra mutatja. Bal oldalon vannak a mért értékek. Nem könnyű észrevenni a melegedés megállását, de a 34,4 °C-os hőmérséklet négyszer is előfordul: az utolsó három egymás mellett, az első és a második között van egy 34,3 °C-os érték is. Tehát az átalakulás 34,4 °C-nál van. Mivel a melegedés sebessége egyre csökken, hiszen az ammónsalétrom hőmérséklete egyre közelebb van a vízfürdő hőmérsékletéhez, nincs értelme egyenest illeszteni a mérési pontokra, hiszen nem várjuk, hogy egyenesen legyenek. Ehhez előbb valami ügyes trükkkel ki kellene „egyenésíteni” a felmelegedési görbét. A lehülésre-felmelegedésre vonatkozó törvényszerűséget, Newton hőkiegyenlítődési törvényét használjuk fel. E szerint a hőmérséklet különbséget a Ca^x függvény írja le. Ezt (vagy az ellentettjét, ha $C < 0$) „kiegyenesíthetjük”, ha (akármilyen, például tizes alapú) logaritmusát vesszük:

$$\lg(Ca^x) = \lg C + x \lg a, \quad \text{ha } C > 0.$$

A bal oldalon a „kiegyenesített” adatok szerepelnek. A szóban forgó öt pontra, a közvetlen előttük levő, és a közvetlen utánuk levő tíz-tíz pontra is illesztettem egyenest.

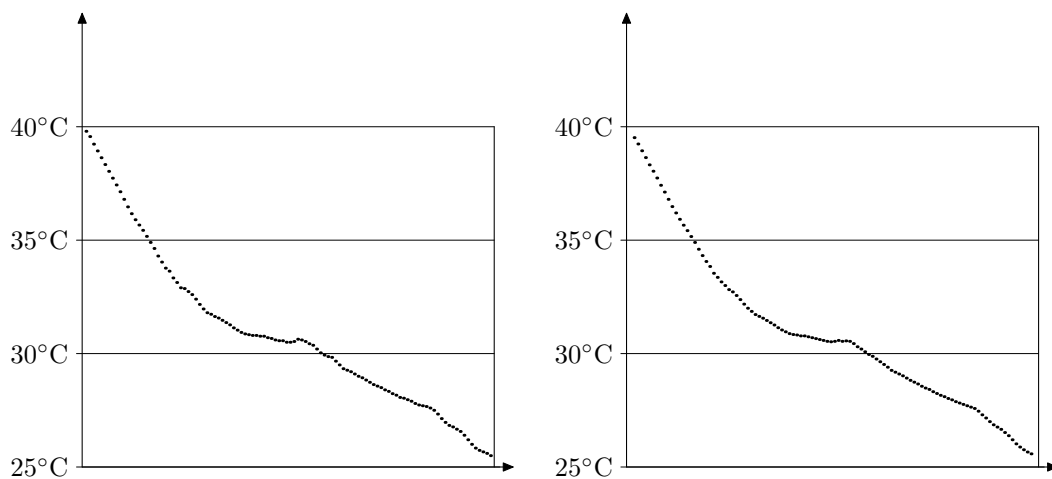
A hideg vízben a mérést kicsit másként végeztem. Nem próbáltam a hideg víz hőmérsékletét állandónak tartani, ami elég nehéz lenne, csak megmértem a mérés kezdetén (16,8 °C) és a végén (18,8 °C). Az ammónsalétrom első mért hőmérséklete 43,3 °C volt, az utolsó pedig 25,4 °C, így a csökkenés 17,9 °C. A vízfürdő hőmérséklete közben 2,0 °C-kal nőtt. A kettő aránya majdnem pontosan 9:1. Ez az arány csak a hőkapacitásoktól függ, így az ammónsalétrom és a vízfürdő kezdeti hőmérsékletének különbségét, 26,5 °C-ot ilyen arányban kell szétosztani a lehülés és a felmelegedés között, így a vízfürdő végső hőmérséklete, amikor beáll a hőmérsékleti egyensúly, 2,65 °C-kal a kezdő hőmérséklet felett lesz, azaz 19,45 °C-ot várhatunk. Mindkét hőmérséklet ehhez közeledik a lehülési törvénynek megfelelően változó sebességgel. A 2.5.9. ábra ábrázolja a mért adatokat, a bal oldalon a mérés szerint, a jobb oldalon pedig „kiegyenesítve”. A mérés kezdetén a hőmérséklet még emelkedett, nyilván az üveg és az ammónsalétrom külseje még melegebb volt, mint a belseje, így az első néhány mérési adatot nem ábrázoltam. Egy helyen négy egyforma adatot találunk. A vízszintes szakasz illesztéséhez ezt a négy adatot (mindegyik 30,8 °C), az előttük lévő hármat, és az utánuk lévő 11-et használtam fel. Az ettől



2.5.9. ábra: ammonsalétrom átalakulása II

jobbra lévő ferde egyenest a következő 31 pontra illeszttem. Mivel a görbe láthatóan elhajlik az egyenestől, a balra lévő ferde egyenest az első 33 pontra illeszttem, és 8 pontot kihagytam.

A mérések alapján annyit mondhatunk, hogy az átváltozási hőmérséklet valahol $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ és $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ között van. A pontos mérést nyilván akadályozza, hogy az ammonsalétrom hőmérséklete nem mindenütt egyforma, és hogy az átváltozás nyilván némi késleltetéssel, túlhűtéskor, illetve túlhevítéskor következik be. A ferde egyeneseknek a majdnem vízszintessel egyenessel vett metszéspontjai távolságát megmérve, megbecsülhetnénk az átváltozási hőt is.



2.5.10. ábra: ammonsalétrom átalakulása III

* Mit tudunk csinálni, ha nem tudunk olyan trükköt, amivel a mért görbét „kiegyesíthetjük”, de a mérési pontatlanságok nagyon zavaróak? Segíthet a *simítás*. Minden mérési pontot a bal és a jobb szomszédjával kiátlagolunk: az első és a második koordinátáknak is vesszük az átlagát, és ezzel helyettesítjük. Így persze a két szélső pont elvész. Az 2.5.10. ábra bal oldalán az előző ábra mérési adatait látjuk ilyen három pontos simítás után, a jobb oldalon pedig öt pontos simítás után, tehát amikor a pontot két-két bal illetve jobb oldali szomszédjával átlagoltuk. Ezután könnyebb az eredményeket „szemmértékkel” értékelni. Persze, kettő, négy, illetve ötnél több pontos simítást is használhatunk, vagy többször is simíthatunk egymás után, de ne vigyük túlzásba, mert a görbe minden jellegzetessége eltűnik! *

Az ammonsalétromnak ezt a kristályszerkezet változását nem szeretik az iparban, mert térfogatváltozással is jár, amitől a csomagolás szétrepedhet. Azért szoktak $\approx 3\%$ mészsálétromot hozzákeverni, hogy a kristályszerkezet változását megelőzzék. Egyébként a térfogatváltozást is felhasználhatjuk észlelésre: valamilyen, az ammonsalétrommal nem reagáló folyadékkal, például paraffinolajjal vagy szilikonolajjal tele töltjük az üveget, bedugjuk egy átfúrt dugóval, és a csőben a térfogatváltozást figyeljük. A melegítés így akármilyen lassú lehet. \square

2.5.13. Kísérlet. Meg tudjuk-e határozni, hogy mekkorák a dolomit szemcsék? Igen, az ülepedési sebességükből. ** Stokes képlete szerint az η viszkozitású folyadékban egy r sugarú kis gömb v sebességgel való mozgásához $F = 6\pi\eta rv$ erő kell. Vegyünk egy $d = 1$ mm átmérőjű szemcsét. Ezt közelítőleg gömbnek tekintve, sugara $r = 0,5$ mm. Térfogata $4\pi r^3/3 = 0,0005\pi/3$ cm³. Ezt szorozva a sűrűségével, ami a dolomitnál $\approx 2,85$ g/cm³, megkapjuk a ráható súlyerőt pondban. Ha viszont a víz sűrűségével szorzunk, a felhajtóerőt kapjuk meg. A kettő különbségével szorozva kapjuk a keresett mozgató erőt:

$$F = \frac{0,0005 \cdot \pi \cdot 1,85}{3} \text{ p} = \frac{0,0005 \cdot \pi \cdot 1,85 \cdot 9,81}{3} \text{ mN.}$$

Innen 20 °C-on

$$v = \frac{F}{6\pi\eta r} \approx \frac{0,0005 \cdot 1,85 \cdot 9,81}{18 \cdot 0,0005} \text{ m/s} \approx 1 \text{ m/s;}$$

felhasználtuk, hogy a víz viszkozitása ≈ 1 mN·s/m². Ha a szemcse átmérője kétszer, háromszor, ... kisebb, akkor a térfogata nyolcszor, huszonhétszer, ... kisebb, és ennyiszor kisebb a ráható erő is. Viszont a sugár is kisebb, amivel osztani kell, így végeredményben az ülepedési sebesség négyszer, kilencszer, ... kisebb. ** Összefoglalva, a dolomithoz hasonló sűrűségű (2,85 kg/l) közetszemcséknél ≈ 1 m/s az 1 mm átmérőjű szemcsék ülepedési sebessége. Ahányszor nagyobb a szemcsék sűrűsége és a víz sűrűsége közötti különbség, mint 1,85 kg/l, annyszor nagyobb az ülepedési sebesség. Ha a szemcse átmérője kétszer, háromszor, ... kisebb, akkor az ülepedési sebessége négyszer, kilencszer, ... kisebb.

Ennek alapján finom közetszemcséket, csiszolóport és egyéb porokat nagyság szerint szétválogathatunk. Ha például a 0,01 mm-nél finomabb dolomit port akarjuk kiválogatni, akkor annak ülepedési sebessége 0,1 mm/s alatt lesz. Az összes port beöntjük

egy magas hengerbe, például levágott tetejű műanyag palackba, felöntjük vízzel, jól felkeverjük, majd 2000 s-ig hagyjuk ülepedni, és aztán a felső 20 cm-t leöntjük egy másik edénybe. Persze a finom por egy része, ami közel volt a henger aljához, leülepedett. Ezért megismételjük ezt a lépést. Nyolc-tíz ismétlés után gyakorlatilag az összes 0,01 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsét eltávolítottuk. Egy másik ülepítés-sorozatban csak 500 s-ig várva különválogathatjuk a 0,02 mm-nél kisebb szemcséket, stb.

2.5.14. Kísérlet. Az előző kísérlet szépséghibája, hogy a víz viszkozitását nem mi határoztuk meg. Meg tudnánk-e ezt tenni? Igen, legalábbis egy durva becslést tudunk adni. ** Vegyünk egy 2–3 cm hosszú vékony horgászszinór-darabot (damilt). Én 0,3 mm átmérőjűt használtam. Egy pohár vízben vízszintesen elhelyezve és elengedve, úgy, hogy lehetőleg vízszintes helyzetben essen, mérjük meg az esés sebességét. Én ezt 1 cm/s-nak találtam. Ezek a horgászszinórok egy *poliamid*, másként *nylon* nevű műanyagból készülnek (jele: PA). Ennek a sűrűsége 1,14 kg/l. Számítsuk ki az esési sebességet. Tekintsük úgy a szinórt, mint sok egymás melletti kis, 0,3 mm átmérőjű golyót, és tegyük fel, hogy ezek esése nem zavarja egymást (ez durva közelítés). Mivel a sűrűségkülönbség 1,85 kg/l helyett csak 0,14 kg/l, az 1 mm átmérőjű golyó esési sebessége $\approx 13,2$ -ször, a 10/3-szor kisebb átmérőjűé $13,2 \cdot 100/9 \approx 147$ -szer kisebb, mint 1 m/s. Én nagyjából másfélszer ennyit találtam, ami annak felel meg, hogy a viszkozitás nagyjából másfélszer kisebbnek mértem, mint a valódi. Azért durva becslésnek megfelel.

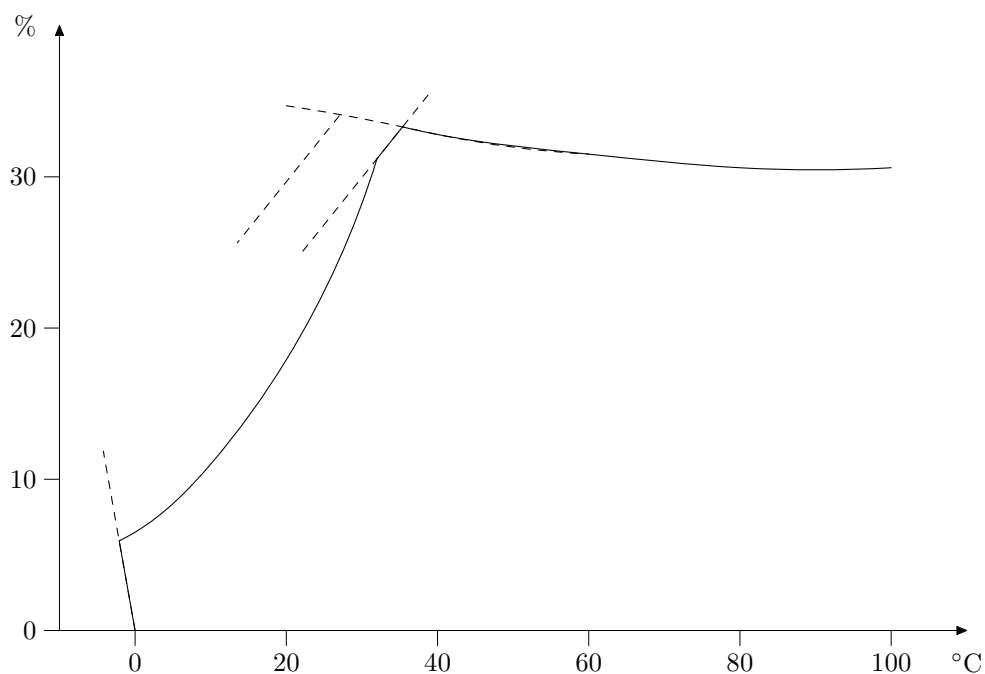
Persze sokan azt fogják mondani, hogy csak növeltük a szépséghibát, mert tudnunk kellett, miből van a horgászszinór, és táblázatból vettük a sűrűségét. Meg tudnánk-e magunk mérni? Első pillantásra nehéznek tűnik, mert kicsi a súlya, egy egyszerű trükkel mégis boldogulhatunk. Tegyük tömény sóoldatba, amiben egy csepp mosogatószer is van (a buborékok ellen): úszik. Higítsuk fel vízzel a sóoldatot. Ha túlságosan felhígítjuk, elsüllyed. Apránként öntögetve a sóoldathoz a vizet és mindig gondosan elkeverve, elérhetjük, hogy a szál éppen lebegjen. (Ahogy csökken a sóoldat sűrűsége, egyre lassabban jön fel a szál.) Most a sóoldat sűrűsége éppen annyi, mint a damil sűrűsége. Mérjük meg a sóoldat sűrűségét! Egy üvegbe 189,5 g sóoldat illetve 167,7 g víz fért. Így a sűrűség 1,13 kg/l. ** □

2.5.15. Kísérlet. Ehhez a kísérlethez vásároljunk szódát. Mint „környezetbarát” mosószert árulják. Ha nem sikerül hozzájutnunk, vegyünk szódabikarbónát, ez akár gyógyszerárban is kapható, és egy tányéron tegyük be vagy 200 g-ot a sütőbe. (A legtöbb sütőben az egyes fokozat 50 °C, a kettős 100 °C, a hármas 150 °C, stb.) Rozsdamentes tepszi vagy teflon bevonatú edény is használható, de vigyázzunk, semmi esetre se érjen a teflon edény alumínium alapanyagához, mert megmarja. Melegítsük fel vagy 200 °C-ra. (Ha porcelán edényt vagy hőálló üvegedényt használunk, akár a sütők maximális, 350 °C-os hőmérsékletét is használhatjuk.) Ezen a hőfokon elbomlik, és szóda lesz belőle, még hozzá sokkal tisztább, mint a vásárolt szóda. A szóda lúgos anyag, maró, bár nem túl veszélyes (a mosogatógépekben használt mosogatószereknek fő alkatrésze és a mosóporokban is előfordul). Ha véletlenül a szemünkbe kerülne, bő vízzel gondosan mossuk ki. Oldata lassan az üveget is megmarja, nem bántja viszont a PE vagy PP edényt, ezért ilyenben célszerű tartani. Kristályosítani szeretnénk. Mindenféle edényt, eszközt használhatunk, amit mosogatógépben lehet mosogatni. Készítsünk 30 %-os ol-

datot: mérjük meg a szódát, számítsuk ki, mennyi víz kell hozzá, és mérjük ki azt is. Figyeljük meg, hogy az oldáskor melegszik. Az oldáshoz nem kell nagyon felmelegíteni, ennyi már $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on is feloldódik, viszont sokkal több akkor sem, ha nagyon felmelegítjük. Legjobb, ha $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra melegítjük PP edényben, vízfürdőben. Ha nem oldódott fel mind, adjunk még hozzá egy kevés vizet. Mivel a nagy darabok rendkívül lassan oldódnak, oldás előtt rongyba vagy újságpapírba csavarva törjük finom porrá kalapáccsal, esetleg szitáljuk át egy leselejtezett levestűrőn. Még egyszerűbb, ha van turmixgépünk vagy botturmiszunk: a vízzel kásává keverjük és úgy oldjuk. Ha zavaros az oldat, melegen szűrjük meg. Hűtsük le $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra. Elég nehezen válnak ki a kristályok. Szűrés vagy centrifugálás után megmérve a kivált kristályokat, valószínűleg azt kapjuk, hogy több, mint az eredetileg feloldott szóda! Nekem például 1705 g szódából 1785 g kristály képződött. Hogyan lehetséges ez? A magyarázat az, hogy a kivált úgynevezett kristályszóda elég sok vizet tartalmaz. Itt a víz is résztvesz a kristályképződésben, úgynevezett *kristályvíz*. Minden molekula szódára 10 molekula kristályvíz jut. A kristályvizet tartalmazó anyagokat *hidrátoknak* szokás nevezni, mégpedig az egy molekulára jutó vízmolekulák számát a szám görög nevével adják meg, így beszélünk mono-, di-, tri-, tetra-, penta-, hexa-, hepta-, okta-, nona-, deka-, undeka-, dodeka-, trideka-, tetradeka-,... hidrátról. A szóda dekahidrátyában $\approx 63\%$ a víz. Ha a sütőben $200\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on szárítjuk, ahogy a szódabikarbónára leírtuk, elveszti kristályvizét és vízmentes szóda lesz. Egyébként a kristályosítás anyalúgja $6\text{--}10\%$ -os szódaoldat. \square

2.5.16. Kísérlet. Ha megnézzük a 2.5.11. ábrát, a szóda oldhatósági görbáját, igen furcsának tűnik (a szaggatott vonalakat egyelőre hagyjuk figyelmen kívül). Az még csak érthető, hogy a bal oldali eutektikus pont ($5,93\%$, $-2,10\text{ }^{\circ}\text{C}$) alatt van egy visszahajló szakasz, ez a telítetlen szódaoldat fagyáspont görbéje. Azonban az oldhatósági görbe többször megtörik: az első töréspont $31,2\%$, $32,00\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál van, onnan már lassabban növekszik az oldhatóság. A második törésponttól, ami $33,3\%$, $35,37\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál van, már egyenesen csökken az oldhatóság! Az is feltűnhet, hogy bár eleinte gyorsan nő az oldhatóság, az oldáskor mégis felmelegedést tapasztaltunk. Erre mindjárt megkapjuk a magyarázatot, ha a kapott kristálysódából megpróbálunk valamennyit vízben oldani: lehűlést tapasztalunk. A vízmentes szóda oldódása két lépésből áll: első lépésben felveszi a kristályvizet, ami jelentős hőleadással jár, majd feloldódik, ami viszont hőfelvétellel. A kristályszóda oldódásakor csak az utóbbi lépés van. A töréspontok magyarázata, hogy az első és második töréspont között a szóda heptahidrátként kristályosodik, a második töréspont felett viszont monohidrátként. (Vízmentes szóda csak a normál nyomásnál nagyobb nyomáson és $112,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ felett válik ki oldatból.) Ezt ki lehetne mérni, ha a megfelelő hőfokon kivált szódakristályokat kiszárítva, meghatároznánk a víztartalmukat. Ehhez csak azt kell tudni, hogy a monohidrátként 106 g vízmentes szódára 18 g víz jut, a heptahidrátként hétszer ennyi, stb. A monohidrátként oldódáshője már negatív, így az oldhatósága a hőmérséklet növelésével csökken. Magunk is meg tudnánk határozni az oldhatósági görbe töréspontjait, és a vízmentes szóda meg a dekahidrátként oldáshőjét. A kétféle oldáshő különbsége megadja a szóda *hidratációs hőjét* is, amit a vízfelvételkor lead. Ezeknek a kísérleteknek a leírása a könyvsorozat kémia kötetében megtalálható.

A mérések alapján megérthetjük a szóda oldhatóságának furcsa menetét. Alacsony



2.5.11. ábra: szóda oldhatósága

hőmérsékleten az oldat a dekahidráttal van egyensúlyban. Mivel a dekahidrátnak az oldáshője erősen pozitív, a hőmérséklet emelésével az oldhatóság erősen nő. 32,00 °C felett az oldat a heptahidráttal van egyensúlyban, aminek az oldáshője pozitív, de már nem annyira. Itt az oldhatósági görbe már nem olyan meredek. Végül 35,37 °C felett az oldat monohidráttal van egyensúlyban, aminek az oldáshője már negatív, így az oldhatóság a hőmérséklet növelésével csökken.

* Tulajdonképpen nem ilyen egyszerű a helyzet. A heptahidrátnak az oldhatósági görbéje meghosszabbítható majdnem egyenesen. Ezt szaggatottan rajzoltuk be. Az e fölötti töménységű oldatokból heptahidrátnak is kiválhat — például heptahidráttal való beoltáskor —, bár a heptahidrátnak ezen a hőmérsékleten nem stabil, hanem *metastabil* („túl a stabilitáson”). Ugyancsak meghosszabbítható a monohidrátnak az oldhatósági görbéje balra (szintén szaggatottan van berajzolva). E fölötti töménységű oldatokból monohidrátnak is kiválhat. Van még egy szaggatott vonal, ami a monohidrátnak szaggatott vonalából indul ki. Ez egy másféle kristályszerkezetű heptahidrátnak felel meg, ami semmilyen hőmérsékleten nem stabil. Végül ha a dekahidrátra túltelített oldatot sikerül az eutektikus pont alá úgy lehűtenünk, hogy nem indul meg a kristályosodás, akkor jég válhat ki az oldatból. Ezt is egy szaggatott görbe jelzi. *

De milyen oldáshő számít az oldhatósági görbe növekedése vagy csökkenése szempontjából? A telített oldat keletkezésénél fellépő oldáshő? Vagy a lehető leghígabb oldat keletkezésénél mért, a hígítási hő is magába foglaló oldáshő? Egyik sem, hanem a már majdnem telített oldat telítetté válásánál fellépő oldáshő. Ez is megmérhető, lásd a kémia részben. \square

2.5.17. Kísérlet. A kristálysózával megvizsgálhatjuk a túltelített oldatok képződését is. Adjunk nagyon jól megtisztított kémcsőben 10 g kristálysózához 4 ml desztillált vizet. Először a sódat tegyük a kémcsőbe, majd a vizet fecskendőből úgy spricceljük a kémcső falára, hogy a sódat teljesen belemossa a kémcsőbe. Dugjuk be a kémcsövet egy vattadugóval, majd 50 °C-os vízfürdőben melegítsük fel. Ha tökéletesen feloldódott a sóda, akkor a lehető legnyugodtabban, rázkódástól mentesen engedjük a kémcsövet lehűlni. (Ha szennyezések vannak az oldatban, akkor jobb, ha még melegen átszűrjük egy másik kémcsőbe, vigyázva, hogy a kémcső falára ne kerüljön oldat.) A lehűléstől nem válnak ki kristályok. Egy bot végét előzőleg nedvesítsük meg a még meleg szódaoldattal, majd engedjük megszáradni. Tele lesz apró kristályokkal. Ha ezt hozzáértetjük a kihűlt oldat felszínéhez (beoltás), azonnal megindul a kristályosodás. \square

2.5.18. Kísérlet. Ha a kristálysózából valamennyit hosszabb ideig állni hagyunk a levegőn, lassan elporlik: a dekahidrátból monohidráttá képződik. Mi ennek a magyarázata? Tudjuk, hogy a szilárd anyagok oldata magasabb hőfokon forr, mint a tiszta oldószer. Ez azt jelenti, hogy a gőznyomás az oldat felett kisebb, mint a tiszta oldószeré. Ennek megfelelően ha például szódaoldat vízgőzzel telített levegővel érintkezik, akkor vizet szív, és felhigul. Minden töménységre megvan az a páratartalom, amivel az oldat egyensúlyba van. Ha a páratartalom ennél magasabb, akkor vizet szív az oldat, ha alacsonyabb, akkor pedig víz párolog el belőle. Az egyensúlyi páratartalom annál kisebb, minél töményebb az oldat. Például normál hőmérsékleten a telített szódaoldat 89 %-os relatív páratartalmú levegővel van egyensúlyban. Ezzel a kristálysóda is egyensúlyban van, sőt, egészen 76 %-os relatív páratartalomig nem veszít vizet. Ez alatt viszont vizet veszít, egészen addig, amíg a fölötte lévő levegő páratartalma 76 %-ra nem nő, vagy az összes dekahidráttát át nem alakul monohidráttá. A monohidráttá stabil egészen 20 % relatív páratartalomig. Ez alatt vizet veszít, és vízmentes szódává alakul. Miért relatív páratartalmat adtunk meg? Azért, mert a kristályvíz elpárolgása hasonló a víz párolgásához. Azt is a Clapeyron-egyenlet írja le, és a kristályból való párolgás párolgáshője hasonló a víz párolgáshőjéhez, így a relatív páratartalomként megadott egyensúlyi határok nem nagyon változnak a hőmérséklettel. Például a telített szódaoldattal egyensúlyban lévő relatív páratartalom 20 °C-on 91 % és 30 °C-on 87 %. Persze, a sódánál 32 °C felett dekahidráttá már nem létezik, helyére a heptahidráttá lép, majd 35,37 °C felett már csak monohidráttá létezik. Egyébként azokat az anyagokat (akár oldatokat is), amelyek a szokásos 50–60 % relatív nedvességtartalmú levegőből nedvességet szívnak, *nedvszívónak*, idegen szóval *higroszkóposnak* nevezzük. A fentiek szerint a vízmentes sóda nedvszívó, a monohidráttá nem. \square

2.5.19. Kísérlet. A túltelítés más anyagok oldatainál is gyakran tapasztalható. Nem csak szilárd anyagok oldatainál, hanem gázoknál is. Gondoljunk a szódaavizből, kólából, sörből lassan kipezsgő szén-dioxidra.

Jól tanulmányozható a túltelítés a glaubersó oldatánál. Glaubersót — általában vízmenteset, vagy ahogy mondják, szárítottat — gyógyszerárban kaphatunk. Mint a szódánál, két teljesen tiszta kémcső mindegyikében oldjunk fel kristályos dekahidrátból 10 g-ot 4 g vízben. A vízzel a kristályokat mossuk be a kémcső faláról. 40 °C-os vízfürdőben, a kémcsöveket vattadugóval bedugva végezzük az oldást. Ha nem maradt oldatlan anyag, hagyjuk a kémcsöveket lehűlni, egyébként forrón szűrjük egy másik kémcsőbe. Az egyik kémcsőbe ha már lehült, mártsunk egy pálcát. Néha már ettől megindul a dekahidrátkiválás. Hagyjuk a pálcán az oldatot megszáradni, majd oltuk be vele az oldatot. Azonnal megindul a dekahidrátkristályosodása. A másik kémcsövet hagyjuk 48 óráig állni. Általában magától metastabil heptahidrátkristályosodik ki.

Ha szárított glaubersót kaptunk, azt kell tudnunk, hogy 142 g vízmentes glaubersó és 180 g víz van 322 g dekahidrátban. A kristályos glaubersó „olvadáspontját” felhasználhatjuk hőmérőnk kalibrálására. □

2.5.20. Kísérlet. Túltelítési kísérletek végezhetőek még fixírsóval és nátrium-acetáttal. Az elsőből 10 g pentahidráthoz 4 g víz kell, a másikkból 10 g trihidráthoz 5–6 g víz. Mindkét esetben ez nagyjából annyi, amennyi éppen ellepi a kémcsőben a kristályokat. Az oldást 100 °C-os vízfürdőben végezhetjük. Érdekes, hogy ha „keresztben” próbáljuk meg beoltani az oldatokat, nem indul meg a kristályosodás. Csak azonos, vagy nagyon hasonló kristályszerkezetű anyagok alkalmasak a beoltásra, legalább is nehezen kristályosodó oldatoknál. Például azt tapasztalták, hogy még soha elő nem állított, új anyag kristályosodása először nem akart megindulni. Később, amikor a labor már „szennyezett” volt az anyaggal, könnyen ment a kristályosítás. □

2.5.21. Kísérlet. A gipsz a természetben kétféle formában fordul elő: az egyik a dihidrát, amiben 136 g vízmentes gipszre 36 g víz jut, a másik az *anhidrit*, ami vízmentes gipsz (az idegen szó azt jelenti, hogy vízmentes). Boltban is kaphatunk gipszet, úgynevezett *égetett gipszet*, kétfélet is, *modellgipszet* és *stukatúrgipszet*. Nagyon hasonlóak, bár kristályszerkezetük eltér, mindkettő *hemihidrát*; a *hemi* görög szó azt jelenti, hogy fél. Persze fél vízmolekula nem létezik, arról van szó, hogy a hemihidrátban két gipszmolekulára jut egy molekula víz. Bármelyik jó lesz nekünk, olcsó anyag, vegyünk 1–2 kg-ot. Építkezéseknél már az ókori egyiptomban is használták: vízzel keverve 10–15° alatt megszilárdul. Vegyünk egy pénzérmét vagy más érmét. Vékonyak kenjük be vazelinnal, zsírral vagy vajjal. Tegyük egy kis doboz (legjobb a PE) lapos aljára. Valamennyi gipszet keverjük össze vízzel, hogy folyós de nem túl híg pép legyen, és öntsük a pénzdarabra. Hamarosan megszilárdul, és ha kivesszük a dobozból és kibányásszuk belőle a pénzdarabot, pontos lenyomatát adja a pénznek. Gipszpéppel például állatnyomokat vagy más nyomokat is kiönthetünk. Pontosan kiadja a formát, mert megszilárdulásakor kb. 1%-kal kitágul. Használható lyukak kitöltésére, szegek, kampók begipszelésére, stb. Ha azt szeretnénk, hogy lassabban szilárduljon meg, adjunk hozzá zselatin vagy asztalosenyv oldatot (az asztalosenyv szennyezett zselatin). Külső munkákra a gipsz nem alkalmas, mert rosszul ugyan, de oldódik vízben: 20 °C-on 2,036 g/l, 30 °C-on 2,090 g/l, tehát az oldhatósága nem nagyon függ a hőmérséklettől. Természetesen a maradék gipszpépet soha ne öntsük a lefolyóba, még sok vízzel se, mert megköt, és eltömi a lefolyót! □

2.5.22. Kísérlet. Miért szilárdul meg a gipszpép? Tegyük egy műanyag tölcsérben

lévő szűrőpapírra 10 g égetett gipszet. A közepébe készítsünk bemélyedést és ebbe öntsünk lassan 20–30 g vizet, hogy a víznek a gipszen kelljen átszivárogni. A lecsepegő oldatot fogjuk fel egy átlátszó műanyag edényben. Néhány perc, de lehet hogy csak egy-két nap múlva a tiszta oldatból kristályok kezdenek kiválni: ezek a dihidrát kristályai. Nekem csak két nap alatt váltak ki a kristályok, de cm méretű tűkben. A hemihidrát jobban oldódik vízben, mint a dihidrát: kb. 8 g egy literben. A kiváló dihidrát kristályok sűrű szövedéke okozza a gipszpép megszilárdulását. A zselatin akadályozza a kristályok növekedését. \square

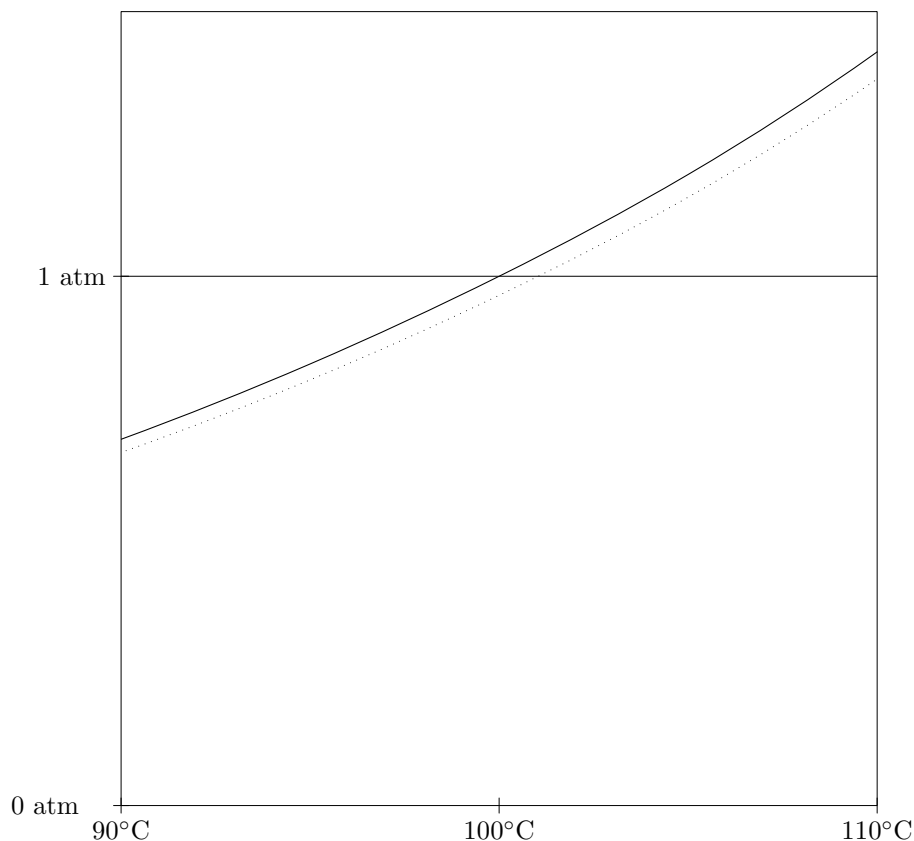
2.5.23. Kísérlet. Ha van kékgalicunk, végezzünk el vele néhány kísérletet. (Szőlő permetezésére és nyomelem műtrágyának használják.) Mindenesetre óvatosan kezeljük, mert mérgező! Egy fehér kistányéron terítsünk ki vagy 25 g-ot (mérjük meg, pontosan mennyit), és szárítsuk sütőben 250 °C-on. Először halványodni kezd, majd fehér porrá esik szét. A súlyából 25 g kb. 9 g-ot veszít. (Nekem 25,3 g 8,6 g-ot veszített.) Talán elbomlott? Nem, a legtöbb anyag elbomolva sötétedik. Leheljünk rá: kékes színű lesz. Csak a kristályvizét veszítette el. Tegyük mellé vizet és borítsuk be egy lábassal. Pár nap alatt visszanyeri kék színét és eredeti súlyát. A magyarázat, hogy az eredeti anyag pentahidrát. Melegítve trihidrát, majd monohidrát képződik, ezek egyre halványabb színűek. Végül vízmentes só képződik, amely fehér. Más anyagok is vannak, amelyeknek kristályvízzel más a színe. \square

2.5.24. Kísérlet. A vízmentes kékgalic felhasználható arra, hogy vizet mutassunk ki vele. Például a fehér porból egy keveset denaturált szeszbe szórva megkékül, míg vízmentes szeszben nem. \square

2.5.25. Kísérlet. Mint az oldatoknál tapasztaltuk, ha valamilyen nem párolgó anyagot oldunk fel vízben, az oldat forráspontja emelkedik, fagyáspontja pedig csökken. Híg oldatoknál ez jó közelítéssel arányos az 1 kg oldószerben oldott mólok számával, és vizes oldatokra a forráspontnövekedés 0,51 K/(mol/l), a fagyáspontcsökkenés pedig 1,86 K/(mol/l).

Akármiilyen oldószerben oldjunk fel valamilyen anyagból egy keveset. Ha x az oldószer móltörtje az oldatban (azaz az oldószer móljainak száma osztva az összes mólok számával), akkor az oldatból kilépő oldószer molekulák száma arányos lesz x -szel. Így az oldószer parciális nyomása a gőztérben arányos lesz x -szel, amíg x közel van 1-hez, azaz az oldat híg. Ez *Rault törvénye*. A forráspontemelkedés és a fagyáspontcsökkenés is ezen múlik. (Vannak olyan elegyek, amelyekre ez minden x -re érvényes, a másik komponens gőznyomására is. Ezek az *ideális elegyek* ritkák, csak akkor lépnek fel, ha a két összetevő kémiaiilag nagyon hasonló.)

** A forráspontnövekedést könnyebb megérteni. A víz móltömege 18,016 g. Ez azt jelenti, hogy 1 l víz $\approx 55,5$ mol. Ha mondjuk c mol nem párolgó anyagot oldunk fel 1 l vízben, akkor a molekulák $\approx c/(55,5 + c) \approx c/55,5$ -ed része nem fog elpárologni, a vizet mintegy „felhígítottuk” a párolgás szempontjából, és 100 °C-on a gőznyomás $p = 1$ atm helyett $\Delta p \approx c/(55,5 \text{ mol/l})$ atm-val kisebb lesz. Csak ha növeljük a hőmérsékletet, akkor éri el a 1 atm nyomást. (Lásd a 2.5.12. ábrát. A víz gőznyomásgörbéje folytonos,



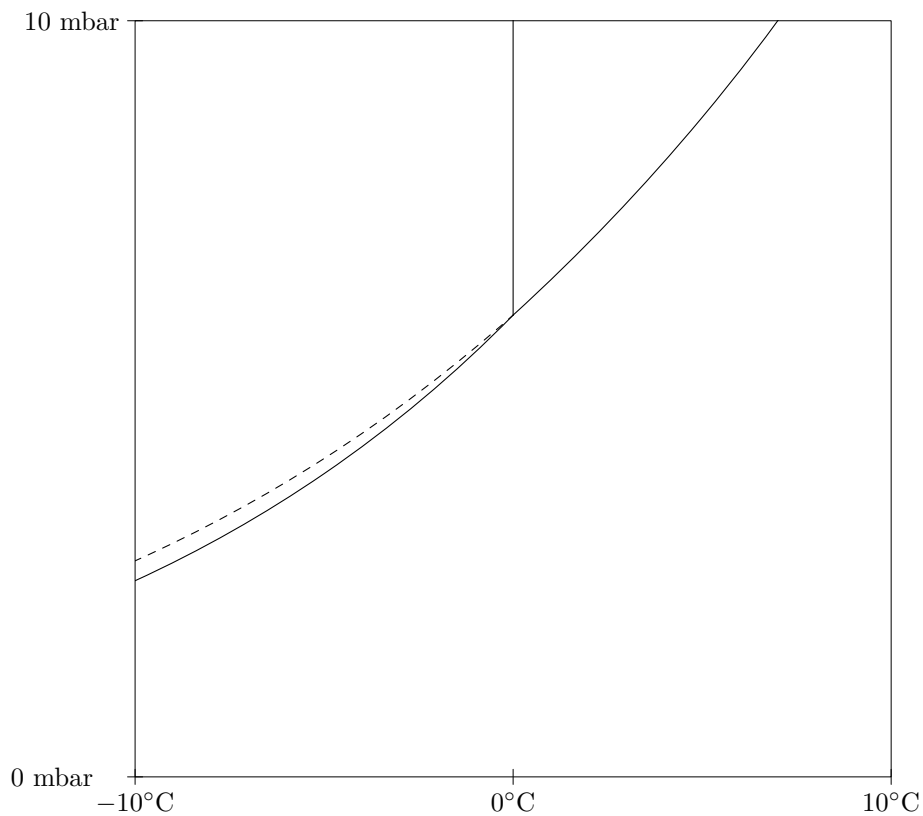
2.5.12. ábra: a víz állapotábrája, részlet

az oldaté pontozott vonal.) De tudjuk, hogy

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H}{KT},$$

ahol H a párolgáshő, és vízre $H/(KT) \approx 13,1$ a $T = 373,15$ K forrásponton. Innen $\Delta T \approx T \cdot c/(13,1 \cdot 55,5 \text{ mol/l})$, arányos a mol/l-ben mért koncentrációval, és az arányossági tényező $0,51 \text{ K/(mol/l)}$. A közelítés nyilván annál pontosabb, minél kisebb a koncentráció.

A gondolatmenet a fagyáspontcsökkenésre bonyolultabb. Először azt kell megértenünk, miért van egyáltalán fagyáspontcsökkenés. Egy légmentes edénybe tegyünk elég sok oldatot. A víz egy kis része nyilván elpárolog. Ha a hőmérséklet a víz hármaspontjának megfelelő $T = 273,16$ K, akkor a gőznyomás kisebb, mint a víz p gőznyomása a hármaspontján, mert az oldat gőznyomása $\Delta p \approx p \cdot c/(55,5 \text{ mol/l})$ -rel kisebb, mint p . Jég nem lehet jelen, mert annak — tiszta vízből állván — a gőznyomása p lenne, tehát



2.5.13. ábra a víz állapotábrája, részlet

elpárologna, a gőz pedig lecsapódna az oldatba. Ha csökkentjük a hőmérsékletet, a tiszta víz gőznyomása Δp_1 -gyel csökken,

$$\frac{\Delta p_1}{p} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H_1}{KT},$$

ahol H_1 a tiszta víz párolgáshője. Még gyorsabban csökken a tiszta jég gőznyomása:

$$\frac{\Delta p_2}{p} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H_2}{KT},$$

ahol H_2 a tiszta jég párolgáshője, ami az olvadáshővel nagyobb a tiszta víz párolgáshőjénél. A 2.5.13. ábrán a túlhűtött víz gőznyomását szaggatott vonal, a víz és a jég gőznyomását pedig folytonos vonal jelzi. Így valamikor az oldat gőznyomása egyenlő lesz a tiszta jég gőznyomásával, és ekkor indul meg a tiszta jég kiválása. Ez akkor következik be, amikor $\Delta p + \Delta p_1 = \Delta p_2$, azaz $\Delta p = \Delta p_2 - \Delta p_1$. (Lásd a 2.5.14. ábrát, ahol pontozott

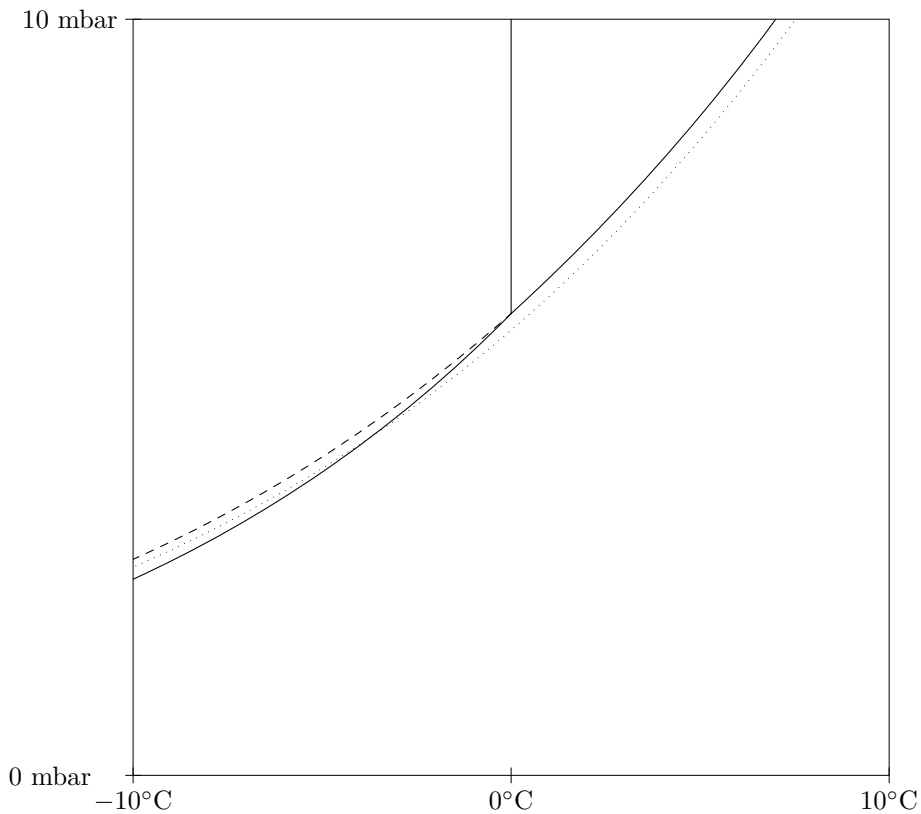
vonala jelzi az oldat gőznyomását.) De

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta p_2 - \Delta p_1}{p} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H_2 - H_1}{KT},$$

ahol $H = H_2 - H_1$ a jég olvadáshője. Innen

$$\frac{c}{55,5 \text{ mol/l}} \approx \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{H}{K \cdot T},$$

tehát $\Delta T \approx cT^2K/(H \cdot 55,5 \text{ mol/l})$ arányos a mol/l-ben mért koncentrációval, és az arányossági tényező $H \approx 79,7 \cdot 4,1868 \text{ J/g}$, $K \approx 0,4616 \text{ J/(K}\cdot\text{g)}$ miatt $1,864 \text{ K/(mol/l)}$.
**



2.5.14. ábra a víz állapotábrája, részlet

Nézzük a kísérletet. Cukor móltömegét fogjuk meghatározni. Készítsünk kb. 15 %-os, de pontosan ismert töménységű cukoroldatot. Egy lapos műanyag tálba öntve, az oldat egy részét tegyük be a mélyhűtőbe, benne egy hőmérővel. Ha már -2 – -3 °C-os, és

még nem kezdtek el jégkristályok kiválni, kapargassunk bele egy kis jeget a mélyhűtő oldaláról. Ekkor megindul a jégkristályok kiválása, és a hőmérséklet kicsit emelkedik. Kevergessük a hőmérővel, és ha már nem emelkedik a hőmérséklet, olvassuk le. Megkapjuk a fagyáspontcsökkenést. Csináljunk egy második, pontosabb mérést is. Most csak $0,3\text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal engedjük az oldatot az előbb leolvasott fagyáspont alá hűlni, egyébként teljesen hasonlóan járunk el. Nekem $^{\circ}\text{C}$ fagyáspontcsökkenés adódott. Ahányszor ez kisebb $1,86\text{ }^{\circ}\text{C}$ -nál, annyszor kisebb az egy kilogramm vízre jutó mólok száma 1-nél. Mivel az 1 kg vízre jutó cukor tömegét ismerjük, kiszámolhatjuk a móltömeget. Például nekem adódott. Természetesen mérésünk rendkívül pontatlan, mert néhány tized fokos hőmérsékletkülönbséget akarunk $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ -os beosztású hőmérővel mérni. A vegyészek ehhez a méréshez olyan hőmérőt használnak, amelynek beosztása $0,01\text{ }^{\circ}\text{C}$, és $0,001\text{ }^{\circ}\text{C}$ még becsülhető vele. Pontos mérések szerint a cukor móltömege $342,30\text{ g}$. Pontoson ugyanígy határozhatjuk meg a szőlőcukor móltömegét, ami pontos mérések szerint $180,16\text{ g}$. Ha hozzájutunk karbamidhoz (műtrágya), annak a móltömegét is meghatározhatjuk: pontos mérések szerint $60,03\text{ g}$. Talán meglepő, de a szesz móltömegét is meghatározhatjuk vizes oldatának fagyáspontcsökkenése alapján, és pontos méréseknél $46,07\text{ g}$ adódik. Természetesen szesznél nem, de a többi anyagnál a forráspontemelkedés is használható. \square

Az ember azt hinné, a sók móltömegét is meg tudjuk határozni ezzel a módszerrel, azonban ez nem így van. A sók oldódáskor ionokra bomlanak, és az ionok külön-külön molekulaként viselkednek, így a valódi móltömegnek a felét, harmadát, stb. mérjük, attól függően, hogy a só egy molekulája hány ionra bomlott. Éppen azt bizonyítja a mérés, hogy a sók ionokra bomlanak.

2.5.26. Kísérlet. A forráspontemelkedést még sokkal nehezebbnek tűnik móltömeg meghatározására felhasználni, mint a fagyáspontcsökkenést. Van azonban egy nagyon szellemes módszer, amivel a forráspontnövekedést használhatjuk fel, még hozzá hőmérő nélkül, ha már néhány anyagnak ismerjük a móltömegét. Készítsünk az ismeretlen móltömegű anyagból ismert töménységű (de elég híg) oldatot, és töltsünk meg vele feléig-kétharmadáig egy kapillárist úgy, mintha forráspontmérést akarnánk végezni. Ugyanannak a kapillárisnak egy másik darabját (fontos, hogy egyforma átmérőjűek legyenek) töltsük meg feléig-kétharmadáig egy ismert móltömegű anyag ismert töménységű oldatával, például cukoroldattal. A két kapillárist nyitott végükkel egymás felé fordítva betesszük egy kicsit nagyobb átmérőjű kapillárisba, amennyire lehet, kiszivattyúzzuk a levegőt (például egy injekciós fecskendőt használva légszivattyúnak), és ebben az állapotban kihúzza leforrasztjuk a külső kapillárist. A víz a mol/l-ben mérve higabb oldatból addig párolog át (néhány nap alatt) a másik oldatba, amíg egyforma töménység nem lesznek. Hogy a víz hanyad része párologott át, azt egyszerűen hossz méréssel állapíthatjuk meg. Jó, ha az ismert anyag móltömege hasonló az ismeretlen anyagéhoz, például cukor mellett szőlőcukrot és karbamidot használhatunk.

2.5.27. Kísérlet. Van még egy jelenség, amit fel lehet használni móltömeg meghatározására, ez az *osmózis*. A kísérlethez szükségünk lesz egy peremezett szájú üvegtölcsérre és egy darab celofánra. Peremezett szájú üvegtölcsérnek én egy üveg „kotyogót” használtam. A celofán nagyon finom lyukacsokat tartalmazó finom hártya. A lyukacsokon a baktériumok és gombaspórák, de még a kolloidok szemcséi sem férnek át, a vízmolekulák

viszont igen: a celofán úgynevezett *félígáteresztő* hártya. A normál celofán víz hatására nedvesedik és gyorsan hullámosodik, íze édeskés. A páraátbocsátó képesség csökkentésére gyakran lakkozzák egyik vagy mindkét oldalán. A lakkozott celofán lakkozott oldaláról a víz leperog. Egy 80–90 °C hőmérsékletű vizet tartalmazó főzőpohár külső oldalához simítva, sem a lakkozott, sem a lakkozatlan oldal nem tapad. A hőképlékeny celofán egyik oldalán lakk, a másikon PE réteggel van bevonva. A PE bevonatról is leperog a víz, nem olyan fényes, mint a lakkozott oldal, a főzőpohár oldalához tapad. A fóliát beszakítva a szakadt celofán részek között látható a megnyúlt PE réteg. Kísérletünkben a lakkozás nem jelent gondot, de a PE réteg igen. Keressünk tehát olyan celofánt, amin nincs PE réteg. A tölcser szájára feszítsünk celofánt jó erősen odaerősítve befőttes gumikkal vagy zsineggel. Töltsük meg a tölcserkét tömény cukoroldattal, és felfüggesztve lógassuk egy tálka vízbe. A celofán minőségétől függően a víz lassan (akár egy napig is tarthat) pár centimétert felemelkedik a tölcser szárában. Ez az ozmózis. A vízmolekulák átjutnak a celofán lyukacsain, a cukormolekulák pedig nem. Mivel a tölcserben „hígabb” víz van, onnan kevesebb víz áramlik a tálba, mint fordítva.

Számoljuk ki, tökéletesen félígáteresztő hártyánál milyen nagy az ozmózisnyomás, ami felemeli a vizet a tölcser szárában. ** Gondolatban tegyük az egész elrendezést egy magas hengerbe, amiből kiszivattyúztuk a levegőt, csak vízgőz van benne. Várjuk meg, amíg beáll az egyensúly. Legyen az oldat magassága a tölcser szárában h . Ha A a keresztmetszet, akkor az oldat tömege a szárban $A \cdot h \cdot \rho_0$, ahol ρ_0 az oldószer sűrűsége; mivel az oldat híg, a sűrűségét egyenlőnek vehetjük a tiszta oldószer sűrűségével. Az oldat súlya hozza létre azt a nyomást, amely egyensúlyt tart a p ozmózisnyomással. A súlyt megkapjuk, ha a tömeget megszorozzuk a g gravitációs gyorsulással, ami attól függ, hol vagyunk. Így $p = Ah\rho_0g/A = h\rho_0g$. Meg szeretnénk határozni h -t. Legyen a tiszta oldószer gőznyomása a tálka felett p_0 . Ez a gőznyomás felfelé csökken, h magasságban már csak $p_1 = p_0 - h\rho_0g$, ahol ρ_0 az oldószer gőzének sűrűsége, amit állandónak veszünk, mivel a h magasság nem túl nagy. A p_1 gőznyomásnak meg kell egyeznie az oldat feletti gőznyomással, mivel egyébként másodfajú örökmozgó keletkezne. Az viszont Rault törvénye szerint $p_1 = xp_0$, ahol x az oldószer móltörtje az oldatban. Így $p_0(1 - x) = h\rho_0g$, amiből kifejezve h -t és beírva a p -re vonatkozó kifejezésbe, $p = \rho p_0(1 - x)/\rho_0$; a g kiesett, ahogy kell, mivel az eredmény nem függhet attól, hol vagyunk. Ha m_0 a gőz tömege, V_0 a térfogata, M_0 az oldószer móltömege, akkor az általános gáztörvény szerint

$$p_0V_0 = \frac{m_0}{M_0}RT,$$

ahonnan

$$\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{p_0M_0}{RT}.$$

Ezt behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$p = \rho(1 - x)RT/M_0.$$

Mivel ρ az egységnyi térfogatra jutó tömeg, ρ/M_0 az egységnyi térfogatra jutó mólok száma. (Az oldat híg, így átlagos móltömege közel M_0 .) Mivel $(1 - x)$ az oldott anyag

móltörtje, $(1-x)\rho/M_0$ az oldott anyag egységnyi térfogatra jutó móljainak száma, azaz a c koncentráció. ** Amit kaptunk, az van't Hoff törvénye:

$$p = cRT,$$

ahol c a koncentráció mol/l-ben. Az ozmózisnyomás nem függ az oldószertől. Ha V térfogatban n mol oldott anyag van, akkor $c = n/V$, és van't Hoff törvénye formailag teljesen megegyezik az általános gáztörvénnyel:

$$pV = nRT.$$

□

2.5.28. Kísérlet. A van't Hoff törvény mutatja, hogy az ozmózisnyomás általában nagyon nagy. Például az úgynevezett izotóniás (=egyenlő nyomású) sóoldat fagyáspontcsökkenése $0,52$ °C. Mint láttuk a levezetésben, az ozmózisnyomás a gőznyomáscsökkenéssel, így közvetetten a fagyáspontcsökkenéssel van kapcsolatban, és ilyen sóoldat ozmózisnyomása $6-8$ bar, a hőmérséklettől függően. Ez az elég nagy nyomás emeli fel a vizet a fák és más növények törzsében. Ha egy sebbe tiszta víz jut, ekkora nyomás feszíti belülről a még ép sejteket. Az izotóniás sóoldat, ami egyébként 9‰ -es, éppen olyan ozmózisnyomású, mint a sejtekben lévő folyadék. Ilyen sóoldatba keverik el az injekciók anyagát, így az injekció csak minimálisan roncsolja a sejteket. Nagyobb ozmózisnyomású oldat is káros a sejtek közötti térben: a sejtek folyadékot veszítenek, működésük sérül. Gondoljunk arra, hogy csíp, ha só jut egy sebbe.

Miért nem észleltük ezt az elég nagy ozmózisnyomást az előző kísérletben? A celofán igen-igen tökéletlen féligáteresztő hártya. A vegyészek tudnak sokkal jobbat készíteni, de vegyük inkább igénybe a természet készítményét. * A kísérlethez mikroszkópra lesz szükségünk. Egy lila hagyma egyik belső levelének külső héjából nyúzzunk le egy csi-pesszel egy nagyjából 5 mm átmérőjű darabkát. Tegyük egy tárgylemezre, cseppentsük le egy csepp vízzel, és tegyük rá egy fedőlemezt. Nagyjából 100 -szoros nagyításban jól látszanak a lila héj nagy sejtjei. Némelyik lila folyadékkal van tele, ezeket különösen könnyű megfigyelni. Cseppentsünk a fedőlemez egyik éléhez szemcseppentővel egy csepp tömény oldatot, például sóoldatot, a szemközti élhez pedig tartsunk egy papír-zsebkendő darabkát. A papír átszívja a folyadékot a fedőlemez alatt, és a lila sejtek némelyike „összemegy”, fala elválik a sejteket szétválasztó faltól. Többféle töménységű oldat „áthúzásával” is próbálkozhatunk. * □

Egyébként az izotóniás sóoldat fagyáspontcsökkenése $0,52/1,86 \approx 0,28$ mol/l-nek felel meg. Innen a só móltömegére $9/0,28 \approx 32$ g adódna, míg a valóságban $\approx 58,5$ g. Az eltérést az magyarázza, hogy két ionra bomlik.

2.5.29. Kísérlet. Ha valakinek nincs mikroszkópja, nagy „sejtet” kell vennie. Ilyen a tojás. A kísérlet lényege, hogy leoldjuk a tojás héját, majd tiszta vízbe tesszük. Ettől megduzzad. Ha sós vízbe tesszük, akkor újra kisebb lesz. Több helyen is olvastam ezt a kísérletet, de nekem nem volt szembetűnő a változás. Ezért így végeztem el: Egy tojást egy 1 dl-es pohárba tettem, és a poharat teleöntöttem erős, 20‰ -os ecettel. A tojás

héja pezsgés közben leoldódik. Egy nap múlva már alig pezsgett, de lemosva még volt rajta héj. Ezért friss ecetet öntöttem rá. Újabb egy nap múlva a héj teljesen leoldódott. Lemosva a tojást, előtűnt a vékony féligáteresztő hártya. A tojás lemérve 60,13 g volt. Visszatettem a kimosott pohárba, és csapvizet öntöttem rá. Két nap múlva megmérve a tömege 62,13 g lett. Bőségesen szórtam a vízbe konyhasót. Időnként befogva a poharat felfordítottam, hogy a sóoldat elkeveredjen. Újabb 2 nap múlva a tojást már csak 59,30 g-nak mértem. □

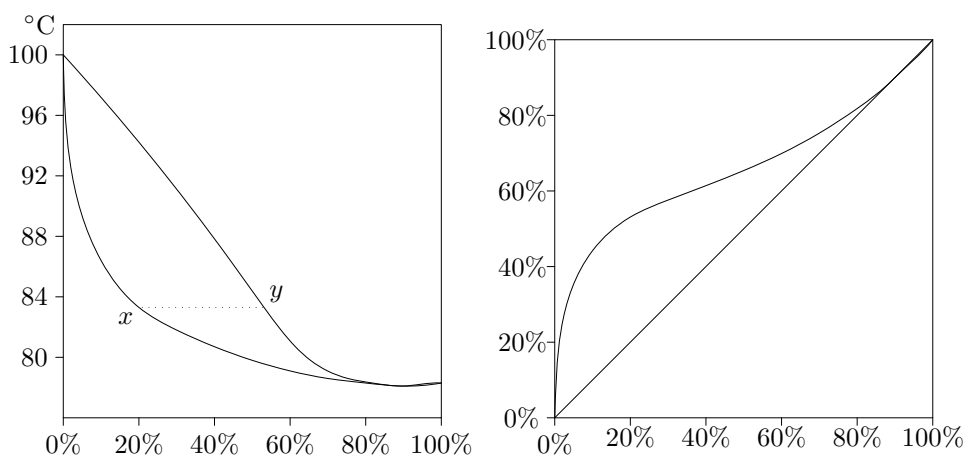
2.6. Lepárlás

2.6.1. Kísérlet. Öntsünk egy lábasba kevés vizet. Tegyük a lábasra egy fedőt, ha van üvegfedőt vagy jénai üvegtálat. Kezdjük lassan melegíteni a vizet. Egy egyébként tiszta, de a hajunkon kicsit bezsírozott üveglapra, például tárgylemezre tegyük egy cseppet a fedőre lecsapódott, desztillált vízből és mellé egy cseppet a csapvízből. A lemezt tegyük valamilyen fekete papírra, és a cseppeket hagyjuk beszáradni. Gyorsabban beszáradnak, ha egy (nem energiatakarékos) asztali lámpával melegítjük őket felülről. A desztillált víz cseppje nem hagy nyomot, vagy a nyom alig látható, a csapvíz helyén viszont fekete alapon jól látható fehér nyom marad: lásd a 2.6.1. fényképeket. Ezt a csapvízben lévő 1–2‰ oldott szilárd anyag okozza, ami a beszáradáskor visszamaradt. Így bármikor megállapíthatjuk, hogy egy folyadékban van-e valami szilárd szennyező anyag. Mivel sok kísérletnél a szennyezések zavarnak, desztillált vizet használhatunk. (Egyébként amit desztillált vízként árulnak, manapság legtöbbször nem desztillálással, hanem ioncserével készül. Hogy mi az ioncsere, azt lásd a könyvsorozat kémia részében. Az egyszerűség kedvéért desztillált vízről fogunk beszélni, akár desztillálással, akár ioncserével készült.) Szerencsére a desztillált víz elég olcsón kapható. Egy cseppet beszáritva ellenőrizhetjük, hogy elég tiszta-e? Már 1–2 μg szilárd maradék észrevehető! □

2.6.2. Kísérlet. Ismételjük meg az előző kísérletet, de most a lábasba vagy 2 dl vörösbort öntsünk. Tegyük a lábasra egy fedőt, egy kis tálka hideg vízbe pedig egy kis pohárkát. Kezdjük lassan melegíteni a bort. Lassan felforr, és a fedő alján színtelen cseppek gyűlnek össze. Ha már elég sok csepp van, vegyük le a fedőt, és megdöntve csurgassuk a pohárkába a cseppeket. Tegyük vissza a fedőt, és gyűjtsünk további *párlatot*. Nem kell sok. Kivételesen kóstoljuk meg a párlatot: nem lehet mérgező, hiszen élelmiszer. Olyasmí íze van, mint valami gyenge pálinkának. Tulajdonképpen az is, a neve *borszesz*. Egy kanálba öntve és megmelegítve megpróbálhatjuk meggyújtani. Nemigen fog sikerülni, de a gyufától esetleg valami ellobbanó lángot látunk. Amit csináltunk, az a *lepárlás*, idegen szóval *desztillálás* egy primitív változata. A borban van szesz, és a szesz alacsonyabb hőfokon forr, mint a víz. Kezdetben a párlatban több szesz van, mint a borban, de van benne víz is bőven. Viszont a borban lévő szilárd színező anyagok teljesen visszamaradtak. Ha a párlatot újra lepárolnánk, szeszben még töményebb lenne. Ezt most nem érdemes kipróbálnunk, de tökéletesebb berendezéssel visszatérünk rá. Azt hihetnénk, hogy többszöri lepárlással akármilyen tömény szeszt készíthetünk. Ez nem így van, 95,6%-nál töményebb szeszt nem tudunk készíteni, mert ennek a forráspontja

a legalacsonyabb, alacsonyabb, mint a 100 %-os borszeszé. Ez az úgynevezett *azeotróp elegy*; a görög szóösszetétel azt jelenti, hogy „forralásnál nem változik”. A maradék víztől csak kémiai úton tudunk majd megszabadulni. \square

2.6.3. Kísérlet. Állítsunk össze egy komolyabb desztilláló berendezést. Szükségünk van egy forralóedényre és egy hűtőre. Forralóedénynek nagyon jól megfelel egy régi kuktafazék. De jó egy nagyobb üveg, amit átfúrt dugóval dugunk be és alumínium háromszögre állítva vízfürdőben LASSAN melegíthetünk. (Ha 100 °C-nál nagyobb hőfok kell, használhatunk sóoldatot; szárítóanyagként kapható kalcium-klorid oldatával 180 °C-ig is felmelegíthetjük.) A dugóba jön egy rövid üveg- vagy fémcső, amihez műanyag (legjobb a szilikonumi) csővel kapcsolódik egy ferdén lefelé lejtő üveg- vagy fémcső, a *hűtőcső*. A hűtőcsövet rövid műanyag csővel csatlakoztathatjuk egy, a *szedőedény*be lazán illeszkedő átfúrt dugó üvegcsővéhez. Szedőedénynek megfelel egy kisebb üveg. Az egész berendezés ne legyen zárt, mert akkor a gőznyomás szétveti. 150 °C feletti forráspontnál a hűtőcsőnek elég lenne a levegő hűtő hatása. Ez alatt viszont vízűtést alkalmazunk. A legegyszerűbb, ha a hűtőcsőre egy papír vagy vászon szalagot tekerünk, és arra vizet csepegtetünk. A víz végigszivárog a szalagon, részben elpárolog, a maradék a szalag alsó, lelógó darabjáról csepeg le. Jó, ha a hűtőcsövet a szalag vége alatt becsírozzuk, még jobb, ha szilikonzsírral vagy olajjal kenjük be. A víz csepegését a gumicsövet egy *Hoffmann-szorítóval* összeszorítva szabályozhatjuk. Ez egyszerűen két, két helyen átfúrt faléc, amiket két csavarral szorítunk össze; köztük van a gumicső. Ha kész a berendezés, valamilyen szeszes folyadék, például hulladék bor desztillálásával nyerhetünk szeszt. (A vegyészek két üvegcsőből készült ellenáramú hűtőt használnak; lásd a kémia részt.)



2.6.2. ábra: vizes szesz állapotábrája

Vajon milyen tömény lesz az így kapott szesz? A 2.6.2. ábra bal oldala a vizes szesz állapotábrája 1 atm nyomáson. Az alsó görbe alatt csak folyadék van. Az alsó görbe a forráspontgörbe, ha a folyadékot melegítve ezt elérjük, a folyadék elkezd forrni. A felső görbe az úgynevezett *harmatpontgörbe*, e fölött csak gőz van. Ha a gőzt hűtve ezt

elérjük, a folyadék elkezd lecsapódni. Ha a két görbe között vagyunk, például az x és y pontokat összekötő szakaszon valahol, akkor 1 atm nyomáson két fázis van: az x állapotú folyadék és az y állapotú gőz. Ha a gőzt elvezetjük és cseppfolyósítjuk, akkor — mivel abban több a szesz — az x pont eltolódik a forráspontgörbén balra, és így vele együtt a harmatpontgörbén az y pont is. Végül amikor a folyadék szesztartalma már jelentéktelen, abbahagyhatjuk a lepárlást és a maradék moslékot (ez a neve a szeszgyártásban) kiönthetjük. Hogy amit kaptunk szesz az milyen tömény, attól függ, a kiindulási anyag milyen tömény volt. Ha 10–15 %-os borból vagy cefréből indultunk ki, akkor általában 30–40 %-os. Ezt újra lepárolhatjuk. Nem is érdemes tovább párolni, mint amíg a maradék ugyanolyan híg nem lesz, mint a kiindulási cefre, mert a maradékot a kiindulási anyaghoz adhatjuk. Pálinkafőzésnél általában 2–3 lepárlást használnak és 40–50 %-os szeszt kapnak. □

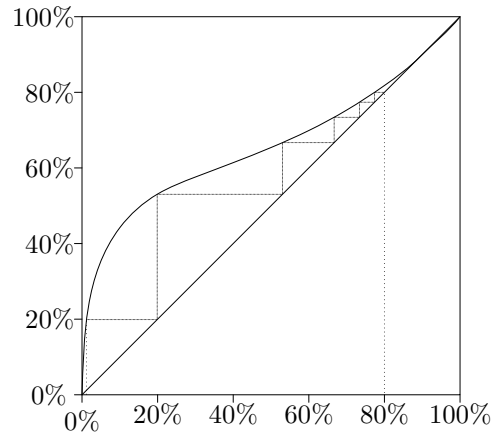
2.6.4. * Azeotrópos elegy. A következő táblázat a hőmérséklet függvényében adja meg az x és y százalékokat:

°C	x	y	°C	x	y
86,4	10,0%	44,2%	79,1	60,0%	69,9%
83,3	20,0%	53,1%	78,6	70,0%	75,3%
81,8	30,0%	57,6%	78,3	80,0%	81,8%
80,7	40,0%	61,4%	78,2	89,4%	89,4%
79,8	50,0%	65,4%	78,3	100,0%	100,0%

A táblázatot nézegetve feltűnő lehet, hogy a legalacsonyabb forráspont 78,2 °C, és ennél a folyadék és a gőz összetétele egyforma. Ezen az összetételen tehát akárhány desztillálással sem tudunk átjutni, ez változatlanul forró elegy. Ha ennél töményebb a szesz, akkor a gőz hígabb, mint a folyadék, ami elpárolog, az közelebb van az azeotropos összetételhez, mivel így kisebb a forráspontja.* □

2.6.5. Kísérlet. ** Nyilván nem kényelmes újra meg újra desztillálni valamit. Az ötlet az, hogy a felszálló gőz forralja a már desztillált folyadékot, miközben maga lecsapódik. Ez valósul meg finomítótoronyban. Ábrázoljuk az y gőzösszetételt az x folyadékösszetétel függvényében. Ez látható a szeszre a 2.6.2. ábra jobb oldalán. Berajzoltuk az átlót is. Az azeotropos elegynél a görbe az átló alá megy. Ebbe az ábrába rajzoltuk be a helyzetet ismételt lepárlásnál. A forralt x összetételű híg oldatból felszálló gőz összetételét a hozzá tartozó y adja meg: függőlegesen felmegyünk a görbéig. Az első lepárlás után ilyen összetételű folyadékot kapunk: vízszintesen elmegyünk az átlóig. Most ehhez az új x összetételhez a hozzá tartozó, függőlegesen felette lévő y adja meg a gőz összetételét; stb. A 2.6.3. ábrán látható, hogy 6 lepárlással — ha azok ideálisan működnek — 80 mól-százalék szesztartalmat érhetünk el. A további részleteket lásd ennek a könyvsorozatnak a kémia részében.

Tiszta szeszt kaphatunk gyógyszerárban is: a *legtöményebb szesz* 96 %-os, a *tömény szesz* 90 %-os, a *hígított szesz* 70 %-os. Nagyon drága, erősen megadóztatják, mert likőrt, pálinkát lehetne belőle készíteni. Sokkal olcsóbban kaphatunk *denaturált szeszt*. Ez is borszesz, amihez mérgező és nagyon rossz ízű anyagokat kevertek. Általában rá van írva, hogy hány százalékos, pl. 90 vagy 96. Lehet kapni ipari *vízmentes szeszt* is



2.6.3. ábra: vizes szesz finomítása

(néha *bioetanol* néven), ez közel 100, általában 99 %-os, de ez is ihatatlan és mérgező is, denaturálva van. Nekünk jó lesz a denaturált szesz is, nem meginni akarjuk. Már tudjuk, hogy tőmény borszesz és víz öszekeveredésénél felmelegedés és térfogatcsökkenés következik be, és hogy mindkettő arra mutat, hogy a víz és a borszesz molekulái erősen vonzódnak egymáshoz. Ez magyarázza az azeotróp elegy keletkezését is.

2.7. A molekulák mozgása

2.7.1. Kísérlet. Nem magyaráztuk meg Avogadro törvényét és az általános gáztörvényt. A pontos magyarázat elég bonyolult és a *statisztikus mechanika* adja meg, leg-egyszerűbb, ha elfogadjuk mint tapasztalati tényt. Számítógépes kísérletek segítségével adunk ennek a pontnak a további részében részletes magyarázatot.

Tudjuk, hogy egy m tömegű, v sebességű részecske mozgási energiája $E = m \cdot v^2/2$. Tegyük fel, hogy van egy téglatest alakú dobozunk. A hossz tengelyének irányát nevezzük x iránynak, a másik két szimmetriatengelyének irányát pedig y illetve z iránynak. Legyen benne egyetlen m tömegű (gömb alakú) részecske, amely v sebességgel mozog x irányban. Mekkora „nyomást” okoz ez a részecske? A részecske ide-oda verődik az x irányra merőleges, „bal oldali” és „jobb oldali” két fal között, és — mint az ablakon kopogó eső az ablakot — „nyomja” a falakat. Vizsgáljunk egy ütközést a jobb oldali fallal. Tegyük fel, hogy egy állandó F erő lassítja a részecskét Δt ideig, amíg meg nem áll (közben a fal kicsit benyomódik), majd ugyanez az erő ugyanannyi ideig gyorsítja visszafelé. Az ütközés folyamán a v sebesség $-v$ -re változik. A gyorsulás $a = -v/\Delta t$, az erő $F = ma$, és a falat nyomó erő (a hatás-ellenhatás törvénye szerint) $-F = mv/\Delta t$. Így $2\Delta t$ ideig $mv/\Delta t$ erő hat a falra.

Legyen a téglatest hossza az x irányban h , keresztmetszete pedig K . Mivel részecske $2h/v$ idő alatt fut egyszer ide-oda a két szembelevő fal között, időegység alatt $v/(2h)$ -szor ütközik a jobb oldali falnak. Így a jobb oldali falra időegység alatt $v\Delta t/h$ ideig

$mv/\Delta t$ erő hat, az átlagos erő tehát $mv^2/h = 2E/h$. (Látjuk, hogy az átlagos erő nem függ a Δt időtől. Megmutatható, hogy ugyanez az átlagos erő adódik akkor is, ha az ütközés során fellépő erő nem állandó.) Ha ezt elosztjuk a K keresztmetszettel, akkor az adódik, hogy az átlagos nyomás $p = 2E/(hK)$. Mivel $hK = V$, a térfogat, azt kapjuk, hogy $pV = 2E$. Most képzeljük el, hogy sok (gömb alakú) részecske van, mindegyik az x irányba mozog, de y és z koordinátáik különböznek, annyira, hogy nem ütköznek egymásnak. Mindegyik valamilyen p_i „parciális nyomást” hoz létre az E_i energiájának megfelelően, és ezek összeadódnak, így $pV = 2E = 2E_x$, ahol az E összes energia helyett azért írtunk E_x -et, hogy emlékeztessünk rá, csak x irányba történő mozgás energiájáról van szó.

Most következnek a számítógépes kísérletek. A doboz közepére teszünk egy „dugattyút”, egy mozgó válaszfalat. Ennek pontos tömege nem lényeges, de a molekulák tömegének nagyságrendjébe essék. A válaszfal ütközik a molekulákkal és maga is mozog. Kiszámoljuk, hogy ha az x tengely mentén mozgó m_1 tömegű v_1 sebességű, illetve m_2 tömegű v_2 sebességű gömb illetve dugattyú ütköznek, akkor a tökéletesen rugalmas ütközés után a sebességük

$$(1) \quad v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

illetve

$$(2) \quad v'_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

lesz. (Molekuláris szinten csak tökéletesen rugalmas ütközések vannak; az energia nem tud hővé alakulni, mert az maga a molekulák mozgása.) Hasonló gondolatmenettel, mint amit fentebb használtunk, kapjuk a lendületmegmaradás tételét:

$$(3) \quad m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v_2 - v'_2),$$

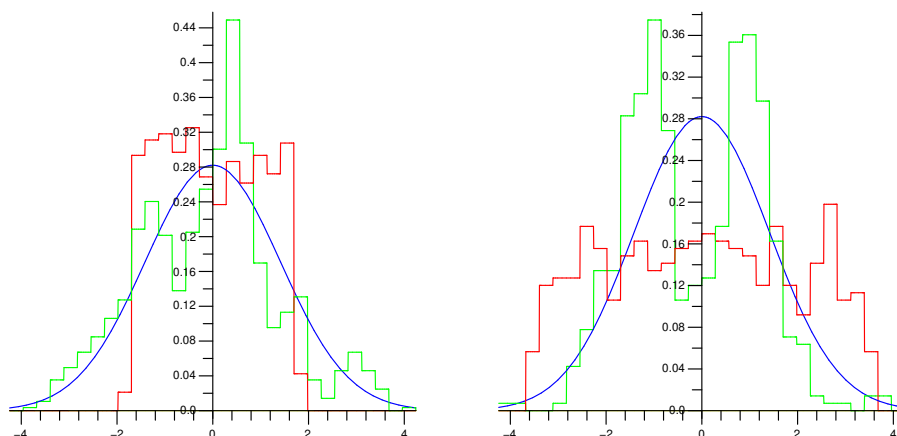
vagy átrendezve $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$, azaz az összes lendület az ütközés előtt ugyanannyi, mint az összes lendület az ütközés után, vagy — az átrendezetlen alakra gondolva — az egyik test lendülete ugyanannyit nő, amennyit a másiké csökken. Írjuk fel az energiamegmaradást is:

$$m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 = m_1v_1'^2/2 + m_2v_2'^2/2.$$

Szorozva kettővel és átrendezve

$$m_1(v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) = m_2(v_2 - v'_2)(v_2 + v'_2).$$

Ezt osztva az lendületmegmaradást kifejező (3) egyenlettel $v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$. Innen kifejezve v'_2 -t és behelyettesítve (3)-ba, kapjuk (1)-et, ha pedig v'_1 -et fejezzük ki és helyettesítjük be (3)-ba, akkor (2)-t.

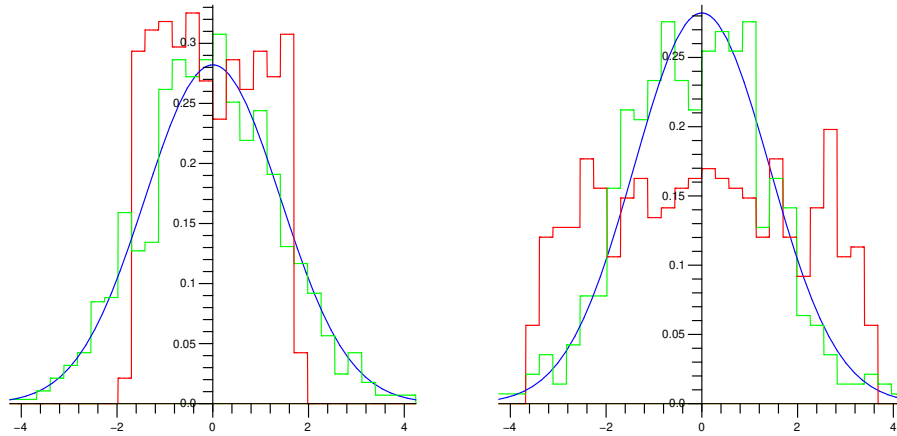


2.7.1. ábra

* Aki nagyon szemfüles, megkérdezheti, hogy amikor a részecske a doboz falának ütközik, sebessége, és így lendülete is ellenkezőjére változik, mi van a lendületmegmaradással? Ilyenkor is érvényes: ha a fal egy dugattyú, akkor tartanunk kell, hogy ki ne repüljön. A tartó erővel folyamatosan lendületet adunk át a dugattyúnak, kiegyenlítve az a lendületet, amit a gáztól kap. Ha a fal rögzített, akkor a rugalmassági erők teszik ugyanezt. Egy picit ki is hajlik, a nyomás hatására. *

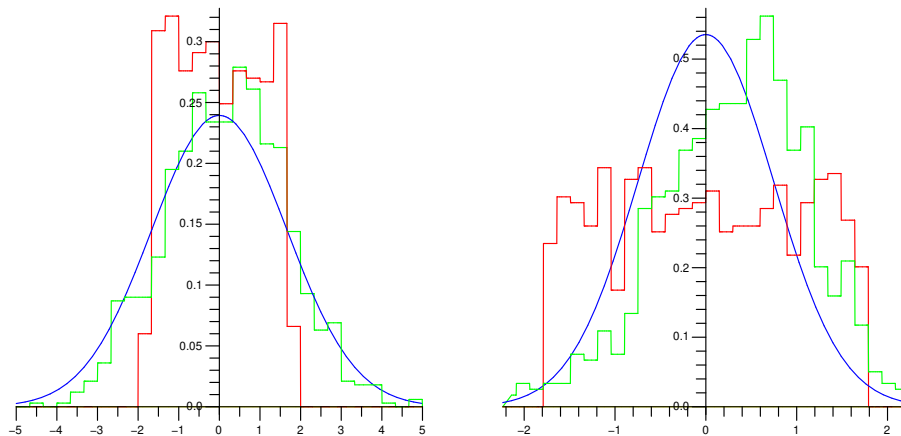
Az (1) és (2) képletek alapján írhatunk egy programot, ami a (véletlen kezdőhelyzetből és sebességgel induló) részecskék és a dugattyú mozgását szimulálja. Azok kedvéért, akik maguk is meg akarják írni ezt a programot, megjegyzem, hogy én egy-egy „határt” képzeltem el a dugattyú mindkét oldalán. A határ és a dugattyú között lévő néhány „kritikus” részecske mindegyikére kiszámoltam, mikor ütköznének a dugattyúval. Persze, a legelső ütközés fog megtörténni. A „nem kritikus” részecskéket egy úgynevezett kupac struktúrában tartottam, és csak azt tartottam nyilván, mikor lépik át a határt. Ha a dugattyú túl közel vagy túl távol került a határokhoz, új határokat vettem fel.

Az első számítógépes szimulációnál a 100 hosszegységnyi téglatest közepén, 50-nél volt a dugattyú. A bal oldalán 1000 darab 4 egységnyi tömegű, 1 egységnyi sebességű részecske volt, a jobb oldalán pedig 500 darab 4 egységnyi tömegű, 2 egységnyi sebességű részecske. Mivel a jobb oldalon kétszer annyi a nyomás, az ember azt várja, hogy a dugattyú balra mozdul el, de nem ez történik. A jobbról érkező gyorsabb részecskék jól meglökik a dugattyút, és kisebb sebességgel pattannak vissza, a balról kétszer olyan gyakran érkező, de fele akkora átlagsebességű részecskék pedig felgyorsulva. A dugattyú eleinte közepén ugrál, a bal oldali részecskék átlagsebessége nő, a jobb oldali részecskék pedig csökken, amíg az átlagsebesség ki nem egyenlítődik, közben a dugattyú elmozdul balra, és a hossz kétharmada körül ugrál, Avogadro törvényének megfelelően. A 2.7.1. ábrán a részecskék sebességeloszlását láthatjuk a bal illetve a jobb oldalon 100 időegység

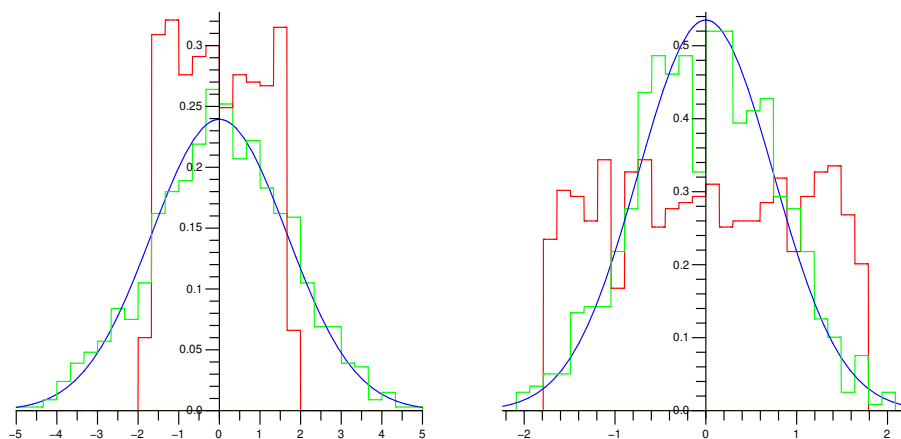


2.7.2. ábra

után, ez a zöld vonal. A piros vonal a kezdeti sebességeloszlást mutatja, a kék pedig az „elméleti sebességeloszlást”. Ez úgy értendő, hogy ha v és v' két sebesség, akkor a görbe v és v' közötti része alatti terület megadja, hogy nagyon sok részecskénél közelítőleg milyen eséllyel esik egy adott részecske sebessége v és v' közé. Ha tovább folytatjuk a szimulációt, akkor a sebességeloszlás közelebb kerül az elméletihez: lásd az 2.7.2. ábrát, ami 1000 időegység után mutatja az eloszlást.



2.7.3. ábra



2.7.4. ábra

Végezzünk most egy másik számítógépes szimulációt. Megint a 100 hosszegységnyi téglatest közepén, 50-nél lesz a dugattyú. A bal oldalán 1000 darab 4 egységnyi tömegű, 1 egységnyi sebességű részecske van, a jobb oldalán pedig 800 darab 20 egységnyi tömegű, 1 egységnyi sebességű részecske. Mivel a jobb oldalon négyszer annyi a nyomás, az ember azt várja, hogy a dugattyú balra mozdul el. Valóban ez történik kezdetben, de a jobbról érkező nagyobb energiájú részecskék jól meglökkik a dugattyút, és kisebb sebességgel pattannak vissza, a balról kétszer olyan gyakran érkező, bár ugyanakkora átlagsebességű, de kisebb tömegű részecskék pedig felgyorsulva. A dugattyú eleinte kicsit balra mozdul el, majd helyben ugrál, közben a bal oldali részecskék átlagsebessége nő, a jobb oldali részecskéké pedig csökken, amíg az *átlagenergia* ki nem egyenlítődik, közben a dugattyú elmozdul balra, és a hossz ötkenyede körül ugrál, Avogadro törvényének megfelelően. A 2.7.3. ábrán a részecskék sebességeloszlását láthatjuk a bal illetve a jobb oldalon 100 időegység után, ez a zöld vonal. A piros vonal a kezdeti sebességeloszlást mutatja, a kék pedig az elméleti sebességeloszlást. A két sebességeloszlás most nem egyforma, de hasonlóak, és az átlagenergia ugyanannyi a két oldalon. Ha tovább folytatjuk a szimulációt, akkor a sebességeloszlás közelebb kerül az elméletihez: lásd a 2.7.4. ábrát, ami 1000 időegység után mutatja az eloszlást.

A számítógépes szimulációk azt mutatják, hogy egyensúlyban N részecske x irányú mozgásához tartozó E_x/N átlagenergia ugyanannyi a dugattyú két oldalán. Ha az egyik oldalon a részecskék nem csak x irányban mozognak, hanem több részecske ugyanazzal a z koordinátával x és y irányban is, akkor egymással is összeütkeznek. Ilyen „kétdimenziós gázban” $E_x \approx E_y$ és így $E_x \approx E/2$, ahol E a teljes energia. Három dimenzióban $E_x \approx E_y \approx E_z$ és így $E_x \approx E/3$. Ha a részecskének további „szabadsági fokai” is vannak (például a „súlyzószzerű” H_2 és O_2 molekulák a súlypontjukon átmenő két, egymásra merőleges tengely körül foroghatnak is), akkor ezekre a mozgásokra is $\approx E_x$ energia jut.

Ha összesen f szabadsági fok van, akkor $E_x \approx E/f$, ahol E a gázmolekulák összes energiája, a belső energia. Erre az esetre is végezhetnénk szimulációkat. Első pillantásra talán kétségesnek tűnik ez a következtetés, és úgy tűnhet, hogy a két oldalon levő részecskék átlagenergia-kiegyenlítődének oka a dugattyú. Ez modellünkben így is van, de három dimenzióban, ha a kétféle gázt nem választaná el dugattyú, akkor az átlagenergia-kiegyenlítődé sokkal gyorsabban megtörténne. Aki már látott biliárdot, jól tudja, hogy a golyók mozgásirányában egészen kicsi változás is nagy változást okoz az ütközés utáni mozgásirányban és sebességben. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a falak is molekulákból állnak, amelyek szintén mozognak, így a falakról visszapattanó részecskék mozgásiránya és sebessége eléggé véletlenszerű, akkor érezhetjük, hogy nagyon rövid idő — mondjuk annyi, amennyi alatt néhány tízszer ütközik egy részecske a falakkal — után a részecskék mozgása teljesen véletlenszerű lesz. Ez még akkor is bekövetkezik, ha kezdetben csak egyetlen részecske mozgott, a többi állt. A mi szimulációnknál a könnyű dugattyú szerepe csak az volt, hogy elválassza a két gázt, de biztosítsa az energiaátadást — azaz a hővezetést — a kettő között.

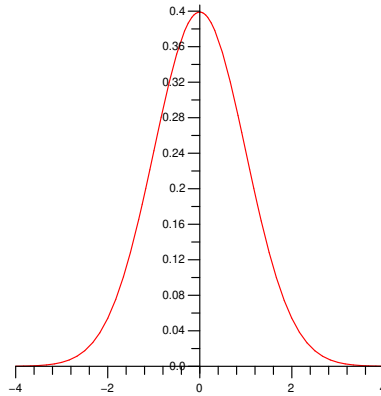
Fogalmazzuk meg tapasztalatainkat másképpen. Az abszolút hőmérsékletet lényegében az ideális gázra érvényes $pV = nRT$ összefüggéssel definiáltuk. Most azt kaptuk, hogy $pV = 2E_x$. Innen $2E_x = nRT$. Az n mól gázban $N = nA$ molekula van, ahol A az Avogadro-szám. Mindkét oldalt osztva $2N$ -nel,

$$\frac{E_x}{N} = \frac{1}{2} \frac{R}{A} T = \frac{1}{2} kT,$$

ahol $k = R/A = 1,380649 \cdot 10^{-23}$ J/K a *Boltzmann-állandó* (pontosan, mivel újabban a hőmérséklet egységét úgy rögzítették, hogy ennyi legyen). A bal oldalon az egyetlen molekula egy szabadsági fokára átlagosan jutó energia áll. A hőmérséklet tehát nem más, mint az egyetlen molekula egy szabadsági fokára átlagosan jutó energia konstansszorozosa, és tapasztalatunk, hogy egyensúlyban minden molekula minden szabadsági fokára átlagosan $kT/2$ energia jut. Ez az *egyenlő szétosztás*, idegen szóval *ekvipartíció* elve. Például 25°C -on egy O_2 molekulára átlag $E_x/N = E_y/N = E_z/N = kT/2 \approx 205,82 \cdot 10^{-23}$ J, a haladási átlagenergia tehát ennek a háromszorozosa. Mivel a tömege $0,032/(6,02214 \cdot 10^{23}) \approx 5,31372 \cdot 10^{-26}$ kg, így a sebességnégyzetének átlaga ≈ 232404 m^2/s^2 , aminek a négyzetgyöke ≈ 482 m/s, összhangban a hangsebességgel.

A másik tapasztalatunk, hogy egyensúlynál a sebességek eloszlása egy „elméleti sebességeloszláshoz” van közel. Ezt a görbét, az úgynevezett „haranggörbét” a matematikusok nagyon jól ismerik a valószínűségszámításból: mindig ez áll elő, ha sok kis, független véletlen mennyiség összegét tekintjük. A részecskék v_x sebessége sok véletlen „lökdösés” eredménye, ezért közelíti sebességeloszlásuk ezt a görbét. A közelítés elég durvának látszik, de ha 1000 helyett Avogadro-számnnyi molekulát vizsgálnánk, akkor nagyon pontos, kb. tízmilliószor jobb lenne. A görbék különbözőek, függnek a részecskék m tömegétől és a T hőmérséklettől, de nagyon hasonlóak. Pontosabban az igaz, hogy $v_x \sqrt{m/(kT)}$ eloszlása mindig a 2.7.5. ábrán látható *haranggörbe*, aminek értéke az x helyen

$$\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$



2.7.5. ábra

Ennek segítségével m és T ismeretében meg tudjuk határozni, hogy mennyi az esélye, hogy v_x valamilyen v_1 és v_2 határok közé esik. *

2.7.2. Az ideális gáz fajhője. * Azt kaptuk, hogy az f szabadsági fokú molekulákból álló egy mól ideális gázra a *belső energia*

$$E = \frac{f}{2}RT.$$

Ha a hőmérséklet T_1 -ről T_2 -re nő, akkor a belső energia növekedése

$$\frac{f}{2}R(T_2 - T_1)$$

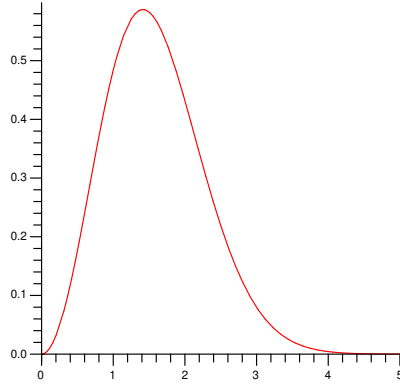
így egy mól gáz hőmérsékletének 1 K-nel való emeléséhez (ha nincs munkavégzés, azaz állandó térfogaton)

$$C_V = \frac{f}{2}R$$

hő kell, ez a gáz állandó térfogaton vett *mólhője*. Ha a nyomás állandó, akkor a térfogat V_1 -ről V_2 -re nő, és $p(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1)$ munkavégzés is történik, így az állandó nyomáson vett *mólhő*

$$C_p = C_V + R = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R.$$

A két mólhő hányadosát — mint már tudjuk — κ -val szokás jelölni, arra $\kappa = (f/2)/(f/2 + 1)$. a κ mérésével becsülhető f . A szabadsági fokok száma egyatomos molekuláknál 3, kétatomosoknál 5-nek vehető, háromatomosoknál pedig — mivel három tengely körül foroghatnak — 6-nak vehető, nagyobb molekuláknál még nagyobb. *



2.7.6. ábra

2.7.3. A molekulák sebesség- és energiaeloszlása. * Megfelelő matematikai (integrálszámítás) ismeretek birtokában a fentiek alapján meghatározható a molekulák haladási v sebességének eloszlását leíró görbe, az úgynevezett *Maxwell-féle sebességeloszlás*. Ez függ a molekulák m tömegétől és a T hőmérséklettől, de nagyon hasonló minden esetben. Pontosabban az igaz, hogy $v\sqrt{m/(kT)}$ eloszlása mindig a 2.7.6. ábrán látható függvény, értéke a

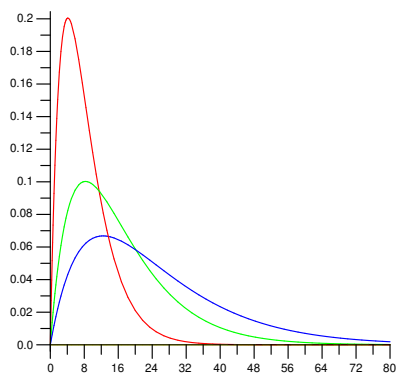
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^2e^{-x^2/2}.$$

(A *legvalószínűbb sebesség*, a görbe maximumához tartozó sebesség nem ugyanaz, mint az átlagsebesség, illetve az átlagos energiához tartozó sebesség: a három aránya $\sqrt{2} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{3} \approx 1 : 1,128 : 1,244$.) Ugyancsak meghatározható a molekulák sebességéhez tartozó haladási energia eloszlását meghatározó görbe. Ez nem függ a molekulák tömegétől, csak a hőmérséklettől. A 2.7.7. ábrán három különböző hőmérsékletre ábrázoltuk, 300, 600 és 900 K-re. A görbék nagyon hasonlóak, a csúcs helye a hőmérséklettel arányosan nő. Pontosabban az igaz, hogy $E/(kT)$ eloszlását mindig a 2.7.8. ábrán látható függvény írja le, értéke

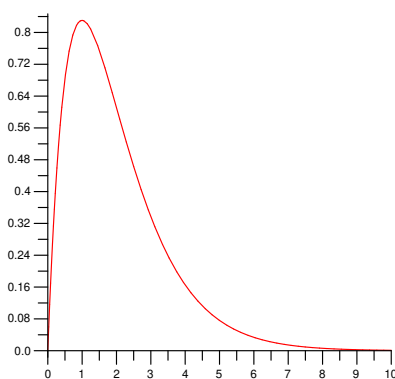
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}e^{-x}.$$

*

2.7.4. A Boltzmann-eloszlás. * Néha még jobban érdekel bennünket az, hogy egy felületnek, mondjuk az x irányra merőleges oldalfalnak ütköző molekulák ütközési (a falra merőleges irányú, azaz v_x sebességhez tartozó) energiájának milyen az eloszlása. Ez a *Boltzmann-eloszlás*. Megfelelő matematikai (differenciál- és integrálszámítás) ismeretek birtokában a fentiek alapján meghatározható ez is. (Látjuk, hogy matematika nélkül



2.7.7. ábra: haladási energiák zeptojoule-ban, 300 K, 600 K, 900 K



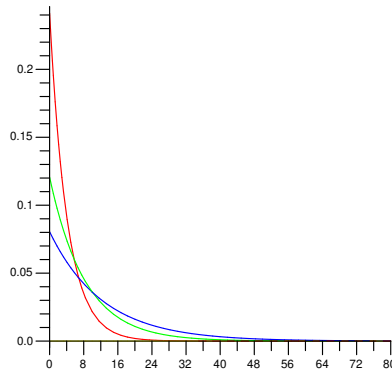
2.7.8. ábra

szinte mozdulni sem tudunk az elméletben. A középiskolában tanult matematika nagyjából annak felel meg, amit az ókorban a görögök tudtak. Ennek a könyvsorozatnak a matematikai részében minden szükséges ismeret megtalálható.) A számítás lényege, hogy egy nagyon rövid Δt idő alatt a falat a közelítőleg v_x sebességű molekulák közül azok érik el, amelyek a fal felé mozognak és tőle legfeljebb $v_x \Delta t$ távolságra vannak. Az ütközési energiák eloszlását a 2.7.9. ábrán három különböző hőmérsékletre ábrázoltuk,

300, 600 és 900 K-re. A görbék itt is nagyon hasonlóak. Pontosabban az igaz, hogy $E/(kT)$ eloszlását mindig a 2.7.10. ábrán látható függvény írja le, értéke

$$\frac{1}{kT} e^{-E/(kT)}.$$

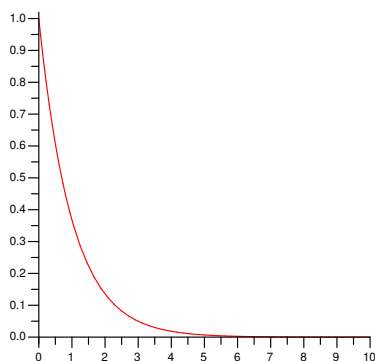
A vegyész számára ez azért fontos, mert sok reakció akkor következik be, ha az ütközés energiája eléri egy bizonyos értéket. De hát nem ezt határoztuk meg! Szerencsére azon molekulák arányát, amelyekre az ütközési energia nagyobb, mint $E/(kT)$, szintén a 2.7.10. ábrán látható függvény írja le. Még egyszerűbb az $x = E/(kT)$ eloszlását leíró függvény, ahol E az ütközési energia: ennek értéke e^{-x} . Egyébként sokkal általánosabb feltételek mellett igaz, hogy annak esélye, hogy egy részecskét E energiájú állapotban találunk, $e^{-E/(kT)}$ -vel arányos. *



2.7.9. ábra: ütközési energiák zeptojoule-ban, 300 K, 600 K, 900 K

2.7.5. Közepes szabad úthossz. * Képzeljünk el egy molekulát, amely a V térfogatot betöltő N molekula között mozog. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a többi molekula mind áll, és a molekulák gömbök d átmérővel. Az az ℓ (átlagos) úthossz érdekel bennünket, amit a molekulánk megtesz, mielőtt ütközik egy másikkal. Nyilván akkor ütközik egy másikkal, ha középpontjaik d -nél közelebb kerülnek. Tehát nagyjából egy $d^2\pi$ alapterületű hengert fut be molekulánk olyan ℓ magasságig, ahol az első molekula van. Innen az egy molekulára átlagosan jutó V/N térfogat megegyezik a henger $d^2\pi\ell$ térfogatával, azaz

$$\ell \approx \frac{V}{N\pi d^2}.$$



2.7.10. ábra

Pontosabb számításhoz azt is figyelembe kell venni, hogy a többi molekula is mozog, így

$$\ell \approx \frac{\sqrt{2}V}{N\pi d^2}$$

adódik, ami p^0 nyomáson kis molekulákra nagyjából a molekulaátmérő százszorosa-ezerszerese. Mivel ismerjük a molekulák átlagos sebességét, ebből meghatározható a másodpercenkénti ütközések száma, ami T^0 hőmérsékleten nagyságrendben tízmilliárd. Megfelelő matematikai ismeretekkel számítható a viszkozitás,

$$\eta \approx \frac{m\bar{v}}{3\sqrt{2}\pi d^2},$$

a hővezetési tényező, $\kappa \approx \eta c_V$, és a diffúziós együttható (arra az esetre, amikor az adott gázból kevés van egy másik gázban) $D \approx \ell\bar{v}/3$; itt m egy molekula tömege, \bar{v} az átlagsebessége, c_V pedig az állandó térfogaton vett fajhő. A *diffúziós együttható* azt adja meg, hogy egységnyi felületen egységnyi idő alatt mekkora tömegű anyag áramlik át, ha az egységnyi távolságra eső (kg/m³-ben mért) koncentrációk különbsége egységnyi. Ha az ℓ közepes szabad úthossznál kisebb átmérőjű lyukakon történik a diffúzió, akkor a sebessége már csak a \bar{v} átlagsebességgel arányos. *

2.7.6. Problémák a szabadsági fokokkal. Ha valaki azt mondja, hogy számára nem világos a szabadsági fokok fogalma, nem csodálom, nincs minden rendben vele.

** Az eddigiek szerint bármilyen hőmérsékleten minden szabadsági fokra

$$\frac{R}{2} \approx 4,157255 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \approx 0,99294 \frac{\text{cal}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \approx 1 \frac{\text{cal}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

mólhő jut (állandó térfogaton). Ez olyan szép kerek szám, hogy a mérések szerinti értékeket is kivételesen cal/(K·mol) egységekben adjuk meg. A mért mólhő állandó térfogaton

	0 °C	100 °C	200 °C	500 °C	1200 °C	2000 °C
A	2,98	2,98	2,98	2,98	3,0	3,0
O ₂	4,99	5,05	5,15	5,26	5,75	6,3
H ₂	4,87	4,93	5,05	5,16	5,67	6,28
H ₂ O	5,93	6,00	6,60	7,00	8,4	11,0
CO ₂	6,68	7,69	9,04	9,75	10,6	11,1

Itt A tetszőleges egyatomos gázt jelent. Látjuk, hogy ezek mólhője teljesen megfelel az elméletnek. A kétatomos oxigénre és a háromatomos vízre is 0 °C-on a mért értékek megfelelnek az elmélet által adott értéknek, de egyébként az eltérések jelentősek, nem magyarázhatók mérési hibákkal, és a hőmérséklet növekedésével a mólhő nő. Olyan, mintha új szabadsági fokok lépnének fel. Valóban így is van, szerepet kap a molekulák rezgése. De miért nincsenek rezgések alacsonyabb hőmérsékleten? A magyarázat nagyon durván leegyszerűsítve és pontatlanul, hogy a rezgés energiája csak „kvantumokban” („adagokban”) változhat, $h\nu$ lehet, ahol ν a rezgésszám, idegen szóval a frekvencia, azaz a másodpercenkénti rezgések száma, h pedig az úgynevezett Planck-állandó, $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34}$ Js (pontosan, mivel újabban az energia és ezen keresztül a tömeg egységét úgy rögzítették, hogy h ennyi legyen). A vízmolekulában az aránylag könnyű hidrogénatomokat nagyon nagy erők kötik az oxigénatomhoz, a lehető legkisebb rezgésszám is nagyon nagy, így már arra is $h\nu$ jóval nagyobb, mint az egy szabadsági fokra jutó $kT/2$ átlagenergia, tehát nagyon ritka, hogy egy hidrogénatom rezgésbe jöjjön. Magasabb hőmérsékleten már jóval nagyobb az esélye, hogy az energia ilyen nagy legyen (lásd a 2.7.7. ábrát), így az alacsony hőmérsékleten „befagyott” rezgési szabadságfok kezd „kinyitni”. Nehéz atomokból álló kétatomos molekulák esetén ν jóval kisebb, már 0 °C-on is van rezgés, és a mólhő 5 helyett 6 körüli. Hasonló a helyzet a forgással, ν szerepét a fordulatszám veszi át. Az egyatomos molekulák azért nem tudnak forogni, mert a tömeg nagy része az igen kis méretű atommagban összpontosul, $kT/2$ energiához rendkívül magas fordulatszám tartozna, ilyen az ütközések során nem jön létre. Ugyanezért nem tudnak forogni a kétatomos, „súlyzószerű” molekulák sem a hossz tengelyük körül. Érdekes a szén-dioxid esete. Ez ugyan háromatomos, de „súlyzószerű” molekula, az atomok egy egyenesbe esnek (lásd az 5.1.8. ábrát), ellentétben a vízmolekulával (lásd az 5.1.6. ábrát). Hogy a szén-dioxid mólhője nem 5, hanem jóval nagyobb, azt rezgési szabadságfokok okozzák. A hőmérséklet növelésével végül egy n atomból álló molekulának mind a $3n$ szabadságfoka aktiválódik, sőt, megkezdődik a molekula felbomlása atomokra, majd az atomok felbomlása elektronokra és atommagokra, amivel újabb szabadsági fokok lépnek be. Mindezek a magyarázatok csak vázlatosak. A hidrogén 2 forgási szabadságfokának 0 °C-on részleges, de 60 K-en már majdnem teljes „befagyásának” magyarázatához már a hidrogén atommagok mágneses tulajdonságait is figyelembe kell venni.

Azt, hogy a szabadsági fokokkal problémák vannak, Maxwell már a XIX. század közepén észrevette. Egy másik rejtély volt az izzó szilárd (fekete) testek által kibocsátott fény színének magyarázata. Ez utóbbit Planck oldotta meg 1900-ban. A kvantumelmélet pontos matematikai megalapozása Heisenberg és Schrödinger eredménye 1925-ből. Ennek alapján magyarázatot lehetett adni a kémiai reakciókra. Sajnos, az elmélet nem egyszerű. Bár nagyon sok mindent ki tudunk számolni a kvantumkémia segítségével, a kémia máig

is kísérleti tudomány maradt. Ezen könyvsorozat matematikai részének kitűzött célja éppen az, hogy a matematikában eljussunk addig, ami a kvantummechanikából és így a kvantumkémiaiából a legegyszerűbb atommal, a hidrogénatommal kapcsolatos számítások megértéséhez kell. **

2.7.7. A nem ideális gázok nyomása. * A gáz molekulái helyet foglalnak el. Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy az ideális gázra vonatkozó egyenletben V helyére $V - b$ -t írunk, ahol b egy, a gáztól függő konstans. Ez a V mért térfogatból kapott „ideális térfogat”. Másrészt a molekulák vonzzák egymást, ami csökkenti a mért nyomást. Ha egy gömböt képzelünk el, a felületen lévő molekulák száma arányos a sűrűséggel, tehát fordítva arányos a térfogattal, másrészt a bentebbi, közeleli, vonzó hatást kifejtő molekulák száma is arányos a sűrűséggel, azaz fordítva arányos a térfogattal, tehát a mért p nyomáshoz egy a/V^2 alakú tagot hozzá kell adnunk, hogy megkapjuk az „ideális nyomást”. Így az egy mól gázra vonatkozó

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

van der Waals-egyenletet kapjuk. Nyilván n mól gázra a térfogat n -szer ennyi, így a fenti egyenletben szereplő V helyére V/n -et kell írni. Így az n mól gázra érvényes

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

egyenletet kapjuk. Az a és b van der Waals-állandókat különböző gázokra táblázatokban megtaláljuk. Ha a hőmérsékletet vagy a nyomást akarjuk meghatározni, nincs probléma. Ha a térfogatot keressük, írjuk fel az egyenletet

$$V = bn + \frac{RT}{p + an^2/V^2}$$

alakban. Az első közelítést a gáz térfogatára ideális gázzal számolva kapjuk. Írjuk ezt be a jobb oldalra: kapunk egy jobb közelítést V -re, ezt beírjuk a jobb oldalra, stb. Ez a módszer ha nem is mindig, de általában célhoz vezet. Ha nem, próbálgatással boldogulhatunk. *

** A van der Waals-állandók kapcsolatban állnak a kritikus adatokkal. Írjuk az egyenletet az akárhány mólra vonatkozó, kicsit általánosabb

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (V - bn) = ncT$$

alakba. Osszuk el mindkét oldalt a p_c kritikus nyomással és az adott gázmennyiség V_c kritikus térfogatával. (Táblázatokban rendszerint a kritikus sűrűséget találjuk meg, de ebből akármennyi gáz kritikus térfogatát ki tudjuk számolni.) Az új egyenlet

$$\left(\frac{p}{p_c} + \frac{an^2/p_c}{V^2}\right) \cdot \left(\frac{V}{V_c} - \frac{bn}{V_c}\right) = \frac{cn}{p_c V_c} T.$$

Bevezetve a $p_r = p/p_c$ relatív nyomást, a $V_r = V/V_c$ relatív térfogatot és a $T_r = T/T_c$ relatív hőmérsékletet, az egyenlet

$$\left(p_r + \frac{an^2/(p_c V_c^2)}{V_r^2}\right) \left(V_r - \frac{bn}{V_c}\right) = \frac{cnT_c}{p_c V_c} T_r$$

alakú lesz. Az $a_r = an^2/(p_c V_c^2)$, $b_r = bn/V_c$ és $c_r = cnp_c/(V_c T_c)$ jelölésekkel ezek az állandók sem függenek a mólok számától, mivel p_c és T_c nem függenek a mólok számától, V_c viszont arányos a mólok számával. Az egyenlet ezekkel a jelölésekkel

$$\left(p_r + \frac{a_r}{V_r^2}\right) (V_r - b_r) = c_r T_r$$

alakú.

Úgy szeretnénk az a_r , b_r és c_r állandókat meghatározni, hogy az egyenletünk a kritikus pont közelében legyen érvényes. Szorozzuk végig az utóbbi egyenletet V_r^2 -tel és osszuk végig p_r -rel. Azt kapjuk, hogy

$$\left(V_r^2 + \frac{a_r}{p_r}\right) (V_r - b_r) = \frac{c_r T_r V_r^2}{p_r},$$

másként

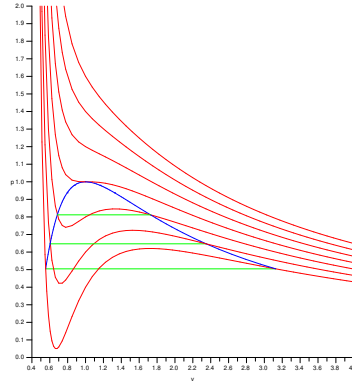
$$V_r^3 - \left(b_r + \frac{c_r T_r}{p_r}\right) V_r^2 + \frac{a_r}{p_r} V_r - \frac{a_r b_r}{p_r} = 0.$$

Figyeljük meg a 2.3.2. ábrát. Adott, a kritikus hőmérséklet alatti hőmérsékleten csökkentve a térfogatot, a nyomás egy darabig nő, majd a telítési gőznyomást elérve egy darabig állandó marad. Ha a görbe simán folytatódna, a nyomás a telítési nyomás fölé menne. Sőt, a valóságban fölé is megy: a gőz lecsapódása nem indul meg azonnal, előbb kis vízcseppeknek kell létrejönni. Ugyanígy víz térfogatát növelve, a nyomás csökken, majd ez a nyomáscsökkenés a telítési gőznyomásnál megáll. Ha a görbe simán folytatódna, a nyomás a telítési gőznyomás alá menne. Itt is a valóságban a nyomás a telítési nyomás alá megy, mert a buborékképződés csak később indul meg. Ha ezt a két pontot akárhogyan összekötnénk, közben a görbe még egyszer felvenné a telítési gőznyomást. A kritikus hőmérsékleten ez a három térfogatérték éppen egybeesik és nem lehet más, mint V_c , így $V_r = 1$. Tehát az egyenletünk

$$0 = (V_r - 1)^3 = V_r^3 - 3V_r^2 + 3V_r - 1.$$

Összehasonlítva ennek az egyenletnek az együtthatóit az előző egyenlet együtthatóival és figyelembe véve, hogy a kritikus pontban $T_r = 1$ és $p_r = 1$, azt kapjuk, hogy $a_r = 3$, hogy $a_r \cdot b_r = 1$, így $b_r = 1/3$, és hogy $b_r + c_r = 3$, azaz $c_r = 8/3$. Így a nagyon egyszerű

$$\left(p_r + \frac{3}{V_r^2}\right) \cdot \left(V_r - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot T_r$$



2.7.11. ábra

egyenlethez jutunk, ami a kritikus pont közelében jól írja le a gáz viselkedését.

A 2.7.11. ábrán a $T_r = 1,15, 1,10, \dots, 0,85$ értékekhez tartozó görbéket láthatjuk. Az utolsó három görbénél $T_r < 1$, azaz a kritikus hőmérséklet alatt vagyunk. Ilyenkor a valóságban a gőz cseppfolyósodik. Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy a görbe hepehupáját egy egyenes szakasszal hidaljuk át. A zölddel jelzett szakaszok magasságát úgy választjuk, hogy az alattuk lévő terület — ami az összenyomási munkának felel meg — megegyezzen a görbe megfelelő része alatti területtel. A kékkel jelzett görbe azt jelzi, hogy — a hőmérséklettől függően — hol kezdődnek és végződnek az egyenes szakaszok.

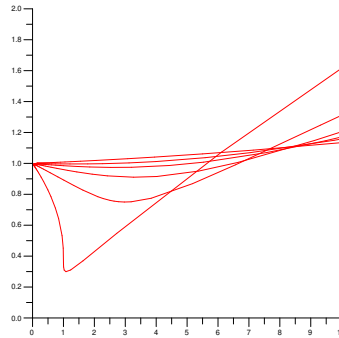
Ha a $T_r = 1, p_r = 1$ kritikus ponttól távolabb keresünk jó közelítést, akkor kísérletileg meghatározott a_r, b_r, c_r értékekkel dolgozhatunk. A legfontosabb az az eset, amikor a $p_r = 0$ érték közelében keresünk közelítést. Mivel kicsi p -re és nagy V -re az an^2/V^2 -t és bn elhanyagolhatóak, $c = c_r p_c V_c / (nT_c)$ egyenlő kellene legyen R -rel, ez azonban általában nem áll fenn. A kritikus adatok közül V_c mérése a legbizonytalanabb, hiszen pontosan a kritikus pontban nagyon kis nyomásváltozásnak nagyon nagy térfogatváltozás felel meg. Helyettesítsük ezt egy V_c' értékkel, úgy, hogy $c_r p_c V_c' / (nT_c) = R$ teljesüljön. Ekkor

$$V_c' = \frac{3nRT_c}{8p_c},$$

amiből

$$a = \frac{27R^2 T_c^2}{64p_c},$$

$$b = \frac{RT_c}{8p_c}$$



2.7.12. ábra

és $c = R$. Az egyenletet a $V_{r'} = V/V_{c'}$ jelöléssel a sokkal egyszerűbb

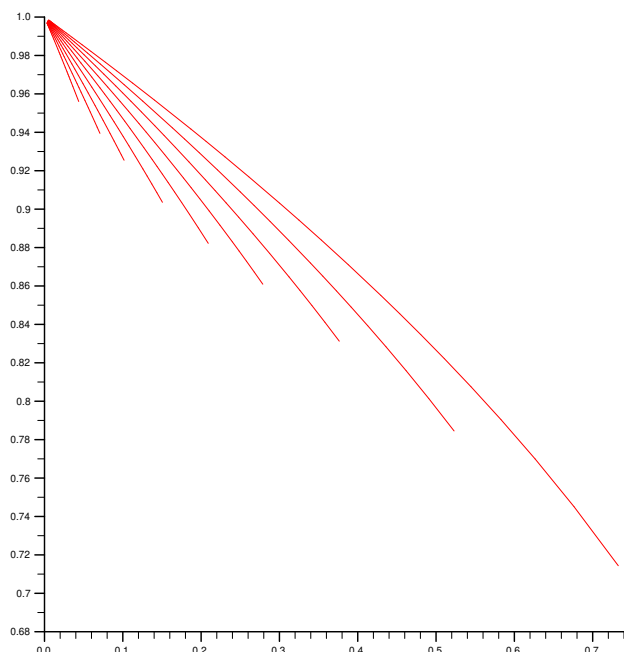
$$\left(p_r + \frac{3}{V_{r'}^2}\right)\left(V_{r'} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}T_r$$

alakba írhatjuk.

A van der Waals-egyenletből számított értékek eltérését az ideális gázra vonatkozó egyenletből számított értékektől, valamint a valódi értékektől legegyszerűbben a

$$z = \frac{pV}{nRT}$$

úgynevezett *kompresszibilitási együttható* vizsgálatával ellenőrizhetjük. Ennek értéke ideális gázra minden nyomáson és hőmérsékleten 1 lenne. Az előbbi egyenletünk szerint viszont a 2.7.12. ábrán látható görbék adják meg a kompresszibilitási együtthatót p_r függvényében $T_r = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0$ és $5,0$ esetén ($p_r = 1,0$ -nél alulról felfelé). Megfigyelhetjük, hogy $T_r = 2,5$ esetén $z \approx 1$. Egyébként $p_r < 1$ -re a $T_r = 3$ -hoz tartozó görbe majdnem megegyezik a $T_r = 15$ -höz tartozó görbével. A görbéket könnyen kirajzoltathatjuk kisebb T_r és nagyobb p_r értékekre is, de a mért értékektől való eltérés egyre nagyobb lesz. Hidrogénre ($p_c = 12,97$ bar, $T_c = -240$ °C) -70 és 200 °C között 100 bar nyomáson az eltérés 1% nagyságrendű, 200 bar nyomáson 2–4%, 500 bar nyomáson 5–10% és 1000 bar nyomáson 10–20%. Oxigénre ($p_c = 50,76$ bar, $T_c = -118,38$ °C) 0 és 200 °C között 100 bar nyomáson az eltérés 3–5%, 200 bar nyomáson 4–6%, 500 bar nyomáson 3–7% és 1000 bar nyomáson 10–15%. Szén-dioxidra ($p_c = 74$ bar, $T_c = 31$ °C) 60 °C-on 100–1000 bar nyomáson az eltérés 15–25%, 100 és 260 °C között 100 bar nyomáson az eltérés 5% nagyságrendű, 200 bar nyomáson 10% nagyságrendű, de 500 és 1000 bar



2.7.13. ábra

nyomáson 20% nagyságrendű. A 2.7.13. ábra a $T_r = 0,60, 0,65, \dots, 1,00$ értékekhez tartozó kompresszibilitási görbéknek azon kis nyomásokhoz tartozó részét mutatja, amely 1%-nál pontosabb. Ha $T_r \geq 1,05$, akkor ez minden $p_r \leq 1$ értékre fennáll. **

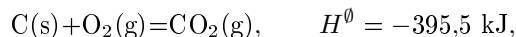
2.8. Hő és kémia

2.8.1. Reakcióhő. A vegyészt gyakran érdekli, hogy egy reakcióban mennyi hő szabadul fel vagy nyelődik el. Ezt elvileg könnyű megmérni: kaloriméterben lejátszatjuk a reakciót és megmérjük, mennyi hő szabadul fel. A kémia részben mi is csinálunk ilyet, amikor lúgok és savak reakciójánál megmérjük a keletkező hőmennyiséget. Elvileg egyszerűbb azt megmérni, hogy a keletkező hő mennyi jeget olvaszt meg, mert ekkor nem érdekes a kiindulási és a keletkező anyagok fajhője. Persze, ha nem 0 °C-on van szükség a reakcióhőre, akkor mégiscsak ismerni kell a fajhőket, hogy átszámoljuk a reakcióhőt 0 °C-ról mondjuk a normál hőmérsékletre, 25 °C-ra. Ha állandó nyomáson mérünk a kaloriméterrel, akkor a *reakcióentalpiát* kapjuk. Például a grafit égésére

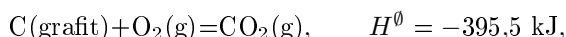


azt jelenti, hogy egy mól grafit égésénél normál körülmények között, azaz normál nyomáson és hőmérsékleten (ezt jelzi a $^\theta$) 395,5 kJ hő szabadul fel. Az előjel azért negatív, mert

a rendszer szempontjából kell vizsgálni a helyzetet, az pedig hőt ad le. Néha precízebben azt írják, hogy

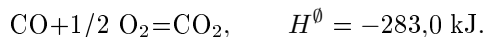


jelezve, hogy melyik anyag milyen halmazállapotban van: a latin szavakból g azt jelenti hogy gáz, az f azt jelenti, hogy folyadék (fluidum), az s pedig azt, hogy szilárd (solid). Még precízebben azt is lehet írni, hogy

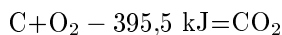


jelezve, hogy grafitról van szó. Erre azonban általában nincs szükség: ha nem írunk semmit, a normál körülmények között stabil módosulatról van szó.

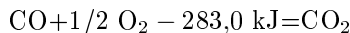
A szén-monoxid égésénél



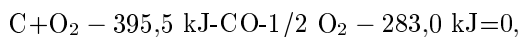
Írjuk fel az első összefüggést



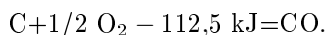
egyenlet alakba. Ezt az egyenletet akárhogy átrendezhetjük, végigszorozhatjuk kettővel (ekkor két mól C-re vonatkozik), stb. A második összefüggést is átírhatjuk



egyenlet alakba. Ezt az egyenletet vonjuk ki az első egyenletből. Azt kapjuk, hogy



azaz



Megkaptuk a szén szén-monoxiddá való égésénél a reakcióentalpiát. Ez nagyon hasznos eredmény, mert a reakció közvetlenül nem megy végbe. A számolásban tulajdonképpen az energiamegmaradás törvényét használtuk fel.

2.8.2. Képződéshők. Mivel rengeteg kémiai reakció van, nehéz lenne a reakcióentalpiákat táblázatba foglalni. Ezért csak az úgynevezett *képződéshőket* vagy pontosabban *normál képződési entalpiákat* foglalják táblázatba. Ez annak a reakciónak a normál entalpiája, amiben az illető anyagból 1 mól képződik elemekből. Értelemszerűen ez az elemekre nulla. Pontosabban, ha az elemnek több módosulata van, akkor a stabil módosulatét veszik nullának. Például C(graftit)-ra $H_k^\theta = 0$, de C(gyémánt)-ra $H_k^\theta = 1,9 \text{ kJ/mol}$; a kis k betű arra utal, hogy képződési entalpiáról van szó. Ezekből akármilyen reakció entalpiáját ki tudjuk számolni: a jobb oldalon álló anyagok képződéshőjéből kivonjuk a bal oldalon álló anyagok képződéshőjét.

2.8.3. Égéshő. * Sok anyag képződéshőjét közvetlenül nem tudjuk meghatározni, mert a reakció nem megy végbe: például egy bonyolult szerves vegyület nem fog összeállni az elemeiből. Ekkor úgy járunk el, mint a szén-monoxidnál tettük: kerülő utat választunk. Elégetjük a vegyületet oxigénben, és megmérjük, a keletkező hő mennyi jeget olvaszt el. Ez az elégetés egy erős falú saválló acélból készült „bombában” történik. Beletesszük az anyagot (például cukrot), feltöltjük nagy nyomású oxigénnel, majd egy platina szál rövid ideig való izzításával megindítjuk az égést, és megmérjük, hogy a keletkező hő mennyi jeget olvaszt el. Van azonban egy probléma: nem állandó nyomáson mérünk, hanem állandó térfogaton, azaz az állandó térfogaton mért égéshőt határoztuk meg. Ha szenet égetünk el ilyen módon, nincs nagy probléma: amennyi mól oxigént elhasznál az égés, annyi mól szén-dioxid keletkezik, így az oxigén sűrítésére befektetett munka ugyanannyi, mint amennyit a szén-dioxid kiterjesztésénél visszacapunk, így az állandó térfogaton mért égéshő (majdnem pontosan) megegyezik az állandó nyomáson mért égéshővel. A szén-monoxidnál már nem ez a helyzet: kevesebb mól gáz keletkezik, mint amennyi kezdetben volt, ezért a sűrítésbe több munkát kell befektetni, mint amennyit a végén visszacapunk. Ezt figyelembe kell venni, amikor az állandó térfogaton mért égéshőből kiszámoljuk az állandó nyomáson mért égéshőt. Ebből már számolható a képződéshő, mint ahogy a szén-monoxidnál tettük. Még egy dologra vigyázzunk: főleg műszaki könyvek, az állandó nyomáson mért égéshőből levonják a keletkező víz elpárolgotatásához szükséges hőt; ez az úgynevezett *fűtőérték* vagy *alsó égéshő*. Ha ugyanis az anyagot nem kondenzációs kazánban égetjük el — amiből a víz folyadékként távozik — a víz gőz alakban távozik, és elviszi a párolgáshőjét is. *

2.8.4. Kísérlet. Egy egyszerű de nagyon fontos kísérletet ne hagyjunk ki, ha van árammérőnk. Egy-egy műanyag csipeszbe fogjunk be alumínium fóliát, illetve (lecsiszolt) vörösréz lemezt. Mindkettőhöz csatlakoztassuk az árammérő egy-egy mérőhegyét (együtt befogva vele). A csipeszeket befőttes gumival össze is erősíthetjük. Mártsuk a két lemezt egy pohárka vízbe és öntsünk a vízhez egy kevés háztartási sósavat. A hidrogén kezd el fejlődni, de főleg a rézlemezen fejlődik, az árammérő pedig 20–50 mA áramot mutat. Ha az árammérőt feszültségmérő állásba kapcsoljuk, 1 V körüli feszültséget mérhetünk. Galvánelemet hoztunk létre! Egyébként vörösréz lemez helyett még jobb lenne az ezüst lemez; legjobb a platina. Egy idő után az alumínium lemez megmaródik, tehát oldódik, a másik lemez nem.

Mi történt itt? Az alumínium atom szívesen lead három elektront, de a hidrogén nehezen válik ki az alumíniumon. Ezért az elektronok átmennek a réz lemezre, és ott válik ki a hidrogén. (Nem jó, ha a réz felülete kicsi, mert akkor ott is megnehezül a hidrogén kiválása, ezért választottunk réz lemezt, nem drótot.) Az alumínium megszubadt elektronjaitól, oldatba mehet, ezért maródik meg az Al fólia. A réznek csak annyi a szerepe, hogy könnyebben válik ki rajta a hidrogén, így bármilyen más fém jó helyette, amelyik nem oldódik, és könnyen válik ki rajta a hidrogén. A galvánelemekkel az elektromosságnál majd bővebben foglalkozunk.

A kémia szempontjából az a fontos, hogy egy kémiai folyamatnál nem csak hő termelődhet, hanem elektromos áram is, vagy más formában hasznos munka. Egy darabig azt hitték, hogy a kémiai folyamatok hajtóereje a hőtermelődés. Ennek azonban ellentmond,

hogy magasabb hőmérsékleten inkább hőelnyelő folyamatok játszódnak le. Közönséges hőmérsékleten is lejátszódnak hőelnyelő folyamatok, például egyes sók oldódása vízben. Butaság lenne ezekre azt mondani, hogy ezek fizikai folyamatok: a természet nem ismer olyat, hogy fizika és kémia, ezeket az elnevezéseket csak mi találtuk ki. Egy természettörvénynek mindenféle folyamatra érvényesnek kell lennie. Kiderült, hogy a kémiai folyamatok hajtóereje az adott körülmények között a folyamat által végezhető munka. Például állandó nyomáson lejátszódó folyamatnál a hőtermelés a reakció entalpiája. Ennek a „jó” — például elektromos vagy mechanikai — munkaként (maximálisan) kapható része a *szabad entalpia*. Ez a kémiai folyamat hajtóereje. Nem lényeges, hogy tényleg munkaként nyerjük-e ki a szabad entalpiát. Például az alumínium akkor is feloldódik sósavban, ha nincs ott a réz. Ekkor a szabad entalpiát is hőként kapjuk meg. Ha galvánelemet hozunk létre, akkor a szabad entalpia több-kevesebb részét „jó” munkaként kapjuk meg, de egy része elveszhet (pontosabban hővé alakulhat), ha például az alumíniumon is válik ki hidrogén. A szabad entalpiát Gibbs amerikai fiziko-kémikus vezette be, és a tiszteletére G -vel szokás jelölni. \square

2.8.5. Gondolat kísérlet a szabad entalpiával. Ellenvetés lehet, hogy például ha egy anyag, mondjuk ammónsalétrom oldódáskor lehűl, hol a szabad entalpia? Vizsgáljuk meg ezt egy gondolat kísérletben! Zárjuk be az ammónsalétromot egy hengerbe egy csak a vizet áteresztő anyagból készült dugattyúval, a dugattyú másik oldalán legyen víz. Ahogy a só elkezd oldódni, jó nagy ozmózisnyomás lép fel. Lassan engedjük a dugattyút elmozdulni. Jó sok munkát végez nekünk. Ebbe nincs benne a légköri nyomás ellen végzett munka, az nem számít az entalpiába. Ha a só teljesen feloldódott, még mindig képes az ozmózis munkát végezni számunkra, amíg a másik oldalon van víz. Megvan a szabad entalpia, a rendszer szempontjából negatív! Mindeközben az entalpia pozitív (a rendszer szempontjából), azaz a folyamat endoterm, hiszen a sóoldat lehűl, még ha nem is végez munkát. Így, hogy munkát is végez, még több hőt vesz fel a környezetből, hiszen a munkavégzéshez szükséges energiát is a környezetből felvett hővel fedezi. Nem keletkezett örökmozgó? Nem, hiszen nem körfolyamatról van szó. Ha most nagyon lassan visszanyomjuk a dugattyút, akkor fordított ozmózis játszódik le, végül a só ki is kristályosodik, miközben hőt ad le. Ha mindkét irányba nagyon lassú a folyamat, akkor csak ici-picit több munkát kell felhasználnunk, mint amennyit kaptunk az oldódáskor. Tulajdonképpen a szabad entalpiát kell visszatáplálnunk. \square

2.8.6. A bomlási nyomás és a szabad entalpia kapcsolata. * Próbáljuk meg kideríteni, mi a számszerű kapcsolat például fém-oxidok fémre és oxigénre, vagy mészkő égetett mészre és szén-dioxidra való bomlásakor, vagy más anyagok bomlásakor a T hőmérsékleten fellépő p_1 egyensúlyi nyomás és a T hőmérséklethez és p_0 nyomáshoz tartozó szabad entalpia között. Elvileg a dolog egyszerű: az anyagot az adott T hőmérsékleten tartva egy kis edényben, ahhoz egy dugattyús hengert csatlakoztatunk és a dugattyút lassan hátrahúzzuk, olyan lassan, hogy a gáznyomás mindig nagyon közel legyen az egyensúlyi p_1 nyomáshoz. Ha a bomlás befejeződött, akkor a kis edényt egy csapot elzárva elválasztjuk a hengertől, és a dugattyút addig mozgatjuk, amíg a hengerben a nyomás meg nem egyezik a külső p_0 nyomással. Az eközben kapott munka megegyezik a bomlás szabad entalpiájának ellentettjével. Azért az ellentettjével, mivel a hasznos munkát a

bomló anyag szempontjából kell számolnunk, nem a mienkből. Több (a mi szempontunkból nézve) nyilván nem lehet, kevesebb viszont azért nem, mert a folyamat (majdnem) megfordítható, és így visszafelé vezetve a már látott gondolatmenettel másodfajú örökmozgót tudnánk csinálni. A hőtan második főtételének tárgyalásánál megúsztuk annak a munkának a kiszámítását, amit a p_1 nyomásról a p_0 nyomásra táguló gáz végez, de itt nem tudjuk ezt megúszeni. Ennek a munkának a kiszámításához először tegyük fel, hogy a külső nyomás nulla. Mint ott is, miközben az első lépésben T hőmérsékleten a nyomás p -ről egy tőle csak kicsit kisebb p' -re csökken, a térfogat $V = nRT/p$ -ről $V' = nRT/p'$ -re nő. A gáz által végzett munka közelíthető a

$$\frac{p+p'}{2}(V'-V) = nRT \frac{p+p'}{2} \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right)$$

szorzattal. Ez nRT -szer egy kis trapéz területe, amely az $1/p$ görbe alatti terület egy részét közelíti. Amire szükségünk van, az ennek a görbének a p_0 és p_1 közé eső része alatti terület. Az $1/p$ az $\ln p$ deriváltja, így a Newton–Leibniz-formula szerint ez $\ln p_1 - \ln p_0 = \ln(p_1/p_0)$. Térjünk vissza a szabad entalpia és az gáznomás kapcsolatához. Mennyi hasznos munkát végez a gáz, ha a külső nyomás p_0 ? (A külső nyomás ellen végzett munkát nem számítjuk, az legőbbször nem hasznos számunkra.) Az első lépésben, amíg a hengerben a nyomás p_1 , nyilván $(p_1 - p_0)V_1$ munkát, ahol V_1 a képződött gáz térfogata p_1 nyomáson. A második szakaszban a légiüres térben végzett teljes $nRT(\ln p_1 - \ln p_0) = nRT \ln(p_1/p_0)$ munkából le kell vonnunk a külső levegő ellen végzett $p_0(V_0 - V_1)$ munkát, ahol V_0 a képződött gáz térfogata p_0 nyomáson. Így a teljes hasznos munka

$$(p_1 - p_0)V_1 + nRT \ln(p_1/p_0) - p_0(V_0 - V_1) = nRT \ln(p_1/p_0),$$

mivel $p_0V_0 = p_1V_1 = nRT$. Ez a bomlás szabad entalpiája. Ha tehát a szabad entalpiát G -vel jelöljük, akkor $G = -nRT \ln(p_1/p_0)$. Hogy világosabbak legyenek a jelölések, a külső nyomást jelöljük p -vel, az gáz nyomását p_g -vel. Ekkor képletünk

$$G(T, p, n) = -nRT \ln(p_g/p).$$

A $G(T, p, n)$ jelölés arra emlékeztet bennünket, hogy a szabad entalpia függ a hőmérséklettől, a nyomástól és a mólszámtól. Látjuk azonban, hogy — nem meglepő módon — a szabad entalpia arányos a mólok számával, ezért elég egy mól gázra tudnunk. Jelöljük ezt $G(T, p)$ -vel. Másrészt mivel p_g független p -től, elég egyetlen p' -re ismernünk $G(T, p')$ értékét, hogy abból kiszámolva p_g -t, egy másik p nyomásra kiszámoljuk $G(T, p)$ -t:

$$G(T, p) = -RT \ln(p_g/p)$$

és

$$G(T, p') = -RT \ln(p_g/p'),$$

ahonnan

$$G(T, p) - G(T, p') = -RT(\ln(p_g/p) - \ln(p_g/p')),$$

azaz

$$G(T, p) = G(t, p') + RT \ln(p/p').$$

Így rendszerint csak a normál nyomásra vonatkozó $G^0(T)$ értékeket adják meg. A hőmérséklettől való függés nem ilyen egyszerű. Mindenesetre adott p_g -hez adott p mellett a $G(T, p)/T$ hányadosnak ugyanannak kell lenni. Például $p = p^0$ választással adott p_g -re $G^0(T)/T$ állandó. Ne felejtjük el, hogy használtuk az általános gáztörvényt, így a talált összefüggés csak annyira pontos, mint az általános gáztörvény. *

2.8.7. Gázreakciók egyensúlya és szabad entalpiája. * Foglalkozunk most egy gázreakció szabad entalpiájának és az egyensúlynak a kapcsolatával. Hogy valami konkrétum legyen előttünk, a magasabb hőmérsékleten lejátszódó, megfordítható úgynevezett vízgázreakcióval fogunk foglalkozni: $\text{CO} + \text{H}_2\text{O} = \text{CO}_2 + \text{H}_2$. Képzeljünk el egy dobozt, amelyben valamennyi van ezekből a gázokból. Lehet még benne más is, például katalizátor, más gázok. A lényeg az, hogy T hőmérsékleten a fenti, mindkét irányban lejátszódni képes reakció egyensúlyban legyen. Tegyük fel, hogy négy dugattyús henger csatlakozik a dobozhoz, de csappal lezárható a csatlakoztatás. Ezen kívül a doboz és az egyes hengerek között olyan anyag van, amely csak a szén-monoxidot, csak a vízgőzt, csak a szén-dioxidot illetve csak a hidrogént engedi át. A hidrogénre ilyen anyag például a palládium. Nem fontos, hogy tényleg létezik-e ilyen anyag, végülis ez csak egy gondolatkísérlet. Ez az elrendezés a van't Hoff-doboz: ennek a gondolatkísérletnek a kitalálójáról van elnevezve. Lezárt csapoknál a H_2 és a CO_2 hengere legyen üres, a CO és a H_2O hengerében legyen 1-1 mól gáz a külső p nyomásnak megfelelő nyomáson. Mindegyik gáz nyomása a csak azt áteresztő anyag és a csap között annyi, mint az adott gáz parciális nyomása a dobozban. A CO és a H_2O nyomását állítsuk be erre a nyomásra. Most nagyon lassan, hogy mindegyik gáznál csak nagyon kicsit térjünk el az egyensúlyi nyomástól, és a hőmérséklet is csak nagyon kicsit térjen el T -től, nyomjuk be a CO és a H_2O dugattyúját, és húzzuk ki a H_2 és a CO_2 dugattyúját. Amikor a CO és a H_2O elfogyott, zárjuk el a csapokat, és állítsuk be a H_2 és a CO_2 nyomását a külső p nyomásra. A fém-oxidok bomlásánál tanultak szerint eközben a kémiai reakció

$$\begin{aligned} & RT \ln(p_{\text{H}_2}/p) + RT \ln(p_{\text{CO}_2}/p) - RT \ln(p_{\text{H}_2\text{O}}/p) - RT \ln(p_{\text{CO}}/p) \\ &= RT \ln \left(\frac{p_{\text{H}_2} p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{CO}}} \right) \end{aligned}$$

munkát végzett. Ez $-G$ kell legyen, ahol G a reakció szabadentalpiája: több nem lehet, és kevesebb se, mert az egész folyamat (majdnem) megfordítható, így megfordítva másodfajú örökmozgót tudnánk készíteni. Tehát azt kaptuk, hogy

$$G(T, p) = -RT \ln \left(\frac{p_{\text{H}_2} p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{CO}}} \right).$$

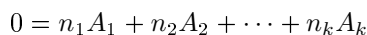
Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{p_{\text{H}_2} p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{H}_2\text{O}} p_{\text{CO}}} = K,$$

valamilyen, csak a hőmérséklettől függő, de a nyomástól nem függő (hogy miért, lásd később) állandó. Ez egy nagyon fontos összefüggés, a kémia egyik alaptörvénye, a *tömeghatás törvénye*. Nevét onnan kapta, hogy mutatja, ha valamelyik kiindulási anyag parciális nyomását növeljük, akkor a keletkező anyagok parciális nyomásainak növekednie kell, vagy a másik kiindulási anyag parciális nyomásának csökkennie kell (vagy mindegyik változik), tehát a reakciónak balról jobbra kell lejátszódnia. Ha viszont valamelyik kiindulási anyag parciális nyomását csökkentjük, akkor a reakció jobbról balra játszódik le.

Mi lesz a helyzet, ha valamelyik keletkező anyagból több mól is keletkezik? Akkor a parciális nyomása többször fog szerepelni a számlálóban, azaz annyiadik hatványon lesz, ahány mól keletkezik belőle. Ugyanígy, ha valamelyik kiindulási anyagból több mól használódik el, akkor parciális nyomása annyiadik hatványon lesz a nevezőben, ahány mól használódik el belőle.

Mi a helyzet általában? Tegyük fel, hogy egy gázreakcióban az A_1, A_2, \dots, A_k anyagok vesznek részt. Írjuk fel a reakcióegyenletet



alakban, ahol ha az A_i anyag keletkezik, akkor az n_i mólszám pozitív, egyébként negatív. Legyen $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Ekkor a van't Hoff-doboz használatával azt kapjuk, hogy

$$G(T, p) = -RT \ln(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} / p^n).$$

Úgy tűnik, mintha a

$$K = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

egyensúlyi állandó függne a p külső nyomástól is. Ez (legalábbis ameddig az általános gáztörvény érvényes) természetesen nincs így, hiszen az, hogy a van't Hoff-doboz belsejében milyen parciális nyomások állnak be, nem függhet attól, hogy mi van rajta kívül. A K egyensúlyi állandó a doboz belsejében uralkodó nyomástól azaz a p_i parciális nyomások $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ összegétől, az esetleg jelenlévő más gázoktól, más anyagoktól, például katalizátoroktól sem függhet, csak a hőmérséklettől, hiszen kiszámítható $G(T, p)$, T és p segítségével. Általában $G(T, p)$ változik a külső nyomással, és hogy hogyan, azt már ki is számoltuk. Ezért elég, ha egyetlen, mondjuk a p^θ nyomáson ismerjük $G(T, p)$ értékét. Ezt $G^\theta(T)$ -vel fogjuk jelölni. Jelölje c_i az A_i anyag koncentrációját mol/l egységekben. Ekkor 1 l gázban c_i mol, pontosabban $c_i \cdot 1$ l mol van az A_i anyagból, így annak p_i parciális nyomására $p_i \cdot 1 \text{ l} = RT c_i \cdot 1 \text{ l}$, azaz $p_i = c_i RT$. Innen

$$K = c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots c_k^{n_k} (RT)^n.$$

Hogy a különböző egyensúlyi állandókat össze ne keverjük, amit eddig K -val jelöltünk, jelöljük K_p -vel. A K_p -ben a p betű azt jelzi, hogy a (parciális) nyomásokra vonatkozik. A $K_c = c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots c_k^{n_k}$ jelöléssel ez azt jelenti, hogy $K_p = K_c (RT)^n$, és így a K_c egyensúlyi állandó sem függ a nyomástól, csak a hőmérséklettől. A tömeghatás törvényét leggyakrabban ebben az alakban fogjuk használni:

$$K_c = c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots c_k^{n_k}$$

(csak a hőmérséklettől függő) állandó, mert így oldatokra is jó közelítéssel érvényes. Még egy alakban felírhatjuk a tömeghatás törvényét. Ha a gázkeverékben x_i az A_i anyag móltörtje (azaz A_i móljainak száma osztva az összes mólok számával), akkor $p_i = x_i p$, ahol p a gázkeverék teljes nyomása. Így

$$K_p = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} p^n.$$

A $K_x = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ jelöléssel ez azt jelenti, hogy $K_p = K_x p^n$, és mivel K_p nem függ a nyomástól, ha $n < 0$, akkor a nyomás növelésekor K_x -nek növekednie kell, azaz a mólszámcsökkenéssel járó reakciókat a nyomás növelése elősegíti. Hasonlóan a mólszámnövekedéssel járó reakciókat a nyomás csökkenése segíti elő. Ez összhangban van a Le Châtelier-elvvel, tulajdonképpen annak a pontos, mennyiségi leírása gázreakciókra a nyomásváltozás esetére.

Mi a helyzet, ha a reakcióban szilárd anyag vagy anyagok, illetve folyadék vagy — egymással nem elegyedő — folyadékok is részt vesznek. Ezeket nyugodtan beletehetjük a van't Hoff-dobozba, és az egész gondolatmenet érvényes marad, mert ezek térfogatának változása elhanyagolható a gázok térfogatához képest. Tehát az egyensúlyi állandó számításánál ezeket egyáltalán nem kell figyelembevenni. Tulajdonképpen ezt a gondolatmenetet alkalmaztuk a gáz keletkezésével lezajló bomlás tárgyalásánál. *

2.8.8. Képződési szabad entalpiák. * Látjuk, hogy egy reakció szabad entalpiája a vegyész számára rendkívül fontos mennyiség. Hogyan tudnánk kiszámítani? Ugyanúgy lehet vele számolni, mint az entalpiával (ha nem így lenne, lehetne másodfajú örökmozgót csinálni), ezért elég a vegyületek *képződési szabad entalpiáit* táblázatba foglalni. Sajnos, a hőmérséklettől való függése nem olyan egyszerű mint a képződéshőé, ezért a táblázatnak különböző T hőmérsékletekre is tartalmaznia kell (az egy móltra vonatkozó) $G^\theta(T)$ képződési szabad entalpia értékeket. Jobb szeretik a $(G^\theta(T) - H^\theta(0))/T$ értékeket táblázatba foglalni, mert ezek sokkal kevésbé változnak a hőmérséklettel. Persze, ekkor $H^\theta(0)$ értékét — az egy mól anyagra, az abszolút nulla fokra és normál nyomásra vonatkozó képződéshőt — is meg kell adni. Néha nem ezt adják meg, hanem a $H^\theta(T^\theta) - H^\theta(0)$ különbséget és $H^\theta(T^\theta)$ értékét. A táblázat a $(H^\theta(0) - G^\theta(T))/T$, és az utolsó két oszlopban a $H^\theta(T^\theta) - H^\theta(0)$ illetve $-H^\theta(T^\theta)$ értékeket tartalmazza (mivel egyébként sok negatív előjel lenne). A két utolsó oszlopban az egység kJ/mol, egyébként J/(K·mol).

	T^θ	500 K	1000 K	1500 K	2000 K		
C(s)	2,2	4,85	11,6	17,5	22,5	1,050	0,0
CH ₄ (g)	152,5	170,5	199,4	221,1	239,0	10,029	74,81
Cl ₂ (g)	192,2	208,6	231,9	246,2	256,6	9,180	0,0
CO(g)	168,4	183,5	204,1	216,6	225,9	8,673	110,53
CO ₂ (g)	182,3	199,5	226,4	244,7	258,8	9,364	393,51
H ₂ (g)	102,2	116,9	137,0	148,9	157,6	8,468	0,0
H ₂ O(g)	155,5	172,8	196,7	211,7	223,1	9,908	241,82
HCl(g)	157,8	172,8	193,1	205,4	214,3	8,640	92,31
N ₂ (g)	162,4	177,5	197,9	210,4	219,6	8,669	0,0
NH ₃ (g)	159,0	176,9	203,5	221,9	236,6	9,92	46,11
O ₂ (g)	176,0	191,1	212,1	225,1	234,7	8,682	0,0

A vízgázreakcióra összevont értékek:

	T^0	500 K	1000 K	1500 K	2000 K		
reakció	-39,4	-39,9	-37,4	-34,7	-32,6	-0,749	41,16

Az interpolációval kapott értékek J/(K·mol)-ban és $-H^0(0)$ J/mol-ban:

	600 K	800 K	1000 K	1200 K	1400 K	1750 K	2000 K	$H^0(0)$
reakció	-39,4	-38,4	-37,4	-36,86	-35,24	-33,65	-32,6	40411

Innen az egyensúlyi állandók:

	600 K	800 K	1000 K	1200 K	1400 K	1750 K	2000 K
$\ln K$ szám.	3,36	1,46	0,36	-0,38	-0,77	-1,27	-1,49
$\ln K$ mért	3,29	1,40	0,33	-0,34	-0,79	-1,29	-1,52
x	0,84	0,67	0,54	0,46	0,40	0,34	0,32

Az utolsó sorban az ugyanannyi mól CO és H₂O keverékéből az átalakult anyag részaránya szerepel. *

2.8.9. Az entrópia. ** Ki lehet-e vajon számolni egy reakció szabad entalpiáját tetszőleges hőmérsékleten pusztán hőtani adatokból? Képezzük az

$$S(T, p) = \frac{H(T, p) - G(T, p)}{T}$$

mennyiséget. Ez valami „kötött entalpia” osztva hőmérséklet mennyiség, tehát valami „redukált” (a hőmérséklettel osztott) hőmennyiség. A körfolyamatok hatásfokának vizsgálatánál láttuk, hogy a $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ összefüggés, ami szintén redukált hőmennyiségek egyenlősége, milyen fontos. Az S -et *entrópiának*, az adott reakció entrópiájának fogjuk nevezni. Ha sikerül kiszámítani, akkor G -t is ki tudjuk számítani, mert H -t ki tudjuk számítani. A *hőtan harmadik főtétele* szerint bármely reakció entrópiája nullához közeledik, ha T nullához közeledik: ez tapasztalati tény. (Emiatt $T = 0$ -nál a reakció entalpiája és szabad entalpiája megegyezik, és néha az elemek entalpiáját $T = 0$ -nál szokás nullának venni. Ha ezt tesszük, és az entalpiát, illetve a szabad entalpiát az abszolút nulla foktól számítjuk, akkor *abszolút entalpiáról* illetve *abszolút szabad entalpiáról* beszélünk.)

Az egyszerűség kedvéért rögzítsük a nyomást. Legyen például $p = p^0$, a táblázatokban található értékek úgyis erre a nyomásra vonatkoznak. A továbbiakban a nyomástól való függést nem fogjuk kiírni. Hogyan változik a reakció entrópiája a hőmérséklettel? Írjuk fel a (tetszőleges reakció) reakcióegyenletét

$$0 = n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots + n_k A_k$$

alakban, ahol ha az A_i anyag keletkezik, akkor az n_i mólszám pozitív, egyébként negatív. Egy gondolkísérletet fogunk végrehajtani: a kiindulási anyagokat lehűtjük az abszolút nulla fokra, végrehajtjuk a reakciót, majd a keletkezett anyagokat újra felmelegítjük. A

trükk az, hogy tudjuk, az abszolút nulla fokon a reakció szabad entalpiája megegyezik az entalpiával.

Foglalkozunk először egyetlen A anyag egy móljával. Vegyünk fel az abszolút nulla és a T hőmérséklet között közbenső hőmérsékleteket jó sűrűn: legyen $T_0 = 0$ K, és $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T$. Jelölje ΔT_j a T_j hőmérséklet és az előző hőmérséklet különbségét. Ha az anyag T_j hőmérsékletű, akkor az előző hőmérsékletre való lehűtéshez (állandó nyomáson) $\approx C(T_j)\Delta T_j$ hőt kell elvonnunk, ahol $C(T_j)$ az állandó nyomáson mért mólhő a T_j hőmérsékleten. Ha reverzibilis körfolyamatot használunk a hűtéshez, akkor a T hőmérsékletű környezetbe Q_j hőmennyiség kerül, ahol

$$\frac{Q_j}{T} = \frac{C(T_j)\Delta T_j}{T_j},$$

azaz

$$Q_j = \frac{T}{T_j}C(T_j)\Delta T_j,$$

és

$$L_j = Q_j - C(T_j)\Delta T_j$$

munkát kell végeznünk; az egyenlőség mindenütt közelítő. Adjuk össze a hőmennyiségekre kapott kifejezéseket. Az kapjuk, hogy az összeg

$$Q(T) = T\left(\frac{C(T_1)\Delta T_1}{T_1} + \frac{C(T_2)\Delta T_2}{T_2} + \dots\right).$$

A zárójelben álló kifejezést az A anyag *moláris entrópiájának* vagy röviden *entrópiájának* nevezzük. Ha valamilyen T_j hőmérsékleten halmazállapot változás (vagy kristályszerkezet változás, stb.) van, akkor ott az összegben $C(T_j)\Delta T_j$ helyére az egy móltra eső átváltozási hőt írjuk a számlálóba. Jelöljük az A anyag entrópiáját $S(T)$ -vel. (Ne keverjük össze a reakció entrópiájával. Éppen a kettő közötti kapcsolat érdekel bennünket.) A harmadik főtétel azt is kimondja, hogy ezt tiszta, kémiai egységes anyagoknál választhatjuk úgy, hogy az abszolút nulla fokon nulla legyen. Éppen ezt tettük: ha $T = 0$, akkor semmit sem adunk össze, az összeg nulla. Ha az L_j -kre kapott kifejezéseket is összeadogatjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$L(T) = Q(T) - \left(C(T_1)\Delta T_1 + C(T_2)\Delta T_2 + \dots\right).$$

A zárójelben álló kifejezés nem más, mint $H(T) - H(0)$, így azt kaptuk, hogy $L(T) = T \cdot S(T) - H(T) + H(0)$.

Most térjünk vissza a reakcióentalpia vizsgálatára. Mivel csak a T és a 0 hőmérsékletre lesz szükségünk, a továbbiakban az i -edik anyag entrópiáját, entalpiáját illetve a vele kapcsolatos hűtési munkát jelölje S_i , H_i illetve L_i . Először a kiindulási anyagokat (reverzibilisen) hűtsük le az abszolút nulla fokra, hajtsuk végre a reakciót, majd (reverzibilisen) melegítsük fel. Mivel a reakcióegyenletben a kiindulási anyagok mólszáma negatív, a rendszer szempontjából a befektetett munka az A_i anyagnál $-n_i L_i$. Ugyanez

a helyzet a keletkezett anyagoknál, mivel itt a mólszám ugyan pozitív, de felmelegítésről van szó. Így

$$\begin{aligned} G(T) &= G(0) - (n_1 L_1 + \dots + n_k L_k) \\ &= G(0) - T(n_1 S_1(T) + \dots + n_k S_k(T)) + (n_1 H_1(T) + \dots + n_k H_k(T)) \\ &\quad - (n_1 H_1(0) + \dots + n_k H_k(0)). \end{aligned}$$

Az utolsó zárójelben álló kifejezés nem más, mint a reakcióentalpia az abszolút nulla fokon. Ez a harmadik főtétel szerint megegyezik $G(0)$ -lal, így ez a két tag kiesik. Az utolsó előtti zárójelben szereplő tag $H(T)$, a reakcióentalpia. Így azt kaptuk, hogy

$$G(T) = -T(n_1 S_1(T) + \dots + n_k S_k(T)) + H(T).$$

Az S reakcióentrópia definíciója szerint azt kapjuk, hogy

$$S(T) = n_1 S_1(T) + \dots + n_k S_k(T).$$

Maradt egy probléma $S_i(T)$ kiszámításával kapcsolatban. Vegyük észre, hogy az összeg akármilyen nagy lehetne, ha T_1 csökkenésével $C_i(T_1)$ nem csökkenne elég gyorsan. Valójában kis hőmérsékletekre $C_i(T_1)$ nagyjából T_1^3 -nel arányos, tehát nagyon kicsi. E miatt az abszolút nulla fokot nem tudjuk elérni, mert a közelében a fajhő nagyon kicsi, ezért igen kis beáramló hőmennyiség is jelentősen megemeli a hőmérsékletet, de már 10^{-7} K-nél jobban sikerült megközelíteni. Nem kérdőjelezi meg ez az egész gondolatmenetünket? Nem, mert elég csak megközelíteni az abszolút nulla fokot, mert ha T_1 elég kicsi, akkor $G(T_1)$ és $H(T_1)$ különbsége már nagyon kicsi.

A moláris entrópiákat tehát fajhőmérések alapján ki lehet számolni. A fajhőadatok és átalakulási hőik ismeretében minden A_i anyagra az $S_i(T)$ moláris entrópiák és $H_i(T)$ moláris képződéshők kiszámíthatók. Hogy ne kelljen a nagyon kis hőmérsékletekhez tartozó fajhőkkel bajlódni, célszerű a számolást a táblázatban rendszerint megtalálható $T = T^\theta$ (és $p = p^\theta$) normál értékekhez tartozó $S_i^\theta = S_i(T^\theta)$ és $H_i^\theta = H_i(T^\theta)$ normál entrópiáktól illetve normál képződéshőktől kezdeni. Az $S_i(T)$ és $H_i(T)$ értékekből adódik a reakció

$$S(T) = n_1 S_1(T) + n_2 S_2(T) + \dots + n_k S_k(T)$$

entrópiája és

$$H(T) = n_1 H_1(T) + n_2 H_2(T) + \dots + n_k H_k(T)$$

entalpiája, így a $G(T)$ szabad entalpia is. Bár elvileg megoldottuk azt a feladatot, hogy egy reakció szabadentalpiáját pusztán hőtani adatokból kiszámoljuk, a számolás elég bonyolult. Jó lenne valami egyszerűbb módszer, még ha közelítő is. Ilyet a könyvsorozat kémia részében találhatunk. **

2.8.10. A Gibbs–Helmholz-egyenlet. ** Hogyan változik a reakció szabadentalpiája a hőmérséklettel? Az előző pont jelöléseit fogjuk használni. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{\Delta G(T)}{\Delta T} \rightarrow -S(T), \quad \text{ha } \Delta T \rightarrow 0,$$

ahol $\Delta G(T) = G(T + \Delta T) - G(T)$; ez a *Gibbs–Helmholz-egyenlet*.

Mivel $G(T) = H(T) - TS(T)$, nyilván

$$\begin{aligned}\Delta G(T) &= G(T + \Delta T) - G(T) \\ &= H(T + \Delta T) - (T + \Delta T)S(T + \Delta T) - (H(T) - TS(T)) \\ &= \Delta H - ((T + \Delta T)S(T + \Delta T) - TS(T)).\end{aligned}$$

Vizsgáljuk először az utolsó, zárójelben álló különbséget. A $(T + \Delta T)S(T)$ mennyiséget hozzá is adva, meg le is vonva ez

$$(T + \Delta T)S(T + \Delta T) - (T + \Delta T)S(T) + (T + \Delta T)(T) - TS(T).$$

Itt a második különbség nyilván $\Delta TS(T)$. Az első különbség $(T + \Delta T)\Delta S(T)$. Ha nincs halmazállapot változás (ezt feltesszük), akkor ΔS kicsi, hiszen ΔT , ΔG és ΔH kicsik. A $(T + \Delta T)\Delta S$ helyébe nyugodtan $T\Delta S$ -et írhatunk, hiszen a kettő különbsége $\Delta T\Delta S$ nagyon-nagyon kicsi: két kicsi mennyiség szorzata, így még azokhoz képest is elhanyagolható. Így nagyon jó közelítéssel

$$\Delta G(T) = \Delta H(T) - T\Delta S(T) - S(T)\Delta T.$$

A $\Delta S(T)$ mennyiség az $n_i\Delta S_i(T)$ mennyiségek összege. Viszont az $S_i(T)$ definíciója szerint $\Delta S_i(T) = S_i(T + \Delta T) - S_i(T) = C_i(T)\Delta T/T$, így $T\Delta S_i(T) = C_i(T)\Delta T$. Ez viszont nem más, mint $\Delta H_i(T)$, így $\Delta H(T) = T\Delta S(T)$, tehát ez a két tag kiejti egymást. Osztvá ΔT -vel, kapjuk a bizonyítandó állítást. **

2.8.11. Az entrópia, mint a rendezetlenség mértéke. Az entrópia valamilyen értelemben a „rendezetlenség mértéke”. Például két gáz összekeverésénél hőfelvétel vagy leadás nincs, mégis, a szabad entalpia csökken, tehát az entrópia nő. ** A van't Hoff-doboz segítségével azt is ki tudjuk számítani, hogy mennyit. Nézzünk egy számpéldát. Készítsünk „műlevegőt”, ami 0,21 mól oxigént és 0,79 mól nitrogént tartalmaz. Normál hőmérsékleten és nyomáson használjuk a van't Hoff-dobozt. Egy dugattyús hengerben van a „levegő”, a másikon keresztül az oxigént, a harmadikon keresztül a nitrogént vonjuk ki, persze 0,21 bar illetve 0,79 bar nyomáson, utána pedig mindkettőt 1 bar nyomásra sűrítjük. Az általunk végzett munka, mint már tudjuk,

$$-RT(0,79 \ln 0,79 + 0,21 \ln 0,21) \text{ mol},$$

tehát az entrópia-változás, amit okoztunk,

$$R(0,79 \ln 0,79 + 0,21 \ln 0,21) \approx -4,2733 \text{ J/K},$$

azaz az entrópia növekedés a keveréskor 4,2733 J/K volt. Ez 1,274 kJ/mol szabadentalpia csökkenésnek felel meg, ami nem sok a kémiai reakciók több száz kJ/mol entalpiájához képest. **

2.8.12. A tömeghatás törvénye és a van't Hoff-egyenlet. Foglaljuk össze eredményeinket azoknak is, akik nem követték a fenti nem egyszerű gondolatmeneteket. Ha van egy kémiai reakciónk, írjuk a reakciót

$$0 = n_1 A_1 + n_2 A_2 + \dots + n_k A_k$$

alakban, azaz mindent a jobb oldalra rendezve. Az A_i anyagból, ha n_i mól keletkezik, akkor $n_i A_i$ szerepel a jobb oldalon, a reakcióegyenlet jobb oldalán. A kiindulási anyagokra vonatkozó tagokat viszont átvittük a bal oldalról a jobb oldalra, így ha A_i egy kiindulási anyag, akkor a jobb oldalon a megfelelő n_i negatív. Ha akár gázreakciónál, akár oldatreakciónál egyensúly áll be, és c_i jelöli az A_i anyag mol/l-ben mért koncentrációját, akkor

$$c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots c_k^{n_k} = K_c,$$

egy állandó, amely nem függ a nyomástól, ha az nem túl nagy, de függ a hőmérséklettől. A K_c konstansnál a c betű azt jelenti, hogy a koncentrációkra vonatkozik. A keletkező anyagok koncentrációjának kitevője pozitív, azok a számlálóba kerülnek, a kiindulási anyagok koncentrációjának kitevője viszont negatív, ami annak felel meg, hogy ezek a nevezőbe kerülnek. Ez a *tömeghatás törvénye*, a kémia egyik alaptörvénye. Kifejezhető a móltörttekkel is: ha x_i az A_i anyag móltörtje (azaz A_i móljainak száma osztva az összes mólok számával), akkor

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} = K_x$$

állandó, ez azonban gázreakciónál függ a nyomástól is. Végül gázreakciónál egy harmadik alak: a parciális nyomásokra

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = K_p,$$

ahol a K_p állandó nem túl nagy nyomásokra nem függ a nyomástól.

Az egyensúlyi állandó kiszámítható a reakció szabadentalpiájából, ami viszont a szereplő anyagok keletkezési szabadentalpiájából számítható:

$$G(T, p) = n_1 G_1(T, p) + n_2 G_2(T, p) + \dots + n_k G_k(T, p).$$

A keletkezési szabadentalpiákat (p^θ -ra és T^θ -ra) megmérték és összegyűjtötték: például sok megtalálható a könyvsorozat kémia részének végén szereplő táblázatban.

Legyen n az (előjeles) n_i -k összege, a mólszámváltozás. Gázreakciókra levezettük, hogy

$$G(T, p) = -RT \ln(K_c(T) V^n),$$

ahol $V = RT/p$, az egy móltra jutó térfogat. Oldatoknál a vegyészek egy kis trükkel élnek. A keletkezési szabadentalpiákat vizes oldatokra is táblázatba gyűjtötték. (Ezekhez oda van írva, hogy (aq), ami a vizet jelentő aqua latin szó rövidítése. Némely könyv odaírja, hogy szilárd, folyékony vagy gáznemű anyagról van szó, a latin rövidítéssel: (s), (l) illetve (g).) A trükk az, hogy a kellemetlen egy móltra eső térfogatot, (ami vizes oldatoknál úgyis alig függ a nyomástól és a hőmérséklettől, mivel a folyadékok hőtágulása

és összenyomhatósága kicsi), beleolvasztották a keletkezési szabadentalpiákba. Így a képlet egyszerűbb lesz:

$$G(T, p) = -RT \ln K_c(T),$$

de nem szabad elfelejtenünk, hogy $K_c(T)$ a mol/l-ben vett koncentrációk szorzata. Mit mond nekünk ez a képlet? Ha a szabadentalpia nagy pozitív érték, $K_c(T)$ -nek nagyon kicsinek kell lenni, a reakció alig megy végbe, esetleg nem is vesszük észre. Ha a szabadentalpia nagy negatív érték, a reakció gyakorlatilag teljesen végbemegy.

Kérdés még, hogy az egyensúlyi állandó hogy függ a hőmérséklettől? Az teljesül, hogy

$$\frac{\Delta K}{\Delta T} \rightarrow \frac{K(T)}{T} \cdot \frac{H(T)}{RT}, \quad \text{ha } \Delta T \rightarrow 0.$$

Ez a *van't Hoff-egyenlet*. Az egyenlet lényegében megegyezik a gőznyomásra kapott Clapeyron-egyenlettel, és a Le Châtelier-elv mennyiségi kifejezése a hőmérsékletváltozásra: ha a reakció endoterm, a $H(T)$ reakcióentalpia pozitív, akkor a hőmérséklet növelése az egyensúlyt jobbra tolja el, csökkentve a hőmérséklet növekedését, ha exoterm, akkor viszont balra, így csökkentve a hőmérséklet növekedését. Ez az egyenlet érvényes gázreakciókra is $K = K_p$ -re és $K = K_x$ -re és folyadékreakciókra is $K = K_c$ -re. A differenciál- és integrálszámítás ismeretében megmutatható, hogy a van't Hoff-egyenlet azt jelenti, hogy ha H nem függ T -től, akkor $\ln K$ -t ábrázolva $1/T$ függvényeként, egyenest kapunk, aminek meredeksége $-H/R$, ha függ, akkor pedig olyan görbét, aminél az érintő meredeksége az $1/T$ pontban $-H(T)/R$.

** A gázegyensúlyok vizsgálatánál kapott összefüggéseket fogjuk használni. A nyomást most is rögzítjük. Először K_x -szel foglalkozunk. Bár K_x függ a nyomástól, az most rögzített, így a tőle való függést nem írjuk ki. A $G(T) = -RT \ln K_x(T)$ összefüggésből $R \ln K_x(T) = -G(T)/T$. Először képezzük a jobb oldali kifejezés differenciáját osztva ΔT -vel:

$$\begin{aligned} \Delta \left(-\frac{G(T)}{T} \right) / \Delta T &= \frac{G(T)}{T \Delta T} - \frac{G(T + \Delta T)}{(T + \Delta T) \Delta T} \\ &= \frac{(T + \Delta T)(G(T) - TG(T + \Delta T)) / \Delta T}{T(T + \Delta T)} \\ &= \frac{-T(\Delta G(T) / \Delta T) + G(T)}{T(T + \Delta T)} \\ &\rightarrow \frac{TS(T) + G(T)}{T^2} = \frac{H(T)}{T^2}. \end{aligned}$$

Most képezzük $\ln K_x(T)$ differenciáját:

$$\begin{aligned} \Delta \ln K_x(T) &= \ln K_x(T + \Delta T) - \ln K_x(T) \\ &= \ln \frac{K_x(T + \Delta T)}{K_x(T)} = \ln \left(1 + \frac{\Delta K_x(T)}{K_x(T)} \right) = \frac{\Delta K_x(T)}{K_x(T)}, \end{aligned}$$

az utolsó egyenlőség azért áll fenn jó közelítéssel, mert $\Delta K_x(T)/K_x(T)$ kicsi, ha ΔT kicsi. Osztvá ΔT -vel, végül is azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta K_x(T)}{\Delta T} \rightarrow \frac{K_x(T)}{T} \cdot \frac{H(T)}{RT}, \quad \text{ha } \Delta T \rightarrow 0.$$

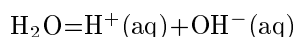
Mivel $K_p(T) = K_x(T)p^n$,

$$\frac{\Delta K_p(T)}{K_p(T)} = \frac{\Delta K_x(T)}{K_x(T)},$$

amiből azt kapjuk, hogy a van't Hoff-egyenlet K_p -re is teljesül. Végül oldatokra a van't Hoff-egyenletet K_c -re ugyanazzal a gondolatmenettel kaphatjuk meg, mint amivel gázokra megkaptuk K_x -re. (Gázoknál K_c -re nem teljesül, mivel az egy móltra eső V térfogat erősen függ T -től.)

Még egy nehézséget kell megemlítenünk. Ionoldatokra nem lehet közvetlenül megmérni a keletkezési szabadentalpia értékét. Ha például a H^+ ionra megpróbálnánk, iszonyú sok munkát kellene befektetnünk, mire bármilyen mérhető H^+ -koncentrációt elérnénk, mert az elektromosan feltöltött oldat az újabb ionokat nagyon taszítaná. Pozitív ionokkal együtt mindig ugyanannyi töltésű negatív iont is kell bevinnünk az oldatba. Ezt a nehézséget úgy hidalták át, hogy a H^+ ionok oldatának keletkezési szabadentalpiáját önkényesen nullának választották. **

* Nézzünk egy példát. Határozzuk meg a szabadentalpiákból a tiszta vízben a H^+ és OH^- ionok koncentrációját 18°C -on, ahol $0,78 \cdot 10^{-7}$ mol/l-nek mérték. A



reakció szabadentalpiája 25°C -on (táblázatból) $0 - 157,24 + 237,13 = 79,89$ kJ, ahonnan $\ln K_c = -32,227$, azaz $K_c = 1,009 \cdot 10^{-14}$ mol²/l². A $H^\theta(T^\theta)$ reakcióentalpia (táblázatból) $0 - 229,99 + 285,83 = 55,84$ kJ. Az egyik lehetőség, hogy a van't Hoff-egyenlettel számolunk tovább, mondjuk 1 K-enként változtatva a hőmérsékletet. A másik, hogy az $\ln K_c$ -t az $1/T$ függvényeként ábrázoló görbét egyenessel közelítjük, aminek meredeksége $-H^\theta(T^\theta)/R$. Innen

$$\frac{\ln K_c(T) - \ln K_c(T^\theta)}{1/T - 1/T^\theta} \approx \frac{-H^\theta(T^\theta)}{R},$$

azaz

$$\ln K_c(T) = \ln K_c(T^\theta) - \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^\theta}\right) \cdot \frac{H^\theta(T^\theta)}{R}.$$

Behelyettesítve $K_c(T) = 5,872 \cdot 10^{-15}$ mol²/l². Mivel ez a hidrogén és hidroxil ionok (egyenlő) koncentrációinak szorzata, az $0,7662 \cdot 10^{-7}$ mol/l, jó egyezésben a méréssel. *

3. ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG

3.1. Elektromosság

Ebben a fejezetben elektrosztatikával foglalkozunk (szatikus=állandó). Egy-két kivételtől eltekintve elektromos töltésekkel olyan körülmények között, ahol a töltések nem mozognak.

3.1.1. Kísérlet. Ha valamilyen műanyag tárgyat, például egy polisztirol hab darabot, műanyag vonalzót, műanyag tányért, polietilén fóliát száraz papírral megdörzsölünk, elektromos töltést kap, és például egy pici vattapelyhet, papírsebkendő egyetlen rétegének sarkáról leszakított papírdarabkákat, alumínium fólia darabkát magához vonz, majd rendszerint eltaszít. Ugyanezt tapasztaljuk, ha egy kémcsövet dörzsölünk meg papírral. Nem a dörzsölés hosszúsága a lényeges, hanem inkább az összenyomás ereje. Ha egy műanyag dossziéba belesimítunk egy papírlapot, az is feltöltődik. Nagyon lényeges, hogy minden teljesen száraz legyen. Ha nem sikerül a kísérlet, a papírt, kémcsövet, műanyagot radiátoron vagy jó magasan rövid ideig kézben láng fölé tartva szárítsuk meg, mert a vízréteg elvezeti az elektromos töltést. Párás levegőben, vagy nagy melegben, amikor erősen izzadunk, nem is érdemes ezekkel a kísérletekkel próbálkozni. Feltöltött műanyag tányérra kis vattapelyhet ejtve az legtöbbször odatapad, de néha elugrik. Ha lefújjuk róla, majd megpróbáljuk a tányérral elkapni, legtöbbször újra odatapad, de néha a kezünkre száll, esetleg sikerül lebegtetni a tányérral. Ezeket a jelenségeket először az ókori görögök tapasztalták borostyánkővel. Mivel a borostyánkő görög neve elektron, elektromosságnak nevezték el. Több kísérletben vizsgáljuk meg a jelenséget, hogy minden részletét megértsük. □

3.1.2. Kísérlet. Első elektromosság kimutató műszerünk, *elektroszkópunk* keménypapírból készül. Annak kimutatására képes, hogy egy tárgynak van-e elektromos töltése vagy nincs. A 3.1.1. fényképek közül a bal oldalinak megfelelően a mutató aljára egykét gémkapcsot teszünk, és addig tologatjuk, amíg a mutató a jobb oldali kép szerint a keménypapír állványra téve LASSAN leng. Száraz papírral megdörzsölve valamilyen műanyag tárgyat, közelítsük a mutatóhoz: ha feltöltődött, akkor vonzza a mutatót, és az kitér. Próbáljunk ki többféle tárgyat, hogy dörzsöléssel feltölthető-e? Egyébként jól feltöltött tárgynál sokszor már a karunkon is érezhetjük, hogy fel van töltve: vonzza a finom szőrszálakat, amit észrevehetünk. □

3.1.3. Kísérlet. Készítsük el a 3.1.2. fénykép szerinti állványt. Ha a fémdoboz felborulna, tegyünk bele valamit nehezeknek, például homokot. A keménypapírból készült kengyelt varrótűvel pár öltéssel összetűzzük, és a cérnát a botba szúrt gombostűre vagy szegre tekerjük. Tegyük a papírkengyelbe műanyag vonalzót vagy más műanyag tárgyat, amit kipróbáltunk, hogy feltölthető, majd várjuk meg, amíg az esetleg összetekeredett cérna kitekeredik. Fogjuk meg a kengyelt, és dörzsöljük meg a vonalzót! Egy másik megdörzsölt, ugyanolyan anyagú műanyag tárgyat közelítve taszítást tapasztalunk. Cseréljük ki a műanyag vonalzót egy kémcsőre, vagy más feltölthető üvegtárgyra és dörzsöljük meg. Egy másik megdörzsölt kémcső taszítja a cérnaszálon lógó megdörzsölt kémcsövet.

Nem mindig sikerül a kísérlet, ennek okát majd később érthetjük meg. Nekem a kémcsövekkel sikerült, a vonalzóval nem, nem taszítást hanem vonzást tapasztaltam. Később kiderült, hogy nem véletlenül: az egyik műanyag vonalzó papírral dörzsölve nem ugyanolyanra töltődött, mint a másik. Egy pálcára gombostűvel nagyon jól töltődő, dossziéból kivágott 5×10 cm-es műanyag lapot tűztem, és ezzel ismételttem meg a kísérletet, ezzel már sikerült. \square

3.1.4. Kísérlet. Jól szemlélteti az egyező elektromos töltések taszítását, ha egy poli-tilén vagy más jól töltődő műanyag csíkot félbehajtunk, majd száraz papírt erősen közé szorítva kihúzzuk közüle: a két félcsík szétugrik. Ez látható a 3.1.3. fényképen. \square

3.1.5. Kísérlet. Mérjük meg a taszítóerőt! Egy műanyag lapocskát például szigetelőszalaggal erősítsünk a keskenyebbik szélén egy vízszintes rudacskához, például hurkapálcához, úgy, hogy szabadon kitérhessen. Dörzsöljük meg, majd közelítsünk hozzá egy hasonlóan megdörzsölt ugyanolyan lapot! A kitérés szögéből és a lap súlyából ki tudjuk számítani a taszítóerőt. \square

3.1.6. Kísérlet. A cérnaszálon lógó megdörzsölt üveghez közelítsünk megdörzsölt műanyagot. Vonzást tapasztalunk. Persze ugyanígy vonzást tapasztalunk, ha a műanyag lóg a cérnaszálon és az üveggel közeledünk hozzá. Ezek szerint kétféle elektromosság van, és az egyforma elektromosságú testek taszítják, a különbözők vonzzák egymást. A kétféle elektromosság, ha találkozik, semlegesíti egymást. Ezért az egyiket pozitívnak, a másikat negatívnak nevezték el, mégpedig az üveg-elektromosságot pozitívnak, a gyanta-elektromosságot pedig negatívnak; a gyanta-elektromosság név onnan ered, hogy a borostyánkő megkövült gyanta, és ugyanolyan töltésű lesz, mint a legtöbb műanyag. Természetesen mikor az elnevezés született, műanyagok még nem voltak. Az, hogy valami milyen töltésű lesz, attól is függ, mivel dörzsöljük. Egy tapasztalati sor, amiben előbb álló anyagot a később állóval dörzsölve, az előbb álló pozitív, a később álló negatív lesz:

Szőr (például haj), flanel, üveg, toll, gyapot, selyem, bőr, fa, papír, sellak, pecsétviasz, fémek, paraffin, ebonit (azaz keménygumi), műanyagok, borostyánkő, szén, kén.

Ne feledjük, ez csak egy tapasztalati sor. Van olyan műanyag, amely papírral dörzsölve pozitívrá töltődik.

Sokáig dúlt a vita, hogy egy „elektromos folyadék” van, vagy kettő. Ma már tudjuk, hogy az atomok pozitív atommagból és körülötte „lebzselő” elektronokból állnak, és semlegesek: az atommag pozitív töltése ugyanannyi, mint az atom elektronjainak negatív töltése. Az atomok molekulákká kapcsolódhatnak össze, de ezek is semlegesek. Ha

azonban egy atomról vagy molekuláról leszakítunk egy, vagy pláne több elektront, akkor a pozitív töltések kerülnek túlsúlyba. Ha viszont csatlakozik hozzá egy vagy több elektron, akkor a negatív töltések kerülnek túlsúlyba. Az elektronok mintegy 2000-szer könnyebbek a legkönnyebb atommagnál is, így könnyebben mozognak. A dörzsöléskor rendszerint elektronok mennek át az egyik testről a másikra, így azon elektronfelesleg lesz és így töltése negatív. A másik testen túlsúlyba kerülnek a pozitív töltések, így az pozitív töltésű lesz. Néha csak azt mondjuk, hogy a „töltések” mozognak, de ne feledjük, hogy általában az elektronok mozognak, ha látszólag pozitív töltések mozognak, akkor általában elektronok mozognak az ellenkező irányba. \square

3.1.7. Kísérlet. Ha az állványon lógó papír kengyelbe fapálcikát dugunk, amire papír zacslócskát ragasztottunk, akkor keménypapír elektroszkópunk egy érzékenyebb változatát kapjuk. \square

3.1.8. Kísérlet. Szeretnénk a dörzsöléssel kapott elektromosságot összegyűjteni. Egy konzervdobozt fogunk felhasználni. Mossuk ki jól. Vigyázzunk, ahol a fedele levált, nagyon éles. Az éles szélt lapítsuk fogóval a dobozhoz. Hogy lássuk, fel van-e töltve, egy kis mutatót szerelünk rá. Vastagabb, például 1 mm-es szigetetlen fémdrótra hajlítsunk egy fület, majd tekerjük körül a dobozon és csavarjuk össze. Ha éles, reszelővel vagy csiszolópapírral csiszoljuk le az élét. Úgy is eljárhatunk, hogy a fül két drótját két lyukon bedugjuk a dobozba, és ott összetekerjük. Egy gombostűt is használhatunk fül helyett: legjobban, ha a hegyét laposan a dobozhoz simítva odaforrasztjuk, de az is elég, ha odaragasztjuk, például egy szigetelő szalag darabbal, de akár rágógumival. Azért érjen hozzá a tű a dobozhoz. A földre jön egy kb. centiméter széles alumínium fólia szalag: átdugjuk a tű alatt, és a felső végét visszahajlítjuk. Könnyen mozogjon! Én egy kicsit meghajlítottam a tűt, hogy minél közelebb legyen a dobozhoz, és szigetelő szalaggal ragasztottam fel. Végül állítsuk a konzervdobozt olyan műanyag edényre (pohárra, tejfölös dobozra), amit dörzsöléssel fel lehet tölteni. Oda is ragaszthatjuk. Mindjárt két egyforma dobozos elektroszkópot készítsünk.

Egy jól megdörzsölt műanyag tárgyat, például műanyag vonalzót húzzunk végig a fémdoboz tetején: a mutató kicsit eláll. Néhányszor ismételjük meg ezt, amíg a mutató jól láthatóan kitér. A töltés egy része átmeleg az elektroszkópba és annak mutatójába, így azok egyforma töltésűek lesznek, ezért taszítják egymást. Minél nagyobb a töltés, annál nagyobb a mutató kitérése. Valamilyen dobozra, például cipősdobozra ragasszunk egy papírt szögbeosztással úgy, hogy a 0° lefele álljon. A szögbeosztás középpontja a mutatóval egy magasságban legyen. Nem kell túl közel tenni a fémdobozhoz. Pontszerűen világító lámpával a mutatót a szögmérőre vetíthetjük és a szöget megmérhetjük, persze nem valami pontosan. Ha a megdörzsölt tárgyat közelítjük a mutatóhoz, láthatjuk, hogy taszítja, azaz azonos töltésűek. A doboz-elektroszkópot a 3.1.4. fénykép mutatja. \square

3.1.9. Kísérlet. Elektroszkópunkat legkönnyebben megosztással tudjuk feltölteni. Közelítsünk egy nagyobb feltöltött tárgyat az elektroszkóphoz a mutatóval ellentétes oldalról. A mutató felágaskodik. Ha a tárgyat távolítjuk, a mutató újra visszamegy. Mi a magyarázat? A töltött tárgy az ellentétes töltéseket vonzza, az egyezőket taszítja. Ez a *megosztás*. Ha egy pillanatra megérintjük kezünkkel a mutatót, az egyező töltések a

földbe távoznak. Ha most elvisszük a töltött tárgyat, a mutató újra felágaskodik. A töltött tárgyat a mutatóhoz közelítve meggyőződhetünk róla, hogy a doboz töltése ellentétes a tárgy töltésével.

A dörzsöléssel feltöltött tárgyat akár bele is tehetjük a dobozba. Nem kell, hogy hozzáérjen. A töltött tárgy az egyező töltéseket a doboz külső falára taszítja. Érintsük meg ujjunkkal a doboz külső felületét: a töltések a külső falról a földbe áramlanak. Vegyük ki a megdörzsölt tárgyat. A belső falon lévő töltés széteszik a dobozon. Győződjünk meg róla, hogy ez ellentétes a megdörzsölt tárgy töltésével!

Én pozitív elektromossággal való feltöltéshez egy negatívra töltődő polisztírol habból készült tálcát dörzsöltem meg és közelítettem a dobozhoz. Negatívra töltéshez egy — meglepő módon — papírral dörzsölve pozitívra töltődő műanyag vonalzót dugtam a dobozba. \square

3.1.10. Kísérlet. Hagyjuk az elektroszkópunkat magára. Egy idő után magától elszivárog a töltése. Hogy mennyi idő alatt, az az időjárástól is függ, de negyed óráig általában megmarad. Ha sokkal hamarabb elvész a töltés, akkor nem elég jól szigetel a fémdoboz alatti műanyag, cseréljük ki. \square

3.1.11. Kísérlet. Vizsgáljuk meg közelebről a megosztást! Tegyük két egyforma elektroszkópot egymás mellé úgy, hogy fémdobozaik összeérjenek. Az egyik oldalához közeledjünk minél nagyobb, jól feltöltött tárggyal, de ne érnünk hozzá. A mutatók mutatják, hogy mindkét elektroszkóp feltöltődik. Anélkül, hogy a tárgyat elvinnénk, húzzuk szét a két dobozt. Most már elvihetjük a tárgyat. Mindkét doboz töltve marad, és a tárgy is. Vizsgáljuk meg a töltésüket! A tárgytól távolabbi elektroszkóp töltése ugyan olyan, mint a tárgyé, a közelebbié ellentétes.

Mi történt itt? Ha például a tárgy töltése negatív, akkor a távolabbi dobozba taszítja az elektronokat, a közelebbi pedig pozitív töltésű lesz. A dobozokat szétválasztva, az elektronok nem tudnak visszamenni.

Úgy tűnik, mintha az elektromos energiát a semmiből, munkavégzés nélkül nyertük volna. Ez nem így van: amikor széthúzzuk a dobozokat, munkát végzünk, mert azok vonzzák egymást. \square

3.1.12. Kísérlet. A feltöltött elektroszkópot érintsük meg kézzel. A töltés a földbe távozik, az elektroszkóp *kisül*. Pontosabban ha negatív töltésű az elektroszkóp, az elektronok testünkön keresztül a földbe távoznak, hiszen taszítják egymást. Ha pozitív töltésű, akkor a testünkön keresztül elektronok áramlanak a földből az elektroszkópba (hiszen annak töltése vonzza őket), és semlegesítik annak töltését. Az elektroszkóp mindkét esetben elveszti töltését, kisül.

Érintsük meg a feltöltött elektroszkópot valamilyen kezünkben tartott tárggyal. Ha a tárgy jó vezető, az elektroszkóp pillanatok alatt elveszti töltését a tárgyon és a testünkön keresztül. Különösen jó vezetők a fémek, ezekben az elektronok szabadon mozoghatnak. Jó vezető a grafit vagy faszén, a savak, sók és bázisok oldatai, csapvíz, a föld. Jó szigetelők (azaz rendkívül rosszul vezetnek) a borostyánkő, kvarc, csillám, a legtöbb üveg, porcelán, gyanta, a legtöbb műanyag, keménygumi, kén, paraffin, selyem, sellak, sok olaj, gázok, légtér. Ha ezekkel érintjük meg a feltöltött elektroszkópot, a töltése nem változik.

Félvezetők például a fa, papír, márvány, bőr, cérna, a desztillált víz. Száraz fával, cérnával vagy papírcsíkkal érintve meg az elektroszkópot, töltése lassan csökken, ha nedvessel, akkor elég gyorsan. \square

3.1.13. Kísérlet. Töltsünk fel dörzsöléssel egy kémcsövet vagy más üvegtárgyat! Különösen a tűzálló üvegek alkalmasak erre. (Nekem csak a kémcsöveket sikerült feltölteni.) Szedjünk fel vele apró papírsebkendő vagy alumínium fólia darabot. Ha a fóliadarab odatapadva marad, esetleg nem is tudjuk lerázni. Pár másodpercig leheljünk a kémcsőre. A darabka leesik. A szigetelőkön a töltések helyben maradnak, nem tudnak mozogni. Lehelletünkből vízpára csapódik ki az üvegre. A vékony vízréteg elvezeti a töltést testünkhöz át a földre. \square

3.1.14. Kísérlet. Tartsunk a feltöltött elektroszkóp közelébe égő gyufát. Egy-két másodperc alatt elveszíti töltését. A magyarázat, hogy a lángban élénken mozgó molekulák összeütközve néha töltést kapnak: az egyikről egy elektron átmegy a másikra. Az így kapott töltött molekulák — idegen szóval *ionok*, a görög szó azt jelenti, hogy vándorló — közül az elektroszkóp az ellentétes töltésűeket odavonzza, így azok semlegesítik a töltését. Próbáljuk ki, milyen messzire jutnak el az ionok! Nem nagyon messzire, fél méterre lévő égő gyertyának már semmi hatása sincs. Az ionok maguktól is semlegesítődnek, hiszen az ellentétes töltésűek vonzzák egymást. A magára hagyott elektroszkóp — ha a talpa tökéletesen szigetel — azért veszíti el idővel töltését, mert a levegőben kis számban mindig vannak ionok. Ezeket az *ionizáló sugárzások* hozzák létre, amelyek részben a földből, részben a világútból erednek. \square

3.1.15. Kísérlet. Töltsük fel elektroszkópunkat, de ne megosztással, hanem például műanyag vonalzót többször feltöltve és végighúzva rajta. Közelítsük a műanyag vonalzót a mutatóhoz: természetesen taszítja. Ha azonban elég közel tartjuk, akkor a mutatót a tárgy vonzani kezdi, és kibillen, hozzáér a tárgyhoz. Mi történt itt? A negatív töltésű vonalzó tulajdonképpen a mutató elektronjait taszítja. A mutatón elektron többlet van, így taszítja a mutatót. Azonban az elektronok a fémbe el tudnak mozogni. Ha elég közel visszük a vonalzót, végül taszítása kikergeti a többlet elektronokat a mutatóból a doboz távolabbi részébe. Ez tulajdonképpen megosztás. Mikor a mutató már pozitív, akkor vonzza a vonalzót. Ha a vonalzót pozitív töltésű, akkor az elektronok ellenkező irányban mozognak. Ez a kísérlet megmagyarázza a legelső kísérletünket. Kezdetben egy vattapehelyben, alumínium fólia darabban a töltött tárgy megosztást hoz létre. Mivel a közelebbi vége ellentétes töltésű, de közelebb van, azt erősebben vonzza, mint amennyire a másik végét taszítja, így a vattapehely a megdörzsölt tárgyhoz repül. Hogy ezután mi történik, az attól függ, mennyi töltés ment át a pehelyre. Ha elég sok, akkor taszítás lép fel, ha nem, marad a vonzás. Ne felejtjük, hogy a megdörzsölt tárgy általában szigetelő, így benne a töltések nem mozognak szabadon. A papír elektroszkópunk azért mutat mindig vonzást, mert eléggé vezet ahhoz, hogy a tárgy töltésével egyező töltések a földre áramoljanak.

Ha egy tárgy töltésének előjelét akarjuk megtudni, akkor vigyázni kell, nehogy a megosztás becsapjon bennünket. Ha taszítja a mutatót, az biztosan nem származhat megosztásból. Ha vonzza a mutatót, akkor közelítsük a doboz másik oldalához. Ha most esik a mutató, biztosan egyforma a töltés a tárgyon és az elektroszkópban. \square

3.1.16. Kísérlet. Grafitozzunk be egy pingpong labdát grafit porral vagy grafit ceruzával. Tegyük egy felfordított tányérra, esetleg egy fedőre. Ha a tányér nem vízszintes, vízszintezzük ki például összehajtott papírt téve az egyik szélé alá. Egy megdörzsölt műanyag tárggyal körbe vezethetjük a golyót. A grafit vezet, és a megdörzsölt tárgy vonzza a golyót. \square

3.1.17. Kísérlet. A grafitozott golyóval kis „harangjátékot” készíthetünk. A 3.1.5. fénykép mutatja az elrendezést. A golyót szigetelten kell felfüggeszteni, amit úgy érünk el, hogy egy szigetelő műanyag lemezen cérnát húzunk át, és a golyót a cérnához ragasztjuk. A lemez másik végén áthúzott cérnát egyszerűen egy bot végébe szúrt gombostűre tekerjük. A két fémlemez üres sörös vagy kólás dobozból vágjuk ki, a talpát meghagyva. Kifordítjuk őket, hogy a fémes felület legyen kifelé. Egyforma szigetelő talpra állítjuk mindkettőt, de az egyiket földeljük: alumínium fóliára tesszük. A földeletlent feltöltjük, majd a kettőt óvatosan két oldalról a grafitos pingpong labda felé toljuk. A labdát vonzza a feltöltött lemez: hozzáér. Feltöltődik, és a taszítás a földelt lemez felé löki. Ott leadja a töltését és visszalendül a töltött lemezhez. Az enyém nagyon lassan mozgott: kezdetben 10, majd 30 s is eltelt két átlendülés között. \square

3.1.18. Kísérlet. Mekkora feszültségre töltődött fel az elektroszkópunk? A mutató ugyan éppen ezt mutatja, de nem tudjuk a „beosztást”. A feszültséget voltba mérjük, jele V, később részletesen lesz róla szó. Egyelőre az elektroszkópunk feszültségéről „szikroszkóppal” tájékozódhatunk. Száraz levegőben egy szikra létrejötténél minden mm szikrahosszhoz 3000 V kell. Közeledjünk egy gombostű fejével a fémdobozhoz és figyeljük a keletkező szikrát. Pár mm lesz, így a feszültség 1 kV – 10 kV nagyságrendű. Sötétben jól látható, világosban inkább csak hallható. Nekem kb. 1,5 mm-es szikra ugrott át. A következő táblázat a szikrahosszt mutatja mm-ben a feszültség függvényében különböző sugarú gömbök között. A 0 mm csúcsot, a ∞ mm síkot jelent.

kV	0 mm	50 mm	300 m	∞ mm
20	15,5	5,8	6,0	6,0
40	45,5	13	13,3	13,7
100	220	45	35,7	36,7
200	410	262	75,3	75,3

A táblázat alapján arra gondolhatnánk, hogy ha a gombostű hegyes végével közelítünk a dobozhoz, akkor nagyobb szikrát kapunk. Próbáljuk ki! Meglepetésünkre az elektroszkóp mutatója már akkor elkezd esni, amikor még csak közelítjük a tűhegyet. Erre még visszatérünk. Így csúcsok között csak úgy tudunk szikrát kapni, ha állandóan pótoljuk a töltést.

Szigorúan véve mindig *feszültség különbségről* kellene beszélnünk két pont között. Ha külön nem mondjuk, a feszültséget a földhöz viszonyítjuk.

A gyakorlatban előforduló néhány feszültség különbség: zsebelem 1,5 V, zsebtelep 4,5 V, autóakkumulátor 12 V, világítási hálózati vezetéke 230 V, villamos 500 V, nagyfeszültségű távvezeték 100–500 kV, villám 100–1000 MV. Ennek alapján csodálkozhatunk,

hogy a hálózat életveszélyes, az elektroszkópunk pedig nem. Ennek oka, hogy a feszültség ugyan nagy, de a töltés mennyisége kicsi.

Más szigetelőkön is átüt a szikra? Igen, de általában nehezebben, mint a levegőn. A 3.1.6. táblázat első oszlopa a szükséges feszültséget adja meg kV/mm-ben. A második a szigetelőképeség nagyságrendjéről tájékoztat: minél nagyobb a szám, annál jobb szigetelőről van szó. Egy anyag 10^4 fölött számít szigetelőnek, 10^{-5} alatt vezetőnek, a kettő között félvezetőnek. A két utolsó oszlopra majd visszatérünk.

Anyag	kV/mm	$\rho/(\Omega\text{m})$	ε_r
Ásványi olaj	10	$5 \cdot 10^{12}$	2,2
Bakelit	20	$5 \cdot 10^5$	3–6
Borostyán		10^{16}	2,8
Csillám	40–240	$5 \cdot 10^{14}$	7
Epxi	20	10^{12}	3,3
Kartonpapír	20–25	10^{10}	3
Kén		10^{15}	3,6–4,3
Márvány		10^9	8,5
Gumi	12–20	10^{13} – 10^{15}	4
Nylon	16	10^{10}	4,1
Paraffin	11	10^{16}	2–2,3
PE	40	$5 \cdot 10^{15}$	2,3
Plexi	40–50	10^{13}	3–3,3
Porcelán	4	10^{12}	6
Prespán	10–13	10^9	2–3,4
PS	30–70	10^{16}	2,7–3,7
PVC	50	10^{13}	3,3
Sellak		10^{14}	2,7–3,7
Szilikon	10	10^{12}	3,5
Teflon	20	10^{16}	2
Üveg	100	10^{11} – 10^{12}	5–7

3.1.6. táblázat

3.1.19. Kísérlet. A szikra hallható a rádióban is: Kapcsoljunk be egy rádiót és állítsuk a hosszú, közép vagy rövidhullámú sávon egy olyan helyre, ahol nincs adás. Amikor kisütjük az elektroszkópot, sőt, amikor megosztással való feltöltésnél a mutatóhoz érünk akkor is egy kattanas hallható a rádióban. A dörzsöléskor is hallható recsegés: szikrák keletkeznek. A kattanasokat a szikrából kiinduló rádióhullámok okozzák, ezekre majd visszatérünk. A mi ügymködésünktől függetlenül is hallhatók néha recsegések. Ezeket „légkőri zavaroknak” szokás nevezni, és általában távoli viharok villámai okozzák: a villám nem más, mint egy óriási szikra. Az FM sáv általában nem jó a szikrák megfigyelésére: más elven működik, éppen azért, hogy ne legyenek légkőri zavarok. \square

3.1.20. Kísérlet. Töltsük fel az elektroszkópot, majd egy félbehajtott sztanioldara-

bon átszúrt tűt ültessünk szigetelő csipesszel az elektroszkópra. A 3.1.7. képen látható az összeállítás. Ettől a kis „lovastól” az elektroszkóp töltésének egy részét szinte azonnal elveszti, és a töltés továbbra is csökken. Ez a *csúcs hatás*. Megmérhetjük, hogy mennyi idő alatt csökken a töltés felére.

Ismételjük meg a kísérletet a másik féle töltéssel. Negatív töltéssel kevésbé tölthető fel a tús elektroszkóp, mint pozitívval. Mérések szerint negatív töltéssel kb. 2000 V-ra, pozitívval kb. 3000 V-ra tölthető fel a tús elektroszkóp. Itt is végezhetünk időmérést. Az időt azzal az idővel érdemes összehasonlítani, amit tűhegy nélkül kapunk, persze először megvárva, amíg a mutató visszaesik oda, ahonnan a tűhegygel indult. \square

3.1.21. Kísérlet. A tűhegygel felszerelt elektroszkóp tűje előtt mozgassunk feltöltött tárgyat. A tűhegy „leszedi” a töltést, az átmegy a konzervdobozra. Lehet, hogy a feltöltést és leszedést többször is meg kell ismételni, amíg a mutató kitérése látható lesz. Ha a kezünkkel mozgatjuk a tűt, akkor a töltés mindjárt a földre áramlik. Olyan helyen, ahol egy szikra tüzet okozhat, a feltöltődő tárgyakon a töltést túsorral lehet leszedni. A villámhárító is ezen alapul: a hegyes csúcsba könnyebben belecsap a villám. \square

3.1.22. Kísérlet. Készítsünk elektroszkópunkból voltmérőt! Töltsük fel az elektroszkópot, tegyük rá a „lovast”, és mérjük meg a kitérés szögét. Érintsük az elektroszkópot egy másik, pontosan ugyan olyan elektroszkóphoz! A töltés fele átment a másik elektroszkópra, a feszültség megfeleződött. Ismét olvassuk le a szöveget. A másik elektroszkópot kisütve, a töltésfelezést megismételhetjük. Nekem pozitív töltéssel a tűhegytől 80° -ról 60° -ra, majd a felezésekkel 20° -ra és 10° -ra csökkent a kitérés, negatív töltéssel pedig a tűhegytől 40° -ról 30° -ra, majd a felezésekkel 10° -ra és 5° -ra csökkent a kitérés. Most töltsük fel az elektroszkópot, amennyire csak lehet. Ismételjük meg a felezgetést! Nekem pozitív töltéssel a felezésekkel 75° -ról 40° -ra majd 15° -ra csökkent a kitérés. Látjuk, hogy ez az eljárás csak durva becslésre jó. \square

3.1.23. Kísérlet. Készítsünk egy kétlemezes elektroszkópot! Egy alkalmasan meghajlított, nagyjából 1 mm átmérőjű rézdrótot ragasszunk fel egy szigetelő dobozra. Ha éles a vége, csiszoljuk le, hogy csökkentsük a csúcs hatást. Két alumínium fólia csíkot lyukasszunk ki, olyan közel a szélükhöz, amennyire csak lehet, majd a felső szélüknél hajlítsuk meg csaknem 90° -ban például egy gyufásdoboz széle mellett, hogy ne akadályozzák egymást a billegésben. A csíkokat akasszuk fel a fémdrót végére. Az elrendezés a 3.1.8. fényképen látható. A fémdrót másik végét értessük a dobozos elektroszkóphoz. Annak a mutatója visszaesik, mert ez az elektroszkóp is vesz fel töltést. Ennek a lemezeit is kivetíthetjük. Vizsgáljuk meg, hogy melyik az érzékenyebb! \square

3.1.24. Kísérlet. Megfigyelhetjük, hogy dobozos elektroszkópunk megosztással pozitívrá feltöltve gyakran nagyobb feszültséget mutat, mint amikor a negatív töltésű testet közelítjük. Hogy lehet ez, mikor a közelítéskor a negatív és a pozitív töltések is a doboz felébe vannak összehúzóulva, később viszont a pozitív töltések szétáradhatnak az egész dobozban? A magyarázat a csúcs hatás, amely a mutató szélénél is fellép: a negatív töltések már azelőtt kezdik elhagyni a mutatón keresztül a dobozt, mielőtt megérintjük a mutatót. Megosztással negatívra feltöltve az elektroszkópot fordított jelenséget tapasztalunk: amikor ott van a megosztó test, nagyobb a mutató kitérése, mint amekkora

negatív feszültség végül marad. A magyarázat itt is a csúcshatás a fólia széleinél: a negatív töltések könnyebben elfolynak. \square

3.1.25. Kísérlet. Azt mondtuk, hogy dörzsölésnél az egyik tárgy pozitív, a másik negatív töltésű lesz. Ezt ki tudjuk mutatni, ha egy madártollat és egy jól töltődő műanyag dossziét használunk. Szorítsuk a tollat a dossziéba és húzzuk ki! Mutassuk ki — taszítással — hogy a fólia negatív, a toll pozitív töltésű lett! \square

3.1.26. Kísérlet. Nehezebb ugyanezt kimutatni, ha a dörzsölő tárgy vezet. Egy jól feltölthető műanyag dossziét és egy papírlapot simítsunk jól egymásra. A papír legyen felül, és ne érjen le a dossziéről. Az egyik sarkát hajtsuk fel. Műanyag csipesszel fogjuk meg a papír sarkát és vegyük le. A műanyag és a papír is feltöltődik. Kimutathatjuk, hogy a műanyag töltése negatív, a papír töltése pozitív. A feltöltéshez tehát nem is kell dörzsölés. Csak az a lényeg, hogy a két anyag szorosán érintkezzen. A dörzsölés csak ezt segíti elő. \square

3.1.27. Kísérlet. Egy jól szigetelő rúd végére tekerjünk alumínium fóliát. Ilyen rudat láthatunk a fóliával a 3.1.11. képen. Egy feltöltött elektroszkóp belsejének aljához értessük hozzá a rúdon levő fóliát. Ha kivesszük a rudat, láthatjuk, hogy a feszültség nem változott. Ha a fóliát a doboz külsejéhez értetjük, a feszültség csökken: a doboz külsejéről töltést szedtünk le. Kisütve a fóliát, majd újra a doboz külsejéhez értetve, újabb adag töltést szedhetünk le. A kísérlet azt mutatja, hogy a töltések a doboz külsején vannak. Ez érthető is, hiszen taszítják egymást, minél messzebb igyekeznek egymástól kerülni. \square

3.1.28. Kísérlet. Ismételjük meg az előző kísérletet, de most két elektroszkóppal. Az egyik legyen feltöltve, a másikat gondosan süssük ki. Ha a szigetelőkészlet fóliát a töltött doboz külsejéhez értetjük, töltést vesz fel. Ha most a másik doboz belsejének aljához értetjük, a töltés kimegy a másik elektroszkóp külsejére. Megismételve ezt, az összes töltést „átkanalazhatjuk” a másik elektroszkópra.

Ezen az elven alapszik a van de Graaff generátor. Egy szigetelő oszlopon egy nagy fémgömb van. Egy hosszú O alakú selyemszalag két hengerre van feszítve. Az alsó henger az oszlop belsejében van és motor hajtja, a felső henger pedig a gömb belsejében. Az alsó henger után felfelé futó selyem szalagot 10 kV feszültségre töltik fel egy túsorral. Mielőtt a szalag elérné a felső hengert, a gömb belsejében egy másik túsor, ami a gömbbel van összekötve, leszedi a töltést, ami kifut a fémgömb külsejére. Így elég nagy gömbbel több MV feszültséget lehet elérni. Még az iskolai van de Graaff generátorok is több száz kV feszültséget és több centiméteres szikrákat adnak. A szikrák kellemetlenek de veszélytelenek, a töltés kicsi. \square

3.1.29. Számok az elektronra. A töltés mértékegysége a *coulomb*, jele C. Úgy határozták meg, hogy egy elektron töltése $-1,602176634 \cdot 10^{-19}$ C legyen, tehát tulajdonképpen az van megadva, hogy hány darab elektron töltése 1 C. Egyelőre nem tudjuk a töltés mennyiségét megmérni, később foglalkozunk vele, hogy ez hogyan lehetséges. Öveges József egy kísérletében egy fél gramm tömegű megdörzsölt lapot (négyszögletes tejfeles pohár oldalát) tudott egy másik ilyen lappal 3 mm távolságból egészen vízszintes helyzetig taszítani. Kiszámolta, hogy nagyságrendben százmilliárd elektron van mind-egyik lapon. Ez például a taszítóerőből számítható ki, amit már megmértünk. Hogy

hogyan, azzal később foglalkozunk. Százmilliárd elektron csak $0,016 \mu\text{C}$. Egy elektromos vízfóralón másodpercenként 10 C töltés folyik át. Ezt dörzsöléssel, egy dörzsölésre 1 s -ot számítva 20 év alatt állíthatnánk elő! Egyáltalán van ennyi elektron a lapban? 10 C az nagyjából $6 \cdot 10^{19}$ elektron, míg az egy gramm anyagban lévő összes elektron száma nagyjából fél Avogadro számnyi, $3 \cdot 10^{23}$ darab. Ennyi elektron nagyjából 50000 C . Ugyanennyi pozitív töltés van az anyagban.

Ha a hálózati áramból másodpercenként 20 mC folyik át a testünkön, az már életveszélyes. Ez $0,02 \text{ s}$ alatt $400 \mu\text{C}$, ennyi 25000 megdörzsölt lapban van.

Mekkora taszítást kapnánk, ha a két műanyag lapból az összes elektront sikerülne eltávolítani? Mivel 50000 C nagyjából másfél milliószor annyi, mint a két lapban együtt lévő $0,032 \text{ C}$, a taszítóerő pedig a töltések szorzatával arányos — mint nemsoká látni fogjuk — a taszítóerő közel lévő lapok között több mint 2 billiószor annyi, mint az Öveges által mért 5 mN . Ez millió köbméter víz súlya, ennyi 500 úszómedencében van! Mi lenne, ha a lapok tisztán elektronokból állnának? 2000 Avogadro számnyi elektron 1 g . (Egyelőre nem tudjuk az elektron töltését és tömegét sem megmérni, később foglalkozunk vele, hogy ez hogyan lehetséges.) Így a lapok töltése még négyezerszer nagyobb lenne, a taszítóerő pedig 16 milliószor. Ez ezer Balatonnyi víz súlya!

Megdöbbenő, hogy az anyagban ezek az óriási taszítóerők milyen finoman ki vannak egyensúlyozva az ugyanolyan óriási, az ellentétes töltések közötti vonzóerőkkel. Csak akkor tapasztalunk valamit is ezekből az óriási erőkből, ha a töltések egyensúlya egy íci-picit felborul.

3.1.30. Kísérlet. Készítsünk „csokolózó elektroszkópot”! Egy alumínium fólia csík egyik végét hajtsuk vissza duplára, hogy erősebb legyen, majd ennek a dupla résznek egy részét hajtsuk vissza merőlegesen és tegyük az elektroszkóp alá, úgy, hogy a fóliacsík majdnem a fémdobozhoz érjen: az egész elrendezés a 3.1.9. fényképen látható. A fóliacsík lényegében földelve van. Közelítsünk feltöltött tárgyat a fémdobozhoz a másik oldalról: a fóliacsík lassan a dobozhoz hajlik, majd hirtelen megérinti, „megcsokolja” azt, és újra elpattan. A közelítés alatt a játék többször megismétlődik, majd a távolítás alatt újra. A magyarázat nyilvánvaló: a megosztás miatt a doboz fóliacsík felőli oldala feltöltődik, vonzza a fóliacsíkot, ami szintén feltöltődik, ugyancsak megosztás miatt, de ellenkező előjellel. A fóliacsík kezd elhajolni, és a kisebb távolság miatt a vonzás erősödik. Egy-szer csak elég erős lesz ahhoz, hogy meghajlítsa a fóliacsíkot: az hozzáér a dobozhoz, felveszi a töltést, és elpattan. További közelítéskor a játék megismétlődik, újabb adag töltés távozik. Távolításkor az ellenkező előjelű töltések visszaáramlanak a doboz másik oldaláról, és a játék megismétlődik. \square

3.1.31. Kísérlet. Az előző kísérlet sugallja a billegőlemezes töltésmérő elkészítését. Ugyanígy néz ki, mint a kétlemezes elektroszkóp, de most csak egy alumínium fólia csíkot teszünk rá amit nem is kell meghajlítani, a közelébe pedig egy például alumínium lemezből (vastagabb fólia, kólásdoboz oldala) készült földelt állványt, vagy csak egy földelt konzervdobozt. Az összeállítás a 3.1.10. képen látható. A rézdrót másik végét értessük az elektroszkóp dobozához, és ismételjük meg az előző kísérletet. Egy billenés nagyságrendben $1\text{--}10 \text{ nC}$ töltést jelent. Sajnos nem tudjuk, pontosan mennyit. Az érzékenységet

fokozhatjuk, akár tízszeresre is, ha a fóliacsíkot a közepe közelében lyukasztjuk ki. Az érzékenyebb változat jóval lassabban működik. \square

3.1.32. Kísérlet. Fel tudunk-e tölteni egy fém tárgyat? A kezünkben tartva semmiképpen sem, mert a töltése testünkön keresztül elfolyik a földre. (Amikor azt mondtuk, hogy próbáljunk ki valamit, fel tudjuk-e tölteni, arra gondoltunk, hogy kezünkben tartva: ezzel azt is kipróbáltuk, szigetelő-e?) Ha azonban szigetelő nyélre tesszük, akkor a vezetőket is fel tudjuk tölteni. Én szigetelő nyélnek melegragasztó rudat használtam. Nem minden fajta szigetel elég jól. Erre tettem egy konzervdobozt. A dobozt csapkodjuk szőrmével vagy papírbojttal; feltöltődik. Ha a szőrmét vagy a papírbojtot szigetelő nyélre szereltük, lehet, hogy azt is ki tudjuk mutatni, hogy az is feltöltődött. Itt a csapkodás azért jobb, mint a dörzsölés, mert a vezető töltése nagyon könnyen semlegesítődik a szőrme vagy papírbojt töltésével. A 3.1.11. fénykép mutatja az általam használt eszközöket. Az elég kicsi töltést az érzékeny billegőlemezes töltésmérő mutatójának aljához közelítve mutattam ki, amit természetesen előzőleg kisütöttem. Megpróbálhatunk feltölteni fát, műanyag villára szúrt almát, kenyeret, stb. \square

3.1.33. Kísérlet. Billegőlemezes töltésmérőnkkel, de akár a „csókolódzó elektroszkóppal” is elvégezhetünk egy nagyon fontos mérést. Ismételjük meg az előző kísérletet töltetlen elektroszkóppal, de jelöljük meg a töltött tárgy helyzetét, amikor az első billenés esik. Közelítsünk tovább, és újra jelöljük meg a helyzetet, amikor a negyedik billenés esik. Ez a távolság a fémdoboztól nagyjából fele az első távolságnak. Folytassuk a közelítést, és jelöljük meg a helyzetet, amikor a kilencedik billenés esik. Ez nagyjából harmada az első távolságnak. Nekem a billegőlemezes töltésmérővel dolgozva a három távolság a fémdoboz közepétől 23, 13 és 8 cm volt. Arra a következtetésre juthatunk, hogy a két, Q_1 és Q_2 (pontszerű) töltés között fellépő taszítóerő

$$K \frac{Q_1 Q_2}{r^2},$$

ahol r a távolságuk. Ez *Coulomb törvénye*. Nyilván a K konstans is meg lehetne határozni, ha megmérnénk az erőt. Meg is mérték, és azt találták, hogy $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Ha az egyik töltés negatív, a másik pozitív, a „taszítóerő” negatív, azaz vonzóerő.

A dolgot úgy is el lehet képzelni, hogy a töltés elektromos mezőt hoz létre, amelynek erőssége és iránya pontról pontra változhat. Az ehhez a részhez tartozó program ilyen mezőt mutat: minden pontban adott egy vektor, a \mathbf{E} *elektromos térerősség*. (Ha több töltés van, akkor az általuk létrehozott mezők minden pontban mint vektorok összeadódnak.) Ebbe a mezőbe egy kis kiterjedésű q töltést helyezve, arra $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ erő hat. Innen az elektromos térerősség egysége N/C. Azért jobb az \mathbf{E} vektormezővel dolgozni a Coulomb-törvény helyett, mert elektromos mezőt nem csak töltések hozhatnak létre. Egy vektormezőt nem csak úgy ábrázolhatunk, hogy minden pontba rajzolunk egy nyilat, hanem úgy is, hogy irányított vonalakat, úgynevezett *erővonalakat* rajzolunk. A mező erősségét a vonalak sűrűsége jelzi: minél erősebb a mező, annál sűrűbben vannak a vonalak. Nyilván ez az ábrázolás nem olyan pontos, hiszen mindig csak néhány erővonalat tudunk berajzolni, így csak nagyjából tudjuk jelezni a térerősséget, viszont

elég szemléletes. Vákuumban (és levegőben is), ha nincs változás, az elektromos térerősség erővonalai a pozitív töltésektől indulnak és a negatív töltésekben végződnek. Ez a Coulomb-törvényből következik, de a bizonyítás nem egyszerű. A program egyik ábrája mutatja az elektromos térerősség erővonalait két, ellentétesen töltött fémrúd között, keresztmetszetben. Olyan, mintha az erővonalak taszítanák egymást, de vékony megfeszített gumiszálak lennének, és igyekeznének a lehető legrövidebb úton haladni. Ne felejtjük el, hogy az erőter valódi, de az erővonalak csak a képzeletünkben léteznek!

Mekkora a térerősség egy töltött fémtárgy közelében? Ha egy A területű kis felületdarabon Q töltés oszlik el egyenletesen, akkor közvetlen a felületdarab közelében (vákuumban, de jó közelítéssel levegőben is) $Q/\varepsilon_0 = AE$, ahol ε_0 egy konstans, értéke $8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$. A fémekben — ha nincs változás — erővonalak nincsenek, mert egyébként az elektronok azonnal megindulnának az erővonalak mentén. Ugyanezért az erővonalak merőlegesek a fém felületére: egyébként a felületen lévő elektronokra oldalirányú erők hatnának, és mozgásba jönnének. Tulajdonképpen Q/ε_0 úgy is tekinthető, mint a felületdarabból kiinduló erővonalak száma. A töltések persze általában nem oszlanak el egyenletesen, ha azonban például egy kis r sugarú Q töltésű fémgolyót veszünk, ami más tárgytól távol van, akkor a felületén jó közelítéssel egyenletes a töltéeloszlás. Mivel a felülete $4\pi r^2$, a felületen a térerősség $E = Q/(4\pi r^2 \varepsilon_0)$. Mivel az erővonalak taszítják egymást, még egy $R > r$ sugarú gömbön is, ha R nem túl nagy, egyenletesen oszlik el ugyanannyi erővonal, így ott a térerősség $E = Q/(4\pi R^2 \varepsilon_0)$. Egy itt elhelyezett q töltésre $qE = KqQ/r^2$ erő hat, tehát a Coulomb-törvényben szereplő K konstans $1/(4\pi\varepsilon_0)$. Innen kapjuk ε_0 értékét.

Példaként kiszámoljuk, hogy Öveges József kísérletében a lap területe $0,3 \text{ dm}^2$ volt. * Az erőterre $Q/\varepsilon_0 = 2AE$. A kettes szorzó azért kell, mert szigetelőnél a másik oldal felé is indulnak ki erővonalak. Ebben a térben van Q töltés, és az erő $F = 5 \text{ mN}$, így $F = Q \cdot E = Q^2/(2A\varepsilon_0)$, ahonnan $A = Q^2/(2\varepsilon_0 F)$. Behelyettesítve $A = 256 \cdot 10^{-18}/(10^{-2} \cdot \varepsilon_0) \approx 0,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. * \square

3.1.34. Feszültség. Képzeljünk el két párhuzamos, egyforma, mondjuk kör alakú fémlapot egymás közelében. Az egyiket legyen Q , a másikon $-Q$ töltés. Mivel az erővonalak a lehető legrövidebb úton haladnak, a legtöbb, különösen a fémlapok közepénél a pozitív töltésű laptól egyenesen a másik lap felé halad. Mozgassunk egy kis töltést a negatív töltésű laptól a pozitív töltésű lap felé! Mivel az erőterrel szemben haladunk, munkát kell végeznünk. Ez persze függ a mozgatott töltéstől is: mivel az erő egyenesen arányos a mozgatott töltéssel, a munka is. Ha 1 C töltés egyik pontból a másikba való mozgatásához 1 J munkát kell végeznünk, akkor azt mondjuk, hogy a két pont között a *feszültségkülönbség* egy volt. (A munka nem függ attól, milyen úton mozgatjuk a töltést.) Mint tudjuk már, a volt a feszültségkülönbség egysége, jele V . Nevét Volta olasz fizikusról kapta, aki az első galvánelemeket készítette. (Az első stabil, jól használható elemek feszültsége kb. 1 V volt.) Ezek szerint $V=J/C$, és a térerősség egysége úgy is írható, hogy V/m .

A fizikusok sokszor foglalkoznak töltött részecskékkal, amelyek töltése az elektron töltésének néhányzorosa. Ezért szeretik a munkát és az energiát is *elektronvoltban* kifejezni, jele eV . (Az egység nem szabványos.) Ez az az energia, amit egy elektron

nyer, ha egy volt feszültségkülönbség van két pont között, és az egyik pontból a másikba mozdul el. (Mivel az elektron töltése negatív, nem kell mozgatnunk, magától mozdul el a pozitívabb feszültségű hely felé.) Értéke joule-ban annyi, mint az elektron coulomb-ban mért töltése.

Térjünk vissza a két fémlaphoz. A program mutatja az erővonalakat és az egyenlő feszültségű helyeket keresztmetszetben a fémlapok szélénél. Látjuk, hogy a fémlapok d távolságának megfelelő távolságban az erővonalak már gyakorlatilag párhuzamosak és egyforma sűrűn vannak, és gyakorlatilag mind egyenesen a másik fémlap felé megy. Az elektromos erőtér vektorai tehát gyakorlatilag mindenütt ugyanakkorák. Kiszámoljuk, hogy a fémlapok közötti feszültségkülönbség $U = Qd/(A\epsilon_0)$, ahol A egy fémlap területe.

* Valóban, $E = Q/(A\epsilon_0)$, ami d úton ezt a feszültséget adja. *

Nehezebb számolással azt kapjuk, hogy földtől elég távol lévő r sugarú gömb feszültsége, ha Q töltés van rajta, akkor $U = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. ** Látjuk, hogy a gömb középpontjától R távolságra a télerősség $E = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$. A feszültség a télerősségnek az előző példák alapján valamifajta integrálja, pontosabban annak az ellentettje, mert a télerősség nem arra mutat, amerre a feszültség nő, hanem pont fordítva. A télerősség R szerinti integrálja $-Q/(4\pi\epsilon_0 R)$ plusz egy konstans. Válasszuk a konstans nullának, akkor ennek az ellentettje $Q/(4\pi\epsilon_0 R)$. Mindenütt megkaptuk a feszültséget, ami $R = r$ helyettesítéssel adja a fémgömb feszültségét. A konstans nullának választása azért jó, mert így a feszültség nagyon távol nagyon kicsi lesz, gyakorlatilag a földön nulla. **

3.1.35. Millikan kísérlete. Az elektronok léte, az elektromosság atomos szerkezete akkor lett kétségbevonhatatlan tény, amikor Millikan 1910-ben megmérte egy elektron töltését. (Természetesen akkor még a töltés egységét másként határozták meg.) Kísérletét nehéz megismételni, de az elve egyszerű. Két vízszintes fémlemez közé olajat porlasztott. A cseppek a porlasztástól negatívra töltődnek. Egy vízszintes mikroszkópban figyelte az olajcseppeket, amelyeket oldalról világított meg. A cseppek olyan kicsik, hogy csak fénylő pontoknak látszanak. Egy kiszemelt olajcsepp süllyedési sebességét megmérve és a levegő viszkozitását ismerve, Stokes törvénye alapján kiszámolhatjuk a csepp sugarát és így súlyát. A felső és az alsó lemez közé feszültséget kapcsolva, ismert E erősségű elektromos teret kapunk, így a cseppre most már qE felfelé mutató erő is hat, ahol q a csepp töltése. Újra megmérve a sebességét, q kiszámítható. A töltés mindig $1,6 \cdot 10^{-19}$ C egész számú többszörösének bizonyult. Ionizáló sugárzással meg is változtathatjuk a töltést, a változás $1,6 \cdot 10^{-19}$ C vagy ennek két-háromszorosa.

3.1.36. Kísérlet. Áthatolnak-e az erővonalak a fémen? Tartsunk kisütött elektroszkópunk mellé nagy alumínium fólia lapot, és közelítsünk a fóliához jól feltöltött tárggyal. Semmilyen hatást nem tapasztalunk. Ha egy szigetelő műanyag dossziét (ami nincs feltöltve) teszünk az elektroszkóp mellé, és ahhoz közelítjük a feltöltött tárgyat, a megosztás ugyanúgy jelentkezik, mintha a szigetelő ott sem lenne. Mi van egy papírral? Attól függ, a papír mennyire száraz. Ha nagyon száraz, akkor esetleg kezdetben tapasztaljuk a megosztást, de az később eltűnik. A magyarázat, hogy a vezetőkben a töltések a tér hatására elmozdulnak — megosztás — és úgy helyezkednek el, hogy az erővonalak lehetőleg mind a vezetőkön végződjenek, hiszen igyekeznek a legrövidebb úton haladni. Persze, ez csak akkor lehetséges, ha a vezető elég nagy, hiszen az erővonalak taszítják egymást. Ha földelve

van a vezető, akkor általában „elég nagy”, mert a töltések a földből is jöhetnek.

Mi van, ha fémfólia helyett fémrácsot használunk? A rács mindkét oldalán, a rács rúdjaiknak közelében a tér még eléggé „hullámos”, viszont a számítások szerint ez a „hullámosság” mindig nagyjából $1/500$ -ad részére csökken, ha annyival távolodunk a rácstól, amennyi a rudak távolsága. Ezen alapszik az úgynevezett *Faraday-kalitka*: ha nem akarjuk, hogy valahova az elektromos tér behatoljon, vegyük körül fémmel, vagy fémráccsal, fémszítával. Például előfordul, hogy gépkocsiba belescap a villám. A benne ülők egyáltalán nem sérülnek meg. \square

3.1.37. Kísérlet. Biztosan észrevettük már, hogy ha elektroszkópunkhoz kezünkkel közeledünk, akkor lecsökken a feszültsége, de ha elvisszük a kezünket, újra megnő. Töltjük fel az elektroszkópot, és a mutatóval ellenkező oldalról közelítsünk hozzá behajlított tenyerünkkel. A mutató kisebb feszültséget mutat. Ha elveszük a kezünket, a feszültség újra megnő. A magyarázat a megosztásban rejlik: ha például pozitív töltésű az elektroszkóp, vonzza az elektronokat, és a földből a kezünkbe elektronok áramlanak. Az ellenkező töltések részben lekötik egymást, a feszültség csökken. \square

3.1.38. Kísérlet. Tegyük az elektroszkópunkra egy fém tálcat peremével lefelé. Töltjük fel az elektroszkópot amennyire csak tudjuk. Határozottan többször kell végighúzni a tálca peremén a feltöltött tárgyat, mint a tálca nélkül: megnőtt a felülete, így a töltéstároló képessége is. Nekem megosztással nem is sikerült eléggé feltölteni, de megdörzsölt tárggyal csak türelem kérdése, hogy berendezésünket majdnem a tárgy feszültségéig feltöltsük. Most tegyük a tálcára egy jól szigetelő műanyag fóliát, ami biztosan nincs feltöltve (például nem használtuk egy ideje). Az egész tálcat le kell fednie! Változás nincs. Tegyük a fóliára egy másik fémtálcat, ami lehet nagyobb is. A feszültség egészen lecsökken. A töltések egészen közel vannak, szinte teljesen lekötik egymást. Ha a felső fémtálcat felemeljük, visszaáll az eredeti feszültség. Felemeléskor érezhető az erő, amivel a két tálca vonzza egymást.

Amit csináltunk, az egy *kondenzátor*, magyarul *sűrítő*. A fémtálcak a *fegyverzetek*. A kondenzátor *kapacitását*, azaz tárolóképességét *farad*-ben (jele F) mérjük. Az egység neve Faraday nevéből származik. Egy farad kapacitású a kondenzátor, ha egy coulomb töltést tud úgy tárolni, hogy a feszültsége egy volt. Több töltés nagyobb feszültséget ad, így a kapacitást megkapjuk, ha a töltést osztjuk a feszültséggel. A farad tehát kifejezhető a töltés és a feszültség egységével: $F=C/V$. Egy farad rettentő nagy kapacitás, általában a μF , a nF és a pF használatos.

Az elektronikai boltokban kapható kapacitások alumínium és műanyag fóliából készülnek, és úgy működnek, ahogy a mi fémtálcaink. Két alumínium fólia csíkot és két műanyag fólia csíkot használnak, mindegyik egyforma széles, a műanyag csíkok kicsit hosszabbak. Egy műanyag csíkra fektetnek egy alumínium csíkot, kicsit eltolva oldalra. Erre jön a másik műanyag csík, pontosan az első műanyag csík fölé, ez a fegyverzetek között a szigetelés. Végül erre jön a másik alumínium csík, de most a másik fele eltolva. A legelső műanyag fólia csak arra szolgál, hogy az egészet fel lehessen tekerni anélkül, hogy a fegyverzetek egymáshoz érnének. Az egyik fegyverzet az egyik oldalon, a másik a másik oldalon lóg ki, ezek közé lehet kapcsolni a feszültséget. \square

Látjuk, hogy a legegyszerűbb kondenzátor két egyforma nagy fém fegyverzet egymáshoz közel, köztük szigetelő, a legegyszerűbb esetben levegő. Mennyi ennek a *síkkondenzátornak* a kapacitása? Ha A a fegyverzeteknek a területe, d a távolsága és Q a töltés, akkor láttuk, hogy a feszültségkülönbség $U = Qd/(A\epsilon_0)$, ahonnan a kapacitás $Q/U = A\epsilon_0/d$.

Számoljuk ki egy fém gömb kapacitását is. A földtől távol lévő gömb feszültsége $U = Q/(4\pi\epsilon_0 r)$. Ez azt jelenti, hogy kapacitása $Q/U = 4\pi\epsilon_0 r$, arányos a sugárral. Számszerűen, egy 9 mm sugarú gömb kapacitása lesz 1 pF. Például elektroszkópunk kapacitása nagyságrendben 10 pF, így 3000 V-ra feltöltve 30 nC töltés van rajta.

Mi a helyzet, ha egy feltöltött r és egy nagyobb R sugarú fém gömböt összekapcsolunk? Azt hinné az ember, hogy a rajtuk lévő töltés a felületükkel arányosan oszlik el. Ez azonban nem így van: a feszültségük egyforma kell legyen, így a töltések a kapacitásuk, azaz a sugarak arányában oszlanak el. Ezért a kisebb gömb közelében a térerő R/r -szer nagyobb. Ez magyarázza a csúcshatást: a csúcs nagyon kis sugarú gömbfelület, nagyon nagy az elektromos térerősség a csúcsnál.

3.1.39. Kísérlet. Készítsük el a 3.1.12. képen látható kis kondenzátort! A két fémlemez közé egy teamécsesből kiszedett paraffin korong kerül, amiből a belét kiszedtük. A fegyverzetek erősebb alumínium lapból készülnek: kólás vagy sörös doboz oldalából. Rajzoljuk körül a paraffin korongot, és ollóval vágjuk ki a lemezt, alul kis, derékszögben meghajlított fület hagyva, amit szigetelőszalaggal a szigetelő talphoz ragasztunk. Az egyik lemezre mutató is kerül vékony alumínium fóliából, így annak a tetején is hagyjunk egy kis fület. Ha kész vannak az alkatrészek, csipesszel összefogva az egészet ragasszuk a lábakra a szigetelő szalagot, majd az egészet ragasszuk fel a talpra. Én az enyémet megosztással töltöttem fel a másik lemez felől, a mutató tetejéhez téve az ujjamat, különben mindig kiugrott. Ha fel van töltve, a másik lemezt ki is süthetjük egy darab dróttal. Óvatosan valamilyen szigetelő anyaggal (én egy madártoll szárát használtam) gördítsük ki a paraffin korongot majdnem teljesen. Meglepetésünkre a mutató felemelkedik, azaz a feszültség nőtt, tehát a kapacitás csökkent. Visszagördítve a feszültség újra csökken. Néhányszor eljátszhatjuk ezt a játékot, mielőtt a csúcshatás miatt elvész a töltés nagy része. Ha a síkkondenzátor fegyverzetei között nem vákuum, hanem valamilyen más szigetelő van, akkor a kapacitásának kiszámításakor ϵ_0 helyett egy ennél nagyobb ϵ -nal kell szorozni. Ezt a szigetelő, idegen szóval *dielektrikum* (a szó arra utal, hogy az elektromos tér áthatol a szigetelőkön) *dielektromos állandójának* szokták nevezni. Egyszerűbb azonban azt megadni, hogy ϵ hányszor nagyobb, mint ϵ_0 , a *vákuum dielektromos állandója*, azaz az $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ hányadost, a *relatív dielektromos állandót*. Gázokra ϵ_r alig nagyobb, mint 1, a levegőre például ϵ_r csak 0,59‰-kel nagyobb 1-nél. A 3.1.6. táblázat utolsó oszlopa a relatív dielektromos állandókat adja meg. Speciális kerámia anyagok dielektromos állandója 100 is lehet, sőt, a bárium-titanáté 1000–2000. Ezekkel nagyon kis, úgynevezett kerámia kondenzátorok készíthetők. □

3.1.40. Kísérlet. Nyissuk meg a vízcsapot, de csak annyira, hogy vékony sugárban csurogjon a víz. Tartsunk papírral megdörzsölt műanyag tárgyat vagy kémcsövet a víz-sugár mellé. A víz-sugár eltér a függőleges iránytól, a töltött tárgy vonzza, akár pozitív, akár negatív töltésű. Ismételjük meg a kísérletet olyan folyadékkal, amely nem keveredik a vízzel, például a gyógyszer-tárban kapható *paraffinolajjal*. Öntsük egy tölcsérben levő,

papírsebkendő egyetlen rétegéből készült szűrőre. Rendszerint nem folyik át a szűrőn elég gyorsan, hogy a tölcésből sugárban folyjon az alá helyezett tiszta edénybe. Egy hegyes tárggyal finoman szűrjük ki a szűrőt, hogy vékony sugárban folyjon az olaj. Próbáljuk ki, hogy a megdörzsölt tárgy vonzza-e? Nem tapasztalunk vonzást. Esetleg az a gondolatunk támadhat, hogy benzinnel vagy más gyúlékony anyaggal végezzük el a kísérletet. Ne tegyük: tudjuk, hogy a megdörzsölt tárgyak nagy feszültségre, akár néhány 10000 V-ra töltődnek fel. A töltés ugyan nagyon kicsi, de apró szikra pattanhat ki. A szikra meggyújthatja a benzingőz-levegő keveréket, és tüzet okozhat. \square

Mi okozza a vonzást a töltött test és a vízszugár között? Talán a megosztás? Az is szerepet játszhat, de ha figyelmesen megnézzük az 5.1.6. ábrán a vízmolekulákat, megfigyelhetjük, hogy a hidrogén atomok nem egymással szemben kapcsolódnak az oxigén atomhoz. Az oxigén atom erősebben vonzza az elektronokat, mint a hidrogén atommagok, így a hidrogének felőli oldal pozitív, a másik negatív töltésű. Ha például negatív töltésű testet közelítünk a vízhez, a vízmolekulák a pozitív, hidrogének felőli oldalukkal fordulnak a töltött tárgy felé, és máris létrejött az elektromos vonzás. Az ilyen molekulákat, amelyeknek egyik oldala inkább pozitív, a másik inkább negatív, *poláris* molekuláknak nevezzük. Magyarra ezt úgy fordíthatnánk hogy „sarkos”, mert van egy pozitív meg egy negatív sarka, de az idegen szó használatos. Ennek megfelelően a víz relatív dielektromos állandója nagyon nagy, 81.

Most már megérthetjük, hogy a poláris molekulákból álló víz miért oldja olyan jól a sókat. A sók pozitív töltésű fémmionokból és negatív töltésű savmaradék anionokból állnak. (Bővebben lásd a kémia részben.) Ezeket a nagyon erős elektromos erők tartják össze. A poláris vízmolekulák körülveszik a só egy-egy ionját, hozzátapadnak, és szinte „szétcincálják” a kristályrácsot, mint ahogy az az 5.1.7. ábrán látható. A szesz molekulái is polárisak, de nem annyira, mint a vízmolekulák. A szesz relatív dielektromos állandója 24. Ennek megfelelően sokkal kevésbé oldja a sókat, mint a víz. Az *apoláris* (nem poláris) folyadékok, mint például a benzin, nem oldják a sókat. A só ionjai (vagy akármilyen töltött test) ugyan kicsit elmozdítják a pozitív és negatív töltéseket az apoláris molekulán belül, a molekula *polarizálódik*, de a létrejövő vonzóerő néhány tízszer gyengébb, mint a vízmolekulákra ható vonzóerő. Ez nem elég ahhoz, hogy a kristályrácsot megbontsa. Az ilyen anyagok, például az ásványi paraffinolaj relatív dielektromos állandója nagyjából 2.

A poláris és apoláris molekulák között fellépő különböző erősségű vonzóerők, az úgynevezett van der Waals-erők magyarázzák azt is, hogy a poláris folyadékok poláris folyadékokkal keverednek, poláris anyagokat oldanak, az apoláris anyagok pedig apoláris anyagokkal keverednek és apoláris anyagokat oldanak. Az oldás lényegében keveredés, így csak a keveredéssel foglalkozunk. Képzeld el, hogy benzint sikerül tökéletesen elkeverni vízzel. Mi történik, ha két vízmolekula találkozik? Az egyik a pozitív oldalával fordul a másik negatív oldala felé, és sokkal erősebb vonzás lép fel, mint egy vízmolekula és az általa polarizált benzinmolekula között, így nagy eséllyel hosszabb ideig együtt maradnak. Közben újabb vízmolekulák csatlakozhatnak, és végül is a benzin molekulái magukra maradnak: a víz különválik a benzintől. Persze, egy molekula különböző mértékben lehet poláris. A szesz molekulái kevésbé polárisak, mint a vízmolekulák, de a szesz mégis akármilyen arányban összekeveredik a vízzel. A tökéletesen vízmentes szesz

benzinnel is összekeveredik, de a víztartalma már nem. Egyébként a benzin maga is keverék, különböző apoláris anyagok keveréke, amelyek tökéletesen elegyednek.

Van-e van der Waals-vonzóerő a tökéletesen apoláris molekulák között is? Például az 5.1.6. ábrán látható levegőmolekulák apolárisak. Mégis, a levegő is cseppfolyósítható, bár csak $-170\text{ }^\circ\text{C}$ alatt. Így valamiféle vonzóerőnek működnie kell a molekulái között. Ezeknek az erőknek a létrejöttét úgy képzelhetjük el, hogy a molekulában mozgó elektronok miatt a molekula egyik vége hol egy kicsit negatív lesz, hol egy kicsit pozitív, így gyengén és változó irányban polarizálja a közelében lévő molekulákat. A magyarázat sántít, számításokat ennek alapján nem lehet végezni, a pontos magyarázat nehéz. Mégis szeretnénk valami képet kapni, hogy ez a vonzóerő mennyivel gyengébb, mint a poláris molekulák közötti vonzóerő. A nagyobb molekulájú anyagok általában nehezebben olvadnak és nehezebben párolognak, de ez a molekulák közötti vonzóerőtől függ. Ha a levegő molekuláihoz hasonló tömegű poláris molekulákból álló anyagot választunk, akkor képet kaphatunk az erők különbségéről. Ilyen a faszesz, a szesz egy közeli, de mérgező rokona. Ez valamivel polárisabb, mint a szesz, de nem annyira, mint a víz. A faszesz forráspontja $64,7\text{ }^\circ\text{C}$: jóval nagyobb, mint a nagyjából ugyanakkora molekulákból álló levegő forráspontja. Tudjuk, hogy a víznek még ennél is nagyobb a forráspontja, bár a vízmolekulák tömege kisebb. Az vízmolekulák erősen polárisak, de a víznél a hidrogén ionok is szerepet játszanak.

3.1.41. Kísérlet. Egy nagyobb alumínium fóliára tegyünk egy jól töltődő műanyag lapot! Papírral dörzsölve töltsük jól fel! Egy tompa fémrúddal, például egy kulcs végével erősen odanyomva írjunk valamilyen betűt a lapra! Én egy X-et írtam. Természetesen nem látszik. Szórjunk a lapra szitából kénport, majd a felesleget szórjuk le! Sárgán látszik a betű. Lásd a 3.1.13. képet. Egyes hintőporokkal is működik a kísérlet. A magyarázat, hogy a negatív töltésű lap elvesztette töltését a betű helyén. A többi helyen a műanyag negatív, taszítja a negatívra töltődő kénport. Ezen alapulnak a száraz másoló eljárások („xerox”). Az elvet Selényi Pál magyar fizikus fedezte fel. Egy fémlapot szelén réteggel vonnak be. A szelén réteget feltöltik, és rávetítik a képet. A szelén félvezető, de fény hatására vezetőképessége akár ezerszeresre is megnő. A réteg a megvilágított helyeken elveszti töltését. Fekete festékport szórnak a lemezre, amely csak a töltött helyeken tapad meg. Melegített papírt nyomva a lemezhez, a festék megolvad és áttapad a papírra. □

3.1.42. Kísérlet. Tegyünk egy szigetelő műanyag dobozra néhány jól töltődő műanyag tányért. Előzőleg mindegyiket jól dörzsöljük meg kívül-belül. Én „papírtányérokat” használtam, amelyek PS-ből készülnek. 5 darab már elég volt, de végül 10-et vettem. Szigetelő csipeszekkel tegyünk a toronyra egy fém tálcát. Az elrendezést a 3.1.14. fénykép mutatja. Ha egy kis vattapelyhet ejtünk a fémtányérra, vagy akár csak mellette próbáljuk meg leejteni, odavonzza, majd a pehely felágaskodik. Tartsuk tenyerünket a pehely fölé pár centiméterre! A pehely jobban ágaskodik, majd felrepül a kezünkre. Nem marad azonban ott, pár másodperc múlva visszarepül a fém tálcára. A játék akár százszor is megismétlődik. Biztosan mindenki tudja már a magyarázatot: a sok, mondjuk negatív töltésű tányér erős elektromos tere megosztja a fém tálcában a töltéseket: az alja pozitív lesz, a teteje negatív. A vattapehely negatívra töltődik, felágaskodik. Közél

tartott kezünk a megosztás miatt pozitív lesz, a pehely átrepül rá. Ott pozitívrá töltődik, visszarepül. A fém tálca szerepe, hogy rajta a töltések könnyen mozognak, a pehely könnyen feltöltődik. \square

3.1.43. Kísérlet. Az előző kísérletben használt fém tálcat érintsük meg felülről, majd szigetelő csipeszekkel vegyük le és tegyük az elektroszkópunkra. A mutató kitér, a tálca pozitív töltésű. Süssük ki a tálcat és az elektroszkópot, és tegyük vissza a tálcat a csipeszekkel. Újra megismételhetjük az előző kísérletet, vagy kisütve felülről a tálcat, ismét töltést adhatunk vele valamilyen tárgynak. Amit csináltunk, az az *elektrofor*. Sokszor állíthatunk vele elő töltést egymás után, amíg a tányérok töltése el nem szivárog. Természetesen nem örökmozgó, az energiát mi adjuk, amikor a fém tálcat leemeljük az ellentétes töltésű tányérokról. \square

3.1.44. Kísérlet. Teljes sötétben, amikor 5–10 perc alatt a szemünk már hozzászokott a sötétbe, papírral dörzsölve valamilyen műanyagot, valóságos szikrafolyamot láthatunk. A szikrák a dörzsölő és a dörzsölt tárgy között keletkeznek. Ha papírt és műanyagot lapot összesimítunk majd szétválasztunk, akkor is keletkeznek szikrák. Tulajdonképpen hogy is keletkezik a dörzselektromosság? A két érintkező anyag között anyagszerkezeti okokból elektronok lépnek át, általában a papírról a műanyagra. A keletkező feszültség csak 1 V nagyságrendű, a távolság pedig 1 nm nagyságrendű. Ilyen módon egy feltöltött kondenzátor jön létre, elég nagy töltéssel. Amikor a papírt felemeljük, a távolság nagyon megnő, a kondenzátor kapacitása nagyon lecsökken. Ez azt jelenti, hogy a feszültség nagyon megnő. Vezetőknél a feszültségkülönbség a megmaradt érintkezési pontokon keresztül villámgyorsan kiegyenlítődik, nagyságrendben 100 V szokott maradni. Szigetelőkben azonban a töltések nem tudnak mozogni. Az óriási feszültség nagy része szikrákat ad, de a töltés egy része megmarad. \square

3.1.45. Kísérlet. Egy fázisceruzát használva az előző kísérletünket egészítsük ki. A fázisceruzát a villanyszerelők arra használják, hogy megvizsgálják, valami feszültség alatt áll-e? Egy kis csavarhúzó egy fém végződéssel. Egy kis parázfény lámpa van benne, amely a feszültség hatására világít. Úgy kell használni, hogy ujjunkkal a fém végződéshez érve a csavarhúzó hegyével megérintjük a vizsgálandó tárgyat. Nagyon gyenge áram elég a világításhoz. Hasonló parázfény lámpa van a „világító” elosztókban is, de az nagyobb, több áramot használ.

A sötétbe szoktatott szemmel a dörzsöléssel feltöltött tárgyon húzogassuk a fázisceruzát a hegyét, miközben ujjunk a másik végén van. A lámpácska fel-fel villan, sokszor ugyanakkor szikra üt át a csavarhúzó hegye és a feltöltött tárgy között. Néha már akkor felvillan a parázfény lámpa, amikor csak közelítjük a csavarhúzó hegyét a töltött tárgyhöz. Ez a megosztás miatt van: a fázisceruzában töltések mozdulnak el. A parázfény lámpa színét nem látjuk, színlátásunk csak erős fénynél működik. \square

3.1.46. Kísérlet. Nagyobb fényt kaphatunk dörzselektromossággal, ha sötétbe szoktatott szemmel egy kis fénycsövet („neoncsövet”) villantunk fel vele. Egy kb. 28 cm hosszú fénycsövet használtam. Mindkét végén két-két kivezetés van. Az egyik végén mindkét kivezetést az ujjunkkal fogva, a másik végét húzgáljuk a nagyon jól feltöltött tárgyon. A cső időnként elég erősen felvillan. Mi a magyarázat? Tudjuk, hogy a levegő

átütési szilárdsága 3 kV/mm . Ha tehát a térerősség 3 MV/m -nél nagyobb, szikra keletkezik. A levegőben — például ionizáló sugárzások hatására — mindig jelenlévő ionok a nagy térerősségtől olyan erősen gyorsulnak, hogy mire a következő ütközés a levegőmolekulákkal bekövetkezik, energiájuk már néhány eV. Elektronokat szakítanak le a semleges molekulákról, és újabb ionok keletkeznek, amik szintén gyorsulnak, stb. A levegő egy rövid időre vezetővé válik, de ez megszűnik, ha a feszültségkülönbség lecsökken. (Ezen alapul a csúcs hatás is. Az erősen görbült csúcs közelében nagyon nagy a térerő.) Mi történik, ha csökkentjük a levegő — vagy akár milyen gáz — nyomását? Az ionok szabad úthossza megnő, és tovább tudnak gyorsulni. Ha a nyomás csak néhány mbar, a gáz világítani kezd: lényegében a szikra nagyon hosszú lett. Bonyolult és érdekes jelenségek játszódnak le, amelyek a gáz nyomásától is függenek. (Teljes vákuumban már nincs áram.) A világítás onnan ered, hogy amikor az ellentétes töltésű ionok találkoznak, a felszabaduló energiát fény alakjában adják le. Ha van töltésutánpótlás, a gáz állandóan világít. Ilyen ritkított gáz van például a fényreklámok „neoncsöveiben”; nem biztos hogy neon-gáz, a szín attól függ, milyen gázzal van szó. A parázsfény lámpákban például általában hélium van, és 100 V körüli feszültségnél kezdenek világítani.

A fénycsőben nincsen gáz, van viszont pár mg higany. A higany párolog, szobahőmérsékleten a gőznyomása néhány tized pascal. Ez is világít nagyobb feszültség hatására, bár fényének nagy része számunkra láthatatlan ultraibolya fény. A fénycső belső felületén lévő bevonat ezt alakítja át látható fényre. \square

3.1.47. Kísérlet. Az előző kísérletekben szó esett az áramról, az elektronok — vagy ionok — mozgásáról. Részletesen foglalkozunk majd ezzel, most csak egy kísérletet végzünk el. Válasszunk ki egy olyan cérnát, amelynek a végét a töltött elektroszkópra dobva, $30\text{--}40 \text{ cm}$ -es darabon keresztül az elektroszkóp nagyságrendben 10 s alatt veszíti el töltését. Készítsük el a 3.1.15. fényképeken látható „berendezést”. A cérnának az elektroszkóp belsejében lévő végére kössünk nehezéknek csavaranyát, alátétet. A cérna másik végét tekerjük fel a kétlemezes elektroszkóp fémdrótjára. (A fényképen látható üveg csak nehezékként szolgál.) Készítsünk még két kétlemezes elektroszkópot, de ezek lemezeit csak egy rézdrótból készült horogra tegyük, a horgokat pedig akasszuk a cérnára. Ha elkezdjük feltölteni a dobozt egy megdörzsölt tárggyal, máris kezdődnek az érdekes dolgok. A dobozon lévő mutató először kitér, majd lassan visszaesik, miközben a többi mutatók emelkednek, leggyorsabban a legközelebb lévő. A magyarázat, hogy a rosszul vezető cérnán az elektronok nehezen vergődnek át. Az elektronok (vagy más töltött részecskék) áramlása az *áram*. Egysége az amper, Ampere francia fizikus nevéből, jele A . Egy amper az áram, ha a vezetőkén másodpercenként egy coulomb töltés halad át, azaz $A=C/s$. Folytassuk a feltöltést! Az előző jelenség megismétlődik: a doboz mutatója megemelkedik, majd lassan süllyed valamennyit. Végül az utolsó töltésadag felvitele után várjunk valamennyit, amíg az összes mutató nagyjából egyforma feszültséget mutat. Ezt az állapotot mutatja a bal szélső fénykép. Most kezdődik a tulajdonképpeni kísérlet: érintsük meg a kétlemezes elektroszkópot valamilyen fémtárggyal. A mutatója természetesen azonnal összecukódik, a többi mutató azonban csak lassabban, leglassabban a dobozon lévő mutató. A folyamatot mutatják a fényképek. Végül lassanként minden töltés elfolyik a cérnán keresztül.

Becsüljük meg, mekkora áram folyik a cérnán keresztül a kísérlet elején! A kezdeti feszültséget a dobozon 5000 V-nak becsültem, ami az elején másodpercenként nagyjából 200 V-tal csökkent. Ha 10 pF-nek becsüljük a doboz kapacitását, akkor 200 V megfelel 2 nC-nak, tehát az áram 2 nA. Később majd ebből ki tudjuk számolni a 0,1 mm átmérőjű cérna fajlagos ellenállását ($2 \cdot 10^4$ a középső oszlopban a 3.1.6. táblázatban) amivel a cérna éppen hogy szigetelőnek számít. Látjuk, hogy ilyen nagy feszültségnél és ilyen kis töltésnél már ilyen kicsi áramok is számítanak.

Anyag	kV/mm	$\rho/(\Omega\text{m})$	ε_r
Ásványi olaj	10	$5 \cdot 10^{12}$	2,2
Bakelit	20	$5 \cdot 10^5$	3–6
Borostyán		10^{16}	2,8
Csillám	40–240	$5 \cdot 10^{14}$	7
Epxi	20	10^{12}	3,3
Kartonpapír	20–25	10^{10}	3
Kén		10^{15}	3,6–4,3
Márvány		10^9	8,5
Gumi	12–20	10^{13} – 10^{15}	4
Nylon	16	10^{10}	4,1
Paraffin	11	10^{16}	2–2,3
PE	40	$5 \cdot 10^{15}$	2,3
Plexi	40–50	10^{13}	3–3,3
Porcelán	4	10^{12}	6
Prespán	10–13	10^9	2–3,4
PS	30–70	10^{16}	2,7–3,7
PVC	50	10^{13}	3,3
Sellak		10^{14}	2,7–3,7
Szilikon	10	10^{12}	3,5
Teflon	20	10^{16}	2
Üveg	100	10^{11} – 10^{12}	5–7

3.1.16. ábra: víz a víztartályból

Az elektromos áram természetét egy hasonlattal világíthatjuk meg. Az elektronok ugyanúgy áramlanak a vezetőkben, mint a víz a vízvezetékben. A 3.1.16. ábra a kísérletünk megfelelőjét mutatja. Ha az alsó vékony cső vége nyitott, akkor a víz lassan kifolyik a tartályból. A közbenső víznyomásmutatók a cső mentén csökkenő víznyomást mutatnak. A nyomás felel meg a feszültségnek. Ha a vékony cső végét bedugjuk, a nyomások lassan növekednek, ahogy a vékony csövön átáramlik a víz a víznyomásmutatókba. Lassanként a vízszintek kiegyenlítődnek. \square

3.1.48. Kísérlet. Az első *dörzselektromos gépet* Guericke készítette. Egy nagy kén-gömböt öntött olvasztott kénből, amit forgattak, és a kezével dörzsölte. A 3.1.17. fényképek közül a bal oldali a mi egyszerű gépünk forgó részét, a jobb oldali az álló részét

mutatja. A forgó rész lényege egy minél nagyobb, jól töltődő műanyag palack. A csavaros fedelébe egy minél nagyobb átmérőjű anyáscsavar jön, azt fogjuk be a motoros csavarhúzóba. A csavar alá körmös alátétet vagy gumi alátétet tegyünk mindkét oldalon, mert egyébként könnyen forogni kezd a fedélben. Két vagy három anyát is tegyünk a csavarra, és jól húzzuk meg. Az álló rész egyszerűen egy munkapad. A bedugható műanyag szorítókba vastag szigetelő rudakra rézhuzalt feszítünk ki, ez vezeti el a töltést. A műanyag szorítók közé újságpapírt tömködünk. A kezünkbe is újságpapírt fogunk, azzal szorítjuk rá a palackot az alsó papírra, úgy, hogy a rézdrótot is érje, miközben bal kezünkkel a csavarhúzót üzemeltetjük. Én csak elektroszkóp feltöltését próbáltam, de dörzselektromos gépekkel látványos és félelmetes, egyben veszélyes kísérleteket is mutattak be. Kondenzátornak *leydeni palackot* használtak. Ez egy kívül-belül fémfóliával bevont üvegedény. A jól feltöltött leydeni palack szép szikrákat és életveszélyes áramütéseket ad. Felfedezője azt mondta, soha semmiért se próbálná ki újra kézzel kisütöni. Egyébként úgy fedezte fel, hogy vizet akart feltölteni. A belső fegyverzet a víz volt egy vasszeggel, a külső a keze. Amikor a feltöltés után megérintette a szegyet, jókora áramütést kapott. Itt már komoly mennyiségű töltés halmozódhat fel. \square

3.2. Mágnesség

Ebben a fejezetben magnetosztatikával, főleg állandó mágnesekkel foglalkozunk.

3.2.1. Kísérlet. Mágneshez (például mágnespatkóhoz, mágnesrúdhoz, vagy egy ajtómágnesből kiszedett kerámiamágneshez) közelítsünk egy lágyvasdrót darabot, például virágrótot egy darabját. A drót hegyével letapogathatjuk a mágnest, hol erősebb, hol gyengébb vonzást tapasztalunk. Természetesen a hatás–ellenhatás miatt a vonzás külsőcsönös. Ezt könnyen kimutathatjuk, ha a mágnest vagy a vasdarabot vagy mindkettőt vízen úszó műanyag edénykébe tesszük. Egy természetes anyag, a kisázsiai Magnezia város közelében is megtalálható *mágnesvaskő*, *magnetit*, Fe_3O_4 , mágneses és apró vastárgyakat magához vonz. Ezt már a görögök is tudták i.e. 600 körül. A város nevéből ered a mágnesség neve. \square

3.2.2. Kísérlet. Egy mágnessel, például ajtómágnessel acél tárgyakat mágnessé tehetünk. Ez úgy történik, hogy a mágnesnek az egyik olyan részét, ahol a legerősebben vonzza a vasat (például ajtómágnesnek a legnagyobb oldalai közül valamelyiket) többször végighúzzuk az acélon. Mindig ugyanazt a részét tesszük az acélhoz, végighúzzuk rajta, majd távolabb visszük vissza. Mágnesezzünk fel mindjárt két varrótűt, mondjuk a hegyétől a végéig húzva végig rajta a mágnes ugyanazon oldalát. Az egyik varrótűből csináljunk egy úszó iránytűt: szűrjük át egy parafa darabkán a közepéig, és tegyük egy nagyobb, nem vas edényben lévő vízre. En egy lapos tányérba öntöttem vizet és erre tettem a tűt. Ha nagyobb vastárgyak és mágnesek nincsenek a közelbe, a tű beáll észak–dél irányba. Ilyen iránytűt először a kínaiak készítettek. Úgy is eljárhatunk, hogy a mágnesűt a közepén alátámaszthatjuk, így működik a legtöbb iránytű. Végül cérnára is függeszthetjük a mágnesűt, ha a közepére például rézdrótot csavarunk, amit horoggá

hajlítunk, vagy a tűt egy papírdarabon szűrjük át. Cérnánál nem biztos, hogy megkapjuk az észak-dél irányt, mert lehet, hogy a cérna össze van csavarodva és elforgatja a tűt, de a legtöbb kísérletnél ez nem számít. Vehetünk is egy kis iránytűt, úgymint szükségünk lesz rá később is. \square

3.2.3. Kísérlet. A vízen úszó, alátámasztott vagy cérnán függő iránytűhöz közeledjünk a másik tűvel. Azt tapasztaljuk, hogy az egyforma mágnességű végek taszítják egymást, az ellentétes mágnességűek pedig vonzzák. Egy tárgy mágnes voltának bizonyítékeként csak a taszítást fogadhatjuk el, hiszen vonzást vassal is tapasztalunk. Ha vonzást tapasztalunk, közeledjünk az iránytű másik végéhez, nem teljesen szemből, hanem kicsit oldalról, úgy könnyebb észrevenni a taszítást. \square

3.2.4. Kísérlet. Egy, akár használt borotvát feszegessünk szét egy csavarhúzóval. Néhány acélpengét találunk benne. Egyet mágnesezzünk meg. Próbáljuk ki az iránytűnkkel, hogy az egyik vége északi mágnességű, a másik déli. Fogjuk meg a közepénél a pengét egy laposfogóval, majd hajlítgatással törjük el. Vizsgáljuk meg a két darabot: mindegyiknek az egyik vége északi, a másik déli mágnességű. Nincs „egysarkú mágnes”: ha egy mágneset kettétörünk, mindkét darab kétsarkú lesz. A széttörés fordítottja, ha két mágnesrúdat összeillesztünk: lágyvas dróttal „letapogatva” az így kapott hosszabb rudat, csak a két végénél tapasztalunk jelentősebb vonzást. \square

3.2.5. Kísérlet. Próbáljunk egy nagyobb acéltárgyat megmágnesezni: például acél kötőtűt, fémfűrész pengéjét, reszelőt. Én egy lapos tűreszelőt mágneseztem meg. Ezzel is kipróbálhatjuk az iránytűre ható vonzást vagy taszítást. Nagyobb, erős mágneset ne vigyünk közel egy iránytűhöz, mert átmágnesezhet! \square

3.2.6. Kísérlet. Vágjunk le parafadugóból egy szeletet és most a tengelye mentén szűrjük át rajta egy lágyvas drót darabot. Felül csak egy kicsit álljon ki. Tegyük tele pohár vízbe. Ha fölé tartjuk a jól megmágnesezett hosszabb acéltárgyat, elég határozottan egy pont alá úszik. Ezt szokták a *mágnes sarkának* vagy idegen szóval *pólusának* tekinteni. Keressük meg a másik pólust is! Hosszú rúd mágnesnél a pólusok a rúd végétől a hosszának egytizenkettédere vannak.

Miért áll be az iránytű észak-dél irányba? A Földnek mágneses mezeje van, ami ugyanúgy vektormező, mint az elektromos térerősség. A mágneses térerősség mezejét \mathbf{H} -val szokás jelölni. A Földön az északi sarok felé mutat. Ha csak kicsit mozdulunk el, a mágneses térerő alig változik, nagyon csak akkor változik, ha mondjuk több ezer kilométert megyünk arrébb. A mágneses térerőt A/m-ben mérjük, ami azt sejteti, hogy köze van az áramokhoz. A mágneses póluserősség mértékegysége Vs. Egy p erősségű pólusra ható erőt megkapjuk, ha a póluserősséget szorozzuk a mágneses térerősséggel: $\mathbf{F} = p\mathbf{H}$. Az egység, mivel $\nabla\mathbf{A} = \mathbf{W}$, és $\mathbf{W}\mathbf{s} = \mathbf{J}$, $\mathbf{J}/\text{m} = \mathbf{N}$ lesz. Egy mágnesestűnek két pólusa van, az északi pólus erősségét tekintjük pozitívnak. Ha ez p , akkor a déli pólus erőssége $-p$. A mágnesestűre egy erőpár hat, annak forgatónyomatéka forgatja be észak-dél irányba. Amikor beállt ebbe az irányba, a forgatónyomaték nulla lesz.

* A pólusok fogalma egy kicsit homályos. Hol vannak például egy ajtómágnes pólusai, amelyik „keresztbe” van felmágnesezve? Legyen \mathbf{l} a mágnesestű negatív pólusából a pozitív pólusába mutató vektor. Az $\mathbf{m} = p\mathbf{l}$ mágneses nyomaték vektorral nagyon elegánsan

fejezhető ki a \mathbf{M} forgatónyomaték: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$. Mérték póluserősséget közvetlenül nem tudunk, de az \mathbf{m} vektort tudjuk mérni. Amikor a forgatónyomaték nulla, akkor \mathbf{m} iránya megegyezik \mathbf{H} irányával. Ha a mágnességet elforgatjuk úgy, hogy \mathbf{m} merőleges legyen erre az irányra, akkor a forgatónyomaték maximális, $M = mH$. Így az \mathbf{m} vektort megkaptuk, ha \mathbf{H} -t ismerjük. De hogyan mérték meg \mathbf{H} -t? Gauss eszelt ki egy ravasz eljárást, amivel ha egy másik iránytűre is megmérjük ezt a szorzatot, akkor az első tűre megmérhetjük m/H értékét, így m és H is kiszámítható. *

A Föld mágneses tere olyan, mintha nagyjából a középpontjában egy nagyon erős rúd-mágnes lenne, amelynek déli sarka nagyjából a Föld északi sarka felé mutat. Viszont egy mágnes mágneses erővonalai — mint később látni fogjuk — nem gömbfelületeken haladnak. Így a \mathbf{H} vektor nem vízszintes. Egyébként időben is kicsit változik. 1950-ben Budapesten a \mathbf{H} vektor észak felé lejtett $63,3^\circ$ -os szögben. A vízszintes komponensének erőssége 16 A/m volt, de ez sem pontosan északra mutatott, hanem az északi iránytól elhajlott $0,3^\circ$ -kal nyugatra. Ezt meg lehet mérni, ha egy mágnességet sikerül pontosan a súlypontjában alátámasztani, akkor az északi pólusa lefelé áll. Egyébként a Föld középpontjánál nincs semmilyen mágnes, mágnességét elektromos áramok keltik. \square

3.2.7. Kísérlet. Egy minél nagyobb mágnességet — én egy nagy mágnességet használtam — tegyünk egy kis iránytű közelébe, és lassan forgassuk el. Az iránytű „megbolondul”, kitér az észak-déli irányból. Mindig azt az irányt mutatja, amibe a mágnesség és a Föld mágneses térének eredője mutat. Ezek természetesen vektorokként adódnak össze. Úgy is eljárhatunk, hogy a mágnességet letesszük, és az iránytűt tologatjuk körülötte: a tapasztalat hasonló.

Egy mágnesség egy másik mágnességet vonz vagy taszít. Ha a Föld is egy nagy mágnesség, miért nem repül el egy mágnesség a Föld északi vagy a déli sark irányába? A kérdésre legegyszerűbben a pólusok segítségével válaszolhatunk. Ha a \mathbf{H} tér a hellyel nem változik, erőpár jön létre. Ha viszont változik, az egyik pólusra ható erő nem az ellentettje a másik pólusra ható erőnek, eredőjük nem nulla. Így vonzás vagy taszítás lép fel. A Föld mágneses mezeje nagyon lassan változik a hellyel, így az eredő nagyon-nagyon kicsi. Egy erős mágnesség közelében nagyon erős a mágnesség tér, ami azonban gyorsan csökken a távolsággal. Vonzást vagy taszítást tapasztalunk, ami a mágnesség közvetlen közelében a legerősebb: itt változik leggyorsabban a tér. \square

3.2.8. Kísérlet. Tegyük le a kitérítő mágnességet, esetleg valami alacsonyabb dobozra, és a közelébe az iránytűt úgy, hogy jól észrevehetően kitérjen az észak-déli irányból. Borítsuk le a kitérítő mágnességet — én egy nagy mágnességet használtam — különféle anyagú edényekkel. Műanyag, üveg, alumínium edényeknek semmi hatása. Meglepetésünkre a rozsdamentes acél edénynek sincs hatása: a rozsdamentes acél nem mágnesség, kipróbálhatjuk, hogy nem tapad hozzá a mágnesség. Ha viszont vas edénnyel borítjuk le, akkor a mutató megmozdul: valamennyire visszatér az észak-dél irány felé. Ez akkor is igaz, ha az edény zománcozott. Minél vastagabb az edény, annál nagyobb a visszatérés. Megállapíthatjuk, hogy a vas kivételével az anyagok átengedik a mágnesség mezőt. A vas gyengíti, minél vastagabb, annál jobban. \square

3.2.9. Kísérlet. Egy nagy, például 10 cm hosszú szeget próbáljunk ki, hogy a hegye vonz-e egy lágyvasdrót darabot? Vagy nem tapasztalunk vonzást, vagy legfeljebb gyenge

vonzást tapasztalunk. Tartsunk a szeg fejéhez egy ajtómágnest! A szeg hegye most már határozottan vonzza a drótdarabot. Ez a *mágneses megosztás* vagy helyesebben *mágneses polarizáció*. Tulajdonképpen a mágneses tér mágnessé teszi a vasat (*gerjesztett mágnességről* is szokás beszélni), minél erősebb a tér, annál erősebben, és aztán az vonzza a vasat (ami szintén mágnessé válik). \square

3.2.10. Kísérlet. A fentiek alapján úgy tűnik, a vasszegnek az a vége, ami a mágnesnél van, ellenkező mágnességű lesz, mint a mágnes vele érintkező pólusa, a távolabbi pedig ugyanolyan, de azért próbáljuk ki! A vasszeget a mágnessel lefektetve a hegyét óvatosan közelítsük az iránytű egyik végéhez, amíg taszítást nem tapasztalunk. Vegyük el a szeget, de a mágneszt hagyjuk ott, ahol van! A taszítás megszűnik, vagy sokkal gyengébb lesz. Óvatosan közelítsük a mágneszt a tűhöz: taszítást tapasztalunk. A vas mintegy magába gyűjti és vezeti a mágneses erővonalakat. \square

3.2.11. Kísérlet. Egy nagyobb vasszeget próbáljunk ki: mindkét végét vonzza egy ajtómágnes. Egy mágnespatkó sarkai közé tegyünk valamit, ami magasabb, mint a patkó, tegyük rá a szeget úgy, hogy egyik vége a patkó egyik, másik a másik sarka felett legyen. Ütögessük a szeget egy darab fával! Iránytűvel kimutathatjuk, hogy mágneses lett, mégpedig az a vége lett déli mágnességű, amelyik a patkó északi sarka felett volt. Most tegyük vissza a szeget fordítva, és ismét ütögessük. A szeg átátmágneseződik, most is az a vége lesz déli mágnességű, amelyik az északi sarok felett volt. Ismét fordítsuk meg a szeget, és tegyük vissza. Hagyjuk ott, de most ne ütögessük. Az iránytűvel kipróbálva kiderül, hogy a szeg nem mágnesesződött át. Kipróbálhatjuk, hogy egy ajtómágnes változatlanul hozzátapad a szög mindkét végéhez.

Ha nincs mágnespatkónk, akkor vegyünk két szögvasat (derékszögben meghajlított vasat). Az egyik szárukat fogjuk össze csipeszekkel, hogy egy U betűt formázzanak. Az U két szárára rakjunk egy-egy ajtómágnest ellenkező sarkukkal feltapasztva (azaz úgy, ahogy vonzzák egymást). Ezzel a rögtönzött patkómágnessel is elvégezhetjük a kísérletet, ha rövidebb szeget használunk, és amennyire csak lehet, közel rakjuk a „pólusokhoz” (de ne érjen hozzájuk). \square

3.2.12. Kísérlet. Ha olyan szerencsénk van, hogy találunk egy szeget, ami csak egészen gyengén mágneses (alig taszítja az iránytű egyik végét), akkor próbáljuk ki a következőt: minden mágnesről távol tartsuk a tenyerünkön a szeget kelet-nyugati irányban. Ütögessük egy fadarabbal. Azt a kevés mágnességét is elveszti, ami van, amint az iránytűvel kimutathatjuk. \square

3.2.13. Kísérlet. Mágnesezés a Föld mágneses terével is lehetséges. Egyszer egy hosszú vascövet fűrészeltem. Munkapadba volt befogva és nagyjából észak-dél irányba, sőt, nagyjából 60° -os szögben még lejtett is észak felé! Azt vettem észre, hogy a végénél összegyűjtötte a vas fűrészelésekor keletkezett vasreszeléket. \square

3.2.14. Kísérlet. Mágnesezzünk meg két varrótűt. Célszerű nem egyformán, hogy az egyiknek a feje vonzza a másik fejét. Egy üvegbe tegyünk dugót, és oldalról szűrjük bele az egyik tűt. A másik fejét tegyük ennek a fejéhez. Ha eléggé mágnesesek, a második tű függve marad. Nagyobb gyertya lángjával, kis gázégővel vagy borszeszégővel

kezdjük el a függő tűt melegíteni. Amikor a tű izzóra melegszik, leesik. Jobb, ha például a gáztűzhely lapján végezzük ezt a kísérletet, nehogy az izzó tű megégessen valamit. Izzási hőmérsékleten a mágnesek elvesztik mágnességüket, és az izzó vasat nem vonzza a mágnes. Vigyázzunk, vannak olyan, egyébként nagyon erős mágnesek, amelyek már 80 °C-on elvesztik mágnességüket! □

3.2.15. Kísérlet. Mindenki játszott már állandó mágnesekkel: mágnesrudakkal, mágneskorongokkal, mágnespatkóval. Ezek nem vesztik el könnyen mágnességüket ütögetésre sem és egy másik hasonló mágnes hatására sem. Ezek az úgynevezett „kemény” mágneses anyagok. Egy vasszög „lágy” mágneses anyagból van: mágnesezve hasonlóan erős mágnes lesz, a különbség inkább abban van, hogy nagyon könnyen elveszti mágnességét, vagy erősebb mágneses térben átmágnesesődik. Ezért vonzza egy kemény mágneses anyagból készült mágnes mindkét végét, sőt, akárhol: átmágnesezi. Varrótűből készült iránytűnk a kettő között van. Mágnessége elég erős ahhoz, hogy a Föld mágnessége ne tudja megváltoztatni, de egy erősebb állandó mágnes átmágnesezheti. Ezért iránytűket, finomabb műszerek acélmágneseit ne viggyük erős mágneses térbe! Hogy jobban megértsük a mágnesezés lényegét, végezzük el a következő kísérletet. □

3.2.16. Kísérlet. Egy kémcsőbe töltünk vasreszeléket, és rázzuk össze. Vigyük egy iránytű közelébe: az iránytű mindkét vége csak vonzást mutat. Most vízszintesen tartva a kémcsövet, húzogassunk egy ajtómágnezt vagy más állandó mágnezt a kémcsövön. Ha úgy húzogatjuk, mintha meg akarnánk mágnesezni, a vasreszelék rendeződik. Közben fokozatosan fordítsuk függőlegesbe a kémcsövet. Most közelítve a kémcsövet az iránytűhöz, az egyik végét taszítja.

Ugyanezt a kísérletet „oxidfekete” porfestékkel is elvégezhetjük. Ez lényegében mágnesvaskő, magnetit pora. Mikroszkópikus szemcséi ugyanúgy rendeződnek, mint a vasreszelék.

Miért mágneses a vas, és két közeli rokona, a nikkell és a kobalt? Ezeknek az atomjai apró mágnesek, és úgy állnak be egy kristályszemcsében, hogy mind egyfelé mutassanak. Így minden kis kristályka egy-egy nagyon erős mágnes, de össze-vissza állnak, így kifelé a vas nem mágneses. Ezeket a szemcséket *mágneses tartományok*oknak, idegen szóval *domének*nek nevezzük. Ha mágneses térbe helyezzük a vasat, a térnek megfelelően álló szemcse elkezd növekedni: a szomszédos, „rosszul álló” szemcsékből vasatomok csatlakoznak hozzá. (A szemcsék elfordulni nem tudnak, azt a szilárd szerkezet megakadályozza.) Így lesz mágneses a vas, mégpedig annál erősebben, minél erősebb a tér. Amikor a tér megszűnik, a mágnesség megmarad, de a lágy mágneses anyagokban a szemcsehatárok könnyen mozognak, és már gyenge tér is megváltoztatja a doméneket. Az „ütögetős” kísérletünkben az ütögetés a szemcsehatárok mozgását segítette elő. A kemény mágneses anyagokban a szemcsehatárok nagyon nehezen mozognak: az ilyen anyagokat nagyon nehéz felmágnesezni, de utána nagyon nehéz megváltoztatni a mágnességüket. A domének határait egyébként ki lehet mutatni, ha egy simára csiszolt vasdarabot finom magnetit porral kenünk be. A por a szemcsehatároknál gyűlik össze, és nagy nagytású mikroszkópban azok láthatók.

A fentiek alapján nem világos, miért nem lesz az egész vasból egyetlen szemcse? Két rúd-mágnezt próbáljunk úgy egymás mellé tenni, hogy az azonos pólusok legyenek egy-

más mellett: szétugranak. Ha viszont ellentétes pólusok vannak egymás mellett, akkor kevesebb a rendszer energiája. Még kevesebb, ha a két végéhez a két párhuzamos rúd-mágnesnek két másik rúd-mágneset teszünk, és így zárt mágneses kör alakul ki. Ugyanígy a vasszemcsék is zárt mágneses köröket alkotnak. A szemcsék azonban nem lehetnek akármilyen kicsik, mert ha túl kicsik, akkor a közeli vasatomok mágnesezettségi iránya nem lesz egyforma, és ez elkezd növelni az energiát. Egy optimum alakul ki minimális energiával.

A magnetit, Fe_3O_4 egy molekulájában két háromvegyértékű és egy kétvegyértékű vasion van. A két háromvegyértékű vasion ellentétesen áll, a kétvegyértékű felelős a mágnességért. A kétvegyértékű vasionot más ionra cserélve, kerámiaszerű anyagok készíthetők, ezek a *ferritek*. Készíthetők kemény és lágy mágneses ferritek is. A fémes mágneses anyagok — akár lágy, akár kemény mágnességűek — ötvözetek. Az alnico nevű kemény mágneses anyag például vason kívül főleg alumíniumot, nikkelt és kobaltot tartalmaz. \square

3.2.17. Kísérlet. Honnan ered a kemény és a lágy mágneses anyag elnevezés? Egy nagyjából 5 cm-es varrótűt próbáljunk meg fogóval meghajlítani: nem nagyon megy, az acél elég kemény. Egy darab vasdrótot hajtsunk ketté és a végét derékszögben hajtsuk fel. Kissé szétterpesztve a szárat, tegyük rá a tűt és tartsuk a gáztűzhely lángjába. Hevítjük világos vörösen izzóra, majd lassan emelve hűtsük le. Ha most kipróbáljuk, könnyen hajlítható, kilágyult. Mágnesezzük fel. Egy hasonló méretű mágneses varrótűvel csak úgy az asztalon kipróbálhatjuk, hogy nem nagyon tartja mágnességét, a másik tű legfeljebb gyengén taszítja, mágnesesen is lágy lett. Melegítsük ismét izzóra és dobjuk hirtelen a láng közvetlen közelében elhelyezett vízbe. Ez az acél *edzése*. Annyira kemény lesz, hogy ha megpróbáljuk meghajlítani, eltörik. Ha most megmágnesezzük, és az asztalon próbálgatjuk, kiderül, hogy sokkal jobban tartja a mágnességét.

Miért függ össze az acél mechanikai keménysége a mágneses keménységgel? Az acél nagyjából 1% széntartalmú vas. A vas kristályszerkezete az izzás hőmérsékletén más, mint közönséges hőmérsékleten. Ha lassan hűtjük le, van ideje átkristályosodni, és a kialakuló tiszta vas szemcsék határai könnyen mozognak, ezért lágy mechanikailag is és mágnesesen is. Ha viszont hirtelen hűtjük le, nincs ideje átkristályosodni, a szénatomok akadályozni fogják a szemcsehatárok mozgását, ezért lesz kemény mind a két értelemben. Pontosabban és részletesebben lásd a kémia részben.

Az első kemény mágneses anyagok szénacélok voltak edzett állapotban. Később áttértek a volfram tartalmú acélokra. Az acélokat edzés után egy napig gőzben tartották, hogy stabilizálódjanak, később már ne változzon a mágnességük. Lágy mágneses anyagnak kezdetben nagyon alacsony széntartalmú vasat használtak, ez nem is edzhető, majd áttértek a szilíciummal ötvözött vasra. Ma mindkét célra sokkal jobb anyagokat is ismerünk. \square

3.2.18. Kísérlet. Egy mágnespatkóra tegyünk egy papírlapot, vagy még jobb, egy átlátszó műanyag dossziét és arra szórjunk vasreszeléket vagy oxidfekete porfestéket. A kísérlet az ajtó-mágnesekből barkácsolt mágnespatkóval is elvégezhető. Erővonalak rajzolódnak ki, amelyek főleg a pólusok között haladnak: lásd a 3.2.1. fényképet. Hogy van ez? Azt mondtuk, erővonalak nem is léteznek, csak mágneses mező, most meg ki is rajzoltattuk őket? A vasreszelék kis hosszúságú vasdarabkákból áll, amelyek a mágneses

mezőben felmágneseződnek. Igyekeznek úgy elrendeződni, hogy az egyik északi pólusa a másik déli pólusához csatlakozzon. Így alakulnak ki a vonalak, amelyek valóban az erőter vonalai mentén haladnak. A kép nagyon szemléletes, azonban nem tökéletes, például a vonalak sűrűsége inkább attól függ, mennyi reszeléket szórtunk az adott helyre. Természetesen az erővonalak térben haladnak, de ott nem marad meg a vasreszelék. A mágnes szélénél, ahol legerősebb a tér, látszanak a felfelé induló erővonaladarabkák.

Egyszer egy sci-fi-t olvastam, amiben az űrhajót magához vonzotta egy patkó alakú mágneses sziget. Elment a kedvem a továbbolvasástól: úgy tűnik, a szerző a mágneset csak patkó alakban tudta elképzelni. De tényleg, miért készítenek patkó alakú mágneset? Mert így a pólusok a mágnes méretéhez képest közel vannak, és köztük erősebb a tér. \square

3.2.19. Kísérlet. Végezzük el az előző kísérletet, de a patkó szárjai közé tegyünk egy vasgyűrűt. A kialakuló erővonalakat a 3.2.2. fénykép mutatja. Az erővonalak a gyűrűben haladnak, a belsejében gyakorlatilag nincs erőter. \square

3.2.20. Kísérlet. A 3.2.3. fényképek közül a bal oldali egy kis mágneshengerekből összerakott „mágnesrúd” erővonalait mutatja, a jobb oldali pedig az erővonalakat a „mágnesrúd széttrése” után. Figyeljük meg a pólusokat. \square

3.2.21. Kísérlet. A 3.2.4. fényképek közül a bal oldali a mágneses erővonalakat mutatja két „rúd-mágnes” között, ha ellenkező sarkukkal vannak egymásnak fordítva, a jobb oldali pedig akkor, ha egyező sarkukkal vannak egymásnak fordítva. Ez utóbbi képnél azért kellett a ceruzák, mert anélkül folyton elgurultak a rudak a taszítás miatt. \square

3.2.22. Kísérlet. A 3.2.5. fényképek közül a bal oldali egy ajtó-mágnes erővonalait mutatja: az ajtó-mágnes „keresztbe” van felmágnesezve. A középső fénykép egy soksarkú szappantartó mágnes „sarkait” mutatja. Végül a jobb oldali fénykép egy mágnesezett fűrészlap erővonalait mutatja, amelynek a mágnessége igen gyenge, inkább csak a pólusoknál látszik valami rendeződés. \square

3.2.23. Kísérlet. Hogyan tároljuk mágnesünket? Úgy, hogy lehetőleg minél kevesebb legyen a szórt mágneses tér. Ajtó-mágnesekre tegyük rá a lezáró vaslapocskát, vagy kettesével fordítsuk egymásnak őket. Rúdmágneseket párossával tegyünk egymás mellé, és nem árt, ha a végeket vaslappal lezárjuk. Patkó-mágnes két sarkát sem árt vaslappal összekötni. Röviden: ahogy a legjobban összetapadnak. Iránytűket, műszermágneseket más mágnesektől távol tároljunk. \square

3.3. Áram

Még nincs kész teljesen!

Kísérleteinkhez rúdelemeket, akkumulátorokat, különböző telepeket és zsebizzókat, mágneseket fogunk felhasználni. **NE KÍSÉRLETEZZÜNK A HÁLÓZATI ÁRAMMAL, AZ ÁRAM-ÜTÉS ÉLETVESZÉLYES!**

3.3.1. Kísérlet: izzó és telep. Vegyünk egy 4,5 V-os lapos zsebtelepet, néhány zseblámpaizzót (nem LED-est), esetleg foglalatokat és szigetelt drótokat. A zseblámpaizzóra rá van írva, hogy hány voltra készült, például 6,3 V. Nem árt, ha többfélét is veszünk, de legyenek olyanok is, amelyek legalább 3,5 V-osak.

Első kísérletként egy legalább 3,5 V-os zseblámpaizzó végét érintsük a lapos zsebtelep egyik fémlemezéhez, az oldalát a másikhoz, úgy ahogy a 3.3.1. fényképek közül a bal oldali képen van. Hosszúkás izzók is vannak, mint ahogy a jobb oldali képen látható. Ott egy 9 V-os teleppel izzítunk egy 12 V-os izzót. A csatlakozót egy már lemerült 9 V-os telepből bányásztam ki. Inkább körte alakú izzót fogunk használni. Természetesen ha csak az izzó egyik érintkezője ér a telephez, az áram nem tud átmenni az izzón. Ha a telep mindkét fémlemeze mondjuk az izzó oldalához ér, az áram nem bolond átmenni az izzón: közvetlenül a telepbe megy. A telep nagyon felmelegszik és kimerül. Ez a rövidzár, ezt kerülnünk el!

3.3.2. Kísérlet: egy telep, két izzó. Egy teleppel két izzót is tudunk izzítani, ha úgy tartjuk, hogy az egyik izzó oldala az egyik lemezhez, a csúcsa a másik izzó oldalához, annak hegye pedig a másik lemezhez érjen. Ez a 3.3.2. fényképen látható. Figyeljük meg, hogy az izzók halványabban világítanak. □

3.3.3. Kísérlet: vezetésvizsgáló. Ha a zsebizzó végét a telep egyik lemezéhez érintjük, és az oldalát megpróbáljuk összekötni valamivel a másik lemezzel, kiderül, hogy azon az anyagon átmegy-e az áram? Vezetésvizsgálót készítettünk! Vizsgáljunk meg különböző anyagokat, hogy vezetnek-e? A fémek vezetik az áramot, ezek vezetők. Egyébként általában azok az anyagok vezetnek jól az áramot, azok a jó *elektromos vezetők*, amelyek a hőt is jól vezetnek. Nyilván kitaláltuk már, hogy a levegő (és általában a gázok) nem vezetnek. Műanyagok, üveg, porcelán, gumi, olaj nem vezetnek, ezek szigetelők. (Zsírok, olajok, festék, rozsda általában nem vezetnek, ezért ha jó áramvezetést akarunk, tiszta fémes csatlakozásokat használjunk.) A fa, papír, cérna — ha nem nagyon nedvesek — szintén szigetelőknek tekinthetők, nagyon gyengén vezetnek. Az oldatokat később részletesen megvizsgáljuk. Végül vizsgáljuk meg saját magunkat. Egyik kezünkkel az izzó menetes fém részét fogva, másik kezünkkel fogjuk meg a telep másik lemezét. Nem tapasztalunk vezetést. Testünk belseje vezet, de a bőrünk elég jól szigetel.

3.3.4. Kísérlet: grafit vezetése. Vizsgáljuk meg vezetésvizsgálónkkal a grafit — szén — vezetését! Egy töltőceruza vékony grafit belét húzzuk ki, amennyire lehet. Értessük a grafitrúd végét a zsebizzóhoz, a ceruza fém szerkezetét pedig a telep lemezéhez, úgy, mint az előző kísérletben. Az izzó világít, de nem olyan fényesen, mint egy fém vezetéknél. Vegyük rövidebbre a belet! Ahogy egyre rövidebb lesz, úgy világít egyre fényesebben az izzó. A grafit tehát vezet, de sokkal rosszabbul, mint a fémek. □

3.3.5. Kísérlet: soros kapcsolás. Csináljuk meg a kétizzós kísérletet kicsit komolyabb formában. Szükségünk lesz áramvezető drótra. Műanyaggal burkolt vezetékeket, tehát *szigetelt vezetékeket* használnak, nyilván azért, hogy az áram ne kószálhasson el össze-vissza, hanem a fémbe maradjon. Két félét is kaphatunk. Az egyik egy szál rézdrótot tartalmaz, rajta műanyag szigetelés. Ezt falvezetéknek hívják, mert a falakban lévő műanyag csövekbe szokták behúzni. Van olyan is, amit be lehet a falba vakolni, ne olyat vegyünk. Kapható 1 mm^2 , $1,5\text{ mm}^2$, $2,5\text{ mm}^2$ keresztmetszetű. Nekünk jó lesz a legvékonyabb. Van hajlékony vezeték is, ami sok vékony rézszálat tartalmaz. Mindkét féleből vegyünk vagy 10–10 m-t. Elektromos hulladékból is kibányászhatunk műanyag szigetelésű rézdrótot. Szükség esetén vezetékként csíkká feltekert alumínium fóliát is lehet használni.

A falvezetékről lefaragva a szigetelést, tekerjük rá egy izzóra, majd kicsit arrébb egy másikra is. Hagyjunk meg még vagy 20 cm-t, annak csak a végéről szedjük le a szigetelést. Rugalmasságánál fogva a feltekert drót kicsit szétugrik. Kivéve az izzókat, csavarjuk összebb, hogy tartsa meg őket. Értessük az izzók csúcsát a zsebtelep két lemezéhez. Mindkét izzó világít, ha halványabban is, ugyanúgy, mint az előző kétizzós kísérletünkénél. Az elrendezés a 3.3.3. fényképen látható. Az egyik izzón fordítva megy át az áram, mint a másikon, de ez láthatóan nem számít. Az áramnak sorba át kell mennie mindkét izzón. Ez a *soros kapcsolás*. Próbáljuk ki különböző izzókkal is! \square

3.3.6. Kísérlet: párhuzamos kapcsolás. Az előző elrendezésből most mindkét izzó csúcsát értessük a zsebtelep egyik lemezéhez, a vezeték végét pedig a zsebtelep másik lemezéhez. Mindkét izzó ugyanúgy világít, mintha egyedül lenne. Most az áramnak nem kell mindkét izzón átmennie sorban, mint az előbb, hanem külön-külön haladhat mindkét izzón, ezért az izzók fényesebben izzanak, mint az előbb. Az elrendezés a 3.3.4. fényképen látható. Ez a *párhuzamos kapcsolás*. Ezt is próbáljuk ki különböző izzókkal is! \square

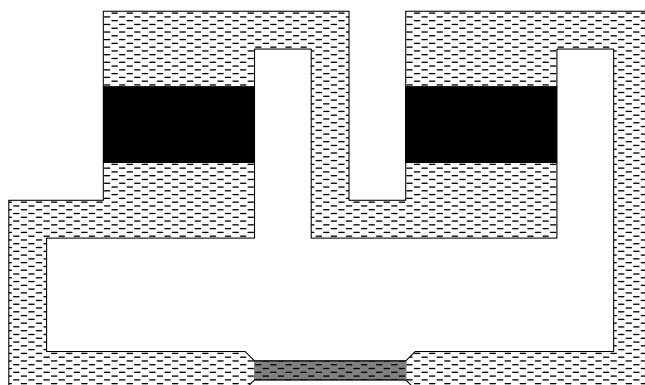
3.3.7. Kísérlet. Használjunk most telep helyett egy rúdelemet. A drótunkból az egyik izzót csavarjuk ki, a másik izzó csúcsát értessük az elem + jelzésű végéhez, a drót másik végét pedig a – jelzésűhöz. Az égő világít, de jóval halványabban, mint a teleppel. Egy rúdelem 1,5 V-os, gyengébb áram halad át az izzón. Az összeállítás a 3.3.5. fényképen látható.

3.3.8. Kísérlet. A rúdelem helyett egy ugyanolyan méretű kis akkumulátort is használhatunk, ha van hozzávaló töltőnk. Az akkumulátor feszültsége csak 1,2 V, így az izzó valamivel még halványabban világít. Az akkumulátor ugyan drágább, mint az elem, de több százszor újratölthető. A töltőből kivett áram nagyságrendben 1000-szer olcsóbb, mint az elemből kivett. \square

3.3.9. Kísérlet: telep készítése. Készítsünk telepet két rúdelemből! Egy megfelelő szélességű papírlapot szorosan tekerjünk fel két rúdelemre, ahogy a 3.3.6. fényképen látható. A rúdelemeket úgy rakjuk egymás mellé, hogy az egyiknek a + jelzésű vége a másik – jelzésű végéhez érjen. Ez az *elemek soros kapcsolása*. A papírt két befőttes gumival fogjuk össze. Ismételjük meg az előző kísérletet ezzel a teleppel! Az izzó fényesebben világít, mint egy rúdelemmel, de nem olyan fényesen, mint a lapos zsebteleppel. A két

rúdelem feszültsége összeadódott, telepünk 3 V-ot ad, és ez erősebb áramot hajt át a zsebizzón.

Mi az áram? Az elemen és a telepen is van az egyik érintkezőnél egy $-$ jel, a másikonál egy $+$ jel. Amikor még nem tudták pontosan, mi az áram, úgy állapodtak meg, hogy a $+$ jelzésű érintkezőtől a $-$ jelzésű felé folyik. Ma már tudjuk, hogy elektronok áramlanak a fémekben, a $-$ jelzésű pólustól a $+$ jelzésű felé, de ma is az szoktuk mondani, hogy az „áram” a $+$ jelzésűtől a $-$ jelzésű felé folyik. Mint arról már volt szó, az áram erősségét azzal mérjük, hogy másodpercenként mennyi töltés folyik át a vezetón. Mivel a töltés egysége — mint már tudjuk — a coulomb, $\approx 6,24 \cdot 10^{18}$ elektron töltése, az áramerősség a C/s, neve Ampere francia fizikus nevéből amper, jele A. A kis akkumulátorokra rá van írva, hogy mennyi a maximális töltésük. Például ilyen felirattal találkozhatunk, hogy 2700 mAó. Mennyi ez? $2,7 \cdot 3600 = 9720$ As, azaz coulomb. Egy rúdelemé még több is lehet valamivel. Ez bizony nagyon tekintélyes töltésmennyiség a dörzsöléssel létrehozott nC– μ C nagyságrendű töltésekhez képest. Nem csoda, hogy amikor a galvánelemet felfedezték, egy darabig azt gondolták, kimeríthetetlen a töltése. Egy olyan harangjátékot, amelyet mi is csináltunk, még a XIX. század közepén indítottak el galvánteleppel, és még ma is működik!



3.3.7. ábra: vízáramkör

A 3.3.7. ábra egy hasonlattal segít megérteni az egyszerű elektromos áramkörök működését. Az ábrán a jobb oldali hengerben egy nehéz dugattyú csúszik le és vizet nyom a bal oldali hengerbe. Ott a másik dugattyú tovább növeli a víz nyomását. A víz egy csőbe, majd egy szűk, homokkal teli csőbe jut, amin nehezen áramlik át. Azon keresztül áramolva visszajut a jobb oldali henger másik felébe. Nyilván ha a szűk cső hosszabb, akkor a víz nehezebben jut át, ha bővebb, akkor pedig könnyebben. A nyomás, amit a dugattyú létrehoz, a feszültségnek felel meg. A bő cső a vezetéknek. A szűk, homokkal teli cső a zseblámpaizzó vékony drótjának. Ha nagyobb nyomást akarunk, több dugattyús hengert tehetünk egymás után, mindegyik tovább növeli a nyomást, és ezzel a vízáramlás erősségét. Ha egymás mellé tesszük a dugattyús hengereket, és mindegyiknek a kimenetéből ugyanoda vezetjük a vizet, akkor ugyan bővebb vízforrást adnak, de a nyomások nem

adódnak össze. Egy akkumulátor feltöltése annak felel meg, hogy a hengeren fordított irányba nyomjuk át a vizet, újra felemelve a dugattyút.

A dugattyú lefelé mozogva munkát végez. Hová lesz ez a munka? A súrlódás hővé alakítja, főleg a vékony csőben. A másodpercenként keletkező hő arányos a vékony cső két vége közti nyomáskülönbséggel és a vízáramlás erősségével. Ugyanígy a zseblámpaizzóban az elektromos munka hővé alakul. A hőteljesítmény a feszültség és az áramerősség szorzata: Q töltés mozgása U feszültségkülönbségű helyek között QU munka, és itt másodpercenként I töltés mozog, tehát a teljesítmény UI (wattban). Tehát $W=VA$, azaz $V=W/A$. Ugyanazt a munkát megkaphatjuk gyengébb árammal és nagyobb feszültséggel vagy erősebb árammal és kisebb feszültséggel is, mint ahogy ugyanazt a munkát el tudja végezni kevés víz, ha nagy a nyomása (nagyobb magasságból érkezik) vagy sok víz, ha kicsi a nyomása (kisebb magasságból érkezik). A zseblámpaizzókra rendszerint ráírják az áramerősséget is. Ha például azt látjuk, hogy 3,5 V, 0,2 A, akkor az izzót 3,5 V-os feszültségre kapcsolva $3,5 \cdot 0,2 = 0,7$ W teljesítményt vesz fel. Máskor az van megadva, hogy mennyi a teljesítmény. Például egy 6 V, 2 W-os izzó $2/6 \approx 0,33$ A áramot vesz fel.

A vezetékekben tehát szabadon mozgó elektronok áramlanak. Hogyan kerülnek a fémbe a szabad elektronok? Az atomok, nevükkel ellentétben (a-tom görögül azt jelenti, hogy oszthatatlan), nem oszthatatlanok. Pozitív töltésű atommagból és körülötte „lebzselő” negatív töltésű elektronokból állnak. Az elektronok valóban oszthatatlanok, mindegyik pontosan ugyanolyan. Még a legkönnyebb atommagnál is kb. 2000-szer könnyebbek. Az atommagnak ugyanakkora pozitív töltése van, mint amekkora negatív a hozzá tartozó elektronoknak együtt. (Hogy miért, erről később lesz szó.) A fémek elemek, minden tiszta fém egyforma atomokból áll (persze mindegyik másfajtaikból). A fématomok könnyen megválnak egy-két elektrontól, ezek a fémkristályban mint szabad elektronok kószálnak.

Ahogy „vízáramkörünkben” az áramerősséget azzal mérhetnénk, hogy a cső keresztmetszetén hány vízmolekula megy keresztül, egy elektromos áramkörben az áramerősséget azzal mérjük, hogy másodpercenként hány elektron áramlik át a vezető keresztmetszetén. Az 1 A áramerősség másodpercenként $\approx 6,24 \cdot 10^{18}$ elektron áthaladása. Milyen gyorsan mennek az elektronok? Például a rézben minden atom egy szabadon mozgó elektront ad a kristályrácsba. Avogadro számnyi rézatom nagyjából 63,5 g. A réz sűrűsége majdnem 9 kg/l, így 1 cm^3 vörösrézben $\approx 0,84 \cdot 10^{23}$ szabadon mozgó elektron van. Ha a rézből 1 m hosszú, 1 mm^2 keresztmetszetű drótot csinálunk, akkor 1 A áramerősség azt jelenti, hogy a szabadon mozgó elektronok 1 s alatt a drót hosszának $\approx 0,84 \cdot 10^{23}/6,24 \cdot 10^{18} \approx 13462$ -ed részével mozdulnak el, tehát sebességük csak 0,074 mm/s! Ha rézdrótnál 1 mm^2 keresztmetszetre maximálisan megengedett 6 A áramerősséget használunk (ennél még nem nagyon melegszik), akkor is csak $\approx 0,44$ mm/s sebességgel mozognak az elektronok. Hogy lehet akkor, hogy a zseblámpa izzó azonnal világít? A vízáramlás is azonnal megindul az egész csőrendszerben, ha kinyitjuk a csapot: a nyomáskülönbség hangsebességgel terjed tova, ami a vízben nagyobb, mint 1 km/s, nagyságrendben a vízmolekulák sebessége. A fémekben a szabad elektronok nagyságrendileg 1000 km/s sebességgel „nyüzsögnek”. A feszültségváltozás tehát nagyon nagy sebességgel terjed tova.

Egy galvánelem egyik sarkán a benne lejátszódó kémiai folyamatok több szabad elekt-

ront halmoznak fel, mint amennyi normálisan lenne a fémbe, a másik sarkán pedig csökkentik a szabad elektronok számát. (Hogy ez miért történik, arra majd visszatérünk.) Tehát elektromos feszültségkülönbség áll fenn a két sarok között. Ha valamilyen vezetővel összekötjük a két sarkot, a szabad elektronok megindulnak a negatív saroktól a pozitív felé. A negatív sarkon lévő többlet elektronok taszítása és a pozitív sarok vonzása a negatív saroktól a pozitívhoz hajtja őket. Ez az áramlás mindaddig tart, amíg az elembe lejátszódó kémiai folyamat feszültségkülönbséget hoz létre. \square

3.3.10. Kísérlet: feszültség és áram. Ha három rúdelemből készítünk telepet sorba kapcsolva őket, akkor az előző kísérletet megismételve az izzó még erősebben világít, ugyanúgy, mint a zsebleppel. Nem véletlenül: ha megbontjuk egy zseblep burkolatát, láthatjuk, hogy három elem van benne sorba kapcsolva. A 3.3.8. fénykép két vitorlásokon használt 6 V-os telepet mutat. Az egyiknek a burkolata meg van bontva. Jól látható, hogy 4 rúdelem van benne. A 9 V-os telepekben 6 darab 1,5 voltos kis elem van sorba kapcsolva, a 9 V-os akkumulátortelepnél pedig annyi kis akkumulátor, hogy feszültségük kiadja a 9 V-ot. Vannak 3 V-os lítium elemek is. A gépkocsi akkumulátortelepe másfajta akkumulátorból tartalmaz 6 darabot, ezek 2 V feszültséget adnak, így az autó akkumulátortelepének feszültsége 12 V.

Látjuk, hogy minél nagyobb a feszültség, annál erősebb az áram. Vajon mi a kapcsolat egy áramkörben az áramerősség és a hozzá szükséges feszültségkülönbség között? A lehető legegyszerűbb: a feszültség egyenesen arányos az áramerősséggel, $U = RI$. Ezt az összefüggést Ohm német fizikus fedezte fel. Ohm törvényét nyilván $I = U/R$ illetve $R = U/I$ alakban is felírhatjuk. Az R arányossági tényező az áramkör *ellenállása*. Egységét, az *ohmot* (jele Ω) úgy választották meg, hogy 1 ohm legyen az az ellenállás, amin 1 V feszültségkülönbség hatására 1 A áram folyik át. Az $R = U/I$ összefüggésből így $\Omega = V/A$.

Ohm törvényét csak később tudjuk mérésrel bizonyítani, amikor lesz gyenge áramok pontos mérésére alkalmas árammérőnk. Pontosabban, a következő mérést fogjuk elvégezni: csapvízen keresztül áramot vezetünk, és megmérjük, hogy minél hosszabb úton, annál gyengébb az áram ugyanazon feszültség hatására. Azt már tudjuk, cérnavezetékkel kipróbáltuk, hogy a vezetőben fokozatosan csökken a feszültség. Ha 2 cm hosszú vezetőre kapcsoljuk ugyanazt a feszültséget, mint egy 1 cm-esre, az áram feleannyi lesz a mérés szerint. Egy 1 cm-es darabra csak feleakkora feszültség esik. Ennek az 1 cm-es darabnak ugyanannyi az ellenállása, mintha a másik darab ott se lenne. Így feleakkora áramhoz feleakkora feszültség kell. Hasonlóan harmadakkora áramhoz harmadakkora feszültség, stb. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy a vezető ellenállása arányos a hosszával. Egy másik mérés megmutatja, hogy kétszer akkora keresztmetszetnél kétszer akkora az áram, háromszor akkoránál háromszor akkora, stb., tehát az ellenállás fordítva arányos a vezető keresztmetszetével. Azt kapjuk tehát, hogy $R = \rho \ell / A$, ahol ℓ a hossz, A a keresztmetszet, a ρ arányossági tényező a *fajlagos ellenállás*, ami az anyagtól függ.

Az ellenállás számítása tehát anyagokra hasonló, mint a hővezetés számítása. Egy a vezető anyagától, fajtájától függő fajlagos ellenállást, ami azt mondja meg, mennyi az adott anyag egységnyi hosszúságú, egységnyi keresztmetszetű darabjának az ellenállása, meg kell szoroznunk a vezető hosszával és osztani a vezető keresztmetszetével. A fajlagos ellenállást kiszámíthatjuk, ha az adott anyagból készült egyenletes keresztmetszetű tet-

szöleges darab hosszát, keresztmetszetét és ellenállását megmérjük. A csapvíz fajlagos ellenállása például néhányszor tíz Ωm . A fémek fajlagos ellenállása ennél sokkal kisebb, például 18°C -on az ezüsté, rézé, alumíniumé és vasé rendre 16, 17, 32 illetve $90\text{--}150\text{ n}\Omega\text{m}$. Mint jelent ez a gyakorlatban? Leggyakrabban rezet használunk vezetéknek, mégpedig vörösrézet. (A sárgarézt ötvözet, és sokkal rosszabbul vezet; ha rezet mondunk, mindig vörösrézre gondolunk.) Mivel egy 1 m élhosszú kocka ellenállása $17\text{ n}\Omega$, egy milliószor kisebb, 1 mm^2 keresztmetszetű, 1 m hosszú drót ellenállása $0,017\ \Omega$, azaz kb. 60 m hosszú dróté lesz $1\ \Omega$. Az alumíniumból 30 m hosszú dróté ennyi, de vehetünk kétszer ekkora keresztmetszetűt, ennek a súlya még mindig kisebb. Ezért a távvezetékek általában alumíniumból vannak. A vasdrót ellenállása már $5\text{--}10$ -szer akkora, mint a rézé, de még mindig nagyon jó vezető. (Egy anyag nagyjából $10\ \mu\Omega\text{m}$ fajlagos ellenállás alatt számít jó vezetőnek.) A fémek fajlagos ellenállása nagyjából arányos az abszolút hőmérséklettel. * Érdekes összefüggés, hogy ha λ jelöli a hővezetőképességet, akkor $\lambda\rho/T$ minden fémre nagyjából ugyanannyi, $(23,1 \dots 27,9) \cdot 10^{-9}\text{ V}^2/\text{K}^2$. Ez a Wiedemann–Franz-törvény. A magyarázata az, hogy a fémekben a hővezetést is főleg a szabad elektronok okozzák. * A grafit fajlagos ellenállása $50\text{--}100\ \mu\Omega\text{m}$, a hőmérséklet növekedésével csökken. Kb. $10\text{ k}\Omega\text{m}$ fajlagos ellenállás felett az anyagokat szigetelőknak szoktuk tekinteni. Jó szigetelőknél, például a műanyagoknál a fajlagos ellenállás nagyobb, mint $10^{10}\ \Omega\text{m}$, a legjobb szigetelőknél eléri a $10^{16}\ \Omega\text{m}$ -t is, mint a 3.1.6. táblázatból kiolvasható. Néha használják a fajlagos ellenállás reciprokát, a fajlagos vezetőképességet is, amit σ -val szokás jelölni. \square

3.3.11. Kísérlet. Mi történik, ha két ellenállást sorba kapcsolunk? Ha U feszültséget adunk rájuk, akkor az egyikre esik mondjuk U_1 feszültség, a másikon valamennyi U_2 feszültség. Nyilván $U = U_1 + U_2$ kell legyen. Mindkét ellenálláson ugyanannyi I áram kell azonban hogy keresztülhaladjon: az elektronok nem halmozódhatnak fel sehol sem, mert ott nagyon hamar nagyon nagy (negatív) feszültség alakulna ki. Ugyanezen okból egyik helyről se mehet el több elektron, mint ami oda érkezik, mert akkor ott nagyon hamar nagyon nagy (pozitív) feszültség alakulna ki. Tehát az egyik ellenállásra $U_1 = R_1 I$, a másikra meg $U_2 = R_2 I$. Az egész áramkörre $U = RI$, ahol R a teljes áramkör ellenállása. De $U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2)I$, így $R = R_1 + R_2$. Soros kapcsoláskor tehát az ellenállások összeadódnak.

Mi van párhuzamos kapcsoláskor? Itt is igaz, hogy ami áram egy helyre befolyik, annak ki is kell folynia, az elágazási helyre is. Egy folyónál is, ha elágazik, az a víztömeg folyik tovább, ami az elágazáshoz érkezett, és ha a két vagy több ág összefolyik, akkor a továbbmenő víztömeg az odaérkezők összege. Ha tehát párhuzamos kapcsolásnál az elágazási pontba I áram érkezik, akkor az onnan kifolyó áramok összege I . Ez *Kirchoff törvénye*: $I = I_1 + I_2$, ahol I_1 illetve I_2 az R_1 illetve R_2 ellenállású ágakon továbbhaladó áramok. Ha az elágazási hely és a találkozási hely közötti feszültség U , akkor $U = R_1 I_1$ és $U = R_2 I_2$. Milyen R -nek felel ez meg? Mivel $1/R = I/U = (I_1 + I_2)/U$, azt kapjuk, hogy $1/R = I_1/U + I_2/U = 1/R_1 + 1/R_2$. Ha elfelejtünk a képletet, akkor segít, ha arra emlékezünk, hogy párhuzamos kapcsoláskor az áramok adódnak össze.

Mindezeket ha nem is mértük ki, de szemmel tapasztalhattuk, amikor soros illetve párhuzamos kapcsolást csináltunk. \square

3.3.12. Kísérlet. Készítsünk telepet három kis akkumulátorból, de az egyiket for-

dítva tegyük a sorba. Kipróbálva egy izzóval az csak annyira világít, mint egy akkumulátornál. A szembe kapcsolt akkumulátor másik irányba hajtana az áramot, de a másik kettő együtt „erősebb”. A szembe kapcsolt akkumulátor töltődik. Ugyanez elemekkel is kipróbálhatjuk, de ne vezessük hosszabb ideig az elemen keresztül szembe az áramot! Az elemek nem tölthetők, nem úgy vannak tervezve. Ha megpróbáljuk tölteni, gázok képződnek benne, amelyek szét is vethetik!

Mennyi áramot bír leadni egy elem vagy telep? Ez a felépítésétől és a méretétől függ. Nagyjából az a szabály, hogy a teljes töltését 10 óra alatt képes leadni, de speciális telepek azt is kibírják, ha a teljes töltést 1 óra, vagy akár $1/3$ óra alatt vesszük ki. A kisebb elemek teljes töltése kisebb. Mit csináljunk, ha nagy áramra van szükségünk? Legjobb, ha nagyobb telepet használunk, vagy speciális, nagy áramú telepet. Szükség esetén használhatunk elemeket vagy telepeket *párhuzamos kapcsolásban* is: a pozitív sarkukat összekötjük, és a negatív sarkukat is. Csak addig hagyjuk azonban így, amíg használjuk az így kapott telepet. Egyébként a kevésbé kimerült elemek elkezdik a jobban kimerülteket tölteni, és a töltés egy része kárbavész. \square

3.3.13. Kísérlet: az áram hőhatása. Egyszerű de látványos kísérlet az áram hőhatására, ha egy 9 voltos telep sarkai közé egy mosogatószivacsból vagy acélgyapotból kibányászott vasszalát érintünk. A vas felizzik és elég. A szál lehet más anyagból is, de minél jobban vezető anyagból van, annál vékonyabbnak kell lennie. Vastag szál egyébként sem melegszik fel eléggé, csak az elem merül le gyorsan. Alumínium fóliából (kb. 0,01 mm vastag) például ha sikerül kb. 1 mm széles csíkot vágni, az az elem két sarkához érintve megolvad. Ha túl nagy ellenállást kapcsolunk a sarkok közé, akkor túl kicsi az áram, a hőfejlődés jelentéktelen. Ha viszont túl jól vezet a drót (például réz) akkor az elem saját ellenállása, az úgynevezett *belső ellenállás* szól közbe: korlátozza az áramot, és a jól vezető dróton kicsi a feszültségesezés, így a fejlődő hő is. A hő nagy része ekkor az elembe fejlődik, az melegszik fel.

Ez a kísérlet tulajdonképpen az izzólámpa működését mutatja be. Platina szálát először Wollaston izzított árammal. Mivel a legtöbb anyag magas hőmérsékleten elég, üvegbúrába kell tenni, amiben légüres tér vagy olyan gáz van, amely nem táplálja az égést. Először Edison gyártott izzólámpát. Ezekben szénszál izzott légüres térben. A mai izzólámpákban volfram (ez a legmagasabb olvadáspontú fém) szál van legtöbbször argon gázban.

Ugyancsak az áram hőhatásán alapul az *olvadó biztosíték* is. Ebben kis üvegcsőben vagy — nagy áramoknál — homokkal töltött porcelán csőben könnyen olvadó anyagból készült vékony drót van. Ha túl nagy áram folyik át rajta, megolvad, és az áram megszakad. \square

3.3.14. Kísérlet: ívfény. Még látványosabb kísérletet mutat az áram hőhatására a 3.3.9. fénykép. Egy 9 V-os telep és két töltőceruza kell hozzá. A telephez történő csatlakoztatást legjobb egy használt 9 voltos telepből kibányászott csatlakozókkal és csipeszekkel vagy gémkapcsokkal megoldani. A képen elektronikai boltokban kapható krodilcsipesz van. Vezetéknek hajlékony rézvezetéket használjunk. Finoman összeérintve a ceruzahegyeket, pici de vakítóan világító ívfény keletkezik, tehát a nagyon magas (több ezer fokos) hőmérsékleten a levegő vezet. Miért vezet az ívfényben, nagyon magas hő-

mérsékleten a levegő? A magyarázat az, hogy a nem túl nagy, de a fémeknél azért jóval nagyobb ellenállású grafithegyek az összeérintéskor felizzanak, és a magas hőmérsékleten a levegő molekulái részben atomokra, azok pedig elektronokra és pozitív ionokra bomlanak. Ezek mozgása adja az áramot. Ívhegesztésnél a hegesztendő vasak és egy vaspálca között létrehozott elektromos ív olvasztja meg a vasat.

Az elektromos ív káros is lehet. Figyeljük meg egy be nem szerelt villanykapcsoló működését! Akármilyen lassan kapcsoljuk is, először csak egy rugó összenyomása történik, majd a rugó átpattanva villámgyorsan bontja a csatlakozást. Erre azért van szükség, mert bontáskor a csatlakozás ellenállása megnövekszik. Nagy feszültségnél illetve áramnál és lassú bontásnál a csatlakozás felizzik és ív keletkezik, ami tönkreteszi az érintkezőt. Nagyobb teljesítményű hálózati izzóban is létrejöhet ív, ha elszakad a volframszál, ezért egy helyen a hozzávezetést elvékonyítják. Ez a szakasz biztosítékként működik, ha nagy áramú ív képződne. □

3.3.15. Kísérlet: deszkamodell. Ahogy egyre bonyolultabb kapcsolások jönnek, egyre nehezebb „kézben tartani” a dolgokat, elvégre csak két kezünk van. Ezért találták ki a deszkamodellt. A drótokat műszaki rajzszegekkel egy rajztáblához, parafa táblához, puhafa deszkához vagy léchez rögzítjük. Az alkatrészeket rajzszegekkel és befőttesgumikkal rögzítjük. A csatlakozásoknál a drótokat gémkapcsokkal, csipeszekkel vagy krokodilcsipeszekkel fogjuk össze, hozzágémkapcsoljuk egy kis fémlemezhez vagy egy rajzszeget alá tesszük mind a kettőt. A deszka ugyan nem tökéletes szigetelő, de ilyen kis feszültségnél megfelel. Elektromos kapcsolások kipróbálásához gyakran használnak ilyen deszkamodellt.

Próbaként kezdjük a legegyszerűbb kapcsolással, egy teleppel és egy zseblámpa izzóval. Az egész a 3.3.10. fényképen látható. Az izzónak foglalatot kell készítenünk. A foglalat felét már el is készítettük, mikor a falvezeték rézdrótját feltekertük az izzóra. Tekerjük körbe a drótot egy szegen, és az így képződött „szemet” rajzszegezük oda. Ha nem áll elég biztosan, készítsünk még egy szemet. A másik érintkező lehet egy rézlemezke, amit például küszöbsínből vágunk le, átfúrunk vagy acélszeggel átlyukasztunk, és odarajzszegezük. Ingyen van az alumínium lemez, ha egy kimosott üres kólás vagy sörösdobozt ollóval szétvágunk, ezt azonban meg kell csiszolni. Az alumíniumon vékony de nagyon jól szigetelő oxidréteg képződik. A dobozoknál ezt még meg is vastagítják, így még a fényes oldala sem jól érintkezik. Csiszoljuk meg csiszolópapírral! A rézlemez sem árt megcsiszolni. Egy rézdrótból hajlított szem is lehet az érintkező. Az elemeket, ha magunk állítjuk össze a telepet, a fényképen látható módon saját készítésű tartóba helyezhetjük. □

Elemtartót venni is lehet, vagy kibányászhatjuk egy hulladék elemes készülékből. Legegyszerűbb egy töltőt használni elemtartónak réz vezetőekkel. Ebben minden elem külön van, tetszés szerint kapcsolhatjuk össze őket. Semmiképp ne kapcsoljuk be közben a töltőt! Legtöbbször sorosan kapcsolt kis akkumulátorokra van szükségünk. Én a 3.3.11. fényképek közül a bal oldalin a háttérben látható nyolc elemes tartót szoktam használni. Az egyik kivezetés a gyári, a másik egy kis fémlemez, amit az utolsó még szükséges elem után csúsztatok be. Ha szigetelő lemezkét is használunk, másféle kombinációkban is beköthető.

Persze sok más alkatrész is kapható. Hasznos a *krokodilcsipesz*. Ha oldható kötés kell, akkor *banánhüvelyt* és *banándugót* használhatunk. Ezek egy fél fali csatlakozónak illetve villásdugónak felelnek meg. Van olyan krokodilcsipesz, ami a banándugóra húzható. Ruhacsipeszből magunk is csinálhatunk „krokodilcsipeszt”, ha a drótot körbetekerjük rajta, vagy izzó dróttal átfúrjuk és a drótvéget visszahajlítjuk. Sok különböző drótvégre húzható csavarozható vagy összedugható érintkező kapható: a kis csőbe bedugjuk a drótot (ha nagyon vékony, egy vastagabb drótdarabra tekerve), és fogóval összeszorítjuk a csövet. Ha készletben vesszük, fogót is adnak hozzá. Mindezek a 3.3.11. fényképek közül a bal oldalin láthatók két kapcsolóval együtt, a jobb oldalin pedig egy huzalvég készlet. Ha végleges csatlakozást kell létrehozni, akkor legtöbbször csavaros kötést használnak, vagy összeforrasztják a drótokat. Rezet könnyű forrasztani elektromos forrasztópákával és gyantás forrasztóon huzallal. A lényeg, hogy a rézhuzalt annyira fel kell melegíteni, hogy rajta az ón szétfolyjon. A sokeres vezeték szinte felszívja az ónt. A gyanta eltávolítja a maradék felületi oxidréteget. Én egy „harmadik kéz” nevű segédeszközt szoktam használni, amin két krokodilcsipeszbe lehet befogni az összeforrasztandó huzalokat, és nagyító alatt látjuk a forrasztandó helyet. Alumíniumot lehetetlen forrasztani komoly berendezés nélkül. □

3.3.16. Kísérlet: zseblámpa. A 3.3.12. fényképeken látható egy zseblámpa. Készítsünk mi is ilyet! Ennek a deszkamodellje látható a 3.3.13. fényképen. A kapcsolók lemezből készülnek. Az egyik úgynevezett *csengőgomb*. Ha lenyomjuk a lemezt, létrejön az érintkezés, ha elengedjük, megszűnik. Vele párhuzamosan kapcsolva látható egy *átkapcsoló*. Ezzel a lemezt elfordítva az áramot az egyik vagy másik rajzszegezhez vezethetjük. Persze, több rajzszeget is használhatunk, ha azt akarjuk, hogy kettőnél több felé lehessen vezetni az áramot. Itt csak az egyik rajzszeget használjuk. Még egy kapcsoló látható a képen, egy *Morse kapcsoló*. Ez két helyre tudja vezetni az áramot; ha lenyomjuk, az egyik irányba vezet, ha elengedjük, a másik felé. Úgy készül, hogy a csengőgomb fölé is teszünk egy érintkezőt, lemezből vagy drótból. Kapcsolókat készen is kaphatunk. Az úgynevezett talpkapcsolók kétféle kivitelben kaphatók. A nyomógombos lenyomva összeköt, újra lenyomva megszakítja az áramot. A billenő kapcsoló (thumblér-kapcsoló) az egyik állásban összeköt, a másikban megszakítja az áramot. Hasonlóan működnek a lámpák kapcsolói is. □

3.3.17. Kísérlet. Használjuk valamire új tudományunkat. Készítsünk egy Morse távirót! Lényegében két zseblámpa-kapcsolást kell készítenünk, az egyiknek a kapcsolója az egyik helyen van, az izzója a másik helyen, a másiknak fordítva. A telepek helye lényegtelen. Például két szoba közt üzengethetünk egymásnak. Ismernünk kell a 3.3.14. táblázatban található *Morse-ABC*-t.

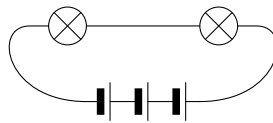
A pontok és vonalak a lámpa rövidebb és hosszabb felvillanásai. A vonal kb. háromszor olyan hosszú, mint a pont. A szünetek olyan hosszúak mint a pont, és a betűk végén három pontnyi szünet van.

3.3.18. Rajzjelek. Kényelmetlen lenne mindig lefényképezni a kapcsolást, ráadásul bonyolultabb esetekben áttekinthetetlen is lenne. Ezért a kapcsolásokat *rajzjelekkel* szoktuk megadni. A 3.3.25. táblázat tartalmazza a leggyakoribb elektromos rajzjeleket,

betű	kód	betű	kód	betű	kód
<i>A</i>	.-	<i>J</i>	.-	<i>S</i>	...
<i>B</i>	...-	<i>K</i>	-.--	<i>T</i>	-
<i>C</i>	-.--	<i>L</i>	..--	<i>U</i>	..-
<i>D</i>	---.	<i>M</i>	---	<i>V</i>	...-
<i>E</i>	.---	<i>N</i>	-..	<i>W</i>	..--
<i>F</i>	..--	<i>O</i>	----	<i>X</i>	-.--
<i>G</i>	---.	<i>P</i>	..--	<i>Y</i>	-.--
<i>H</i>	<i>Q</i>	---.	<i>Z</i>	---.
<i>I</i>	..	<i>R</i>	...-		
szám	kód	szám	kód	írásjel	kód
0	-----	5-
1	-.-----	6	-----	,	-----
2	..-----	7	-----	?
3	...-----	8	-----	:	-----
4-----	9	-----	-	-----

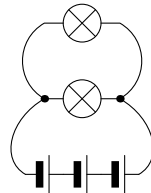
3.3.14. táblázat: Morse-ABC

a 3.3.26. táblázat pedig a leggyakoribb elektronikai alkatrészek rajzjeleit, köztük olyanokét is, amiket még nem ismerünk. Az elektronikai alkatrészekkel a szilárdtestfizikában fogunk foglalkozni.



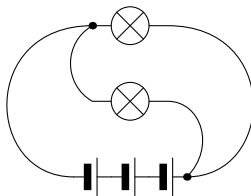
3.3.15. ábra: első kapcsolási rajz

3.3.19. Kísérlet. Hogy a rajzjeleket gyakoroljuk, állapítsuk meg a 3.3.15. kapcsolási rajzról, hogy melyik izzó világít? Mi történik, ha egy izzót kicsavarunk a foglalatból? Mi történik, ha egy izzót rövidre zárunk (azaz a foglalat két kivezetését összekötjük egy darab huzallal)? Minden vezetékre, hogy mi történik, ha azt eltávolítjuk? Ha bizonytalanok vagyunk, próbáljuk ki! Különösen ügyeljünk arra, mikor lép fel rövidzár az áramkörben! □



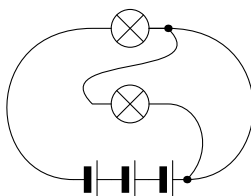
3.3.16. ábra: második kapcsolási rajz

3.3.20. Kísérlet. A feladat ugyanaz, mint az előző kísérletnél, de a 3.3.16. kapcsolási rajzra. □



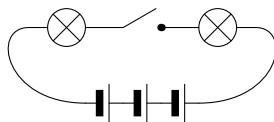
3.3.17. ábra: harmadik kapcsolási rajz

3.3.21. Kísérlet. A feladat ugyanaz, mint az előző kísérletnél, de a 3.3.17. kapcsolási rajzra.



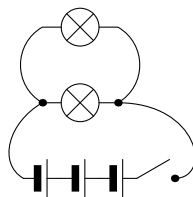
3.3.18. ábra: negyedik kapcsolási rajz

3.3.22. Kísérlet. A feladat ugyanaz, mint az előző kísérletnél, de a 3.3.18. kapcsolási rajzra.



3.3.19. ábra: ötödik kapcsolási rajz

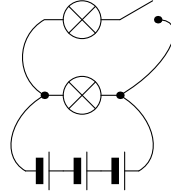
3.3.23. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a 3.3.19. kapcsolási rajzot! Melyik izzó világít? Mi történik, ha lenyomjuk csengőgombot?



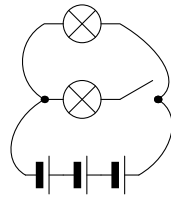
3.3.20. ábra: hatodik kapcsolási rajz

3.3.24. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a 3.3.20. kapcsolási rajzot! Melyik izzó világít? Mi történik, ha lenyomjuk csengőgombot?

3.3.25. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a 3.3.21. kapcsolási rajzot! Melyik izzó világít? Mi történik, ha lenyomjuk csengőgombot?



3.3.21. ábra: hetedik kapcsolási rajz



3.3.22. ábra: nyolcadik kapcsolási rajz

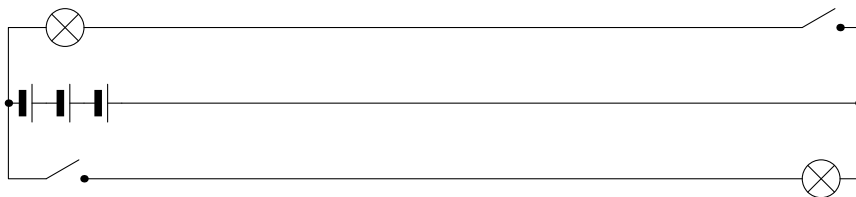
3.3.26. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a 3.3.22. kapcsolási rajzot! Melyik izzó világít? Mi történik, ha lenyomjuk csengőgombot?

3.3.27. Kísérlet. Tervezzünk áramkört két izzóval és két csengőgombbal úgy, hogy a két izzót csak minkettőt lenyomva lehessen bekapcsolni!

3.3.28. Kísérlet. Tervezzünk áramkört két izzóval és két csengőgombbal úgy, hogy a mindkét izzót mindkét csengőgombbal be lehessen kapcsolni!

3.3.29. Kísérlet. Tervezzünk áramkört egy izzóval és két kétállású váltókapcsolóval úgy, hogy az izzót mindegyik kapcsolóval ki- és be lehessen kapcsolni!

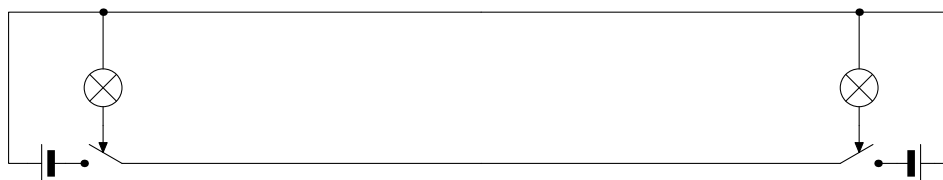
3.3.30. Kísérlet. Tervezzünk áramkört két izzóval és egy kettős kétállású váltókapcsolóval (azaz két kétállású váltókapcsolóval, amit egyszerre lehet kapcsolni) úgy, hogy a soros kacsolásból párhuzamosba lehessen átkapcsolni őket!



3.3.23. ábra: Morse-távíró három vezetékkel

3.3.31. Kísérlet. Térjünk vissza a Morse-távíróhoz! Hogyan lehetne egy teleppel és három vezetékkel működtetni mindkét irányt? A 3.3.23. kapcsolási rajz erre mutat egy lehetőséget. Próbáljuk ki!

3.3.32. Kísérlet. A Morse-távírot többek között vasútállomások közötti táviratozásra használták. Nyilván a vezeték jelentős költség. Ezért inkább a 3.3.24. ábra szerint



3.3.24. ábra: Morse-távíró két vezetékkel

kapcsolást használták, aminél csak két vezeték kell, de Morse-billentyűket kell használnunk. Adott fényerejű, tehát adott teljesítményű izzókat szeretnénk használni. Mi az előnyösebb: nagy feszültség és kis áram vagy kis feszültség és nagy áram? Mivel a hosszú vezetékek ellenállása jelentős, és kisebb áramnál kisebb a feszültségesés, ami az amúgy is nagyobb feszültség lényegesen kisebb részét „eszi meg”, nagyobb feszültséget érdemes használni. Csak az egyszerűség kedvéért rajzoltam egyetlen elemet. Például a régi telefonok 48 V-os feszültséggel működtek. Feljebb életvédelmi okokból veszélyes lenne menni. □

3.3.33. Kísérlet. Lehetne-e a Morse-távíróhoz egyetlen vezetékot használni? Észrevették, hogy az egyik vezeték pótolható a földdel, amely elég jó vezető. Fémkarókat kell levetni vagy fémlemezt elásni az áram földbe vezetésére, ez a *földelés*. Próbáljuk ki az előző kapcsolást így is. Fémkarónak jó például két sátorcövek is. Minél nagyobb feszültségű, például 12 V-os izzót használjunk.

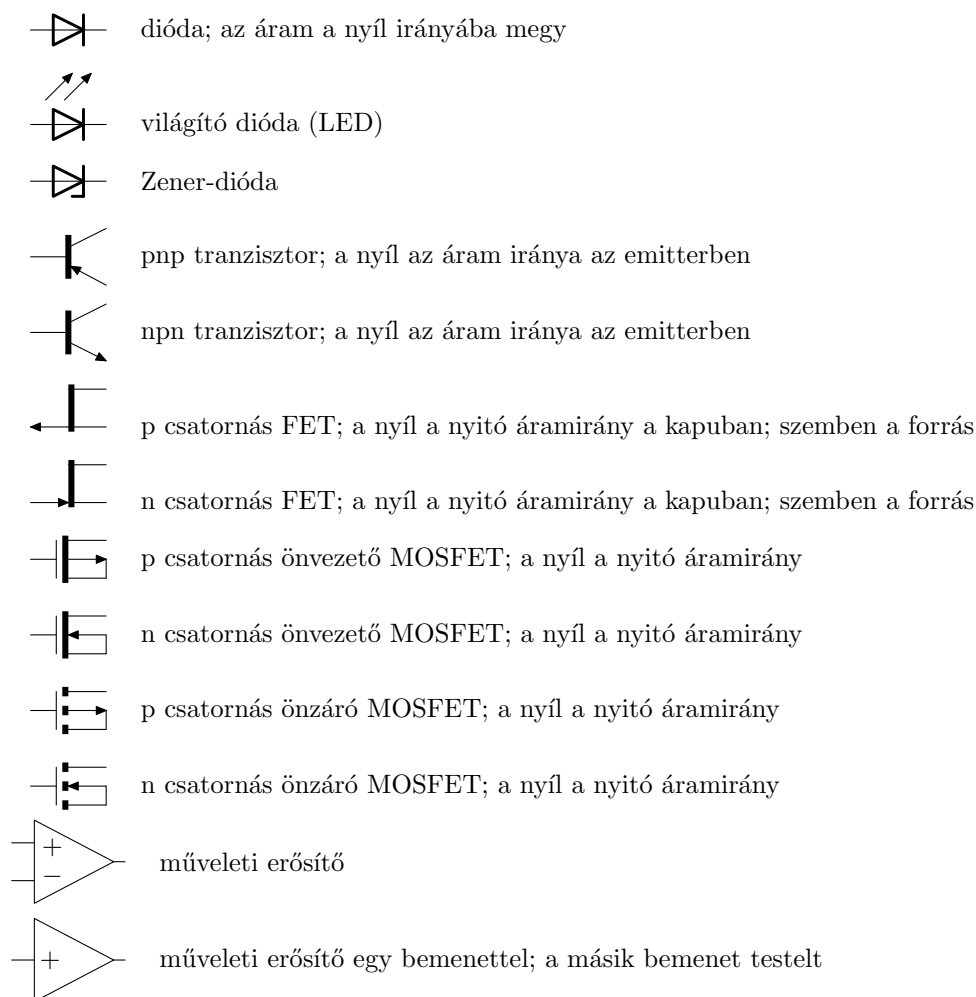
Ugyanezt a gondolatot használják például gépkocsikban. Nem visznek el minden áramfogyasztóhoz két vezetékot, hanem csak egyet. Az áramforrás egyik pólusát (rendszerint a negatívát) „testelik”, azaz a gépkocsi fém vázához kötik. A másik vezeték a kocsi fémteste. □

3.3.34. Kísérlet. Kétkedő természetűekben felmerülhet, hogy az elemekből kapott elektromosság ugyanaz-e, mint a dörzsöléssel kapott? Azt valószínűleg mindenki elfogadja, hogy a konnektorból ugyanaz az áram jön, (csak sokkal nagyobb feszültségű, VIGYÁZAT), mint a telepekből, akkumulátorokból, hiszen elektromossággal működtetett gépeink nagyon hasonlóak, akár akkumulátorról, akár hálózatról működnek, és az akkumulátorokat hálózatról töltjük. Egy fázisceruza meggyőzhet bennünket, hogy a hálózati feszültség ugyanolyan, mint a dörzsöléssel kapott: vegyünk egy fázisceruza (amúgy is hasznos), és dugjuk be a konnektorba. **TERMÉSZETESEN CSAK A SZIGETELT RÉSZÉT SZABAD MEGFOGNI**, kivéve a végén lévő fém érintkezőt, ami viszont meg kell érinteni az ujjunkkal. Ez egy parázfény (glimm- vagy csilló-) lámpán és egy nagyon nagy ellenálláson keresztül össze van kötve a fázisceruza hegyével, így csak nagyon gyenge áram folyhat át rajta. Az ujjunkban legfeljebb enyhe bizsergést érzünk. Viszony ilyen kevés áram is elég a lámpának, hogy világítson. A hálózat egyik vezetéke földelve van, ha ebbe dugtuk a fázisceruza, nyilván nem világít, hiszen a földet kötöttük össze a földdel. A másik vezeték a „fázis”, annál világít a csillólámpa. Vegyük észre, hogy az elektrosztatikus kísérleteknél csak fel-fel villant, amikor egy-egy töltésadag átment rajta. □

3.3.35. Kísérlet: az áram mágneses hatása. Következő kísérletünkhöz két rajzszög között feszítsünk ki egy vezetékot. Legjobb, ha hajlékony vezetékot használunk. Az

	vezetékek keresztezése érintkezés nélkül
	vezetékek keresztezése érintkezéssel
	csengőgomb
	háromállású kapcsoló
	Morse-kapcsoló
	elem; a vastag vonal a negatív sarok
	telep
	biztosíték
	ellenállás
	potenciométer
	izzó
	testelés
	csatlakozás tápfeszültséghez
	az eszköz jelével fotó eszköz, pl. fotóellenállás
	kondenzátor
	elektrolit kondenzátor; az üres téglalap a pozitív
	tekercs
	tekercs vas-maggal
	tekercs ferritmaggal
	transzformátor
	transzformátor ferritmaggal
	H: hallgató; M: mikrofon
	A: ampermérő; V: voltmérő
	=: egyenáramú áramforrás; ~: váltóáramú áramforrás
	U: referencia feszültség; I: áramgenerátor

3.3.25. ábra: elektromos rajzjelek



3.3.26. ábra: elektronikai alkatrészek rajzjele

áramot a kifeszített résztől távolabb vezessük vissza. Tegyük az áramkörbe egy zsebtelepet és egy izzólámpát, amin 0,2–0,3 amper megy át. Én egy 3,5 V, 0,2 A-es izzót használtam. A vezetékre tegyük egy iránytűt, és a deszkát forgassuk addig, amíg a vezeték az iránytű irányába áll. Az áram bekapcsolásakor a mágnesű nem nagyon, de kitér az észak-déli irányból. Fordítsuk meg a telep csatlakoztatását! A tű kitérése az áram bekapcsolásakor ellenkezőjére változik. Ha a vezeték a tű fölé tesszük, akkor is megfordul a kitérés iránya. Legyen most a vezeték az iránytű alatt, de az iránytűt emeljük meg, mondjuk tegyük két gyufásdobozra. A kitérés csökken. Növeljük meg az áramot, például én egy 6 V, 6 W-os izzót használtam, amin nagyjából 1 A megy át. Nagyobb kitérést kapunk. Ha kiiktatjuk az izzót, komoly kitérés jön létre. Talán ilyenkor nulla az ellenállás

és végtelen nagy az áramerősség? Akkor a tű merőlegesen állna a vezetékre. Ezt nem tapasztaljuk, két okból sem. Egyrészt a vezetékeknek is van valamekkora ellenállása, másrészt a telepnek is van ellenállása, amit *belső ellenállás*nak hívunk. Ezek korlátozzák az áramot. Vigyázzunk, ha rossz az érintkezés a telep sarkánál, lehet, hogy felizzik a huzal és megégeti az ujjunkat! Beiktathatunk egy kapcsolót. Ilyen lényegében rövidrezárásakor ha mégis ujjal szorítjuk oda a drótot, legyen valami az ujjunk és a drót között! Egyébként ezt a nagy kitérészt megkaphatjuk egy elemmel is: a telep ugyan háromszor akkora feszültséget ad, de mivel három elem van benne sorba kapcsolva, háromszor akkora a belső ellenállása is. Mondtuk, hogy a rövidrezárás árt az elemnek, ezért csak rövid időre zárjuk az áramkört. Rövidrezárás után az elem egy idő után „összeszedi magát”. A legrosszabb esetben tönkremegy, de néhány rövid idejű rövidrezárást ki szokott bírni. Minden esetre inkább elemet használjunk, mint akkumulátort, az elem olcsóbb. Elég nagy áramot kaphatunk így, 5–10 A-t is. Ez a kísérlet jobban sikerül kicsi iránytűvel, mint nagyon hosszúval: a hosszú tű pólusai már kis szögkitérésnél nagyon eltávolodnak a huzaltól. Amit itt tapasztaltunk, az az *áram mágneses hatása*. □

3.3.36. Kísérlet. Ha a vezeték hat a mágnesre, a mágnesnek is hatnia kell a vezetékre. Vezetéknek egy 40–50 cm hosszú alumínium fólia csíkot használunk. Fektesük le és állítsunk fölé egy mágnespatkót, ahogy a 3.3.27. fényképen látható. A fólia egyik végéhez gémkapcsolunk egy rézdrótot, amit távolabb hozunk vissza. Ha a fólia másik vége és a rézdrót közé egy elemet teszünk, akkor a fólia vezeték felugrik. (Ez lényegében rövidrezárás, nagy áram!) Ha nem ugrana fel, hanem lelapulna, fordítsuk meg a mágneset. Mágnespatkó helyett használhatunk két ajtómágnesből és két sarokvasból készült alkalmi mágnespatkót. Nekem 1 A árammal már csak megmozdult a fóliacsík. □

3.3.37. Kísérlet. Ki tudjuk-e mutatni ezt a hatást a Föld mágneses terével? Fólia vezetéknek 1 m hosszú, 1 cm széles csíkot használunk. Az egyik végét egy kelet-nyugati irányban két szék karfájára fektetett réz csőre, rúdra vagy vastag drótra tekerjük és ruhacsipesszel odafoogatjuk. A másik vége és a réz cső közé jön az elem, azaz lényegében a fóliavezetéken keresztül rövidrezárjuk. Ha nem tiszta a réz, csiszoljuk meg! A kitérés kicsit nagyobb, amikor az áramirány olyan, hogy a fólia észak felé tér ki: ekkor a kitérő fólia erősebb mágneses térbe kerül, hiszen a Föld mágneses tere észak felé lejt. Kis kitérésnél ezt a különbséget nem nagyon lehet észrevenni. □

3.3.38. Kísérlet. Hogyan növelhetnénk az áram mágneses hatását az iránytűre? Vigyük el a drótot az iránytű felett, majd hozzuk vissza alatta, aztán ismét vigyük el felette, stb., azaz tekerjük néhány menet drótot az iránytűre. Már tized amperrel, azaz izzó közbeiktatásával is jól látható hatást kapunk. □

3.3.39. Kísérlet. Úgy tűnik, egy tekercs mágnesként viselkedik. Készítsünk egy kör keresztmetszetű tárgyra, például ceruzára falvezetékéből tekercset: tekerjük fel 1–2 m-t. Az én tekercsem 40 menetből állt és 10 cm hosszú volt. Teszteljük egy iránytűvel. Nagyjából 1 A-es árammal is kitérítette a mágnesűt, de rajta keresztül rövidrezárt elemmel a hatás még jelentősebb. Úgy viselkedik, mint egy rúd-mágnes. Fordítsuk meg az áram irányát: a sarkok megfordulnak. Merre van az északi sarok? Az úgynevezett jobbkezes szabályt kell megjegyeznünk: ha úgy fogunk meg egy tekercset jobb kézzel, hogy az uj-

jaink az áram irányába (nem az elektronáramlás irányába) mutassanak, akkor az északi sarka a hüvelykujjunk irányában van. Pontosabban, a tekercs belsejében arra mutat a mágneses tér, amerre a hüvelykujjunk.

Milyen erős mágneses tér van a tekercs belsejében? Mindenütt nagyjából egyforma erős, mégpedig az erősségét úgy kapjuk meg, hogy az áramerősséget osztjuk a tekercs hosszával. Pontosabban, az áramerősséget annyiszor kell venni, ahány menet van. Például az én tekercsemnél, ha benne 1 A-es áram folyik, akkor $40 \text{ A}/0,1 \text{ m}=400 \text{ A/m}$ a mágneses tér erőssége. Néha ampermenet/métert mondanak, de ez felesleges, ha megjegyezzük, hogy a menetek számával szorozni kell, ami egyébként logikus. \square

Nem sokkal az után, hogy 1820-ban az áram mágneses hatását felfedezték, Ampere felvetette, hogy talán nincsenek is „elemi mágnesek”, a mágnességet „köráramok” okozzák. Valóban így van, „keringő” és „pörgő” elektronok (és más részecskék) okozzák a mágnességet, de ezzel nem fogunk foglalkozni.

3.3.40. Kísérlet. Szeretnénk árammérőt készíteni. Az első probléma, hogy ez elég felesleges. Manapság egy digitális multiméter (DMM), azaz számjegyes sokcélú mérőműszer, amivel sok mindent mérhetünk, nem csak áramot, elég olcsó, nagyjából annyiba kerül, mint az árammérőhöz szükséges drót. Rádásul sokkal pontosabb. Ezért biztosan nem sokan fogják megcsinálni az árammérőt. Mindenkinek azt ajánlom azonban, olvassa el a leírását és a használatát, mert sok fontos dolgot tartalmaz. Ha DMM vásárlása mellett döntünk, megfelelel a kezdőknek ajánlott DT-830B típus. Kapható a Rádiótechnika és a Hobby Elektronika folyóiratok szerkesztősége által üzemeltetett HAM Bazárban. Itt egyébként olcsón hozzájuthatunk nagyon sok más elektronikai alkatrészhez is.

A DMM-eknél a + csatlakozás piros, a – fekete. Akár áramot, akár feszültséget mérünk, egyelőre a DC (direct current, egyenáram) állásba, ne az AC (alternating current, váltóáram) állásba állítsuk. Először a legerősebb áram mérésére alkalmas állásba állítsuk, ez rendszerint 20 A (külön csatlakozóval) és csak akkor állítsuk át érzékenyebb állásba, ha az érzékenyebb méréshatárnál kevesebbet mutat. Ugyanez igaz feszültségmérésre is. Néhány tized másodpercenként történik egy mérés. Ne felejtsük el kikapcsolni, ha már nem használjuk!

Nézzük akkor most a saját árammérő készítését! Az áram mágneses hatását fogjuk felhasználni. Egy tekercsrel az ismeretlen erősségű árammal mágneses teret hozunk létre, és azt összehasonlítjuk a Föld mágneses terével egy iránytű segítségével. Lehetne egy nagy hosszú tekercset is használni, de ehhez nagyon sok drót kellene. Ezért inkább egy rövid kör alakú tekercset készítünk. Kiszámolható, hogy ennek a közepén a mágneses tér a tekercs tengelyének irányába mutat, és erőssége $H = nI/d$, ahol I az áramerősség, n a menetszám és d a tekercs átmérője. Elég nagy átmérőjű tekercset kell választanunk, hogy a közepe közelében jó közelítéssel mindenütt ennyi legyen a tekercs mágneses tere. Például ha $d = 0,2 \text{ m}$, $I = 0,1 \text{ A}$, akkor $n = 32$ választással 16 A/m -t kapunk, ami pontosan ugyanannyi, mint a földi mágneses tér vízszintes összetevője (csak ez játszik szerepet). Ha a tekercs közepébe egy iránytűt rakunk, és úgy állítjuk be a függőleges síkban lévő tekercset, hogy a síkja észak-dél irányú legyen, akkor a földi mágneses tér és a tekercs mágneses tere mint vektorok összeadódnak, és az iránytű 45° -ot tér el az észak-dél iránytól. Ennek a műszernek a régijs neve tangens busszola, mert az α kitérési

szög tangense adja meg a tekercs mágneses tere és a földi mágneses tér hányadosát, így $I = (Hd/n) \operatorname{tg} \alpha$, ahol H a földi mágneses tér vízszintes összetevője. Így is használhatjuk, de nem kell feltétlenül tangenseket számolgatnunk. Leolvashatjuk közvetlenül is a tekercs által keltett mágneses teret, így az áramerősséget, ha egy vonalzót szerelünk a tekercshez, arra merőlegesen, hiszen a kelet-nyugat irányú vonalozón csak ez „látszik”.

Nézzük tehát a teljes tervet. Az elkészült „műszer” a 3.3.28. fényképek közül az első néhányon látható. Lényegében két vízszintes falap. Az alsó egyben az alaplap is, ez lehet vastagabb is. A felső lehetőleg 1 cm körüli vastagságú rétegelt lemez, amely négy falábon áll. A szereléshez nem használhatunk semmilyen vas tartalmú anyagot, így ragasztásra és esetleg sárgaréz csavarokra hagyatkozunk. Ez az „asztal” olyan magasan kell legyen, hogy a rátett iránytű tője a tekercs középpontjába legyen. Keressünk valamilyen 20 cm körüli átmérőjű kerek tárgyat, ezen készül a tekercs. A tekercs anyaga 1,5 mm² keresztmetszetű falvezeték. Én egy kerek dobozt használtam fel, aminek az átmérője 190 mm volt, így a tekercs közepes átmérője 200 mm-nek becsülhető. A dobozra hat 2 mm-es alumínium lemezből kivágott alumínium csíkot szereltem, ezek adnak peremet a tekercshez. A félkész tekercstestet a következő két fényképen láthatjuk. Elkészítéséhez bármilyen csavarokat használhatunk, nem maradnak benne a kész tekercsben, viszont az alumínium csíkokból hármát fel fogunk használni, ezeket ragasztjuk majd az állványhoz.

Kezdhetjük a tekercselést. Ha nagyobb a közepes átmérő, több menetet kell vennünk, ha kisebb, kevesebbet. Hagyjunk vagy 10 cm vezetékét a tekercs előtt, ezt ragasszuk ahhoz, amin tekercselünk. Egy menet után készítsünk egy leágazást: szedjük le a szigetelést vagy 1 cm-en, ide tekerjünk rá szorosán egy kb. 10 cm-es sokeres vezeték lecsupaszított végét, és forrasszuk oda. Jelöljük meg, hogy 1, és szigetelő szalaggal szigeteljük az illesztést. Tekerjünk fel újabb két menetet, és készítsünk egy újabb leágazást, amit 3-mal jelölünk. Feltekerve még annyi menetet, hogy összesen a menetek harmada legyen meg, készítsünk újabb leágazást. Nekem ez 10. Végül tekerjük fel az többi menetet, megjelölve, hogy mennyi, nekem 32. Az elejéhez és a végéhez ugyanúgy forrasszunk csatlakozó zsinórokat, mint a leágazásokhoz. A zsinórokhoz forrasszunk a banánhüvelyre való fület. Ráhajtva az alumínium lemezeket és kicsavarva a csavarokat lehúzzhatjuk a tekercset. Tekerjük át szigetelő szalaggal hat helyen, és szedjük le az alumínium lemezeket.

Készítsük el az asztalkát. Mérjük meg pontosan a tekercs külső és belső átmérőjét. Nekem 195 mm és 225 mm adódott. Az asztalka hossza a belső átmérő legyen. A középvonalában hosszában húzzunk egy vonalat ceruzával, ezen megy át a tekercs síkja. A közepére egy forgó fa vagy műanyag korong kerül, ami pontosan olyan átmérőjű, mint az iránytű. Vágjuk ki kis ráhagyással, középen fúrjunk rajta lyukat egy sárgaréz csavarnak, majd szorítsuk egy csavaron két anya közé. Fúrógépbe fogva forgassuk meg és csiszolópapírral csiszoljuk pontosan méretre. A rézcsavar fejét süllyesszük be, keresztben fűrészeljük be a korongot és a sárgaréz csavart meg egy 1 mm átmérőjű rézdrótot ragasszunk bele epoxi gyantával. A drót olyan hosszú legyen, mint az asztalka fele. A beragasztáshoz jobb, ha a sárgaréz csavart átdugjuk az asztalkán. Ha megkötött a ragasztó, csiszoljuk simára a korongot. A kész korongot a mutatóval a következő fénykép mutatja.

Az alaplap valamivel nagyobb legyen, mint az asztalka lapja. Fúrjuk át az asztalka lapját és az alapot négy helyen a lábaknak, amelyek tipliből készülnek. Az asztalka olyan

magasra kell kerülnön, hogy a korongon lévő iránytű tője pontosan a tekercs közepében legyen. Nekem a korong vastagsága 5 mm, a tű 2,5 mm-re van az iránytű dobozának aljától, így az asztalka teteje 110 mm-re kell legyen az alaplaptól. Mivel az alaplap 15 mm vastag, 125 mm hosszú lábakat vágtam. Próbáljuk össze a lábakat. Ha a furatok kicsit ferdek és a lábak feszülnek, reszelővel tágítsunk a furatokon. Az alaplapba befúrhatjuk a csatlakozásra szolgáló banánhüvelyek helyét, számmal jelölve, hogy 0, 1, 3, 10 és 32. Az asztalkába ragasszuk bele a lábakat. Csak a láb végén a külső szélét kell bekenni, az is elég. A lábak legyenek az alapban, de oda még ne ragasszuk be őket. Ha megkötött a ragasztás, ragasszuk az asztalkához a tekercset: két U alakú alumínium lemezt hajlítsunk rá a tekercsre két oldalt, de még ne szorítsuk össze teljesen. A harmadik alulra jön, a leágazásokhoz, de kívülről és nem kell ráhajlítani. Az asztalka két végét reszeljük be az alu tartóknak. A lábain állva keresztbe tegyük az alap fölé, amire egy alu lemez darabkát tettünk. Kenjük be az alu tartókat epoxi gyantával és ragasszuk pontosan a megfelelő magasságban az asztalkához. Most megszoríthatjuk a tartókat. A harmadik tartót ragasszuk az alaplap közepéhez.

Ha ezek a ragasztások megkötöttek, jöhet a teljes összeállítás. A banánhüvelyekre csavarozzuk fel a csatlakozókat, az anyákat teljesen felcsavarva. A meneteket és az alsó anya alját zsírozzuk be, a felesleget letörölve. A lábakra kenjük epoxi gyantát, és tegyük az asztalkát a helyére. A banánhüvelyek alsó részét is kenjük be epoxival, és nyomjuk be a helyére. A bezsírozott alsó anyával beállíthatjuk banánhüvely pontos helyzetét. A zsíros részekhez nem köt a ragasztó, így az alsó anya később feljebb csavarható, és az egész banánhüvely is kicsavarható, ha kell. Végül állítsuk be pontosan az asztalka magasságát mind a négy sarkán. Ha valamelyik láb kiáll alul, majd lecsiszoljuk.

Ha megkötött a ragasztó, már csak egy dolog van hátra. Egy vonalzódarabot vagy egy lemezdarabra ragasztott papír mérőszalagot kell felragasztanunk az asztalkára, a középvonalára merőlegesen. Mivel a közepes átmérő 210 mm lett, 5%-kal több, mint a tervezett, így a mágneses tér 5%-kal kisebb, mint a tervezett, a vonalzót 5%-kal messzebb az asztalka középpontjától ragasztjuk fel, mint a tervezett, azaz nekem 52,5 mm-re. Használhatunk valamilyen egyszerűbb ragasztót is.

Mérésnél először beállítjuk a tekercs síkját pontosan észak-déli irányba, olyan helyen, ahol nincsenek erős mágnesek vagy nagy vasak a közelben, például egy nagy fasztal közepén. Ehhez a korongot forgassuk addig, amíg a mutató a középvonalon áll. Tegyük rá az iránytűt és az egész állványt forgassuk addig, amíg az iránytű a mutató hosszába áll. Az áram bekapcsolása után a korongot úgy állítsuk be, hogy a mutató arra mutasson, amerre az iránytű. Olvassuk le a millimétereket. Az összes menetnél 1 mm megfelel 2 mA-nek. Ha kevesebb menetet használunk, arányosan kisebb a kitérés, úgyhogy szorozni kell a leolvasott értéket például nekem 3 menetnél 32/3-dal.

A tangens busszola régen nagy becsben állt, mivel abszolút műszernek tekintették. Később kiderült, hogy a földi mágneses tér, amihez hasonlítunk, ingadozik kicsit. Ráadásul a vastárgy és az áram is sokkal több a közelünkben. Ezért mára kiment a divatból, legfeljebb fordítva, a földi mágneses tér mérésére használják. □

3.3.41. Kísérlet. Első mérésként mérjük meg az áramot egy zseblámpa kapcsolásban. Kössük sorba az izzót, a műszert, a telepet és a nyomógombot. Először az 1 menetes

bemenettel próbálkozzunk. Ha túl kicsi a tű kitérése, térjünk át a 3 menetesre, stb. Én a 10 menetes részre kapcsolva az áramot 49 mm-es kitérést kaptam, ami 32 menetnél 98 mA-nek felelne meg, így az áram $3,2 \cdot 98 \text{ mA} \approx 314 \text{ mA}$. Ez megfelel a várakozásoknak 0,2 A, 3,5 V-os izzóval és 4,5 V-os teleppel.

Mit tudunk tenni, ha nem csináltunk leágazásokat? Mérjünk le ugyanabból a drótból, amiből az árammérő tekerce készült, mondjuk kilencedannyit, amennyi a tekercsben van. Ezt a drótot kapcsoljuk párhuzamosan az árammérővel. Ez a *mellékág* vagy *sönt*. Mivel ellenállása kilencszer kisebb, mint az árammérőé, kilencszer több áram folyik át rajta, mint a mérőn, így az csak a teljes áram tizedét méri. Ezen az elven megfelelő sönttel nagy áramok mérésére is használhatunk egy árammérőt.

Ne felejtjük el, hogy ha árammérőnket bekapcsoljuk egy áramkörbe, akkor némileg megzavarjuk az áramkör működését. Mivel $1,5 \text{ mm}^2$ -es rézdrótból nagyjából 90 m ellenállása 1Ω , az én árammérőm összes menetének teljes ellenállása nagyjából $0,22 \Omega$. Ha például az árammérő 100 mA-t mutat, akkor kb. 22 mV feszültség esik rajta. Ez általában nem zavaró, de ha az áramkör nagyon kis feszültséggel működik, akkor teljesen meg is hamisíthatja a mérést. \square

3.3.42. Kísérlet. Második mérésnek mérjük meg egy elem vagy telep belső ellenállását. Rövid dróttal kössük az egy menetes bemenetre. Bár ennek a műszernek nem árt a túl nagy áram, a vezeték kb. 10 A-t kibír, legfeljebb nagyon kitér az iránytű, de azért nem árt ha megszokjuk, hogy a legkevésbé érzékeny állásban kezdjük a mérést. Ha túl kicsi a tű kitérése, kapcsoljunk a több meneteshez, stb. Nekem már egy menetes állásban elég nagy volt a kitérés, 58 mm, ami $116 \cdot 32 \approx 3700 \text{ mA}$. Ennyi áramot várhatunk rövidrezárásakor. Észrevehetjük, hogy az áramerősség lassan csökken, az elem vagy telep belső ellenállása nem állandó, csak valamilyen közelítés. Olvassuk le közelítőleg az áramerősséget. Egyébként az analóg (nem számjegyes) műszerek előnye, hogy a mutató mozgása szemléletes, és egy körülbelüli érték mindig leolvasható, míg gyorsan változó számjegyes kijelzés használhatatlan. Az áramerősségből és a feszültségből megkapjuk a teljes ellenállást. Én 4,5 V-os telepet használtam, a teljes ellenállás $4,5/3,7 \approx 1,21 \Omega$. Számoljuk ki a használt menetek és az összekötő drót ellenállását és vonjuk le: megkapjuk a belső ellenállást. Itt most ez $\approx 0,01 \Omega$, így a belső ellenállás $1,2 \Omega$. Az elemek általában úgy szoktak tönkremenni, hogy nagyon megnő a belső ellenállásuk. Az ilyen elemek „rövidrezárásos” kísérletekre már biztosan nem jók, és legfeljebb gyenge áramot bírnak leadni. Mindegy-e, hogy elemet vagy telepet használunk? Igen: az áram nagyjából ugyanannyi lesz, mert az elemek feszültsége összeadódik, de a belső ellenállásuk is.

Ha ugyanezt a mérést DMM-el akarjuk elvégezni, nem jó ötlet az elemet közvetlenül a DMM-re kapcsolni, baj lehet, ha túl kicsi a belső ellenállás. Tegyük annyi rézdrótot az áramkörbe, hogy ellenállása biztosan a megengedett maximális értékre korlátozza az áramot. Például ha ez 10 A, akkor $0,16 \Omega$ kell védőellenállásnak, némi rátartással. A DMM saját ellenállása csak $0,01\text{--}0,015 \Omega$ ebben az állásban, így közvetlenül rákapcsolva az elemet tönkremehet. Persze, ha pontosak akarunk lenni, vegyük figyelembe, hogy a mért áramból kiszámolva az ellenállást, a védőellenállás és a belső ellenállás meg a műszer ellenállásának összegét kapjuk. \square

3.3.43. Kísérlet. Tudnánk-e árammérőnkkel feszültséget is mérni? Közvetlenül rá-

kapcsolni például egy elemre nem jó gondolat, mint már tudjuk, és így nem is a feszültséget mérjük. Egy ellenállást kell az árammérő elé beiktatni, hogy mondjuk 10 V feszültségnél 100 mA áram folyjon. Ez az *előtétellenállás* akkora kell legyen, hogy a műszer ellenállásával együtt a teljes ellenállás 100 Ω legyen. Mivel a műszer ellenállása elhanyagolható, vehetünk 100 Ω -os ellenállást. Ha csak 1 V-ig akarunk mérni, akkor 9,78 Ω -os ellenállás kell. Ilyet nemigen kapunk, de egy 10 Ω -os ellenállással párhuzamosan köthetünk egy 450 Ω körülit (számoljunk utána). Ha 100 V-ig akarnánk mérni, akkor 1 k Ω -os előtétellenállás kellene. NE HASZNÁLJUK ILYEN NAGY FESZÜLTSEGEK MÉRÉSÉRE EZT A MŰSZERT, MERT SZIGETELETLEN. Minden esetben műszerünk ellenállása voltonként 10 Ω . Ez nagyon kicsi, jobb műszerekre voltonként 10–50 k Ω szokott lenni. A voltmérő két végződését a két ponthoz kell kötni, ami közötti feszültségkülönbséget mérni akarjuk. Minél nagyobb a műszer ellenállása, annál kisebb a rajta átfolyó áram, annál kevésbé zavarja meg az áramkör működését. Néhány mérést azért a tangens busszollával is elvégezhetünk, például telepek, akkumulátorok feszültségét megmérhetjük, ha van egy megfelelő előtétellenállásunk.

Én a busszola kipróbálásához használt telep feszültségét mértem meg. Egy 100 Ω -os előtétellenállást használtam, és 50 mA-t mértem, tehát a feszültség 5,0 V. Persze, a hibához hozzájárul az árammérő pontosságán kívül az ellenállás pontossága is. Én 1 %-os pontosságú ellenállást használtam. További hibaforrás a feszültségforrás belső ellenállása. Ez itt most 1,2 $\Omega \cdot 50 \text{ mA} = 60 \text{ mV}$ hibát okoz. Tulajdonképpen nem a telep feszültségét mértük, hanem a *kapocsfeszültségét*, ami a belső ellenálláson eső feszültséggel kisebb, mint a teljes feszültség, az úgynevezett *üresjárási feszültség*. Nagy belső ellenállású feszültségforrásoknál ez a legnagyobb hibaforrás!

Hogyan tudnánk jobb voltmérőt készíteni? Míg az ampermérőnél az a jó, ha kicsi az ellenállása, hiszen sorosan kötjük be az áramkörbe, a voltmérőt párhuzamosan kötjük be, így az a jó, ha ellenállása minél nagyobb. Árammérőnket úgy változtathatnánk meg, hogy jó voltmérő legyen, hogy tízszer kisebb átmérőjű, tehát százszor kisebb keresztmetszetű drótból százszor hosszabbat vennénk. Ekkor az iránytű 45°-os kitérése már 1 mA áramnál létrejönne, a műszer *bemeneti ellenállása* pedig 2200 Ω lenne. Ezt már 2,2 V-ig terjedő feszültség mérésére közvetlenül használhatnánk, nagyobb feszültségre előtétellenállással. A műszer ellenállása még mindig csak 1 k Ω voltonként. Persze, senki nem fog több, mint 2 km drótot felhasználni. Majd később visszatérünk rá, hogy hogyan készíthetünk jobb mérőműszert. A DMM-ek ellenállása feszültségmérésnél általában állandó, 1 M Ω vagy 10 M Ω .

Feszültségmérőt tehát nem készítünk, és az árammérő készítését is jobb gondolatkísérletnek meghagyni. Vegyünk inkább egy DMM-et! Az olcsóbb DMM-ek mind úgynevezett 3 1/2 számjegyesek. Ez azt jelenti, hogy a kijelzés ugyan négy számjegyes, de az első számjegy csak 0 vagy 1 lehet, azaz a maximális kijelzés 1999. Ha ennél nagyobb lenne, akkor csak az első 1-es lászik. Egyelőre egyenáramot és feszültséget fogunk mérni. Gyakorlasként mérjük végig kísérleti áramköreinket, hogy hol mekkora az áram, illetve a feszültség. Ne feledjük, hogy mindig a nagyobb mérésértől indulunk, és csak akkor térünk át az érzékenyebbre, ha meggyőződünk, hogy „belefér” abba is a mért feszültség, illetve áram. Árammérésnél mindig sorosan, feszültségmérésnél párhuzamosan kötjük a mérőt! \square

3.3.44. Kísérlet. Ha kipróbáltuk DMM-ünket, bizonyára kényelmetlenségét okozott, hogy az árammérésnél mindig meg kell bontani az áramkört, beiktatni az árammérőt, majd a mérés után újra visszaállítani az eredeti áramkört. Ráadásul mivel egy DMM-ünk van, nem tudunk egyszerre feszültséget és áramot, pláne több helyen áramot is mérni. Ezen nem nehéz segíteni. Ahol áramot akarunk mérni, oda iktassunk be egy ismert, kis értékű ellenállás. Árammérés helyett ezen az ellenálláson mérünk feszültségesést. A mért feszültséget osztva az ellenállással kapjuk az áramot. Ha elég kis értékű az ellenállás, nem zavarja meg az áramkör működését. Természetesen az ellenállás hibája befolyásolja az árammérés hibáját. Ezért általában 1% pontosságú ellenállást használunk. A DMM hibáját így szokták megadni: $\pm 0,5\% \pm 2$ egyenfeszültség mérésénél. Ez azt jelenti, hogy a hiba maximum a mutatott érték fél százaléka és még kettő az utolsó számjegyben. Ha ehhez hozzájön az ellenállás hibája, az $\pm 1,5\% \pm 2$. Maga a DMM hibája árammérésként hasonló szokott lenni, így nem sokat veszítünk. Sőt, 1‰ pontosságú ellenállást használva, még nagyobb is lesz a pontosság!

Meg kell tehát ismerkednünk az ellenállásokkal, a legegyszerűbb, filléres elektronikai alkatrészekkel. Bizonyára örömmel fedeztük fel, hogy DMM-ünk ellenállást is tud mérni. Kísérletként rajzoljunk ceruzával egy erősen besatírozott vonalat egy kartonlapra. Megerve az ellenállását — két végéhez értetve a mérőhegyeket, a legnagyobb méréshatárral kezdve — nagyon különböző értékeket mérhetünk, attól függően, milyen széles és vastag a vonal, és mekkora hosszt mérünk. A legegyszerűbb ellenállások így készülnek, vagy hat nagyságrenden át: grafit réteget visznek fel egy kerámia — például porcelán — testre. A jobb minőségű ellenállások fémréteggel készülnek, a legjobb minőségűek pedig ellenálláshuzalt porcelán testre tekercselve. Megfelelő ötvözetet választva, az ellenállás nem függ nagyon a hőmérséklettől. A nagyon pontos ellenállások meglehetősen drágák, de 1‰–1‰ pontosságú ellenállások meg olcsón kaphatók.

Hogy tud a DMM ellenállást is mérni? A lelke egy bonyolult elektronikus áramkör, amely másodpercenként 2–3-szor méri meg a feszültséget, és azt számjegyekké alakítja. Ennek a bemeneti ellenállása több tíz $G\Omega$ nagyságrendű, és 200 mV-nál kisebb feszültségeket tud átalakítani. ** Rendszerint az ICL7106-os vagy hasonló áramkör; „nagy testvére”, az ICL7135-ös 4 1/2 számjegyes és 2 V-nál kisebb feszültséget alakít át. A 4 1/2 számjegyes DMM-ek drágák, elsősorban a nagy pontosságú alkatrészek miatt. ** Ha ellenállást mérünk, akkor a legkisebb méréshatárnál a DMM elektronikája megpróbál 1 mA áramot áterőltetni az ellenálláson, és méri a feszültségesést. Ha az 200 mV, akkor az ellenállás 200 Ω . Eggyel nagyobb méréshatárnál tizedennyi áramot használ, stb. Az 1 mA áram általában nem árt semminek, de például egy érzékeny μA -mérőt tönkretéhet. Ezért érdemes itt is a legnagyobb méréshatártól indulni.

Árammérésnél a DMM-en átfolyó áram egy beleépített kis ellenálláson feszültségesést hoz létre, és ezt méri a DMM. A legkisebb méréshatár rendszerint 200 μA , itt az ellenállás 1 k Ω , 2 mA-nél 100 Ω , stb. A túl nagy árammal való megterheléstől rendszerint egy biztosíték is védi a mérőt. A feszültségesés 200 mV a legnagyobb mutatott értéknél, a nagyobb értékhatároknál kicsit több a biztosíték miatt. Ha ez sok, mérjünk eggyel nagyobb méréshatárnál — persze pontatlanabban. A legnagyobb méréshatár rendszerint nincs védve, és 20 A. Itt az ellenállás 10 m Ω . A feszültségesés 20 A-nél 200 mV, a teljesítmény 4 W, elég jelentős. Ha mondjuk 100 A-t engedünk át a DMM-en, tönkremegy,

ekkor a teljesítmény 100 W, és a mérőszinóron is nagyon nagy!

Feszültségmérésnél egy feszültségosztó osztja le a feszültséget; a feszültségosztóval nemsoká részletesen foglalkozunk.

A kapható ellenállások értékei mértani sorozatot alkotnak. Pontosabban, az E6 sorozatnál $\sqrt[6]{10}$, az E12 sorozatnál $\sqrt[12]{10}$, az E24 sorozatnál $\sqrt[24]{10}$ hatványainak két értékes jegyre kerekített értékei fordulnak elő. Ez pontosan olyan, mint a technikában általánosan használt R-számok, amikkel a kémia részben a logaritmus bevezetésénél részletesen foglalkozunk. Ott az R5 számoknál $\sqrt[5]{10}$, az R10 számoknál $\sqrt[10]{10}$, az R20 számoknál $\sqrt[20]{10}$ és az R40 számoknál $\sqrt[40]{10}$ megfelelően kerekített értékei szerepelnek. Az elektronikában mindenféle alkatrészre az E-számokat használják. Az E6 sorozatnál a tűrés $\pm 20\%$, az E12 sorozatnál $\pm 10\%$, az E24 sorozatnál $\pm 5\%$. A további E48, E96, E192 sorozatok tagjai a megfelelő 10-hatvány három értékes jegyre kerekített értékei, rendre $\pm 2\%$, $\pm 1\%$ és $\pm 0,5\%$ vagy kisebb tűréssel. A nagyobb méretű ellenállásokra ráírják az értéket, a tűrést és a terhelhetőséget úgy, hogy a tizedesvessző helyett R, k vagy M szerepel, például 2M2 10% 8 W. A tűrést betűvel is kódolhatják, csökkenő sorrendben a kód M, K, J, G, F, D.

Szín	Számjegy	Kitevő	Tűrés, %	Hőtűrés, %/°C
Ezüst		-2	10	
Arany		-1	5	
Fekete	0	0		
Barna	1	1	1	100
Vörös	2	2	2	50
Narancs	3	3		15
Sárga	4	4		25
Zöld	5	5	0,5	
Kék	6	6	0,25	10
Ibolya	7	7	0,1	5
Szürke	8	8	0,05	
Fehér	9	9		

A nagyon kicsi méretű ellenállásokra nem lehet számokat nyomtatni. Itt színes gyűrűket alkalmaznak. A színek kódok nem teljesen egységesek, de manapság a táblázat szerinti kódokat alkalmazzák. A kód azzal a gyűrűvel kezdődik, amelyik közelebb van az egyik kivezetéshez. A négy gyűrű esetén két számjegy után jön a kitevő kódja: tíz ennyedik hatványával kell szorozni. Az utolsó gyűrű a pontosság kódja. Ha ez hiányzik, a pontosság $\pm 20\%$. A számjegyek kódját elég könnyű megjegyezni: a fekete nulla, a barna egy, majd jönnek sorba a szivárvány színei, végül a szürke és a fehér. Persze, nullával nem kezdődhet a szám. A kitevők kódja ugyanez, de negatív is lehet. Végül az utolsó gyűrű a pontosság kódja. Az ötgyűrűs kód hasonló, de három számjeggyel kezdődik. A hatgyűrűs kódnál van egy „utolsó utáni” gyűrű is, ez a hőfokfüggést adja meg. Az ellenállás terhelhetősége a felületével arányos, de függ az ellenállás anyagától is. Szénréteg

ellenállásoké 0,3–0,6, fémréteg ellenállásoké 0,75–0,85, huzallellenállásoké 0,5–1,5 W/cm². Például egy 0,6 W-os fémréteg ellenállás 2,4 mm átmérőjű és 6,3 mm hosszú.

Végsszükség esetén magunk is készíthetünk ellenállásokat. Vásároljunk ellenálláshuzalt, legjobb a mangánin. Ellenállása az átmérőjétől függ, meg van adva, hogy méterenként mennyi. Vágjunk le a szükséges hosszánál valamivel többet. Egy vastagabb, visszahajtott végű rézdrótra tekerjük fel a huzal végét, majd a rézdrótot kalapáljuk le. Legjobb, ha a huzalt oda is forrasztjuk. A másik végével ugyanígy járunk el, de a két rézdrót közötti rész hosszúsága pontosan a szükséges legyen! A huzalt tekerjük fel egy hosszában kettévágott műanyag pohárra. A két vastag rézdrót két banánhüvelyhez csatlakozik, amelyek a pohár alján is átvezetve egy műanyag doboz fedelébe vannak csavarozva. A fedelet az ellenállásokkal rátesszük a dobozra. Ha nagyon hosszú a huzal, előbb egy vékonyabb csavarhúzóra feltekerve spirálozzuk és a spirált tekerjük fel a fél műanyag pohárra. Ha nagy teljesítményre számítunk, műanyag pohár helyett kerámia (porcelán) testet kell használnunk, a doboz oldalára pedig szellőző nyílásokat kell vágnunk! □

3.3.45. Kísérlet. Készítsünk egy *feszültségosztót*, idegen szóval *potenciométert*: lásd a 3.3.29. fényképek közül a bal oldalt. Valamilyen, az áram hőhatásán alapuló, már elromlott háztartási eszközből (rezsó, főzőlap, kenyérpírtó, kávéfőző, hajszárító, stb.) bányásszuk ki az ellenálláshuzalt, vagy vegyünk egy rezsóbetétet. Általában a hajszárítót a legkönnyebb szétszedni: lásd az 3.3.30. fényképet. Elektronikai boltban is kaphatunk ellenálláshuzalt. A fűtőhuzalnak használt ellenálláshuzaloknak a fajlagos ellenállása általában $1,3 \mu\Omega/\text{m}$ körül van, a terhelhetősége pedig arányos az átmérővel, 1 mm átmérőjűre 6 A. (Ekkor már izzik!) Az ellenállások készítésére használt mangánin és konstanstán huzaloknak a fajlagos ellenállása $0,5 \mu\Omega/\text{m}$ körül van, a terhelhetősége arányos az átmérővel, de nincs annyi, mint a fűtőhuzaloké. Ellenállásuk nem nagyon változik a hőmérséklettel. Én egy régi 400 W-os rezsót szedtem szét. Mivel 220 V-ra volt méretezve, az áramerősség $400/220 \approx 1,82$ A; ennyi áram hevíti izzóra az ellenálláshuzalt. A huzal spirállá van csavarva, és porcelán gyöngyökön van átbújtatva. Az ellenálláshuzalt például kilincsen huzigálva egyenesítsük ki, és mérjük meg a hosszát. Az enyém 5,5 m volt. Mivel a teljes ellenállás $220/1,82 \approx 121 \Omega$, egy méter huzal ellenállása $121/5,5 = 22 \Omega$. Persze, meg is mérhetjük, az enyém $19,8 \Omega$ -nak bizonyult. A feszültségosztó egy méter hosszú lesz. Egy ennél valamivel hosszabb falécre az ellenálláshuzal alá ragasszunk egy 1 m hosszú papír mérőszalagot. A lécs két végére szereljük fel „csokoládét”. Ez villanyvezetékek összekötésére szolgáló úgynevezett sorozatkapocs, becenevén „csokoládé”. Táblában kapható. Lehetőleg fekete vagy barna színű hőre keményedő műanyagból (bakelitből) készült nagy méretű sorozatkapcsot vegyünk. Fémfűrészszel három-három darabot vágjunk le a táblából. Úgy csavarozzuk fel a három-három darabot, hogy a bennük lévő fém betét távolsága a mérőszalag végétől nagyjából 5 mm legyen. Egy egyes sorozatkapocs darabot keresztben fúrjunk át két helyen, ott, ahol a csavar van, ez lesz a „csúszka”. A csúszkán fűzzük át az ellenálláshuzalt, és egy több mint 1 m hosszú, minél vastagabb egyenes csupasz rézvezetéket. A rézvezeték lesz a „vezetősín”: feszítsük ki a középső kapcsok között. A harmadik sorozatkapcsan egy vastagabb szigetelt falvezetékekkel vezetjük vissza az áramot az ellenálláshuzal másik végéhez. Az ellenálláshuzal egy 1 m-es darabját kifeszítve fogjunk be a két sorozatkapocsba. Kicsit hosszabbat vágjunk le, tekerjük rá többször egy

vastagabb rézdrótra, azt hajtsuk vissza és azt fogjuk be, hogy jó legyen az érintkezés. Igyekezzünk pontosan a mérőszalag végéhez állítani a rézdrótok visszahajtott végét. Ha nem sikerül is, azt csak pontosabb méréseknél kell figyelembe venni. Ha esetleg összeérne valahol a vezetősín és a mérőhuzal, néhány apró szeggel támasszuk ki valamelyiket vagy mindkettőt. Lényegében kész is vagyunk. Ha a sorozatkapocs két szélső csavarjával befogunk egy áramforrás két sarkától érkező rézdrótot, akkor a feszültség egyenletesen csökken az ellenálláshuzal mentén. Ha például egy 12 V-os gépkocsi akkumulátorra kötjük a feszültségosztót, akkor a csúszkáról 0 és 12 V közötti feszültséget vehetünk le a sorozatkapocs középső csavarján. Természetesen gépkocsi akkumulátor helyett más áramforrást is használhatunk. Azért túl nagy feszültséget ne használjunk. Például ha 20 V-os áramforrást használtam volna (egy elektromos csavarhúzó akkumulátorát), a 20 Ω -os ellenálláshuzalon 1 A áram folyna. Ez nagyjából a fele annak, amitől a rezsóban izzik, így a rajta eső feszültség is nagyjából a fele annak, ami erre a drótdarabra a rezsóban esik. Így a drótdarabra eső teljesítmény nagyjából a negyede a rezsóban leadott teljesítménynek. Ettől nem jön izzásba, de lehet hogy már erősen melegszik. Egy nedves papírdarabbal vagy akár csak megnyálazott ujjunkkal megérintve kipróbálhatjuk: ha nem sístereg, még nincs 100 °C, biztonságos. Ha egy 9 V-os telepet használunk, akkor az áram $9/20 \approx 0,45$ A, ezt a telep nem sokáig bírja. Jobb, ha egy 4,5 V-os telepet, mégjobb, ha két sorbakötött 1,5 V-os elemet használunk, de sokszor elég, ha egyetlen elemet vagy kis akkumulátort használunk.

Egyetlen elemet kapcsolva a feszültségosztóra, a DMM egyik mérőcsúcsát a mérődrót csavarjához érintve, a másikat pedig a mérődróton húzgálva, érzékelhetjük az egyenletes feszültségést. A csúszkára most nincs szükség: csavarjait lazítsuk ki, és toljuk az egyik szélre.

A feszültségosztót felhasználhatjuk feszültségmérésre, még nagyon kis feszültségeknél is, még hozzá úgy, hogy a mérendő feszültségforráson alig folyik át áram. Ha például azt akarjuk megállapítani, hogy egy már lemerült elem feszültsége hány százaléka egy új elemének, tápláljuk a mérődrótot az új elemmel. A használt elem negatív sarkát kössük oda, ahova az újét, a másikat pedig a vezetősínhez. A DMM-et voltmérő állásban használva keressük meg a mérődróton azt a pontot, amelynek a feszültsége annyi, mint a vezetősíné. A lemerült elem feszültsége annyiad része az új elemének, ahanyad része a negatív vég és a csúszka közötti távolság az 1 m-nek. Nekem ez 150 mm volt, tehát az eredmény 150 ‰. Persze, a DMM-el közvetlenül is mérhetünk.

Áramjelzőnek egy kis fülhallgatót is használhatunk. (Később majd készítünk érzékenyebb áramjelzőt). Úgy csúsztatgatjuk a mérődróton, hogy az egyik kivezetése a mérődróthoz, a másik a vezetősínhez érjen. Ha van feszültségkülönbség, van áram, és kattogást hallunk a fülhallgatóból, ami annál hangosabb, minél nagyobb az áram. Mozgatva a kivezetést, mm pontossággal találhatunk egy olyan pontot, ahol éppen megszűnik az áram. Szigorúan véve ez csak akkor van így, ha pontosan egyforma a feszültség, de ha kicsi a különbség, akkor is elég jó közelítés. Mennyire érzékeny egy fülhallgató? DMM-mel kipróbáltam, és találtam olyan nagyon egyszerű mono fülhallgatót, amelynél 200 k Ω állásban a jobb fülemmel (nem egyforma a két fülünk) még hallottam a kattogást. Ez 1 μ A áramot jelent, nagyságrendben ennyi a fülhallgató áramérzékenysége. Az ellenállását 34 Ω -nak mértem, így a feszültségérzékenysége nagyságrendben 34 μ V. Hogy ne

terheljük túl a fülhallhatót, kezdetben célszerű egy pár $k\Omega$ -os ellenállást kapcsolni a vezetősín és a fülhallgató közé: lásd a 3.3.29. fényképek közül a jobb oldalt. Ha már így nagyjából megtaláltuk a „nullhelyzetet”, akkor kiiktatjuk az ellenállást, és megkeressük a pontos nullhelyzetet.

Ha nagyon kis feszültséget akarunk mérni, az elemet egy ellenálláson keresztül kapcsoljuk a mérőhuzalra. Az ellenállás és a mérőhuzal feszültségosztót képez, és a mérőhuzalra kis feszültség jut. A DMM-ben is fix ellenállásokból készült feszültségosztó osztja le a mérendő feszültséget.

Feszültségosztónkat — mint minden potenciométert — változtatható előtétellenállásként is használhatjuk, az áramot a mérőhuzal egy darabján vezetve át a csúszkáig. Ilyenkor különösen ügyeljünk a melegedésre. Az áram ne lépje át azt a határt, aminél a huzal eléri a $100\text{ }^\circ\text{C}$ -ot!

Potenciométert kész alkatrészként is lehet kapni. Van lineáris, mint a miénk, és van olyan, amelynek nem egyenletesen változik az ellenállása. A miénk előnye, hogy nagy a terhelhetősége, és skála is van hozzá.

3.3.46. Kísérlet. Jó lenne valamilyen kísérlet, ami alátámasztja a fémek áramvezetéséről mondottakat. Később majd sok ilyen kísérlettel találkozunk, most csak egyet említünk meg. Már szó volt róla, hogy a fémek ellenállása a hőmérséklettel nő. Ezt egy ellenállásmérővel és egy hosszú, vékony, spirállá csavart vasdróttal kipróbálhatjuk, ha a drótot borszeszegő, gázégő, esetleg gyertya lángjában megmelegítjük. Magasabb hőmérsékleten a fém élénkebben rezgő atomjai jobban akadályozzák az elektronok mozgását. Nem minden anyag ellenállása nő a hőmérséklettel, például a széné csökken. Vannak olyan anyagok, amelyek ellenállása erősen változik a hőmérséklettel. Amelyeké gyorsan nő, azokat motorvédő ellenállásként használják: a motorban helyezik el, sorbakapcsolva a motorral. Ha a motor túlmelegszik, az ellenállás megnő, és korlátozza az áramot. A *termisztorok* olyan anyagból — félvegyetöböl — készülnek, amelynek ellenállása nagyon gyorsan csökken a hőmérséklettel, már néhány száz $10\text{ }^\circ\text{C}$ változásra is akár ezredrészére. Ezeket az elektronikában kis hőmérsékletváltozások észlelésére használják. \square

3.3.47. Kísérlet. Feszültségosztónkal és a DMM-mel pontosan ki is mérhetjük, hogy egy kis izzó izzószálának ellenállása hogyan változik az árammal. Én egy $3,5\text{ V}$, $0,2\text{ A}$ -es izzót vizsgáltam. Tápláljuk a feszültségosztót 6–8 kis akkumulátorral vagy gépkocsi akkumulátorral. Azért jobb az akkumulátor, mert elég sokat fogyaszt, kb. fél ampert, érezhetően melegszik is. Lehet, hogy majd fel is kell tölteni az akkumulátorokat. A feszültségosztó negatív sarkához kapcsoljuk a vizsgálandó izzót és vele sorba kötve egy néhány ohmos, 1% -os pontosságú ellenállást. Én egy $3,3\ \Omega$ -os ellenállást használtam. A másik véget a vezetősínhez csatlakoztatjuk. A negatív saroktól indulva és a csúszkát 2–3 cm-enként elmozdítva, majd a csavarokat meghúzva, növekvő feszültséget adunk az izzóra és a vele sorba kötött ellenállásra. Minden állásban mérjük meg és jegyezzük fel az izzón és az ellenálláson eső feszültséget. Az ellenálláson eső feszültségből megkapjuk az áramerősséget, és az izzón eső feszültséget használva az izzó ellenállását és teljesítményét. A feszültséget az izzón ne emeljük sokkal a névleges feszültség fölé, mert az izzó kiég! Én $4,5\text{ V}$ -ig mentem el. Az én eredményeimet a 3.3.31. táblázat tartalmazza. \square

3.3.48. Kísérlet. Meg tudnánk-e határozni az előző kísérletben szereplő izzó szálának hőmérsékletét a feszültség függvényében? Ehhez a fajlagos ellenállást kell ismernünk a hőmérséklet függvényében az izzószál anyagára, a volframra. Ilyen táblázatot könnyen találhatunk a hálózaton. Ide másolok egyet (R_0 az ellenállás 300 K-en):

T/K	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
$\rho/(n\Omega m)$	56,5	80,6	105,6	132,3	160,9	190,0	219,4	249,3	279,4	309,8	340,8	371,9	403,6
R/R_0	1,00	1,43	1,87	2,34	2,85	3,36	3,88	4,41	4,95	5,85	6,03	6,58	7,14
T/K	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800
$\rho/(n\Omega m)$	435,5	467,8	500,5	533,5	566,7	600,6	634,8	669,1	703,9	739,1	774,9	810,4	847,0
R/R_0	7,71	8,28	8,86	9,44	10,03	10,63	11,24	11,84	12,46	13,08	13,72	14,34	14,99
T/K	2900	3000	3100	3200	3300	3400	3500	3600					
$\rho/(n\Omega m)$	883,3	920,4	957,6	995,4	1033	1072	1111	1150					
R/R_0	15,63	16,29	16,95	17,62	18,28	18,97	19,66	20,55					

Azok számára, akiket hidegen is érdekel az ellenállás, itt egy másik táblázat:

T/K	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120	140	160
$\rho/(n\Omega m)$	0,002	0,041	0,215	0,664	1,498	2,740	4,333	6,18	8,18	10,27	14,57	18,91	23,26
T/K	180	200	2500	300									
$\rho/(n\Omega m)$	27,64	32,05	43,28	54,8									

A kis izzó ellenállása melegen nyilván 17–18 Ω . Hidegen megmérhetjük a DMM-mel. Mivel a DMM hibája ellenállásméréskor akár $\pm 1\% \pm 10$ is lehet, érdemes egy kis trükköt bevetni. Értessük össze a mérőszinór két végét ellenállásmérés előtt. A DMM általában nem mutat nullát. Az ekkor mutatott értéket vonjuk le a méréskor mutatott értékből. Ezzel a hiba nagy része kiesik, különösen kis ellenállások mérésekor. Nekem a DMM nulla helyett 0,3 Ω -ot mutatott, az izzóra 2,3 Ω -ot, tehát az izzó ellenállása 2,0 Ω . Később pontosabban is megmérjük, nekem 1,94 Ω adódott 20 °C-on. Mivel 300 K-től 400 K-ig a volfram ellenállása 43%-kal nő, 20 °C-tól 27 °C-ig ennek a 7%-ával, ami 3%. Így R_0 értéke 2,00 Ω . Ennek alapján kiszámolhatjuk a hőfokot. Az én eredményeimet a 3.3.31. táblázat tartalmazza.

3.3.49. Kísérlet. Hogyan függ az izzó által kisugárzott teljesítmény a hőfoktól? Magasabb hőmérsékleten a kisugárzott teljesítmény majdnem pontosan megegyezik a bevitt teljesítménnyel. Egy kis része hővezetés útján vesz el a tartó szálakon keresztül. Alacsonyabb hőmérsékleten zavaró, hogy a huzal sugárzás útján a környezetből is vesz fel energiát. Ha nem vezetünk át rajta áramot, és hőmérséklete megegyezik a környezet hőmérsékletével, akkor pontosan annyi hőszugárzást nyel el, amennyit kisugároz: ha nem így lenne, másodfajú örökmozgót lehetne készíteni. Ábrázoljuk a bevitt teljesítményt a hőmérséklet függvényében. Célszerűbb lesz a logaritmusokat ábrázolni a logaritmus függvényében. A látható izzás hőmérsékletétől kezdődő szakaszra illesztünk egyenest: a számításokat és az ábrát lásd a wxMaxima programban. Az egyenes meredeksége xxx. A kisugárzott teljesítmény az abszolút hőmérséklet negyedik hatványával arányos: ez a *Stefan-Boltzmann-törvény*. \square

U_i/V	U_R/mV	I/mA	P/mW	\ln	R/Ω	T/K	\ln	Szín
0,100	102	30,91	3,091	1,128	3,235			–
0,377	205	62,12	23,41	3,154	6,069			–
0,527	245	74,24	38,98	3,663	7,099			kezdődő vörös
0,639	263	79,70	50,93	3,930	8,018			– ” –
0,858	287	87,00	74,69	4,313	9,862			világos vörös
1,042	325	98,48	102,6	4,631	10,40			sárga
1,180	345	104,5	123,4	4,815	11,29			világos sárga
1,361	374	113,3	154,2	5,039	12,01			– ” –
1,544	405	122,7	189,5	5,244	12,58			fehéres sárga
1,705	426	129,1	220,1	5,394	13,21			vakító fehéres sárga
1,894	451	136,7	258,8	5,556	13,86			– ” –
2,06	470	142,4	283,4	5,682	14,47			vakító fehér
2,21	487	147,6	326,1	5,787	14,97			– ” –
2,40	509	154,2	370,2	5,914	15,56			vakító világos fehér
2,57	527	159,7	410,4	6,017	16,09			– ” –
2,76	548	166,1	458,3	6,128	16,62			– ” –
2,90	563	170,6	494,8	6,204	17,00			– ” –
3,10	582	176,4	546,7	6,304	17,57			– ” –
3,43	613	185,8	637,1	6,457	18,46			– ” –
3,63	631	191,2	694,1	6,543	18,98			– ” –
3,79	647	196,1	743,1	6,611	19,33			– ” –
3,98	665	201,5	802,0	6,687	19,75			– ” –
4,10	673	204,0	836,2	6,729	20,01			vakító kékes fehér
4,33	696	210,9	913,2	6,817	20,53			– ” –
4,56	714	216,4	986,6	6,894	21,07			– ” –

3.3.31. táblázat

3.3.50. Kísérlet. Bizonyára észrevettük, hogy az izzólámpák volframszála általában fel van csavarva, sőt nagyobbaknál még a spirál is újra fel van csavarva. Miért? Az egyik ok nagyon prózai: a hosszú szál így kis helyen elfér. Van azonban egy másik ok is: a nagyobb, gáztöltésű izzóknál elég nagy veszteséget okoz a hővezetés. A gázon keresztül történő hővezetést egyrészt rossz hővezető töltőgázzal csökkentik (például kripton), másrészt a szál felcsavarásával. A hővezetés csökkenését egyszerű kísérlettel kimutathatjuk. Egy ellenálláshuzal átmérőjét mérjük meg, vagy becsüljük meg, például néhány menetet szorosan egymás mellé tekerve egy vonalzóra. Milliméterenként 6 A-t számítva kiválaszthatunk egy megfelelő áramforrást: vastagabb huzalhoz gépkocsi vagy szerszámgép akkumulátorát, vékonyabhoz esetleg elég lesz egy nagy elem vagy akkumulátor. Vágjunk le a huzalból némi ráhagyással annyit, aminek az ellenállása a szükségesnek felére korlátozza az áramot. Pár centit egyenesen hagyva, egy vékony csavarhúzóra, stb., tekerjük fel a drót nagyjából negyedét. A spirál melletti egyenes részt fogjuk be egy nagy krokodilcsipeszbe, amit például satuba fogunk. Ehhez a csipeszhez csatlakozik az áram-

forrás egyik sarka. A másik egy másik nagy krokodilcsipeszhez, de GONDOSKODJUNK RÓLA, HOGY AZ ÁRAMKÖRT AKKOR IS GYORSAN BONTANI TUDJUK, HA EZ A CSIPESZ TÚLMELEGSZIK! Fogjuk meg az ellenálláshuzal szabad végét, és a krokodilcsipeszt lassan csúsztassuk a huzalon. A huzal felizzik, ahol spirálozva van, ott erősebben. A kísérletet a 3.3.32. fényképen láthatjuk. \square

3.3.51. Kísérlet. Ha már ennyit foglalkoztunk az izzóval, térjünk ki korunk fényforrására, a világító diódára, vagy a „fény kibocsátó dióda” kifejezés angol rövidítésével LED-re is. Először a félvezető diódával kell foglalkoznunk. Működésének magyarázatára csak a szilárdtest fizikánál keríthetünk sor. Nagyon egyszerű, filléres alkatrész: kinézetre úgy néz ki, mint egy ellenállás, de az egyik irányban vezet, a másikban nem. Hogy merre, az általában kiderül a burkolat jelzéséből: az egyik végén rendszerint egy fekete gyűrű van. Először egy germánium diódát vizsgálunk meg. Ez tulajdonképpen a rádiózás őskorából ismert „detektor” javított változata. A „detektor” egy természetes galenit (PbS) kristályka volt, amihez egy finom fémhegyet nyomtak. A tús germánium dióda lényegében ugyan ilyen, de a galenit kristályt egy germánium kristály helyettesíti, a tű-hegy pedig vékony volfram drót. Üvegburkolatú diódánál láthatjuk is a tűt. Én egy már rég nem gyártott Tungsram diódát használtam, egy OA1160-as típust, de bármilyen jó lesz. Maximum 5 mA áramot kívánunk átvezetni rajta. A mérés lényegében ugyan az, mint az izzónál, de itt egy 100 Ω , 1%-os ellenállást kötünk sorba a diódával. A feszültségosztóról kis lépésekben növelve adjunk egyre nagyobb feszültséget a diódára, és mindig mérjük meg a feszültségesést a diódán és az ellenálláson. Maximum 2,4 V-ra lesz szükségünk. Ha a diódán a feszültségesés már 1 V, és még mindig nincs mérhető áram, a dióda záróirányban van bekötve: fordítsuk meg, és kezdjük mindent előlről. Az én mérési eredményeim:

U/mV	56	76	89	127	156	166	174	192	240	265	310	324	354
I/mA	0,002	0,005	0,008	0,024	0,054	0,067	0,080	0,111	0,253	0,347	0,551	0,621	0,795
U/mV	421	475	535	583	656	722	796	884					
I/mA	1,195	1,571	2,00	2,37	2,96	3,52	4,17	5,00					

Mint látjuk, az áramerősség a feszültséggel nagyon gyorsan, „exponenciálisan” nő. Ha az áramerősség átlép egy megengedett maximális értéket — ennél a típusnál 5 mA-t — a dióda tönkremehet: zárlatos lesz (mindkét irányba vezet) vagy szakadásos (egyik irányba sem vezet). Ezért a diódát SOHA NE KAPCSOLJUK KIS BELSŐ ELLENÁLLÁSÚ ÁRAMFORRÁSRA, kapcsoljunk sorba vele egy megfelelő nagyságú ellenállást.

Mi történik, ha záró irányba kapcsoljuk az áramkörbe a diódát? Nagyon kis feszültségnél nagyon kicsi az áram, és a feszültség növelésével egy kicsit nő, de hamar állandósul, és a feszültség növelésével sokáig állandó marad. Egy határfeszültség felett a dióda átüt és tönkremegy, ez ennél a típusnál legalább 15 V. Az állandósult záró irányú áramot könnyen meghatározhatjuk, ha egy 4,5 V-os telepet kötünk a diódára ZÁRÓ IRÁNYBAN, mert egyébként azonnal tönkremegy, és megmérjük az áramot. Úgy is eljárhatunk, hogy a biztonság kedvéért egy néhány $k\Omega$ -os ellenállást kötünk sorba a diódával és az árammérővel. Én 3,1 μA záró irányú áramot mértem. A dióda adatait megtudhatjuk, ha rákeresünk a hálózaton a gyári adatlapjára.

A legtöbb DMM-nek van egy dióдавизsgáló állása. Ebben az állásban a két mérőhegy között maximum 1–2 mA áram és maximum 3 V körüli feszültség léphet fel. Ha nyitó irányban kapcsoljuk a diódát a mérőhegyek közé, akkor a nyitófeszültséget mérjük mV-ban. Záró irányban túlsordulást mutat a mérő. Szakadt diódánál mindkét irányban túlsordulás van, zárlatosnál mindkét irányban 0 mV. Az OA1160-as diódánál 356 mV nyitófeszültséget, egy OA1180-as tús germánium diódánál 189 mV nyitófeszültséget mértem. Egy 1N4149-es típusú szilícium diódánál a nyitófeszültségnek 609 mV-ot mértem. □

3.3.52. Kísérlet. Ha nem lényeges, hogy a nyitófeszültség kicsi legyen, akkor általában szilícium diódákat használunk. Ezek zárófeszültsége és nyitó árama általában jóval nagyobb. Például az 1N4149 típus maximális nyitó árama 500 mA, zárófeszültsége pedig 100 V. Ugyanúgy, mint az előző kísérletben, megmérve az áramot a feszültség függvényében az alábbiakat kaptam:

U/mV	352	390	429	507	522	581	635	662	685	704	718	733	748	763
I/mA	0,002	0,005	0,012	0,062	0,090	0,305	0,864	1,556	2,43	3,47	4,48	5,98	7,59	9,73

Valóban exponenciálisan függ az áram a feszültségtől, vagy ezt csak díszítő jelzőként használtuk az előző kísérletnél? Az elmélet szerint az összefüggés

$$I = I_0 (e^{q_e U / (kT)} - 1),$$

ahol I_0 a záró irányú áram, k a Boltzmann-állandó, q_e pedig az elektron töltése. A kT/q_e mennyiség feszültség jellegű, értéke $U_0 = 25,69$ mV normál hőmérsékleten (25 °C). Ezzel az összefüggés

$$I = I_0 (e^{U/U_0} - 1).$$

A képlet elég jó közelítés, de a valóságban U_0 jóval nagyobb, akár kétszeres is lehet, és nem is állandó, például mert a dióda melegszik.

Ha megpróbáljuk meghatározni egy szilícium diódára a záró irányú áramot úgy, mint az előző kísérletben, nullát mérünk: az áram túl kicsi. Mégis van egy trükk, amivel ezt a nagyon kicsi, nA nagyságrendű áramot is meg tudjuk mérni. Használjuk azt az összeállítás, amit az előző kísérletben, a DMM-et sorosan kötjük be, de voltmérő állásban! Tudjuk a leírásából, hogy mennyi a feszültségosztójának az ellenállása, az enyémnek 10 MΩ. Megmérve a feszültséget, én 46,5 mV-ot mértem. Mivel 200 mV-os állásban volt a mérő, ez a feszültségese a teljes 10 MΩ-on jött létre. Ez 4,65 nA áramot jelent.

Meg tudjuk-e határozni mérésünkből U_0 közelítő értékét? Rendezzük át a fenti képletet és vegyük mindkét oldal logaritmusát! Azt kapjuk, hogy

$$\frac{U}{U_0} = \ln(I/I_0 + 1).$$

Ha tehát $\ln(I/I_0 + 1)$ függvényeként ábrázoljuk a feszültséget, egyenes kell kapnunk, aminek meredeksége $1/U_0$. Az számításokat és az ábrát lásd a wxMaxima fájlban. A talált U_0 értéke mV.

3.3.53. Kísérlet. Egy (vagy több sorbakapcsolt) szilícium dióda elég állandó nyitó irányú feszültségét állandó feszültség előállítására is felhasználhatjuk. Nagyjából állandó áramot vezetünk át rajta egy ellenállás segítségével. Még ha az áram akár 50%-kal is megváltozik, a nyitófeszültség csak pár 10 mV-tal változik meg. Feszültségstabilizálás céljára LED is használható, de gyártanak külön erre a célra úgynevezett Zener-diódákat is. Ezek nyitó irányba közönséges diódák, de záró irányba is lehet használni őket: meghatározott feszültségnél (ez 3,3-tól több tíz volt lehet) áram indul meg, amely néhány 10 mA-ig nem teszi tönkre a diódát.

Példaként a kapcsolási rajzon egy dióдавizsgáló áramkört mutatunk be. A 9 V-os elem áramát a 4,7 k Ω -os ellenállás maximum 2 mA-re korlátozza. Ha a mérendő dióda nincs csatlakoztatva, vagy záró irányban van bekötve, akkor a voltmérő a 3,3 V-os Zener-dióda nyitó feszültségét méri. Ha a diódát nyitó irányban kötjük be, az összes áram azon folyik át, és a műszer a nyitó feszültségét méri. \square

3.3.54. Kísérlet. A LED egy különleges anyagú dióda, ami nyitó irányú áram hatására világít: DMM-el mérve nekem mindegyik világított, bár a nyitófeszültség túlsordult. A LED zárófeszültsége általában nem nagy. Nyitófeszültsége a színtől függ, tipikusan infravörös 1,4 V, vörös 1,6 V, narancs 2,0 V, sárga 2,2 V, zöld 2,4 V, kék 3,2 V, ultrabolya 3,5 V. Fehér LED tulajdonképpen nincs, hanem egy kék LED-et olyan festékkel vonnak be, amely a fény egy részét vörös illetve zöld fénné alakítja, így alakul ki a fehér fény. Ezt majd a fénytanban megtárgyaljuk. A LED működését a szilárdtest fizikában tárgyaljuk a többi félvezető eszközzel együtt. Az adatlapon meg szokták adni a fényerejét is candela-ban, rövidítve cd. A latin szó gyertyát jelent, eredetileg azt a fényerőt jelentette, amivel egy 43–45 mm magas lánggal égő gyertya világít vízszintes irányban (felülről a láng kisebbnek látszik, felfelé a gyertya kevésbé világít). Ma már másként, pontosabban határozzák meg, lásd a fénytanban. Persze, arra az irányra adják meg a fényerőt, amerre a LED legerősebben világít, a hossz tengelye irányában, de megadják egy görbével azt is, hogy más irányokban mennyivel gyengébb a fény. Az adatlapon szerepel a maximális nyitóirányú áram is. Egy vörös LED-re a következő nyitóirányú áramokat mértem (a feszültségosztóra 4,8 V feszültséget kapcsolva):

U/mV	1507	1614	1714	1802	1853	1898	1942	1976	1980
I/mA	0,002	0,015	0,120	0,670	1,510	3,08	4,87	6,84	8,58

A LED 2 μ A-nél még nem világított észrevehetően, de 15 μ A-nél már igen. A fényerő nagyjából arányos az árammal. A záró irányú áramot 0,04 nA-nek mértem. Természetesen a LED-et, mint bármelyik diódát, nem kapcsolhatjuk kis belső ellenállású áramforrásra: kössünk sorba vele egy ellenállást, ami korlátozza az áramot. Óvjuk a sztatikus töltésektől is. \square

3.3.55. Kísérlet. Az elektronokat ki is szabadíthatjuk a fémből. Először *Edison* észlelte, hogy egy izzóban az izzószál közelében lévő fémlemez negatív töltést kap. A jelenséget az okozza, hogy magas hőmérsékleten az elektronok mintegy „elpárolognak” a fémből és feltöltik a fémlemezt. Kellő óvatossággal a hálózati áramot fogjuk felhasználni. Vásároljunk egy 15 W-os hálózati izzót, amelyet hűtőszekrényekben használnak, vagy vegyünk kölcsön a hűtőből. Ezekben a kis izzókban légüres tér van. A foglalata

E14-es (Edison-14 mm-es) úgynevezett mignonfoglatat. Keresünk egy lámpát, aminek ugyanilyen a foglalat. A kis izzó üvegét burkoljuk be alumínium fóliával, vigyázva, hogy az izzó becsavarása után SE ÉRJEN A FOGLATAT FÉM RÉSZÉHEZ SEHOL SEM. A biztonság kedvéért A LÁMPÁT HÚZZUK KI A KONNEKTORBÓL ÉS CSAK AZ IZZÓ BECSAVARÁSA UTÁN, AMIKOR MÁR AZ ALU FÓLIA IS A HELYÉN VAN, AKKOR DUGJUK VISSZA. Tudni kell, hogy a hálózati áram egyik vezetéke a földdel van összekötve, a másik feszültsége viszont vagy -320 V-tól $+320$ V-ig változik másodpercenként 50-szer oda és vissza. Mikor a feszültség negatív, a szálból „elpárolgó” elektronokat a szál eltaszítja, és azok összegyűlnek az üvegbúra belsején. A fólia alatt a búra erősen felmelegszik, és a meleg üveg vezet egy kicsit, így a feszültség a fólián is megjelenik. Meg lehetne keresni, melyik a földelt vezeték, és megmérni a feszültséget ehhez képest, azonban egyszerűbben is célt érhetünk. Egy földelt hosszabbító földeléséhez képest mérjük meg a digitális multiméterrel az egyenfeszültséget, tehát A HOSSZABÍTÓNÁL SZABADON HOZZÁFÉRHETŐ, A CSATLAKOZÓ DUGÓ KÜLSŐ FÉM RÉSZÉHEZ CSATLAKOZÓ FÖLDELÉS és az alumínium fólia között mérünk egyenfeszültséget. Mindenesetre biztonsági okokból A MÉRŐZSINÓROKNAK CSAK A SZIGETELT RÉSZÉT FOGJUK. Én $0,2$ V-ot mértem, több különböző állásban is, és a fólia volt a negatív. Más eredmény is lehetséges, és a digitális multimétertől is függ az eredmény, de mindig a fólia a negatív. Miért ilyen kicsi a mért feszültség, és miért függ a multimétertől? Az én multiméterem ellenállása 10 M Ω . Akkor mutat $0,2$ V-ot, ha 20 nA áram folyik át rajta. Az üveg belső felületén valójában a feszültség akár -300 V is lehet, de az üveg ellenállása óriási, nagyságrendben 10 G Ω , és ennyire korlátozza az áramot. Ha a multiméter ellenállása csak 1 M Ω lenne, csak $0,02$ V-ot mutatna. \square

Az Edison által felfedezett jelenség óriási fejlődést hozott. Az izzószál és a búrában lévő fémlémez között az áram csak egy irányba folyhat, mert a fémlémezből nem lépnek ki elektronok: ez is egy dióda. Ha az izzószálnak a közelébe egy fémrácsot teszünk, amelynek rúdjai, vagy inkább huzaljai nagyságrendben olyan messze vannak egymástól, mint az izzószáltól, ennek a néhány tized V-os negatív feszültsége segítségével szabályozni lehet az áramot, mert a negatívabb feszültség több elektront „kerget vissza” az izzószálra. Az így létrejött *elektroncső* — a *trióda* — erősítésre alkalmas. Az elektroncső — esetleg több rácscsal — tette lehetővé a távolabbra való telefonálást, a rádiót, a televíziót, hang-erősítést, stb. Ezzel elérkezett az elektronika első aranykora. (A másodikat a tranzisztor feltalálása hozta létre, a harmadikat pedig az integrált áramkörök bevezetése.)

Ha már mérünk, akkor váltakozó feszültség állásban is mérjük meg a feszültséget az alumínium fólia és a földelés között — természetesen ugyancsak NAGYON ÓVATOSAN. Mindig a FEKETE ZSINÓRT KELL A FÖLDELT VEZETÉKHEZ KÖTNI, mert a műszer árnyékol, és ez a zsinór van az árnyékoláshoz kötve. Az árnyékolás véd a „kóbor” hatások ellen, de csak akkor igazán hatásos, ha földelve van. Én itt nagyobb, $6-7$ V-os feszültséget mértem. Hogy kerül ez a fóliára? Erre majd visszatérünk. És hogyhogyan nem zavarja ez a nagyobb váltakozó feszültség a kicsi egyenfeszültség mérését? Ez a DMM működési elvén múlik. ** A bejövő feszültséggel arányos áram egy kondenzátort tölt, általában pontosan $0,1$ s-ig. Utána a DMM a feltöltött kondenzátort sűti ki állandó árammal, és tulajdonképpen a kisütéshez szükséges időt méri. Ez arányos a kondenzátor feszültségével. Ha a hálózati váltakozó feszültséggel arányos „kóbor áram” kerül a bemenetre, az ötször az egyik, ötször a másik irányba folyik, így végeredményben ugyanannyi lesz a

kondenzátor feszültsége. **

3.3.56. Kísérlet. A potenciométerünket úgynevezett *Wheatstone-hídként* is használhatjuk. Ez ellenállások mérésére szolgál. Az eszme, hogy egy másik feszültségosztót hozunk létre egy ismert R és egy ismeretlen R_x ellenállásból. Ennek az egyik végét a feszültségosztó egyik, a másik végét a másik végéhez kapcsoljuk, a tápfeszültséggel együtt. A ábra mutatja a kapcsolást, a vastag vonal a mérőhuzal. A csúszka és az R - R_x osztó közepe között akkor nincs feszültség, ha arányuk megegyezik a mérőhuzal két darabja ellenállásának — tehát hosszának — arányával. Nyilván célszerű, ha R és R_x azonos nagyságrendű, így a csúszka a mérőhuzalnak nincs nagyon a szélén. Kis ellenállásokat is elég pontosan mérhetünk vele. Nagyon kis ellenállásoknál a hidat nagyon kis feszültséggel tápláljuk: az elem és a híd közé egy nagyobb ellenállást kapcsolunk. A feszültség pontos értékének nincs jelentősége.

Ezen az elven mértem meg pontosabban a kis izzó ellenállását hidegen. A Wheatstone-hídba a $3,3 \Omega$ -os ellenállás és a kis izzó volt bekapcsolva. A hidat egy kis akkumulátorral egy $220\text{-}\Omega$ -os ellenálláson keresztül tápláltam, így ezen az ágon kb. 4 mA , a másikon kb. 1 mA folyik. A nagyjából 20Ω -os mérődróton tehát mm-enként nagyjából $20 \mu\text{V}$ feszültségésés jön létre. Fülhallgatóval megkeresve azt a pontot, amely ugyanolyan feszültségű, mint az izzó és a $3,3 \Omega$ -os ellenállás csatlakozási pontja, az 37 cm -nél volt. Tehát $R_x/3,3 = 37/63$, ahonnan $R_x = 1,94 \Omega$.

Egyébként az izzón eső feszültséget $8,5 \text{ mV}$ -nak, az ellenálláson esőt $14,5 \text{ mV}$ -nak mértem. Innen $R_x/3,3 = 8,5/14,5$, amiből $R_x = 1,93 \Omega$. Miért pontosabb ez a mérés, mint a közvetlen ellenállásmérés? Mert 1 mA helyett 4 mA -t használtunk. Nem túl sok ez az áram, nem melegíti fel jelentősen a volfram szálat? Az izzó névleges teljesítménye $0,7 \text{ W}$. Feltehetjük, hogy ennek legalább 10% -a, azaz 70 mW hővezetéssel, a hozzávezetésén keresztül vész el. Ha 4 mA -t használunk, a feszültségésés 8 mV , a teljesítmény $32 \mu\text{W}$. Ez vagy kétezerszer kisebb, mint a működő izzó szálának hőmérséklete, tehát ennyiszor kisebb lesz a hőmérséklet különbség is, azaz $1,5 \text{ }^\circ\text{C}$. Ez még elhanyagolható hibát okoz, de lényegesen több áramot nem használhatunk. \square

3.3.57. Kísérlet. Térjünk vissza az áram mágneses hatásához. Vegyük elő újra tekercsünket. Tegyük bele félig egy darabka lágvasdrótot. Ha a tekercsen keresztül rövidre zárunk egy elemet, a tekercs berántja a drótot a belsejébe. Mi a magyarázat? A tekercs mágneses terében a drót mágneses lesz. Ha mondjuk a tekercs északi mágnességű végénél van, akkor a déli pólusa fekszik a tekercsben, az északi kívül. A déli pólust a tekercs vonzza, az északit taszítja, de gyengébben, mert kijebb van. Egyébként egy szöggel is próbálkozhatunk. Ha nem túl nehéz, berántja a tekercs. \square

3.3.58. Kísérlet. Tegyük most két egyforma lágvas drótot a tekercsbe. Az áram bekapcsolásakor a drótok szétugranak. A magyarázat nyilvánvaló: mágnesek lettek, de egyforma pólusaik fekszenek egymás mellett. Ezen az elven is lehet úgynevezett *lágvasas árammérőt* készíteni, ha valahogy mérjük a taszítóerőt. Egyébként a behúzóerőt mérve is lehet ilyen árammérőt készíteni. \square

3.3.59. Kísérlet. Vágjunk le két lágvas drót darabot, mindkettő nagyjából fele olyan hosszú legyen, mint a tekercs. A tekercset húzzuk szét kicsit a közepénél, hogy

lássunk is valamit, és a drótokat tegyük a tekercsbe két felől, úgy, hogy a végük egymás mellett, 1–2 mm távolságban feküdjön egymástól. Az áram bekapcsolásakor a drótvégek összetapadnak. A magyarázat most is nyilvánvaló: mágnesek lettek, de ellentétes pólusaik fekszenek egymás mellett, így vonzzák egymást. \square

3.3.60. Kísérlet. Ha egy szeget teszünk a tekercsbe és bekapcsoljuk az áramot, egy iránytűvel kimutathatjuk, hogy a tekercs mágneses tere sokkal erősebb, mint anélkül. Egyébként anyagától függően a szeg az áram kikapcsolása után is többé-kevésbé mágneses marad. Miért lesz vassal a mágneses tér erősebb, mint anélkül? A válaszhoz egy gondolat-kísérletet kell elvégeznünk. \square

3.3.61. Kísérlet. A \mathbf{H} mágneses térerősségen kívül van még egy másik mágneses mező is, a *mágneses indukció*; jele \mathbf{B} , egysége a tesla (jele T), Tesla neves feltaláló nevéből. Szokásosabb egységekkel kifejezve $T=Vs/m^2$. A mágneses indukció sokszor még hasznosabb, mint a mágneses térerősség, mert ennek az erővonalai mindig záródnak. Vákuumban $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, ahol μ_0 a vákuum *mágneses permeabilitása*, ami magyarul *fajlagos mágneses vezetőképesség* lenne. Más anyagokban $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, ahol μ az illető anyag mágneses permeabilitása. Sokszor a $\mu_r = \mu/\mu_0$ *relatív mágneses permeabilitást* adják meg, ami azt mondja meg, hányszor jobban vezeti az illető anyag a mágnességet, mint a vákuum. Ez mindig 1 körül van, kivéve a jól mágnesezhető anyagokat. Például levegőre μ_r értéke 0,03 ‰-kel nagyobb mint egy. Ez abból ered, hogy oxigénre 0,17 ‰-kel nagyobb mint 1, mert nitrogénre egy nagyon kicsit kisebb mint egy. Vasban viszont az 1000-et is meghaladhatja; ferritekben is 100-as nagyságrendű. A vákuum permeabilitása $\mu_0 \approx 1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$.

Gondolatban egy vasgyűrűre tekerjünk fel egy tekercset. Mekkora lesz a vasban a mágneses indukció? Nagyságrendben vagy 1000-szer nagyobb, mint a vas nélkül. Most gondoljuk el, hogy vasgyűrű helyett egy vékonyabb-vastagabb vasakból, esetleg más anyagokból is álló gyűrűre tekertük fel a tekercset. Ha a gyűrű egy szakaszában \mathbf{B} a mágneses indukció, akkor ott a mágneses térerősség $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$. Mivel a \mathbf{B} -vonalak a gyűrűben körbemennek, ott záródnak, célszerűbb lesz az összes \mathbf{B} -vonalat tekinteni. Ez B szorozva a keresztmetszet A területével, $\Phi = AB$, a *mágneses fluxus*. A szó átfolyást jelent, ez az adott keresztmetszeten átfolyó B -vonalak összesége. Akárhol vesszük a keresztmetszetet, a teljes keresztmetszetre vett fluxus mindenütt ugyanakkora, mert a \mathbf{B} -vonalak körbe mennek. A fluxusból akármelyik helyen, ha A a vas keresztmetszete, akkor ott $B = \Phi/A$, így $H = \Phi/(A\mu)$. Ha ennek a szakasznak a hossza ℓ , akkor ott ennek a H -nak a létrehozásához $\Phi\ell/(A\mu)$ áram, vagy ahogy mondani szokás, *gerjesztés* kell, azaz ennyi ampermenet. Összeadogatva a gyűrű minden szakaszára, az kapjuk, hogy $I = \Phi\Sigma$, ahol I a teljes gerjesztés, Σ pedig $\ell/(\mu A)$ alakú tagok összege az egyes szakaszokra. Mivel μ a fajlagos mágneses vezetés, reciproka a fajlagos mágneses ellenállás. Ez szorozva a hosszal és osztva a keresztmetszettel a *mágneses ellenállás* az egyes szakaszokra, Σ pedig a teljes mágneses ellenállás. Amit kaptunk, az a *mágneses Ohm-törvény*. Benne az ellenállás helyett a (sorosan kapcsolt) mágneses ellenállások összege szerepel, áram helyett a mágneses fluxus, feszültség helyett a teljes gerjesztés. Ugyanúgy, mint ahogy egy elektromos áramkörben több helyen is lehet feszültségforrás, a mágneses kör gerjesztése is származhat több tekercsből. Persze, az ellenkező irányú áram negatívnak számít.

Ez a gondolatmenet lényegében pontos, de ha a gyűrűnek hosszabb része nem mágnesezhető anyagból ($\mu_r \approx 1$) készült, akkor az erővonalak részben „kiszóródnak”: a legkisebb mágneses ellenállás ezen a szakaszon akkor adódik, ha nő a keresztmetszet, „az erővonalak taszítják egymást”. Egyébként az erővonal elképzelés Faraday-től származik.

Térjünk most vissza oda, ahonnan indultunk: miért lesz erősebb a tekercs mágneses tere vasmaggal? Egy kis átmérőjű tekercsnél a \mathbf{B} -vonalak a tekercsen kívüli részen záródnak, ugyanúgy, mint egy rúd-mágnesnél. Vas-mag nélküli tekercsnél a külső rész mágneses ellenállása kicsi a belső részhez képest, hiszen a mágneses vezetőképessége ugyanannyi, hossza kicsit nagyobb, de keresztmetszete nagyon nagy a belső részhez képest. Ha vas-magot teszünk a tekercsbe, akkor a belső rész mágneses ellenállása nagyon lecsökken. A gerjesztés ugyanannyi, a fluxus nagyon megnő. Ez a jóval nagyobb fluxus, mivel kívül μ változatlan, jóval nagyobb \mathbf{H} -t jelent.

** Még egy megjegyzés: Az elektromosságnál is be lehet vezetni a $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ összefüggéssel egy másik vektormezőt, ez az *elektromos eltolódási vektor*. Mint tudjuk, $\varepsilon > \varepsilon_0$ onnan ered, hogy az atomok elektromos töltései egymáshoz képes eltolódnak, esetleg a már eredetileg is poláris molekulák befordulnak az elektromos mező irányába; innen ered az elnevezés. A \mathbf{D} mező vonalai haladnak mindig töltéstől töltésig, akkor is, ha különböző dielektrikumok vannak jelen, az \mathbf{E} -vonalak csak akkor, ha egyféle dielektrikum van jelen. ** \square

3.3.62. Kísérlet. A következő kísérlethez erős áramra lesz szükségünk. Nagy áramot adó akkumulátoroknál — autóakkumulátor, kézi szerszám-gép akkumulátora — a rövidre zárás nem igazán jó eljárás, mert a drága akkumulátor tönkremehet. Biztonságosabb, ha egy nagy teljesítményű ellenállást iktatunk közbe. Ilyen a *lámpaellenállás*. Halogénizzókból készíthetjük el. Bármilyen 12 V-os halogénizzókat használhatunk, de a gépkocsikban használt H4-es reflektor izzókban két izzószál van, az egyik 60 W, a másik 55 W teljesítményű. Rendszerint a tompított fényt adó izzószál megy tönkre. Ilyen „félíg kiégett” izzók már semmit sem érnek, ezeket fogjuk felhasználni. Ha megnézzük az izzót, a kvarcüveg búrában három drót van. (A búrát egyébként nem jó kézzel megfogni, mert akkor gyorsabban megy tönkre a zsíryomoktól. Alkoholal meg lehet tisztítani.) A három drótból az egyik szélső mindkét izzószálhoz hozzá van kötve, a középső csak a tompított fény izzószálához, a másik szélső csak a távoli fényéhez. Alul három lábat látunk, nem szimmetrikusan. Ha úgy tartjuk az izzót, hogy alulról nézve a középső láb tőlünk legtávolabb legyen, akkor balra van a közös kivezetés, jobbra a távoli fényé. E két szélső között kell vezetnünk az áramot, amit az izzó 12 V-nál ≈ 5 A-re korlátoz. Nagyobb áramhoz több izzót kapcsolunk párhuzamosan. A 3.3.33. fénykép mutatja a kész lámpaellenállást. Lényegében egy falemez, amiből megfelelő átmérőjű köröket vágunk ki. Alul az egyik szélső kivezetést, a közöset egy rézlemezhez csavarozzuk, a másikra vastag dróttal, krokodilcsipeszekkel csatlakozzunk. Úgy használjuk, hogy a falemezt az asztal széléhez fogatjuk felfelé az égőkkel. Autóakkumulátorból rövid időre akár 30 A-t is kivehetünk, hiszen indításkor több száz ampert kell leadnia. Szerszám-gép akkumulátora 10–15 A-t képes leadni, némelyik többet is, keressünk rá a leírására a hálózaton. Ha az akkumulátor 12 V-nál magasabb feszültségű, két izzót kell sorba kapcsolni 24 V-ig. (Ennél nagyobb feszültséget inkább ne használjunk.) Az izzók felénél befelé vezetjük az

áramot a sínhez, a másik felénél kifelé. Fontos a jó csatlakozás! Persze, hibátlan izzókat is használhatunk, akár párhuzamosan, akár sorosan kapcsolva a két izzószálat. \square

3.3.63. Kísérlet. Vajon milyen egy vékony, hosszú, egyenes vezeték mágneses tere? Egy óriási átmérőjű tekercs egy darabjának tekinthetjük. A jobbkez-szabály szerint, ha jobb kezünket a vezetékre fektetjük úgy, hogy ujjaink az áram irányába mutassanak, akkor az „északi sarok” a hüvelykujjunk irányába van. De melyik oldalon? A tekercsnél a tenyerünk felőli oldalon; most is, tehát a vezeték túloldalán. Forgassuk a tenyerünket úgy, hogy közben ujjaink az áram irányába mutassanak: az irány is körbe fordul. Tehát az erővonalak körbe mennek. Milyen erős a tér? Olyan erős, hogy a teljes gerjesztés, a Hl -ek összege az I áramerősség legyen. Ez a *gerjesztési törvény*. Minden olyan zárt görbére igaz, amely egyszer kerüli meg a vezetéket. Mivel r sugarú kör kerülete $2\pi r$, a huzaltól r távolságra a térerősség $H = I/(2\pi r)$. Ki tudnánk-e mutatni ezt a mágneses teret? Igen, ha elég erős áramot használunk, ami könnyű a lámpaellenállással. A 3.3.34. fényképek mutatják az összeállítást és az erővonalképet. \square

3.3.64. Kísérlet. Meg tudnánk-e magunk mérni a mágneses tér erősségét egy vezeték esetén? Könnyen. Azt fogjuk kihasználni, hogy valójában a vezeték által létrehozott mágneses térhez hozzáadódik a Föld mágneses tere. Csak meg kell keresnünk azt a pontot, ahol a két tér eredője nulla, azaz a két mező egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú. Ez a függőleges vezetéktől keletre vagy nyugatra van, attól függően, hogy lefele vagy felfele megy az áram. Könnyen kikereshetjük egy kis iránytűvel. Az iránytűt tolva közelebb a vezetékhez, egyszer csak „megbolondul”, hirtelen elfordul, majd irányt is vált. Ez például 5 A áramerősségnél kb. 5 cm távolságban következik be. Mérve az áramerősséget ellenőrizhetjük a tanult összefüggést. Én 8,30 A áramot használtam, ami függőlegesen lefelé haladt, és a tű a vezetéktől keletre 78 mm-re „bolondult meg”, ahol a mágneses tér $\approx 16,9$ A/m. A két mező eredőjének erővonalképét a mellékelt programmal rajzoltattam ki.

3.3.65. Kísérlet. Ha az áram mágneses teret kelt, az hat a közelben lévő áram átjárta vezetőre. Ezt könnyen kimutathatjuk, ha egy alumínium fóliából levágott nagyjából 1 cm széles, 1 m hosszú csík két végét csipeszbe fogjuk egy-egy rézdróttal együtt. A csipeszeket fogjuk össze egy befőttes gumival, közéjük egy madzagot téve. A madzagot feszítjük ki két szék karfája között. Egy elem áramát vezessük a rézdrótokon át a szalagba. A szalag kihasasodik, a két szára taszítja egymást. Programmal kirajzoltattuk a két mező eredőjét. \square

3.3.66. Kísérlet. Mi történik, ha két szalagban az áram párhuzamos? Vágjunk le egy másik szalagot is. Mindkettőt egy-egy csipesszel fogjuk össze elég hosszú rézdróttal. Az egyik rézdrótot gémpapocccsal erősítsük a másik szalag földön fekvő végéhez, a másik rézdrót és az első szalag földön fekvő vége közé kapcsoljunk elemet. A drótokat elég távol vigyük le a földre. A szalagok vonzzák egymást. Programmal kirajzoltattuk a két mező eredőjét.

** Nemrég még az áramerősséget ezzel az erővel definiálták: 1 A az az áramerősség amely ha mindkét dróton átfolyik, azok 1 m hosszú párhuzamos egyenes szakasza 1 m távolságból $2 \cdot 10^{-7}$ N erővel hat egymásra. Ennek az előnye az volt, hogy mérleggel lehetett

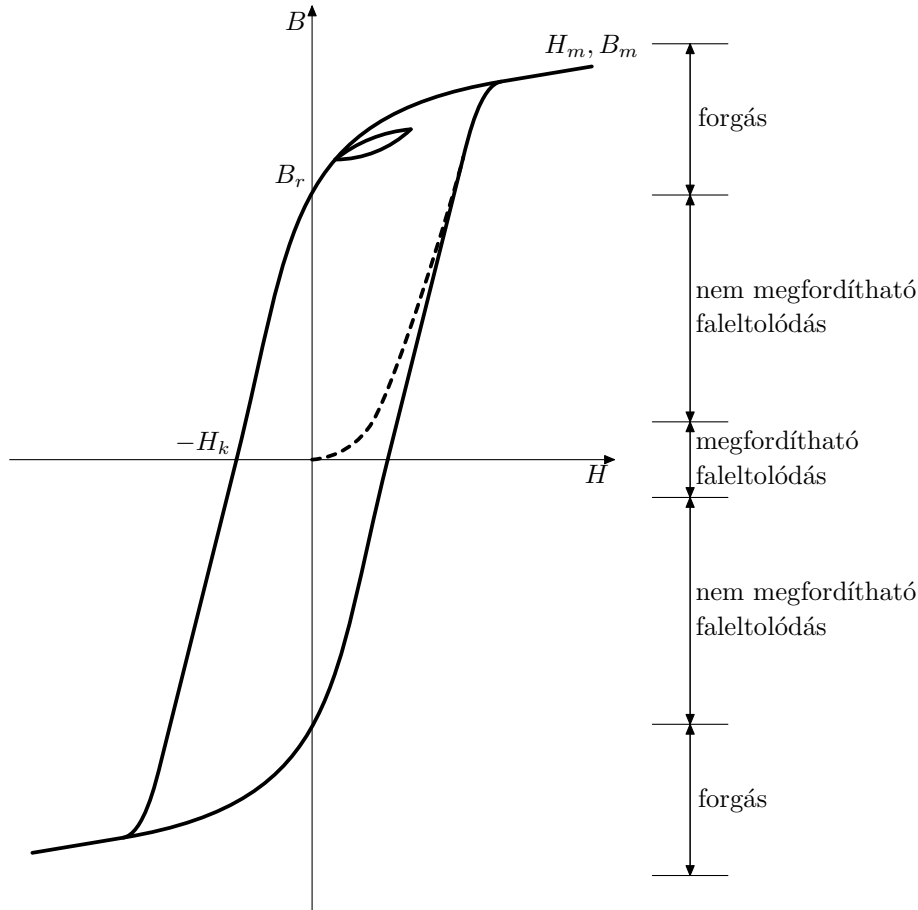
áramot mérni. Ugyan nehéznek tűnik ilyen kis erőt mérni, de a drótokat lapos tekercsre lehet tekerni, és közel vinni egymáshoz. Egyébként ezen az elven villamos teljesítményt is lehet mérni: az egyik, kis ellenállású tekercsen átvezetik az áramot, és annak mágneses terében foroghat egy nagy ellenállású kis tekercs, ami az áramfogyasztóval párhuzamosan van kapcsolva. Az egyik mágneses tere az árammal arányos, a másiké a feszültséggel, a fellépő forgatónyomaték a kettő szorzatával. **

Milyen erő hat töltésekre elektromágneses térben? A formula $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Az első tagot már ismerjük, $Q\mathbf{E}$ a töltésre ható elektromos erőtér hatása. A másik tagban szerepel a sebesség és a mágneses indukció. Az erő ezek vektori szorzatával arányos, úgyhogy mindkettőre merőleges. Mozgó töltések áramot jelentenek, jobb szeretnénk ezt a tagot az áramerősséggel kifejezni. Az I áram t idő alatt $Q = It$ töltést jelent, és ha az elmozdulás \mathbf{l} , akkor a sebesség $\mathbf{v} = \mathbf{l}/t$. Így ez a tag $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Ha nem egyenesvonalú a mozgás, akkor az elmozdulás kis elmozdulásvektorokból áll össze, ezekre külön-külön kell számolni és összeadogatni. Példaként számoljuk ki az I_1 illetve I_2 áramot vivő ℓ hosszú párhuzamos vezetők közti erőt, ha távolságuk r . Az első vezetőtől r távolságban a mágneses tér $H = I_1/(2\pi r)$, így az indukció $B = \mu_0 I_1/(2\pi r)$. Innen az erő, mivel a másik vezető merőleges a térre, $F = \mu_0 I_1 I_2 \ell/(2\pi r)$, és vonzóerő a vektori szorzat definíciójából. ** Egyébként az áramerősség régi definíciójából $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$. Az új definícióval ez már nem áll fenn pontosan, csak közelítően. **

3.3.67. Mágnesezési görbe és hiszterézis. Az előző gondolat kísérlet alapján \mathbf{B} és \mathbf{H} kapcsolata nagyon egyszerűnek tűnik, arányosak egymással. Nem mágnesezhető anyagoknál ez nagyon jó közelítés. Mágnesezhető anyagoknál a kapcsolat nem ilyen egyszerű, nem arányosak egymással, sőt, \mathbf{B} a vas „előtörténetétől” is függ, és általában nem is ugyanannyi mindenütt egy vasdarabban, még ha \mathbf{H} nulla, akkor sem. A valóságos viszonyokat a 3.3.35. ábra mutatja.

Foglalkozzunk először a szaggatott vonallal. Ez a vasdarab első mágnesezésére vonatkozik. Látjuk, hogy nem egyenes, tehát μ nem állandó. A görbe meredeksége kezdetben kicsi, ez a *kezdeti permeabilitás*. Ezután a meredekség nő, a B/H hányados egy maximumot ér el, majd csökkenni kezd. A H növelésével B tovább nő, de egyre lassabban. Érdemes \mathbf{B} -t két részre bontani: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$. Az első tag a jobb oldalon \mathbf{B} lenne vákuumban, a második a *mágnesezettség*. (Ez utóbbiból számítható ki \mathbf{m} , ha szorozzuk a térfogattal.) Egy elég nagy mágneses térerősségtől M már nem nő tovább, ez az értéke a *telítési mágnesezettség*, M_t . Ekkor $H = H_t$ és $B = B_t$. Például egy lágyvasfajtánál a kezdeti permeabilitás $\mu_r = 300$, majd a B/H hányadosból számítva felmegy $\mu_r \approx 5000$ -re. Amikor $H = 2 \text{ kA/m}$, akkor $B \approx 1,5 \text{ T}$. Végül $H = H_t \approx 80 \text{ kA/m}$ -nél elérjük a telítési mágnesezettséget, ami $M_t \approx 2,1 \text{ T}$. Ekkor $\mu_0 H \approx 0,1 \text{ T}$, a továbbiakban csak ez nő tovább.

Mi történik, ha a mágneses tér erősségét valamilyen H_m maximális térerőig növeljük, majd elkezdjük csökkenteni, sőt, ellenkezőjére változtatjuk egészen $-H_m$ -ig, majd vissza H_m -ig? A mágneses indukció elér egy B_m maximális értéket, majd a 3.3.35. ábrán a folytonos vonalnak megfelelően változik. Amikor H már nulla, még mindig van mágneses indukció. Ez a B_r *remanens indukció*, magyarul maradó indukció. Egyébként mivel ekkor H nulla, $B_r = M_r$, ahol M_r a *remanens mágnesezettség*. Az indukció csak ak-



3.3.35. ábra: mágnesezési görbe

kor válik nullává, amikor $H = -H_k$, ahol H_k a koercitív erő. Ha $H = -H_m$, akkor $B = -B_m$, végül egy hurkot leírva visszaérünk a (H_m, B_m) pontba. A hurkok a hiszterézishurok. A név a görög hysterein=visszamaradni szóból származik, mert olyan B késne H -hoz képest. A hiszterézishurok függ H_m -től, kisebb H_m -től indulva kisebb lesz, de elég nagy H_m fölött már nem sokat nő. A hurkon végigmenve az anyagban hő keletkezik, a domének mozgása miatt. Az ábra jobb oldalán megadtuk, hogy hol milyen doménmozgás a jellemző. A térfogategységként keletkező hő, a vasvesztés arányos a hurkok területével.

Lágy mágneses anyagokat olyan helyen használunk, ahol sokszor átmágnesezzük az anyagot (motorok, transzformátorok). Ilyenkor fontos, hogy a hiszterézishurok területe kicsi legyen. Nagyságrendben ez $B_r H_k$. A B_r értéke nagyságrendben minden mágneses anyagra 1 T. Így H_k alapján dönthetjük el, hogy lágy mágneses-e egy vasötvezet:

azokat az anyagokat tekintjük ilyennek, amelyekre H_k kisebb, mint 1 kA/m. Például az öntöttvas még belefér ebbe a kategóriába, erre $H_k = 480$ A/m, $B_r = 0,5$ T. Nyilván az a jó, ha a kezdeti és a maximális permeabilitás minél nagyobb. Öntöttvasra μ_r kezdeti értéke 70. Sokkal jobb lágy mágneses anyagok adatait találjuk a 3.3.36. táblázatban. A gyakorlatban legtöbbször az olcsó szilíciummal ötvözött acélt használják. Láthatjuk, hogy a tiszta vasat már a Föld mágneses tere is átmágnesezi!

Anyag	μ_r , kezd.	μ_r , max.	H_k , A/m	B_t
Lágyvas, 0,2 %C	150	5000	80	2,15
Tiszta vas, 0,05 % egyéb	10000	200000	4	2,15
Vas, 4 %Si	500	7000	40	1,97
Permalloy	8000	10000	4	1,08
Supermalloy	100000	1000000	0,16	0,79

3.3.36. táblázat: lágy mágneses anyagok

Kemény mágneses anyagokra H_k nagy. Pontosabban egy állandó mágnes anyagának jóságát a lemágnesezési görbéből lehet megítélni. Ez a hiszterézisgörbének a B_r -rel és a $-H_k$ -val jelölt pontok közötti szakasza. Közelítő mérőszámként használható a HB szorzatnak, pontosabban annak abszolút értékének a maximuma; ez jobb mérőszám, mint a $H_k B_r$ szorzat. Néhány kemény mágneses anyag adatait a 3.3.37. táblázat tartalmazza. Az első oszlopban a felmágnesezéshez szükséges mágneses tér erőssége található, ez jóval nagyobb, mint H_k . A két utolsó anyagnál hiányzik, de úgyse bírnánk olyan erős teret előállítani.

Anyag	H_m , kA/m	H_k , kA/m	B_r , T	$ BH _{\max}$, kJ/m ³
Acél, 0,8 %C	24	3,84	0,86	1,2
Acél, 5 % W	24	5,6	1,03	2,96
Alnico	160–800	32–275	0,6–1,4	10–88
Sr-ferrit		100–300	0,2–0,78	10–40
Nd ₂ Fe ₁₄ B		750–2000	1,0–1,4	200–440

3.3.37. táblázat: kemény mágneses anyagok

Mi történik, ha egy állandó mágneset beteszünk egy mágneses körbe? Ha a körben nagy permeabilitású lágy mágneses anyag van, akkor a körben a fluxust az állandó mágnes fluxusa adja meg, az majdnem B_r lesz. Azért csak majdnem, mert a külső gerjesztés nulla, a kör teljes gerjesztésének nullának kell lenni. A mágnesen kívüli rész felvesz valamennyi gerjesztést („mágneses feszültséget”), ezt a mágnesben fellépő negatív (azaz B -vel ellentétes irányú) H -nak kell biztosítania. A külső kör mágneses ellenállásától függ, hogy mekkora fluxus alakul ki. Ez ki is számolható, ha ismerjük a lemágnesezési görbét. A mágnes számára a legkedvezőtlenebb eset, ha az erővonalak nem tudnak

könnyen záródni. Például ez a helyzet, ha a mágnes levegőben van, méginkább, ha az erővonalaknak egy másik mágnes terével szembe kell menni. Ez utóbbi esetben a mágnes teljesen elvesztheti mágnességét, vagy még át is mágneseződhet.

Miért voltak a régi mágnesek rúd, legfeljebb patkó alakúak? Tekintsünk egy mágnesezhető anyagból készült egy irányban nyújtott gömb (azaz forgási ellipszoid) alakú homogén testet, és tegyük H_0 erősségű, a hossz tengely irányába mutató homogén mágneses térbe. Megmutatható, hogy ilyen alakú testben, ha az M homogén mágneszettsége a hossz tengely irányába mutat, akkor a mágneses tér homogén, és erőssége $H = H_0 - fM/\mu_0$. Itt az f *lemágnesezési tényező* csak a test hosszának és átmérőjének p arányától függ. Megmutatható, hogy $p > 1$ esetén

$$f = \frac{1}{p^2 - 1} \left(\frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}} \ln(p + \sqrt{p^2 - 1}) - 1 \right).$$

Ha p közeledik 1-hez, akkor f értéke $1/3$ -hoz közeledik, tehát gömbre a lemágnesezési tényező $1/3$. Ha $p = 2$, akkor már csak nagyjából feleennyi, ha $p = 5$, akkor $\approx 5,5\%$, ha $p = 10$, akkor $\approx 2\%$, ha pedig $p = 20$, akkor $\approx 0,67\%$. Mi történik, ha egy kör keresztmetszetű volframacél rudat, ami tízszer olyan hosszú, mint amennyi az átmérője, felmágnesezünk? Közelítsünk ugyanolyan átmérőjű és hosszúságú ellipszoiddal! Ekkor $f \approx 2\%$. Mivel $M = M_r = B_r \approx 1$ T, $M/\mu_0 \approx 800$ kA/m. Ha $H_0 = 0$, akkor $H \approx -f \cdot 800 \approx -16$ kA/m lenne. Ez jóval nagyobb, mint a koercitív erő, ezért M csökkenni fog, amíg egy megfelelő ponthoz nem érünk a lemágnesezési görbén. Ha viszont a rúd hússzor olyan hosszú, mint az átmérője, akkor $H \approx 5$ kA/m, nagyjából annyi, mint a koercitív erő, a mágneszettségnek nem sokat kell csökkennie. Rövid henger alakú mágnes viszont ebből az anyagból nem készíthető, mert magától szinte teljesen lemágneseződik. De akkor mi a remanencia, amit a táblázatban feltüntetünk, milyen alakra vonatkozik? Keskeny gyűrű alakra, amire tekercset készítünk és árammal felmágnesezzük. Erre gyakorlatilag nem lép fel lemágneseződés.

A 3.3.35. ábrán a mágnesezési görbén be van rajzolva egy kis hiszterézis hurok. Ez azt mutatja, mi történik, ha növeljük H -t egy értéktől indulva. A kis hurok alsó ívén fogunk mozogni, majd ha újra egyre kisebb lesz H , akkor a felső íven vissza. A kis hurok két csúcsát összekötő egyenes meredeksége megfelel valamiféle μ -nek, ez a *visszafutó permeabilitás*. A nagyon jó keménymágneses anyagokra μ_r alig több, mint 1, és a koercitív erő is nagy. Az alnico ötvözetekre nagy a remanencia, de nem mindre elég nagy a koercitív erő. Lemágnesezési görbájuk nagyon hasonlít a 3.3.35. ábrán feltüntetettéhez. Ezeket lemágnesezve $-H_k$ erősségű mágneses térben (ami a gyakorlatban nem nagyon fordul elő) mágnességüket szinte teljesen elvesztik. A ferritmágnesek remanenciája nem olyan nagy, tipikusan 0,4 T, de a koercitív erő nagy. Lemágnesezéskor az M mágneszettségük majdnem a koercitív erőig alig változik, azaz B egyenes mentén mozog, a visszafutó permeabilitásra $\mu_r \approx 1,05$ – $1,10$. Megközelítve a koercitív erőt, a mágneszettség rohamosan csökken. A legújabb neodymium mágnesekre a remanencia és a koercitív erő is nagy, a visszafutó permeabilitás $\approx 1,05$. Ezeket akár a koercitív erőnél erősebb térrel lemágnesezve is visszaáll majdnem a teljes mágneszettség. Teljesítményükre jellemző, hogy 1 g tömegű mágnes képes 1 kg tömegű vasat is megtartani! Mind a három fajtából készíthető rövid henger, sőt, lapos korong alakú mágnes is. \square

3.3.68. Kísérlet. ** Van-e a hiszterézishez hasonló jelenség az elektromos polarizációnál is? Igen! Itt is érdemes \mathbf{D} -t felbontani két részre: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, ahol \mathbf{P} a polarizáció vektormezeje. Vannak anyagok, amelyeknél ez nem nulla akkor sem, ha az elektromos erőter nulla. Két kísérletet említünk meg a [31] könyvből. Egyiket sem tanácsos megcsinálnunk. Az elsőhöz leydeni palack kell amitől komoly áramütést lehet kapni, a másodikhoz pedig nemigen kapunk anyagot és nagy feszültségre van szükség.

Az első kísérletnél feltöltünk egy szétszedhető leydeni palackot. A feltöltött palackot ÓVATOSAN szétszedve, a fegyverzeteket összeérintve csak kis szikrát kapunk, és a palackot újra összerakva az feltöltöttnek bizonyul. Ez azt mutatja, hogy az energia nagy része az üveg polározzottságaként tárolódik.

A második kísérlet úgynevezett *elektrét* készítése. Ez olyan test, amely nem nulla polározzottságát nagyon sokáig megőrzi elektromos tér nélkül. Erős függőleges elektromos térben egy bizonyos gyantakeveréket megolvastva abból egy lapos pogácsát kell önteni. A tér polározza a gyantát, és amikor megdermed, a polározzottság „befagy”: megmarad, az egyik lap pozitív, a másik negatív töltésű marad nagyon sokáig. Az elektrétet alumínium fóliába burkolva kell tárolni, különben az odavonzott ionok semlegesítik a töltést. ** □

3.3.69. Kísérlet: elektromágnes. Készítsünk egy komolyabb elektromágnezt. Patkó alakú lesz, a 3.3.38. fényképek közül a bal oldali mutatja. A vasmagja egy szögvasból és egy 8-as csavarból készül. A szögvasra két lyukat is fúrhatunk, egyelőre a közelebbit használjuk. A távolabbit majd később, a motor készítésénél fúrjuk ki, és akkor vágjuk le a felesleges részt a vasból. Egy laposvasat és két csavart is használhatunk. A vasanyagokat ellenőrizzük le: mágnesezzük fel, majd nézzük meg, nem maradt-e nagyon mágneses, mert mágnesesnek lágy anyagra van szükségünk. Ha esetleg nem sikerülnek a kísérletek, megpróbálhatjuk kiizzítani.

A tekercshez *tekercstestet* kell készítenünk. A legegyszerűbb, ha a csavarra 1 mm vastagon papírt tekerünk, majd a papírra ráragasztunk két, tetszés szerinti alakú zárólapot. A tekercstest legalább 40 mm hosszú legyen belül, és ne legyen túl hosszú. Egyébként bármilyen szigetelő anyagból készülhet. Lehet például egy csődarab, amire ragasztjuk a zárólapokat. A csődarabra menetet is vágunk és rácsavarjuk a menetes zárólapokat. A cső két vége kúposra is lemunkálható egy bele dugott ollóval és ráüthetjük a zárólapokat, stb. Néha kell, hogy a tekercstest hőálló legyen. A 3.3.38. fénykép közül a második egy nyomtatott áramköri lapokhoz használt hőre keményedő műanyag lemezből készült négyszögletes tekercstestet mutat.

Ha kész a tekercstest, kezdődhet a tekercselés. Erre lakkszigetelésű, másként zománcozott rézhuzalt szoktak használni. (CuL vagy CuZ huzal.) Nekünk — a későbbiekhez is — megfelel a 0,3 mm átmérőjű vagy valamivel vastagabb huzal. Kiforról is árulják. 1 kg ugyan borzasztó sok, de így olcsóbb. Hagyjunk egy kb. 10 cm-es kimenetet, majd ragasszuk a huzalt szigetelő szalaggal az egyik zárólapra. Kezdjük el feltekerni a meneteket szorosan egymás mellé. A huzalt nem túl erősen de feszíteni kell. A menetek lehetőleg ne kerüljenek egymásra, hanem egymás mellé. Ha esetleg elszakad a huzal, kaparjuk le a szigetelést a végekről, tekerjük össze őket, forrasszuk össze és szigetelő szalaggal szigeteljük. Lehetőleg kerüljük az ilyen toldásokat: ha elromlik a

toldás, bonthatjuk le a tekercset, ráadásul a tekercs se lesz szép. Ha egy réteg kész, el kell szigetelni a következő rétegtől: két szomszédos menet között kicsi a feszültségkülönbség, de a rétegek között már jelentős lehet, a vékony zománcszigetelés átüthet. A rétegek közé műgyantával itatott papírréteget szoktak tekerni. Ennek hiányában teflon szalagot, esetleg szigetelő szalagot használhatunk. Különösen ügyeljünk a szélekre, hogy a menetek nehegy lecsússzanak a lentebbi rétegekhez. 6–10 réteget tekercseljünk fel. A végekhez forrasszunk

Én 0,5 mm-es (teljes) átmérőjű huzalt használtam. A 40 mm hosszú tekercstestre rétegenként 80 menetet számolva, 8 réteg 640 menet. Egy réteg vastagsága 0,7 mm, 8 rétegé 5,6 mm, így a kezdő átmérő 10 mm, a végső 21,6 mm, az átlagos 15,8 mm. Egy menet hossza nagyjából 5 cm, így nagyjából 32 m huzal kell. Végül $8 \times 75 = 600$ menetet tekertem fel. A tekercs ellenállása $4,3 \Omega$ lett.

Elektromágnesek vasmagja nagyon sokféle lehet. A harmadik képen ilyen vasmagokat láthatunk. A kép jobb oldalán úgynevezett *porvasmagok* láthatók, ezek ferritből készültek. Két fazékvasmag is van köztük (törötték). A nagy *emelőmágnesek* vasmagja hasonló alakú, csak persze sokkal nagyobb: nagy vasak, vashulladék mozgatására használják. A kép jobb oldalán két transzformátorlemez látható: egy M-mag és egy EI mag a jobb szélén. Ilyen lemezekből is kiváló elektromágnesset készíthetünk. Ilyen látható a jobb szélső képen.

Ha kész az elektromágnesünk, próbáljuk ki: egy doboz apró vasszegbe vagy rajzszegbe mártva, és egy 4,5 V-os telep áramát kapcsolva a tekercsre, sok szeget felemel. Ha kikapcsoljuk az áramot, a szegek egy része lehullik. hogy mennyi marad, az a vas (meg persze a szegek) remanenciájától függ. \square

3.3.70. Kísérlet. Készítsünk az elektromágnesből egy áramszaggatót! A 3.3.39. fényképek közül a bal oldalin látható működés közben. Egy rugalmas vaslemezt — én egy dossziéból vettem ki egy vas szalagot — valahogy erősítsünk az elektromágnes egyik szárához. Nem lehet olyan közel a csavar fejéhez hogy a remanens mágnesség megtartsa, ha odanyomjuk, de olyan közel kell lennie, hogy ha áramot vezetünk a tekercsbe, láthatóan megmozduljon. A telep egyik sarkát a tekercs egyik végéhez kötjük, a másikat pedig a vas szalaghoz. Közelítsük a tekercs másik végét a vas szalaghoz a csavar fejénél! Amint hozzáér, záródik az áramkör, a csavar feje mágneses lesz, és magához rántja a vas szalagot. Megszakad az áramkör, a rugalmassága visszatéríti a vas szalagot, újra záródik az áramkör, stb. Másodpercenként 20–30-szor szakad meg az áram. A szalag és a vezeték érintkezésénél apró szikrákat látunk. Hogy az ehhez szükséges nagy feszültség hogy jön létre, arra majd visszatérünk. Ilyen SZIKRÁZÓ SZERKENTYŰKET NEM TANÁCSOS DMM-MEL MÉRNI! A DMM nagy belső ellenállását igen vékony szigetelő réteg biztosítja, amit a nagy feszültség könnyen átüthet, és a műszer használhatatlanná válik.

Ugyanezen az elven működött a régi villanycsengő, de a vas szalag végén egy kis kalapács volt, ami az áramkör minden zárásakor egy harangra ütött. Ilyet láthatunk leszedett alsó lappal működés közben a jobb oldali képen. \square

3.3.71. Kísérlet. A szó szoros értelmében vett Morse féle „táv-író” is elektromágnessel működik. Az adótól érkező áram az elektromágnes tekercsébe jut, ami magához rántja a rugalmas szalagra szerelt vas *fegyverzetet*. Ehhez egy ceruza, vagy más író szerszám

van erősítve, ami elmozdulva egy papír szalaghoz nyomódik. A szalagot óraszerkezet mozgatja. Az írószerszám hosszabb–rövidebb vonalakat ír a szalagra, a Morse-ABC-nek megfelelően. Aki nagyon ügyes, készíthet ilyet. \square

3.3.72. Kísérlet. Az *elektromágneses áramkioldóban* (*automata biztosíték*) is elektromágnes van. Túl erős áramnál egy kar behúzásával megszakítja az áramkört. A kar visszabillenthető, és a biztosító újra működőképes. Ha leselejteznek egyet, szedjük szét! Mivel nagy az áram, az elektromágnesen csak pár menet van vastag drótból. \square

3.3.73. Kísérlet. A vasúti távíróknál a vezeték nagyon hosszú, több km volt. A nagy ellenállása miatt esetleg a gyenge áram már nem bírta működtetni a távírót. Ezen segített a *relé*. Működését könnyen megérhetjük az áramszaggatónk alapján. A bejövő áramot vezessük át a tekercsen. A másik, kapcsolt áram a vas szalagon fog átmenni. Az egyik csatlakozót kössük a vas szalag nem mozgó végére. Ha a másik csatlakozót a vas szalag mágnes felőli oldalán a szalag közelébe tesszük, akkor a bejövő áram zárja ezt az áramkört, és az mindaddig zárva is marad, amíg van bejövő áram (vagy legalább is elég erős). Célszerűen a kapcsolt áramot elég erősnek választjuk ahhoz, hogy működtesse a távírót. Ha az érintkezőt áttesszük a vas szalag másik oldalára, akkor a bejövő áram bontja az eddig zárt kapcsolt áramkört. „Morse-kapcsolót” is csinálhatunk nyitó és záró érintkezővel. A 3.3.40. fénykép ilyen relét mutat több érintkezőpárral. Nem is olyan régen még a telefonközpontokban ilyen relét használtak; ma már minden elektronikusan működik. Csak ott szoktak relét használni, ahol nagy feszültséget illetve áramot kell kapcsolni. A relék tekercse általában több ezer menetes, és 10 V nagyságrendű feszültség (de nagyon kis áram) hatására kapcsolnak.

A *Reed-kapcsoló* egy félkész relé. Tulajdonképpen nagyon egyszerű: egy védőgázzal töltött üvegcsőbe hosszában két lágyvas huzal van beforrasztva, amelyek nem érnek össze, de a hegyük egymás mellett van. Mágneses tér hatására megmágnesesződnek és egymáshoz érnek, mint már láttuk egy kísérletben. A mágneses teret létrehozhatjuk például az üvegcsőre tekert tekercssel is. Mivel a huzalok úgyis végig felmágnesesződnek, nem a mágneses tér erőssége a lényeges, hanem a teljes gerjesztés. Általában 10...100 ampermenet szükséges. A két huzal mindaddig zárva marad, amíg van mágneses tér, vagy legalább is elég erős. A kapcsolást állandó mágnes is létrehozhatja, ha egy kis rúd-mágnes az üvegcsővel párhuzamos állásban elég közel kerül az üvegcsőhöz. Erre merőleges állásban a mágnes általában hatástalan. Ha például egy kis rúd-mágnes forgatunk a cső mellett, mágneses tere minden fordulaton kétszer zárja a kapcsolót, ami fordulatszám-lálásra használható. A kapcsolható áram amper nagyságrendű, a kapcsolható feszültség néhány voltól akár 10000 voltig terjedhet, de a kapcsolható teljesítmény nagyságrendben maximum 10...100 W. Készen is kapható tekercssel együtt zárt házban *Reed-relé* néven. A kapcsolóból és a reléből is van bontó- és Morse-típus is. \square

3.3.74. Kísérlet. Telefonhallgató.

3.3.75. Kísérlet. Öveges mikrofonja fülhallgatóval, gombelemmel.

3.3.76. Kísérlet. Az elektromos energiát mozgásivá *villanymotorral* alakíthatjuk át. A legegyszerűbb ötlet csak vonzással működő motort készíteni. Természetesen meg kell

oldanunk, hogy az áramot maga a motor kapcsolgassa: amikor a vasból készült forgó rész egyik vége közeledik az elektromágneshez, bekapcsolja az áramot, majd mikor szemben van vele, akkor kikapcsolja. Modellünket a 3.3.41. fényképeken láthatjuk: a bal oldalin működés közben, a jobb oldalin szétszedve. A forgó rész egy nagyobb gémpapocsa, aminek a két szárát derékszögben meghajlítjuk, pontosan a gémpapocsa közepén: ez lesz a tengely. A tengely függőlegesen áll. Alul egy acél rajzszege „talpcsapágyra” támaszkodik, amibe pontozóval esetleg egy kis bemélyedés üthetünk. Az áram a forgó részen is keresztül megy, és a rajzszegeken keresztül jut az elektromágnesbe, és onnan vissza a 4,5 V-os telepbe. Hogy a forgó rész oldalra ne tudjon elmozdulni, egy sörösdobozból kivágott és átlyukasztott alumínium lemez tartja. Felül is egy átlyukasztott (vastagabb) alumínium lemez tartja, amit én csak egy pillanatszorítóval szorítottam az alap rajztáblához. A lyukakat egy acélszeeggel is elkészíthetjük, de a sorját a lyuk szélén gondosan reszeljük le, és egy türeszelő hegyével a lyuk oldalát is csiszoljuk símára. A felső „csapágyat” meg is olajozhatjuk. A telep másik sarkától érkező áram egy „keféről” a forgó részbe egy érintkezőn keresztül lép be, amit vastagabb rézdrótból tekerünk a gémpapocsra, és a végét a tengellyel párhuzamosra hajlítjuk. A „kefe” egyszerűen egy hasonló rézdrót, amit a rajztáblához rajzszegeztem. Lehet, hogy a forgó részt egy kicsit meg kell lökni, de utána vidáman pörög a motor. □

3.3.77. Kísérlet. A mágneses vonzás illetve taszítást használja ki a *kommutátoros motor*. A kommutátor felcserélőt jelent. Forgó része elektromágnes, az álló lehet állandó mágnes vagy elektromágnes is. A 3.3.42. fényképeken egy ilyen motor modelljét láthatjuk. Az álló rész egyetlen állandó mágnes két ajtó mágnesből. A forgó rész lehet ugyanaz a gémpapocsa, ami az előző motorban volt, de most tekercset készítünk rá. Én 0,3 mm \emptyset -ű CuZ huzalt használtam. Két réteget tekercselünk fel, a tengelytől indulva az egyik fele, majd visszaérve a másik fele és vissza. Vigyázzunk, hogy a tekercselés irányát ne változtassuk meg! Ha kész a tekercs, a drót két végéről kaparjuk le a szigetelést, és hajlítsuk meg úgy, hogy a drótvégek a tengely két oldalán, azzal párhuzamosan, tőle egyenlő távolságra álljanak: ezek az érintkezők a *kommutátorok*. Most két „kefére” van szükségünk egymással szemben, egyenlő távolságra a tengelytől. Az áramforrás két sarkát vezessük a két keféhez. Tegyük a helyére a forgó részt, és fordítsuk el úgy, hogy az érintkezők a kefékhez érjenek! Egy iránytűvel megállapíthatjuk, melyik vége lett a gémpapocsnak északi sarok. Az állandó mágneset úgy helyezzük el, hogy taszítsa vagy vonzza ezt a sarkot. Ha taszítást választottunk, akkor az érintkezés létrejöttkor a forgó rész már legyen túl valamennyivel a mágneshez legközelebbi helyzetben, ha vonzást, akkor az érintkezés létrejöttkor még legyen előtte. Lökjük meg a forgó részt! A forgó rész minden fél fordulatnál átmágnesesződik, és újabb lökést kap.

Bevallom, elég sokat kínlódtam ezzel a motorral: sehogy sem akart elindulni sem egy elemmel, sem teleppel, hiába löktem meg, hiába igazgattam a mágneset, hiába olajoztam meg a csapágyakat. Végül drasztikus lépésre szántam el magam: két sorbakapcsolt reflektor izzón keresztül egy gépkocsi akkumulátorról tápláltam a keféket. Ennek megvolt az az előnye is, hogy az izzók mutatták, van-e érintkezés és mikor, ami segített a mágnes elhelyezésében, és meglökve a forgórészt, elindult a motor!

Természetesen a forgó rész másik végéhez is tehetnénk mágneset, sőt, mindkét véghez

akár két (egy taszító és egy vonzó) mágnes is.

Ha álló mágnesnek is elektromágneset használunk, azt táplálhatjuk külön áramforrásról, vagy kapcsolhatjuk sorosan vagy párhuzamosan a forgó résszel. Mindkét kapcsolást használják. A soros motor nagy indítónyomatékot ad. Például gépkocsi indítómotorjának illetve járműhajtásra használják. Ha nem terheljük, nagyon felpörög. A párhuzamos motor álló részének mágnessége nem változik, ezért állandó teljesítményű. Legtöbbször erre van szükség. Azt, hogy a motor bármilyen helyzetből elinduljon, legtöbbször úgy érik el, hogy a forgó résznek négy, hat, vagy még több pólusa van. Ilyenkor az sem fordulhat elő, hogy a kefék a kommutátoron keresztül rövidre záródjanak. \square

3.3.78. Kísérlet. Ha alkalmunk van, szedjük szét egy motort! A 3.3.43. fényképek egy kávédaráló soros motorját mutatják. Jól látszik az álló rész lemezekből készült vasmagja rajta a tekercseléssel. A kommutátor szeleteit megszámlálva látjuk hogy a forgó rész hatpólusú. Ez is lemezekből készül. A kefék rendszerint rézpor és grafit keverékből készülnek préseléssel, felül két oldalt látszanak. Az egyik képen kicsit látszik a forgó rész tekercselése is. A keféktől annak a pólusnak a tekercseléséhez kell vezetni az áramot, amelyik $180/p$ fokra van az állórésztől, ahol p a pólusok száma. A külön látható kis henger egy kondenzátor, szerepéről később lesz szó. Látjuk, hogy jó motort készíteni nem könnyű, ha szükségünk van egyre, inkább vegyünk. Egy jó villanymotor hatásfoka 90% felett van. \square

3.3.79. Kísérlet. Készítsünk egy nagyon jó áramérzékelőt, idegen szóval *galvanométert*! A lényege, hogy egy mágnesű helyett két egyforma van benne, de amerre az egyiknek az északi sarka mutat, arra mutat a másiknak a déli sarka. Az ilyen úgynevezett *asztatikus* tűpár — elvileg legalábbis — nem érzékeny a külső mágneses térre: az egyik tűre ható mágneses forgatónyomatékot pontosan ellensúlyozza a másikra ható. A gyakorlatban persze nem sikerül két pontosan egyforma mágnesűt készítenünk, de azt remélhetjük, hogy a két tű között legfeljebb 10% különbség van, így az érzékenység 10-szeresre nő a bussolánkhöz képest. További érzékenységnövelő tényező, hogy sokkal kisebb átmérőjű tekercset fogunk készíteni. A tekercstest egy gyufásdoboz lesz, aminek keresztmetszete 12×37 mm. A középső menetekre vegyünk minden irányban 4–4 mm-rel többet, tehát 20×45 mm-t. Ez nagyjából megfelel egy 2 cm sugarú körnek, egy újabb 5-ös faktor érzékenységben. Vagy 300 menetet fogunk felcsévélni, ami egy újabb 10-es faktor érzékenységben. Súlytalan mutatónak fénysugarat fogunk alkalmazni, aminek elmozdulását egy jó távol, mondjuk 1 m-re elhelyezett ernyőn észleljük. A fénysugár szögelfordulása kétszer annyi, mint a galvanométeren lévő tüköré. A fénysugár elmozdulása így 1 m-re 40-szer annyi, mint a busszola mutatójának hegyéé. A teljes érzékenységnövekedés 20000-szeres. Ha úgy vesszük, hogy 1 mm eltolódást vagyunk képesek észrevenni, akkor a legkisebb észrevehető áram a busszola 2 mA-ével és a fülhalgató $1 \mu\text{A}$ -ével szemben $0,1 \mu\text{A}$.

A tekercset $0,3$ mm \emptyset -jű CuZ huzalból tervezzük elkészíteni. A 300 menethez összesen $300 \cdot 2 \cdot (20 + 45)$ mm ≈ 40 m huzal kell. Ennek ellenállása $\approx 10 \Omega$, így a feszültségérzékenység $1 \mu\text{V}$ szemben a DMM $100 \mu\text{V}$ -jával! Mindenképpen érdemes ezt a műszert elkészíteni. Gondoljunk arra, hogy Faraday alapvető felfedezéseinél ilyen műszert használt. Ha $\sqrt{10}$ -szer kisebb átmérőjű, azaz 10-szer kisebb keresztmetszetű huzalt használnánk,

10-szer többet tudnánk felcsévélni, és az áramérzékenység 10-szer nagyobb lenne. Mivel az ellenállás 100-szor nagyobb lenne, a feszültségérzékenység viszont tizedére csökkenne. Megfordítva, $\sqrt{10}$ -szer nagyobb átmérőjű huzalt használva, a feszültségérzékenység 10-szeres lenne, az áramérzékenység viszont tizedére csökkenne. A legjobb ilyen műszerek asztatizálása 100-szor jobb volt, mint a mienké, így a műszer 100-szor érzékenyebb volt! Ma már nem használják ezt a típust, mert nagyon érzékeny a zavaró mágneses terekre.

Foglalkozunk először a mágnesűk előállításával. Két egyforma varrotűt is használhatunk 25 mm-es hosszra letörve, de én két spirálfúrót használtam. Ezek volframacélból készülnek. (Próbáljuk ki a fűróhegyet, hogy mágnesezhető-e?) Nehezebb ugyan felmágnesezni őket, de mágnességüket jobban megtartják. 1 vagy 1,5 mm \emptyset -jű fűrószárat satuba fogva egy oldalsó kalapácsütéssel törjük le a hegyüket úgy, hogy 25 mm (egyforma!) hosszú, lehetőleg végig hengeres rész maradjon. A törési éleket csiszolópapírral leélezhetjük. A felmágnesezés történhet esetleg minél erősebb állandó mágnessel is, de jobb árammal. 24 kA/m mágneses térerő szükséges. Ezt egy 5 cm hosszú tekercsel kívánjuk létrehozni. Ha lámpaellenállásunkkal 24 A-re bírjuk egy gépkocsiakkumulátor áramát korlátozni, akkor méterenként 1000 menet, 5 cm-re 50 menet szükséges. Falvetékből készítsük el a tekercset, nem is kell tekercstest, egy nagyobb csavarra két alátét közé tekercselhetünk. Persze, kisebb áramnál arányosan több menet kell. Tegyük a tűket a tekercsbe. Elég az áramot rövid időre bekapcsolni. A következő kísérletben folytatjuk a galvanométer elkészítését. \square

3.3.80. Kísérlet. Galvanométer. Tükör. Leolvasás lengés közben.

3.3.81. Kísérlet. Ballisztikus galvanométer: a töltés mérése.

3.3.82. Kísérlet. Dörzsölt üveggel kitér a galvanométer?

3.3.83. Kísérlet. Galvanométer két tekercsel. Osztott tekercs, bifilárisan. Áramok összehasonlítása. Nagy ellenállású sönt.

3.3.84. Kísérlet. Hőelektromosság.

3.3.85. Kísérlet. Hőelem. Ohm mérése. Alu szalag, mint csavarási mérleg?

3.3.86. Kísérlet. Termomágneses biztosító.

3.3.87. Kísérlet. Mágnesség — rézben? Alu gyertyatokkal. Lemezelt vasmagok.

3.3.88. Kísérlet. Csillapítás a galvanométerhez.

3.3.89. Kísérlet. Hurkos oszcillográf. Deprez-műszer elve. Húros EKG.

3.3.90. Kísérlet. Oszcilloszkóp. TV. Digitális oszcilloszkóp.

3.3.91. Kísérlet. Öveges mikrofonja oszcillográffal. Vízszintes tengelyű forgó tükör, pl. vonalzó, vagy inkább tükör deszkán, szeg tengellyel.

3.4. Áram és kémia

Az áram vizsgálata csak az után kezdődhetett el, hogy feltalálták a galvánelemeket. Hamarosan megvizsgálták az áram hatását oldatokra. Ebben az alfejezetben erről a két dologról lesz szó. A másodikkal kezdünk, mert az az egyszerűbb.

3.4.1. Kísérlet. Egy 9 voltos telep kivezetéseihez csatlakoztassunk két, műanyag-gal bevont vas- vagy rézdrótot. Ilyen vasdrótot mezőgazdasági célokra, kötöződrótnak, vagy pedig műanyag szárítókötélnek használnak. Egy nagyjából 1 cm^2 -es, mindenhol egyforma keresztmetszetű, néhány cm hosszú kis műanyag „kádba” tegyünk kevés csapvizet, és mártsuk bele a drótokat a két végén. Én kádnak egy rúdelem csomagolását használtam fel. Az egész összeállítást a 3.4.1. fényképek közül a bal oldalin láthatjuk. Az egyik, a telep – jelzésű sarkával összekötött drótvégen apró buborékok fejlődnek. A fejlődő gáz *hidrogén*. Később majd jobban megvizsgáljuk. A másik drótvégen is megjelenhetnek buborékok, de kevesebb, vagy lassan elsötétedik, esetleg körülötte a víz lassan elszíneződik, vagy ezek közül a jelenségek közül több is előfordulhat. Amit látunk, az az *áram kémiai hatása*: a telep áramot hajt át a vízben, és ahol az áram belép a vízbe, illetve kilép a vízből, ott kémiai reakciók játszódnak le. A vízbe tett drótvégeket, azaz az áramnak a folyadékba való be- és kilépési helyeit *elektródoknak* nevezzük, mégpedig ahol az áram belép a folyadékba, az az *anód*, ahol kilép, az pedig a *katód*. (Ugyanezeket az elnevezéseket használjuk elektroncsöveknél és félvezető eszközöknél is.) Közelítsük az elektródokat, de ne érjenek össze: a hidrogénképződés erősödik. Ha újra eltávolítjuk őket, újra gyengül a hidrogénképződés. Ha több vizet öntünk a kis kádba, a hidrogénképződés erősebb lesz. Ez azt sugallja, hogy az áram erőssége fordítottan arányos a távolsággal, és egyenesen arányos a keresztmetszettel, más szóval az áram áthaladásával szemben mutatott ellenállás egyenesen arányos a vezető (a víz) hosszával, és fordítottan arányos a keresztmetszetével, tehát itt is érvényes Ohm törvénye. Most már van érzékeny ampermérőnk, és ezt méréssel is alátámaszthatjuk, megmérve az áram erősségét, átvezetve azt az ampermérőn. Az összeállítást a 3.4.1. fényképek közül a középső mutatja. Én az 5 cm hosszú kis kádban, 5 ml csapvízzel különböző távolságokra a következő áramerősségeket kaptam:

Távolság	Áram	Szorzat
cm	mA	$\mu\text{A}\cdot\text{m}$
5	0,72	36,0
4	0,91	36,4
3	1,22	36,6
2	1,80	36,0
1	3,53	35,3

Ez azt bizonyítja, hogy az áram erőssége fordítottan arányos a távolsággal, más szóval az áram áthaladásával szemben mutatott ellenállás egyenesen arányos a vezető (a víz) hosszával. Változtassuk a víz keresztmetszetét! Az üres kis kád mindkét végére tegyünk egy-egy fém gémkapcsot, és ezekhez csatlakoztassuk a drótvégeket. Most a gémkapcsok

lesznek az elektródok. Fecskendőből engedjük a (vízszintes!) kis kádba 1, 2, ..., 5 ml csapvizet. Az alábbi áramerősségeket mértem:

Víz cm ³	Keresztmetszet cm ²	Áram mA	Hányados A/m ²
1	0,2	0,19	9,50
2	0,4	0,33	8,25
3	0,6	0,47	7,83
4	0,8	0,65	8,12
5	1,0	0,81	8,10

Ez azt bizonyítja, hogy az áram erőssége egyenesen arányos a keresztmetszettel, más szóval az áram áthaladásával szemben mutatott ellenállás fordítottan arányos a vezető (a víz) keresztmetszetével. Egyébként még a legkisebb, $\approx 0,2$ mA-es áramnál is nagyítóval jól megfigyelhető volt a hidrogénképződés. \square

3.4.2. Kísérlet. Ismételjük meg az előző kísérletet csapvíz helyett desztillált vízzel. Hidrogénképződést nem észlelünk. Sózzuk meg a desztillált vizet: erős buborékolás kezdődik. Érzékeny ampermérővel kimutathatjuk, hogy azért a desztillált víznél is van valamennyi áram, de 7–8-szor kisebb, mint a csapvíznél. A sózott víznél viszont jóval nagyobb, vagy 30-szor akkora az áram, mint a csapvíznél, és ha több sót adunk a vízhez, tovább nő. Az ellenállásnak a hosszról és a keresztmetszetről való függését is kipróbálhatjuk sós vízre is: ugyanazt kapjuk. Arra gondolhatunk, hogy a csapvíz áramvezetését a benne oldott sók okozzák. Ez így is van. Ezért aztán az eddig megadott számok csak nagyságrendileg helyesek, mert mindenütt más a csapvíz oldott anyag tartalma, sőt, az oldott anyag is más-más. Talán a desztillált víz vezetését is maradék sók okozzák? Javarást igen (a desztillálásakor a gőz vízcseppeket ragad magával), de kimutatták, hogy még a leggondosabban megtisztított, vagy 30-szor desztillált víznek is van valamennyi vezetőképessége, ha nagyon kicsi is. \square

3.4.3. Kísérlet. Csapvízzel is tudunk vezetésvizsgálót készíteni, sőt, még érzékenyebb is lesz, mint zseblámpaizzóval: lásd a 3.4.1. fényképek közül a jobbszélsőt. Még egy műanyag burkolatú drót két végéről szedjük le a műanyagot, és két drótot csavarjunk össze, de a lecsupaszított drótvégek ne érjenek össze, inkább legyenek távolabb. Elég, ha fél centiméter hosszúak. Egy kémcsőbe vagy átlátszó műanyag vagy üveg orvosságos edénybe tegyünk kevés csapvizet, merítsük bele az összecsavart drótokat, és rögzítsük egy lazán bedugott dugóval. Egy áramjelzőt kaptunk. Az egyik drótjának a végét rögzítsük az elemhez. Egy másik drótot rögzítsünk a 9 voltos elem másik sarkához. Ha a két szabadon maradt drótvég közé olyan anyagot teszünk, ami vezeti az áramot, a kémcsőben pezsgés indul meg, ha nem vezeti, akkor nincs pezsgés. Ezzel is megvizsgálhatunk mindent. Próbálkozzunk a konyhasóval. Meglepetésünkre — ha száraz — nem vezeti az áramot, és a többi só sem, amivel eddig dolgoztunk. Ha viszont desztillált vízben oldjuk őket, akkor az oldat jól vezet. Például a gipsz nem vezet, de a gipszes víz vezet, ha viszont megfagyasztjuk, akkor nem vezet. (Ezért a felületükön nedves sók vezetnek egy kicsit.) Persze, ezekben az oldatokban is különböző kémiai folyamatok játszódhatnak

le az áram hatására, ez az *elektrolízis*, erre majd visszatérünk. Eközben maró, mérgező, sőt robbanékony vegyületek képződhetnek. Szerencsére nagyon kis mennyiségben, mert áramjelzőnk nagyon kevés áramot, nagyságrendben 1 mA-t enged csak át. Vizsgáljuk meg a cukrot is. Nem vezet, és meglepetésünkre a desztillált vizes oldata sem. A szesz sem vezet. Papír és fa sem vezet, ha nem nedves, de ha nedves, akkor híg sóoldattal van átitatva, így vezet. \square

3.4.4. Kísérlet. Vizsgáljuk meg a feszültség hatását az áram erősségére a vizes áramjelzőnkénél. Vízbe érő drótjait hajlítsuk egész közel, de persze ne érjenek össze. A másik két drótvéget nyomjuk hozzá egy 1,5 voltos rúdelem két végéhez. Nem tapasztalunk pezsgést. Növeljük a feszültséget: két 1,5 voltos elemből készítsünk telepet. Gyenge pezsgést tapasztalunk. Növeljük tovább az egymás után kapcsolt elemek számát: a pezsgés egyre élénkebb lesz, végül 6 darab 1,5 voltos elemnél olyan, mint a 9 voltos elemnél. De miért nincs pezsgés 1 rúdelemnél? Az elektródokon lejátszódó kémiai reakciókhoz, amik a vízben lévő sók elbontásával járnak, egy minimális feszültségre van szükség, ez a *bontási feszültség*. Amíg ezt el nem érjük, nem történik semmi, az áram nem tud keresztül menni a csapvízen. Megpróbálhatjuk pontosabban is meghatározni a bontási feszültséget: két 1,2 voltos rúdelem alakú kis akkumulátort sorba kapcsolva, már van pezsgés, tehát a bontási feszültség kisebb, mint 2,4 V, azaz 2 V körül van. \square

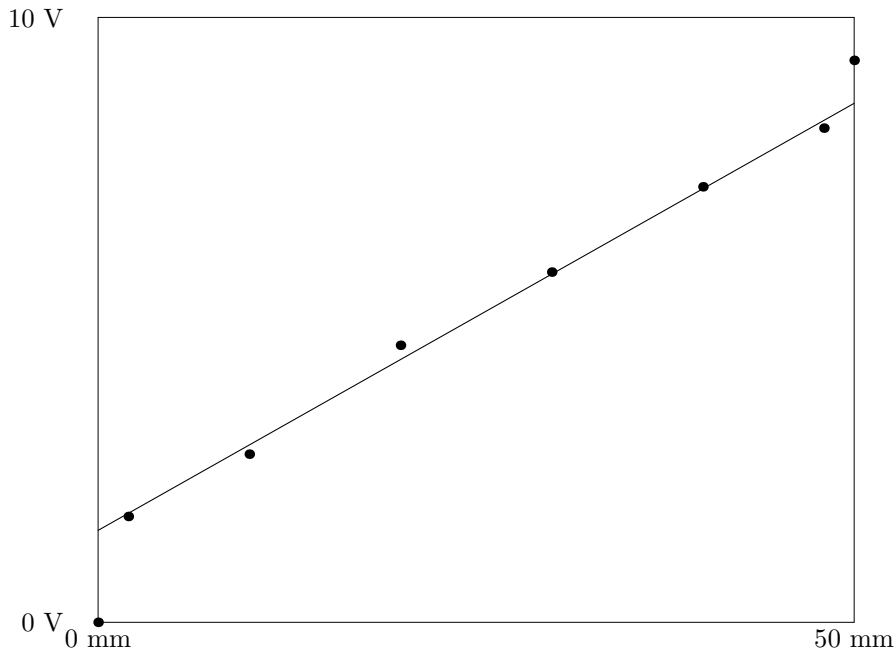
Mennyi az én mérésem szerint a csapvíz fajlagos ellenállása? Én 5 cm³ csapvízre 5 cm hosszon 0,81 mA-t mértem. A keresztmetszet nyilván 1 cm². Az elem 9 V feszültségéből levonva a 2 V bontási feszültséget, azt kapjuk, hogy az ellenállás 7/0,00081 V/A \approx 9 k Ω . Így 9 k Ω = $\rho \cdot 5$ cm/1 cm². Innen ρ = 1,8 k Ω cm = 18 Ω m. (Ha a csapvíz vagy akármilyen oldat ellenállását egy DMM-mel próbáljuk megmérni, általában nem kapunk használható eredményt. Ezek ugyanis egy meghatározott áramerősségnél feszültségesezt mérnek, általában 200 mV-ig. A bontási feszültség ennél nagyobb, így az ellenállást végtelennek érzékelik.)

3.4.5. Kísérlet. Kössük a kis kádunkat a 9 voltos elemre, a végébe egy-egy fém gémkapcsot téve elektródnak. Kössük az katódhoz a voltmérő negatív érintkezőjét, a másikat pedig mártsuk a csapvízbe. A voltmérő a katódtól távolítva az érintkezőt, növekvő feszültséget mutat. Az összeállítást a 3.4.2. fénykép mutatja. Én az alábbi feszültségeket mértem:

Távolság/mm	0	2	10	20	30	40	48	50
Mért fesz./V	0,00	1,75	2,78	4,58	5,79	7,20	8,17	9,29
Számolt fesz./V	1,52	1,81	2,94	4,35	5,76	7,17	8,30	8,58

A mért értékeket a 3.4.3. ábrán ábrázoltuk. Elég jól látszik, hogy a mért feszültségek nagyjából lineárisan változnak, kivéve az elsőt és az utolsót. Illesszünk egy egyenest a többire! Az adódik, hogy $y = 0,1412x + 1,5237$. Az utolsó sor az ebből a képletből számolt feszültségértékeket adja meg. Az eltérések kicsik, kivéve az elektródoknál. Az oldat belsejében tehát Ohm törvénye érvényes, de a katódnál mintegy 1,5 V-os, az anódnál mintegy 0,7 V-os feszültségugrást tapasztaltunk. Első pillantásra azt hihetjük, hogy ténylegesen az oldat és az elektródok közötti feszültségugrást sikerült megmérnünk. Ez azonban nem

így van. A feszültségmérőnek az oldatba mártott vége és az oldat között is van feszültségugrás, hiszen itt is kell valamennyi áramnak folynia, egyébként a feszültségmérő nem működne, így ez is katód. Ezek a feszültségugrások függenek az elektródok anyagától, az oldattól, és az áramerősségtől, pontosabban az áramsűrűségtől, azaz a katódon, az anódon és a mérőelektródon az egységnyi felületre eső áramtól. Így könnyen lehet, hogy más mérésnél egészen más feszültségugrást mérünk. Erre majd visszatérünk. Mindenesetre a telep összefeszüléséből levonva a bontási feszültséget, ami itt 2,2 V, marad valamilyen U feszültségkülönbség. Az áramerősség egyenesen arányos ezzel a feszültségkülönbséggel és fordítva arányos az ellenállással, azaz az oldatra érvényes az Ohm-törvény. \square



3.4.3. ábra

De miért vezetnek a sóoldatok és miért nem vezetnek a sók? A kősókristályban kétféle atom van. Az egyik egy fém atomja (ez a kisebb), a másik egy nemfémes elemé. A fém lead egy elektront, ezt a nemfémes elem atomja felveszi. Elektromosan töltött részecskék, ionok jöttek létre: a fémion pozitív töltésű, a másik negatív töltésű. Ezzel azonban foglyul is ejtették egymást: a pozitív és a negatív töltésű ion kb. a súlyuk 3,8 billiószorosával vonzza egymást. Ezek az erők tartják össze a sókristályt. Mivel az ionok a kristályban nem tudnak elmozdulni, a só nem vezet. A fémkristályt is a pozitív fémionok és a negatív szabad elektronok vonzása tartja össze, de ott a kicsiny elektronok nincsenek a kristályrácsához kötve, így a fém vezet. Ha egy sót vízben oldunk, akkor az 5.1.7. rajzon vázlatosan ábrázolt módon a pozitív és a negatív ionok közé vízmolekulák furakodnak,

körülveszik őket, és így már az oldatban el tudnak mozdulni. A pozitív töltésű ionok a negatív katódhoz, a negatív töltésű ionok pedig a pozitív anódhoz vándorolnak, és ott kémiai reakciókban vesznek részt. Ha megolvasztjuk a sót, akkor is kiszabadulnak az ionok a kristályrácsból: a sóolvadék is vezet. A cukorból viszont nem képződnek ionok, így az oldata sem vezet.

3.4.6. Kísérlet. Jó lenne valamilyen kísérlet, ami alátámasztja a sóoldatok áramvezetéséről mondottakat. Később majd sok ilyen kísérlettel találkozunk, most csak egyet említünk meg. Kössük az áramjelzőnket a 9 voltos galvánelemre, és kezdjük gyertyalánggal melegíteni a kémcsövet. A pezsgés megélénkül, tehát a vezetőképesség nő. Megmérhetjük az áramerősséget. Nekem 18 °C-on 6,5 mA, 100 °C-on 16,9 mA adódott. Ezt főleg a víz viszkozitásának csökkenése magyarázza. Az ionok a körük csoportosuló vízmolekulákkal együtt mint valami apró gömbök „esnek” az őket vonzó elektród felé. Ha csökken a viszkozitás, nő a sebességük, és ezzel a vezetés. Például a telített gipszoldat ellenállásának változását 15 és 30 °C között csaknem pontosan megadja, hogy a viszkozitás fokenként 2 %-kal csökken. □

3.4.7. Kísérlet. Azt, hogy az ionok jelen vannak az oldatban és nem csak az áram hatására jönnek létre, bizonyítja, hogy az áramvezetés azonnal megindul, nem csak fokozatosan. Ezt egy hosszabb műanyag csővel és sóoldattal nagyobb hosszra is kipróbálhatjuk. Pontosabban is kimutathatjuk két rézdróttal és egy kis sós vízzel, ha van egy hangfal a közelben. A hangfal hátulján az egyik csatlakozásból vegyük ki a vezetékét, és tegyük a helyére az egyik rézdrótot, a vezetékét pedig kössük a másik rézdróra. Keresünk valamilyen műsort, például zenét. Ha a két rézdrótot összeérintjük, halljuk a zenét a hangfalon. (Ha van másik hangfal is, azt iktassuk ki.) Ha most a két rézdrótvéget egy pohárka vízbe tesszük, nem halljuk a zenét, de ha megsózzuk a vizet, újra halljuk. Ha van váltóáramú (AC: alternating current) voltmérőnk, meg is mérhetjük a két rézdrót közötti feszültséget. Még akkor is halljuk a zenét, ha annyira levesszük a hangerőt, hogy a feszültség csak néhány század volt. Elektrolízist nem tapasztalunk. Hogy lehet, hogy akkor is van vezetés, ha a feszültség nem éri el a bontási feszültséget? A hangfalban folyó áram *váltóáram*: másodpercenként több százszor változtatja az irányát. Az ionok megindulnak a megfelelő elektród felé, a legközelebbiek el is érik, de csak összegyűlnek, kémiai folyamatok nem történnek, mert nem értük el a bontási feszültséget. Közben megváltozik az áram iránya, az ionok az ellenkező irányba kezdenek mozogni, stb. Az elég szaporán váltakozó irányú áram tehát átmegy az oldaton, de kémiai reakciók nincsenek. Ha kicsiny, nagyságrendben tizedvoltos, de állandó feszültségű váltóáramot alkalmazunk, és megmérjük az áram erősségét, könnyen és pontosan megmérhetjük az oldat fajlagos ellenállását. □

3.4.8. Kísérlet. Egy oldat ellenállásának méréséhez kényelmesen használhatjuk a DMM kapacitásmérési lehetőségét, ha van ilyen. Tudnunk kell, hogy ez milyen frekvenciát alkalmaz, és jó ha tudjuk azt is, hogy milyen váltakozó feszültséget. Ez általában benne van a leírásban, ha nem, megmérhetjük. Az enyém 40 mV-ot használ és 512 Hz frekvenciát. Az ellenállásra $R = 1/(2\pi\nu C)$, ahol C a mért kapacitás, ν pedig a frekvencia. □

3.4.9. Kísérlet. Hogyan mérjük meg a bontási feszültséget? Legegyszerűbb kompenzációval. Az ellenálláshuzalt *feszültségosztónak* használjuk. Az is jó, ha egy pontos voltmérővel megmérjük a hidrogénfejlődés megszűnésekor az áramjelzőre eső feszültséget. Egyébként nem érdemes megpróbálni nagyon pontosan meghatározni a csapvíz bontási feszültségét, mert attól is függ, milyen sók vannak benne oldva és miből vannak az elektródok. □

3.4.10. Kísérlet. Célunk a víz felbontása. Megfigyelhetjük, hogy szinte minden sónál a katódon gáz — hidrogén — fejlődött. Azt sejtjük, hogy a hidrogén a víz alkotórésze. Hogy a víz másik alkotórészét is megkapjuk, olyan elektródot és oldatot kell használnunk, amelyek az anódnál sem reagálnak egymással. A legegyszerűbb lesz elektródnak vasat, elektrolitnak pedig mésztejet használni. Vegyünk olcsón kapható *oltott meszet* vagy elterjedt bár hibás nevén *mészhidrátot*. Olcsó anyag és később is használni fogjuk. Egy fél literes polietilén palackba tegyünk 1–2 evőkanállal, és öntsünk rá desztillált vizet. Jól rázzuk össze: fehér *mésztej* keletkezik, de az oltott mésznek csak kis része oldódik fel, mert rosszul oldódik vízben. Az esetleges oldható szennyező anyagok viszont oldatba mentek. Ezért ha leülepedett, öntsük le az oldatot, és a maradékot öntsük fel ismét desztillált vízzel. Rázzuk fel és ismét hagyjuk leülepedni. A tiszta oldat a *mészvíz*, az oltott mész vizes oldata. Lúgos, maró hatású, ezért vigyázzunk, nehogy a szemünkbe kerüljön. Ha ez mégis előfordulna, folyassunk a szemünkbe pár percig tiszta vizet. Annnyira azért nem maró, hogy rövid ideig ne nyúlhatnánk bele. Ne is várjuk meg, amíg a mésztej teljesen leülepszik. Töltsünk meg vele színültig két egyforma kémcsövet, meg egy poharat félig, és a befogott kémcsöveket fejjel lefelé merítsük a pohárba. Utána mossunk kezet. A két elektród két vasdrót lesz. Ha nem jutunk szigetelt dróthoz, két vasdrót darab mindkét végét csiszolópapírral tisztítsunk meg a rozsdától, és szigetelőszalaggal tekerjük be őket majdnem végig. (Nem rozsdásodó drót nem biztos, hogy jó!) Tekerjük össze a drótokat, a végüket hajlítsuk vissza, és tegyük be az egyiket az egyik, a másikat a másik kémcső alá. Áramforrásnak jó a 9 voltos telep vagy akkumulátor, de sokkal jobb egy leselejtezett telefon, számítógép, stb. töltő. Az egyik drótvéget tekerjük fel rugószerűen, és dugjuk bele a töltő dugóját. A másikat hajlítsuk vissza, és dugjuk a töltő dugójának belsejébe. Vigyázzunk, nehogy rövidzár keletkezzék, mert egyrészt tűzveszélyes, másrészt a töltő valószínűleg tönkremegy.

A töltőt bedugva a konnektorba, megindul az *elektrolízis*. A katódon több, az anódon kevesebb gáz fejlődik. Várjunk türelmesen: kiderül, hogy a katódon kétszer annyi gáz fejlődik, mint az anódon. A katódon fejlődő gáz a *hidrogén*, az anódon fejlődő gáz az *oxigén*, ezek a víz alkotórészei. Előfordulhat, hogy kezdetben az oxigénfejlődés gyenge, mert az oxigén reagál a vassal, de aztán az anód kicsit megfeketedik, és már szépen fejlődik az oxigén. Egy idő után szépen látható, méréssel is ellenőrizhető, hogy kétszer annyi térfogatú hidrogén fejlődik mint oxigén. □

3.4.11. Kísérlet. Ha az elektrolízis során megtelt a gyorsabban fejlődő gázzal, a hidrogénnel a kémcső, fogjuk be a víz alatt, és vigyük egy égő gyertyához. A kémcső szája legyen ferdén lefelé. Elvéve a kezünket, tartjuk a kémcső száját a lánghoz. A hidrogén — esetleg kis pukkanással — meggyullad és színtelen lánggal elég: a levegőben lévő oxigénnel vízzé egyesül. A másik kémcső száját befogva vigyük ki, majd egy meggyújtott

hurkapálcát elfújva, a még izzó pálcát dugjuk a kémcső felfelé fordított szájába. Az izzás felerősödik, esetleg a pálcá újra meggyullad. Az oxigén táplálja az égést. Mindkét gáz tulajdonságait részletesebben is megvizsgáljuk a könnyvsoroyat kémia részében. Vigyázzunk, az elektrolízis alatt *ne cseréljük fel* az elektródokat, mert a hidrogén és az oxigén elegye, a *durránógáz* rendkívül hevesen, éles csattanással robban fel és esetleg a kémcső is széttörik. \square

A vízbontás magyarázata, hogy a vízmolekulák egy igen kis része H^+ és OH^- ionokra bomlik. Ezek okozzák a legtisztább desztillált víz vezetését. A pozitív töltésű H^+ ionokat vonzza az elektrontöbblettel rendelkező katód, odavándorolnak, és ott felvéve egy-egy elektront, belőlük H atomok képződnek. Az atomok mindjárt kettessévé H_2 molekulákká egyesülnek. A negatív töltésű OH^- ionokat az anód vonzza, és odaérve egy-egy elektront adnak le, majd kettessévé reagálnak egymással, egy H_2O vízmolekula és egy O atom keletkezik. Az O atomok ismét kettessévé reagálnak egymással, és O_2 molekulák keletkeznek.

Honnan vesszük, hogy a H atom csak egy elektront ad le? Soha nem tapasztalták, hogy egy hidrogén atom közvetlenül több másik atommal kapcsolódjon: a hidrogén egy vegyértékű. Márpedig minden kapcsolódáshoz egy vagy több elektron kell. Mint később kiderült, a H atomban csak egy elektron van. Az oxigén viszont mindig két vegyértékű. A vegyértékeket úgy képzelhetjük el, mint piciny „kezeket”, amelyekkel az atomok „megfogják egymást”. Persze, nincs ott semmi ilyesmi, az egész az atommagok és az elektronok bonyolult „játéka”, de ezt még vázlatosan is csak később tudjuk elmagyarázni. Ennek alapján a vízmolekula szerkezete H–O–H, ahol a – jelek a vegyértéket jelzik. A hidrogénmolekula szerkezete H–H, az oxigénmolekuláé O=O, a szén-dioxidé pedig O=C=O.

3.4.12. Kísérlet. Mennyi elektromos töltés kell elektrolízisnél egy mol H atom képződéséhez? Ezt Faraday angol fizikus és vegyész vizsgálta meg, aki az elektrolízis magyarázatát megadta. Megfigyelte, hogy az elektródokon olyan arányban képződnek anyagok, amilyen arányban kémiai reakcióba lépnek. Például a vízbontásnál a képződő hidrogén pontosan annyi, amennyi a képződő oxigénnel reagálni képes. Ha egy oldatból a katódon fém válik ki, az anódon pedig oxigén, akkor a kivált anyagok éppen ebben az arányban képesek reagálni, és ez más esetekben is így van. Ez Faraday törvénye. Ebből következtetett arra, hogy az elektródokon az elektromosság „atomjaival”, az elektronokkal való reakció, azok felvétele vagy leadása történik. Faraday azt találta, hogy egy mol H kiválásához ≈ 96485 C kell. Tehát az $F \approx 96485$ C/mol Faraday-állandó adja meg, hogy mennyi egy mol (pozitív) elektromos töltés. Határozzuk meg magunk a Faraday-állandót! Csak egy tölthető 9 V-os kis akkumulátorra van szükségünk. Feltöltjük, és összeállítunk egy vízbontó készüléket, de most egy mérőhengernek „kiképzett” üvegbe gyűjtjük a hidrogént és az oxigént. Az elektrolit mézsvíz, az elektródok szigetelt vasdrótból készülnek. Kicsik legyenek, 1–2 cm hosszúak és elég távol (5–10 mm) legyenek egymástól, hogy az áramerősség kicsi legyen, mert egyébként a kis akkumulátor a benne lejátszódó mellékfolyamatok miatt nem bírja a teljes töltését leadni. Kis áramerősségnél viszont az akkumulátorban lejátszódó folyamatok közel megfordíthatóak. Addig elektrolizálunk, amíg fejlődik hidrogén. Ez pár napig is eltarthat. Nekem két hét után már egyáltalán nem látszott a

gázfejlődés, de az akkumulátor feszültsége még 8,6 V volt. Óvatosan kivettem és megtisztogattam az elektródokat. Ezután már gyorsan befejeződött az elektrolízis. A külső nyomás 1002 mbar volt, amiből azonban le kell vonni $264 \text{ v.o.mm} \approx 264 \cdot 9,81 \text{ Pa}$ -t, mert 264 mm-rel magasabban állt a vízszint a palackban. Így a nyomás 99940 Pa. A hőfok 20°C volt, a gáz szintje 296 mm, ami 181 ml. Az akkumulátor 250 milliamperórá (rá van írva) azaz 900 C töltésű akkumulátor, és 181 ml hidrogén és oxigén fejlődött, amiből 120,7 ml hidrogén. Ez az általános gázörvény szerint $0,004948 \text{ mol H}_2$, ami $0,009896 \text{ mol H}$. Innen a Faraday-állandó $F \approx 90950 \text{ C}$. Az elég nagy hibát az magyarázza, hogy az akkumulátorok töltése példányról példányra változik, és az öregedéssel csökken is.

Tulajdonképpen jobb lenne azt mondani, hogy azt mértük meg, mennyi töltést bír leadni az akkumulátor, mivel a coulomb-ot (és ezen keresztül az amper) mostanában úgy határozzák meg, hogy egy elektron töltése $-1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ legyen. Ha az elektron töltését (pontosabban az ellentettjét) szorozzuk az Avogadro-számmal, a Faraday-állandót kapjuk. \square

A Faraday-állandó ismeretében megbecsülhetjük, mennyi energia kell 1 g víz felbontásához hidrogénre és oxigénre. Egy mol vízből 1 mol H_2 tehát 2 mol H keletkezik, ehhez $\approx 2 \cdot 96500 \text{ C}$ kell. A bontási feszültséget 2 V-nak véve 1 g vízre

$$\approx 2 \cdot 96500 \cdot 2/18 \text{ A}\cdot\text{s}\cdot\text{V} \approx 20000 \text{ W}\cdot\text{s} = 20 \text{ kJ}$$

kell. Ez nagyjából tízszer akkora mint a víz párolgáshője.

3.4.13. Kísérlet. Majdnem ugyanezt az elrendezést használhatjuk töltésmérőnek. Annyit kell változtatnunk, hogy most a két vasdrót elektródot minél hosszabbra vesszük és minél közelebb helyezzük el egymáshoz. Legjobb, ha a kettőt együtt csavarjuk fel egy rúdra spirállá, de úgy, hogy ne érjenek egymáshoz. A cél az, hogy a töltésmérő ellenállása minél kisebb legyen, minél kevésbé akadályozza az áramkörben az áram haladását. Ezért jobb, ha elektrolitnak egy jobban oldódó lúgot, *nátronlúgot* használunk. Egy liter méztejhez keverjünk egy kávéskanál mosószódát vagy két kávéskanál szódobikarbónát. Oltott méz legyen bőségesen, ha több van, az nem árt. Az egész keveréket hagyjuk POLIETILÉN palackban langyos helyen pár hétig állni, néha felrázva. Nátronlúg képződik, a tisztáját használjuk. Ebbe már csak GUMIKESZTYŰBEN nyúlhatunk bele, és nagyon vigyázzunk, nehogy ránk, pláne a szemünkbe fröccsenjen. Ha mégis ez történne, nagyon bő vízzel kell lemosni. A spirál az üveg nyakában legyen, és ne hagyjunk annyi gázt felgyűlni, hogy a spirál kibukkanjon a lúgból.

A töltésmérőt felhasználhatnánk arra, hogy például egy saját magunk által készített árammérőt hitelesítsünk. Ehhez szabályozható erősségű áramra van szükségünk. Beállítunk valamilyen áramerősséget, és mondjuk egy óráig ezt vezetjük át a sorba kötött árammérőn és töltésmérőn. A Faraday-állandó ismeretében a fejlődött gáz térfogatából kiszámítjuk az áram erősségét. (Valamikor még az áramerősség egységét is töltésmérővel definiálták.) Hogyan szabályozzuk az áram erősségét? Kis áramerősségek esetén ezt megtehetjük a feszültségsztóval is: a feszültséget változtatjuk. Nagyobb áramerősségek esetén jobb *előtétellenállást* használni. Ez kevesebb áramot használ, de egy minimális áramerősség alá nem tudunk menni. Az áramforrás valamilyen nagyobb akkumulátor,

például gépkocsiakkumulátor lehet: egyik sarkát kössük a feszültségosztó egyik végéhez. A csúszka vezetéket kössük a töltésmérő egyik végéhez, a töltésmérő másik végét az árammérő egyik végéhez, annak a másik végét pedig az áramforrás másik sarkához, azaz mindent sorbakötünk. A csúszka helyzetével szabályozhatjuk az áram erősségét. Ügyeljünk arra, hogy az ellenálláshuzal ne melegedjen túlságosan. Ha valamikor nagyobb áramra lesz szükségünk, akkor előtétellenállásnak használjunk izzólámpát.

Ha nincs árammérőnk, akkor azt hagyjuk ki, és csak gázfejlesztésre használjuk a berendezést. Állítsunk be élénk pezsgést, de ellenőrizzük, hogy az ellenálláshuzal (és a töltő) nem melegszik túlságosan. A hidrogén-oxigén gázelegy a *durranógáz*, elég robbanékony. Ezért kell a spirálnak víz alatt lennie, mert ha véletlenül összeérne a két drót, a szikrától a gázelegy felrobbanhat. Ha már elég durranógáz gyűlt össze, szedjük szét a berendezést, és a gázt víz alatt, alulról felfelé töltjük át egy vízzel töltött műanyag palackba, vagy tölsünk meg vele egy nagy fecskendő. A tenyerünkbe öntött szappanos vízbe (vagy más buborékfújásra alkalmas folyadékba) fújjunk a gázzal buborékokat. Persze, előzőleg levegővel próbáljuk ki, hogy ez sikerül-e? A durranógáz buborékok gyújtópálcától hangos, de veszélytelen durranással felrobbannak. \square

Vajon mennyi a tiszta vízben a H^+ és OH^- ionok koncentrációja? Nyilván a kettő ugyanannyi. A kémia részben megmérjük, milyen sebességgel mozognak a H^+ és OH^- ionok. Ebből most kiszámoljuk a koncentrációt $25^\circ C$ -on: $\approx 10^{-7}$ mol/l adódik, pontosabb mérések szerint ettől az eltérés kisebb, mint fél %.

** Az ionok sebessége arányos az elektromos térerősséggel, azaz a méterenkénti feszültségkülönbséggel. Pontos mérések szerint a H^+ ionok sebessége $0,3623 (\mu m/s)/(V/m)$, az OH^- ionoké pedig $0,2064 (\mu m/s)/(V/m)$ $25^\circ C$ -on. Képzeljünk most el egy $1 m^2$ keresztmetszetű, $1 m$ -nél valamivel hosszabb téglatestet a legtisztább desztillált vízből. Két szembenlévő oldalához tegyünk egy-egy elektródot, majd kapcsoljunk az elektródok közé akkora feszültséget, hogy a bontási feszültség levonása után a vízben $1 m$ -re $1 V$ feszültségkülönbség jusson. Gondolatban válasszuk le az elektródok környékét. Nem fogunk azzal törődni, mi történik az elektródok közvetlen közelében, csak az $1 m$ hosszú középső részt tekintjük. Egy másodperc alatt a H^+ ionok $0,3623 \mu m$ -t mozdulnak el a katód felé. Mivel 1 mól H^+ ion F töltésnek felel meg, ha x mól ion van, akkor a hidrogén ionok $0,0000003623 \cdot x \cdot F$ töltést szállítanak. Az OH^- ionok az anód felé mozdulnak el, mivel azonban töltésük negatív, elmozdulásuk annak felel meg, hogy $0,0000002064 \cdot x \cdot F$ pozitív töltést szállítanak a katód felé. Mivel a legtisztább desztillált víz fajlagos ellenállása $183 k\Omega m$, az ellenállás 183000Ω , az áramerősség $1/183000 A$, azaz 1 másodperc alatt $1/183000 C$ töltés megy át. Innen

$$(0,0000003623 + 0,0000002064)xF = \frac{1}{183000} C,$$

ahonnan $x \approx 0,0001004$ mol, tehát a koncentráció durván 10^{-7} mol/l. **

Teljesen hasonlóan, ha megmérjük vagy megbecsüljük az egyes sók ionjainak sebességét és megmérjük a sóoldat fajlagos ellenállását, akkor kiszámolhatjuk az ionok koncentrációját. Az adódik, hogy a sók lényegében teljesen ionokra bomlanak, idegen szóval *disszociálnak*, mint a konyhasó az 5.1.7. ábrán.

3.4.14. Kísérlet. Vezessünk egy kis orvosságos üvegben lévő mézsvízbe áramot egy 9 V-os telepből vas elektródokkal. Az edényt legfeljebb félig töltsük meg a mézsvízzel, de a csupasz elektródokat lepje el az oldat. Ha van DMM-ünk, kapcsoljunk egy néhány Ω -os ellenállást az áramkörbe: ezen mérve a feszültségesést, mérhetjük az áramot. Azért célszerűbb így eljárni, mint közvetlenül árammérőt kapcsolni az áramkörbe, mert ha az elektródok véletlenül összeérnek, a zárlati áram árthat az árammérőnek. Mérjük meg az áramot. Én 32,3 mA-t mértem. (Árammérő nélkül csak a hidrogénfejlődés erősségéből becsülhetjük az áramot.) Persze, ez függ az elektródok hosszától, távolságától, stb. Fújunk egy szívószálon át a mézsvízbe. A mézsvíz zavaros lesz, fehér csapadék képződik. Az áram csökken, mégpedig megfigyelhetjük, hogy nem egyből, hanem néhány másodpercen át, majd a csökkenés megáll. Újra belefújva az üvegbe, további csökkenést tapasztalunk. A legkisebb áram, amit mértem, 2,2 mA volt. Ha tovább fújunk az üvegbe, valamennyit nő az áram, nekem 2,5 mA-re.

Mi történik itt? Az oltott méz, $\text{Ca}(\text{OH})_2$, vízben oldva Ca^{2+} és OH^- ionokra bomlik. A kilehelt levegőben lévő szén-dioxid, CO_2 először oldódik a vízben, majd reagál az OH^- ionokkal: $2\text{OH}^- + \text{CO}_2 = \text{CO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$. Ez utóbbi reakció időreakció, pár másodperc kell a lejátszódásához. A keletkezett karbonát ionok a kalcium ionokkal kalcium-karbonát csapadékot adnak: $\text{Ca}^{2+} + \text{CO}_3^{2-} \rightleftharpoons \text{CaCO}_3$. Ahogy fogynak az ionok az oldatból, úgy csökken a vezetőképesség. Nulla nem lesz soha, mert valamennyire a kalcium-karbonát is oldódik vízben. (Éppen ezen az alapon lehet meghatározni a kalcium-karbonát oldhatóságát: lásd a kémia részben.) A végén a tovább oldódó szén-dioxid egy kis része a vízzel szénsavat képez, és ennek ionjai valamennyire megnövelik a vezetőképességet. \square

3.4.15. Hidrogén ionok. Az ionok között a hidrogén ionok különleges szerepet játszanak. A hidrogén atomban csak egyetlen elektron van. Ha ezt elveszíti, a létrejövő H^+ ionban — minden más iontól eltérően — egyetlen elektron sem marad, csak egy puszta atommag, így nagyságrendben 100000-szer kisebb, mint bármilyen más ion. Így ennyiszor közelebb tud kerülni egy vízmolekulához, és sokkal nagyobb erővel kapcsolódik hozzá. ** Akik nagyon precízek akarnak lenni, H_3O^+ úgynevezett *hidroxóniumion*ot írnak a H^+ hidrogénion helyett, ami gyakorlatilag soha nincs a vízben. Azonban ez sem precíz, mert az igen kicsi H^+ ion két vízmolekulához is kapcsolódhat, mintegy összekötve őket. Ez a *hidrogénhíd*. Sőt, az így létrejött ionhoz még további vízmolekulák kapcsolódhatnak. Legjobb, ha nem bonyolítjuk a dolgokat, és egyszerűen H^+ hidrogéniont írunk, de megjegyezzük magunknak, hogy valójában a hidrogénion igen ritka, mindig egy vagy több más molekulához kapcsolódik. Egyéként a hidrogénhíd nem csak oxigénatomok között jöhet létre, hanem más, például nitrogén atomok között is. A létrejövő hidrogénhíd annál erősebb, minél erőbben kötik az adott atomok az elektronokat magukhoz.

Már volt szó a H^+ ionok mozgásáról áram hatására. A könyvsorozat kémia részében megmérjük más ionok mozgási sebességét, és látjuk, hogy minden más ionnál gyorsabban mozognak, és az OH^- ionok mozgása is igen gyors más ionokhoz képest. Miért van ez? Valójában az történik, hogy a H^+ ion hozzákapcsolódik egy vízmolekulához, majd annak a másik végéről leválik egy másik H^+ ion. Az átugrik egy másik vízmolekulára, majd annak a másik végéről leválik egy másik H^+ ion, stb. Tulajdonképpen a H^+ ionok „csalnak”, nem is ugyanaz a H^+ ion halad, hanem váltják egymást, ezért haladhatnak ilyen

gyorsan. Hasonlóan „csalnak” az OH^- ionok: egy OH^- ionra átugrik egy szomszédos vízmolekuláról egy H^+ ion, az OH^- ionból vízmolekula lesz, a vízmolekulából pedig OH^- ion, stb.**

3.4.16. Kémiai kötések. ** Az alábbi kis táblázat a kémiai kötésfajtákat foglalja össze:

Kötés típusa	Kötés energiája (kJ/mol)
ionos	500–1000
kovalens	150–1000
hidrogénkötés	10–120
van der Waals-kötés	2–10

A kötés energiája az egy mólnyi, azaz Avogadro-számnyi kötés felbontásához szükséges energiát jelenti. A sók ionjait elektromos vonzásból eredő ionos kötés tartja össze. A hidrogénkötés egy hidrogénhíd által kialakított kötést jelent. Például a 2.1.1. ábrán a szaggatott vonalak ilyen kötésekkel jelentenek, ezek tartják össze a jégben a vízmolekulákat. A semleges molekulákat van der Waals-erők által létrehozott, aránylag gyenge van der Waals-kötések tartják össze. Az egyforma atomokat, például a H_2 vagy O_2 molekulákban kovalens kötések tartják össze. A kovalens kötés magyarázatára majd később, az atomok szerkezetének megismerése után térünk vissza.**

3.4.17. Kísérlet. Sósavat fogunk elektrolizálni. Egy kis üvegbe keressünk egy beleillő parafadugót (nem kell jól zárnia). Átfúrjuk két helyen és két grafit elektródot dugunk át a lyukakon. (Grafit elektródhoz úgy juthatunk, hogy vízbe áztatunk egy minél vastagabb ceruzát, például ácsceruzát. A ragasztása szétázik.) Öntsünk a kis üvegbe vizet, lehetőleg desztillált vizet, amibe ÓVATOSAN egy kevés háztartási sósavat teszünk. Ha a sósav elég híg, már alig érződik a szúrós szaga. Kapcsoljunk az elektródok közé 2,4–3 V feszültséget. A katódon élénk hidrogénfejlődést tapasztalunk. Az anódon gyengén fejlődik egy zöldessárga gáz. A gázfejlődés azért gyenge látszólag, mert a gáz oldódik vízben. Már néhány másodperc után szakítsuk meg az elektrolízist, és NAGYON ÓVATOSAN szagoljuk meg a gázt: kezünkkel legyezzük az orrunk felé, és egy keveset szívjunk be az orrunkba, DE NEM KELL BESZÍVNI A TŰDŐNKBE! A gáz a nagyon mérgező klór. Szaga nagyon kellemetlen, a hypoéra emlékeztet. Tömény klórból már egy lélegzetvételi halálos, ezért SEMMIKÉPPEN SE FEJLESSZÜNK SOKAT. Ha a sósavbontót sorbakötjük a vízbontóval, meg lehet mutatni, hogy minkettőben ugyanannyi hidrogén fejlődik, azaz Faraday törvénye érvényes. Ezzel a könyvsorozat kémia részében foglalkozunk. □

A sósav hidrogén-klorid gáz, HCl . Vízben oldva ionokra bomlik: $\text{HCl} \rightarrow \text{H}^+ + \text{Cl}^-$. A hidrogén ionon a katódhoz vándorolnak, felvesznek egy elektront, és a H atomok kettessel összekapcsolódnak: $2\text{H} \rightarrow \text{H}_2$. A klorid ionok az anódhoz vándorolnak, ott leadnak egy elektront, majd a klór atomok kettessel összekapcsolódnak: $2\text{Cl} \rightarrow \text{Cl}_2$.

3.4.18. Kísérlet. Mérjük meg a sósav bomlásfeszültségét! Az elektródok közé kapcsoljuk a feszültségmérőt, és a feszültségosztóról adjunk 1 V-os feszültséget az elektródokra. Figyeljük nagyítóval, hogy van-e gázfejlődés? Ha nincs, emeljük meg a feszültséget mondjuk 1,1 V-ra, stb. Ha már van gázfejlődés, emeljük ki az elektródokat, öblítsük le, töröljük meg törlőpapírral, menjünk vissza oda, ahol még nem volt gázfejlődés, és kisebb

lépésekben haladjunk felfelé. Az én mérési eredményem Jobb lenne platina elektródokat használni, de hát ahhoz nemigen jutunk hozzá. Mészvízzel vagy nátronlúggal megismételve a kísérletet, platina elektródokkal $\approx 1,7$ V-ot kapunk eredményként, függetlenül a koncentrációtól. Ez a víz bontási feszültsége. Mindig ezt mérjük, ha a katódon hidrogén, az anódon oxigén fejlődik. Más kémiai folyamatoknál, például glaubersó vagy salétrom elektrolízisének más a kémiai folyamat, más az eredmény, más bontási feszültséget kapunk. \square

3.4.19. Kísérlet. Az előző kísérletben jócskán túllépve a bontási feszültséget, elektrolizáljunk 10–20 másodpercig, majd kapcsoljuk le a telepet! A voltmérő továbbra is feszültséget jelez! A feszültség csaknem akkora, mint a bontási feszültség és csak lassan csökken nullára. Ha újra elektrolizálunk, és rögtön az áramkör bontása után egy kis (minél kisebb feszültségű és áramú) izzót kapcsolunk az elektródok közé, az rövid ideig világít. Az áram persze most az ellenkező irányba folyik, az elektrolizáló cella az áramforrás. A jelenséget *polarizációnak* nevezzük. A magyarázat az, hogy a klór és a hidrogén gázelemet alkot: amennyi elektromos munkát befektettünk a sósav szétbontásába, majdnem pontosan annyit kapunk vissza a gázelemből, annál pontosabban, minél kisebb árammal működtetjük, és minél kisebb árammal elektrolizáltunk. Legalábbis platina elektródoknál ez a helyzet. Azért csak majdnem, mert az ellenállásokon feszültségesség lép fel, az áram munkát végez, és az energia egy része hővé alakul. Persze, a gázelem folyamatos működtetéséhez klórt illetve hidrogént kellene az elektródokhoz vezetni. Még így is csak akkor működne jól, ha nagyon jó katalizátorból, például platinából lennének az elektródok, mert egyébként az elektródok és az elektrolit közötti áramátlépéskor is nagyobb a feszültség a minimálisan szükségesnél. Ez a feszültségkülönbség a *túlfeszültség*. A túlfeszültség miatt is jelentős munkavégzés van. A gázelem hidrogénnel és oxigénnel is működhet, de egyelőre nagyon drága, csak űrhajókban használják. \square

3.4.20. Kísérlet. Sósav elektrolízise réz elektróddal. Rézklorid készítése. Az ionok mozgása.

3.4.21. Kísérlet. Megkeverni. Galvanizálás.

3.4.22. Kísérlet. Áramirányt megfordítani: réz leoldódik.

3.4.23. Kísérlet. A galvánelemet Galvani olasz orvos fedezte fel. Békákat boncolt és a békacombot kiakasztotta egy rézkampón a vaskorlátra. Megfigyelte, hogy ha a nedves békacomb hozzáér a vaskorláthoz, összerándul. A jelenséget állati elektromosságnak nevezte el, és azt gondolta, a békacomb hozza létre a feszültséget.

Hogyan tudnánk Galvani kísérletét megismételni békacomb nélkül? Egy nagy cink vagy horganyzott (cinkkel bevont) vas lemezre tegyünk egy kisebb réz lemezt, még jobb, egy ezüst pénzt. Erre tegyünk egy gilisztát. A giliszta le akar mászni, de valahányszor hozzáér a cink lemezhez, egy kis áramütés éri, és visszahúzódik. Cink lemez helyett alumínium fóliával is próbálkozhatunk. \square

3.4.24. Kísérlet. A Galvani által felfedezett jelenséget Volta olasz fizikus vizsgálta tovább. Rájött, hogy békacombra nincs szükség, csak két különböző fémre és egy elektrolitra. A békacomb a „műszer”: a még élő idegek az áram hatására ingerületet közvetí-

tenek az izomba, és az összerándul. Volta saját nyelvét és szemét használta műszernek. A legnagyobb feszültséget ezüsttel és cinkkel sikerült létrehoznia.

Tegyünk a nyelvünkre egy ezüst pénzt vagy ha nincs egy réz lemezt! Egy horganyzott csavart értesünk a nyelvünk hegyéhez és a másik fémhez is! A nyelvünk hegyén savanyú ízt érzünk.

Volta másik műszere érzékenyebb. Szemhéjunkat vizezzük be, feküdjünk hanyat, hunyjuk be a szemünket, és a szemhéjunkra tegyünk egy ezüst pénzt. A szánkba vegyünk egy cink tárgyat, például horganyzott csavart, amire egy drótot kötöttünk. Mint Volta megfigyelte, a drót anyaga nem számít. A drót másik végét értesük az ezüst pénzhez. A szemünkkel fényt látunk. Természetesen ez nem valódi fény, hanem az áram ingerli a szemideget. \square

3.4.25. Kísérlet. Testünkben az idegek az ingerületet elektromos úton továbbítják. (Nem olyan régi, rendkívüli jelentőségű felfedezés, hogy az idegsejtek között viszont a „beszélgetés” kémiai úton történik.) Ezért olyan veszélyes az áramütés. A szív saját magát vezérli elektromos úton. Egy áramütés megállíthatja a szívet, ilyenkor azonnali újjáélesztés szükséges! Ha áramütés ért bennünket, érdemes utána is orvoshoz fordulni.

Mérjük meg testünk ellenállását! A DMM-el közvetlenül nem tudjuk megmérni az itt is fellépő bontási feszültség miatt, de elég egy 9 V-os telep, és megmérhetjük az áramot. Száraz bőrrel a két kezem között $3,2 \mu\text{A}$ -t mértem, ami a bontási feszültséget levonva $7/(3,2 \cdot 10^{-6}) \approx 2 \cdot 10^6 \Omega$. Nedves bőrrel ugyanez $130 \mu\text{A}$, ami $50 \text{k}\Omega$ -nak felel meg. A nagyobb feszültség átüti a bőrünket és a fellépő erősebb áram átégeti a bőrt. $50\text{--}60 \text{V}$ -nál nagyobb feszültség életveszélyes lehet, főleg, ha átmegy a szívünkön, és ha nedves a bőrünk, így az áram eléri a $10\text{--}20 \text{mA}$ -t, ezért A HÁLÓZATI FESZÜLTSGGEL NE KÍSÉRLETEZZÜNK! \square

3.4.26. Kísérlet. Volta tehát felfedezte, hogy ha két különböző fémet valamilyen vezető oldatba (sav, só, lúg, csapvíz) teszünk, akkor feszültségkülönbség alakul ki közöttük. Például gyümölcsöket és zöldségeket is használhatunk. Egy darab krumpliból szúrjunk egy rézdrótot. A közelében egy horganyzott vasdrótot szúrjunk át teljesen a krumplin. Használhatunk horganyzott csavart vagy valamilyen horganyzott lemezt is, a lényeg az, hogy a horganyzott rész érjen csak a krumplihoz. Mérjük meg a feszültséget. Ez nem függ attól, hogy mekkorák az elektródok, csak az anyaguktól. A horganyzott vas cink elektródként működik. Krumpli helyett használhatunk almát, citromot, narancsot, hagymát, paradicsomot, stb. A feszültség 1V körüli, nem függ lényegesen a zöldségtől-gyümölcstől. Mérjük meg az áramot: hamar lecsökken, és függ az elektródok felületétől, meg az elektródok távolságától is. Ha a távolságot növeljük, az elem saját, belső ellenállása nő. Mérjük meg a feszültséget vas és cink, valamint réz és vas elektródok között is. A két feszültség összege nagyjából a cink–réz pár által adott feszültség. Én almát használtam és horganyzott csavart. A cink és a vas között 360mV (a cink a negatív), a vas és a réz között 579mV (a vas a negatív), a cink és a réz között 950mV (a cink a negatív) feszültséget mértem. Az áram a cink és a réz között $95 \mu\text{A}$ -ról indult és lassan csökkent. Vas helyett próbálkozhatunk ónnal, ólommal, stb. \square

Voltának természetesen nem volt voltmérője, de a nyelvét és a szemét használva műszernek sorba rakta a fémeket: a sorban távolabbiak nagyobb feszültséget adnak. A

feszültségkülönbség függ az oldattól is. Valamilyen „normál” esetre vonatkoztatva (pontosabban lásd a kémia részben) a feszültségek, a *normál elektród potenciálok* az alábbiak:

elektród	Li/Li ⁺	K/K ⁺	Ba/Ba ²⁺	Sr/Sr ²⁺	Ca/Ca ²⁺	Na/Na ⁺
U_0/V	-3,05	-2,93	-2,91	-2,89	-2,87	-2,71
elektród	La/La ³⁺	Ce/Ce ³⁺	Mg/Mg ²⁺	Al/Al ³⁺	Mn/Mn ²⁺	Zn/Zn ²⁺
U_0/V	-2,52	-2,48	-2,36	-1,66	-1,18	-0,76
elektród	Cr/Cr ³⁺	S/S ²⁻	Fe/Fe ²⁺	Co/Co ²⁺	Ni/Ni ²⁺	Sn/Sn ²⁺
U_0/V	-0,74	-0,48	-0,44	-0,28	-0,23	-0,14
elektród	Pb/Pb ²⁺	Fe/Fe ³⁺	Cu/Cu ²⁺	O ₂ /OH ⁻	I/I ⁻	Hg/Hg ₂ ²⁺
U_0/V	-0,13	-0,04	+0,34	+0,40	+0,53	+0,79
elektród	Ag/Ag ⁺	Hg/Hg ²⁺	Br/Br ⁻	Cl ₂ /Cl ⁻	Au/Au ³⁺	F ₂ /F ⁻
U_0/V	+0,80	+0,92	+1,09	+1,36	+1,40	+2,87

Meglepő lehet, hogy még anionok is szerepelnek, de gondoljunk a sósav elektrolízisekor keletkező gázelemre. A feszültségek éppen a hidrogén elektródra vannak vonatkoztatva, tehát úgy döntöttek, hogy H₂/H⁺ esetén $U_0 = 0$. A táblázat alapján bármely elektród-pár között fellépő feszültséget ki tudunk számítani: például réz–cink, Cu/Zn: 0,34–(-0,76) = 1,10 V (megfelelő körülmények között). A további részleteket lásd a kémia részben.

3.4.27. Kísérlet. 1800-ban Volta rájött, hogyan érhet el nagyobb feszültséget: elemeit sorba kapcsolta. A *Volta-oszlopot* legjobban úgy közelíthetjük, ha rézlemezről és horganyzott bádogból egyforma darabokat vágunk, és közé vastag papírt teszünk, amit ecettel megnedvesítünk. Sima vaslemezzel is sikerül a kísérlet, de úgy kisebb a feszültség. Egy műanyag ruhacsipesszel összefoghatjuk, mindjárt az áramvezető drótokat is hozzászorítva. A horganyzott lemez horganyzott oldala nézzen az ecetes papír felé. Ha két vagy több ilyen fémlemez-párt a közöttük lévő ecetes papírral egymás fölé helyezünk, és úgy fogjuk össze: az elemeket sorba kapcsoltuk, a feszültség összegződik. Egyébként megfigyelhetjük, hogy ha a papír már szinte száraz, akkor is van még feszültség, de ilyenkor az áram már gyenge: nagy a belső ellenállás. Nekem egyetlen lemezpárral horganyzott lemezzel 805 mV és (rövidzárbán) 3,50 mA adódott, vaslemezzel 590 mV és 450 μ A áram. Az áram csökkent. Majdnem száraz papírral a vaslemezzel 14 μ A-t adódott és nagyon gyorsan csökkent. Volta megfigyelte, hogy legjobb elektród pár a cink és az ezüst. Egyszerűbben is készíthetünk Volta-oszlopot réz (sárgaréz is jó) pénzékből és alumínium fóliából sós vizes papírral. Minden pár kb. fél voltot ad. Én sárgaréz 5 forintossal 588 mV-ot mértem egy párra és 640 μ A-t. \square

3.4.28. Kísérlet. A *Volta-féle korona-lánc* kis poharakból áll. Mindegyikben híg kénsav van, és egy réz meg egy cink elektród merül bele. Az elsőnek a cink elektródjához van kötve a második réz elektródja, a másodiknak a cink elektródjához a harmadiknak a réz elektródja, stb. Cink elektródnak például horganyzott csavarokat használhatunk, vagy U alakban meghajlított horganyzott vasdrótot, aminek így csak a horganyzott felülete ér a kénsavba. Három pohárkát használva horganyzott csavarokkal és rézdrótokkal 2,55 V-ot mértem és 1,33 mA-t. Nagyobb felületű elektródokat használva nagyobb áramot kaphatunk.

Manapság könnyebben létrehozhatunk koronaláncot cink helyett alumínium fóliát, híg kénsav helyett erősen hígított sósavat használva. De hiszen ilyet már csináltunk is a hő és kémia alfejezetben, amikor felfedeztük a szabad entalpia szerepét! Azt is megbeszéltük, hogy az áram abból adódik, hogy az alumíniumon nehezen válik le a hidrogén, a rézen pedig könnyebben.

Két probléma van az így létrehozott elemmel. Az egyik, hogy ha nem használjuk is az elemet, a sav lassan oldja a fémet. Ezt láthatjuk is. Úgy lehet elkerülni, hogy kivesszük az elektródot, ha nem használjuk az elemet, ami persze kényelmetlen. Egy másik módszer, ami csak a cinknél működik, hogy valamilyen Hg-só oldatába mártjuk a cinket, és aztán tesszük az elembe. Ekkor Hg válik ki a felületen, ami a cinkkel amalgámot képez. A higanyon még nehezebben válik ki a hidrogén, így a hidrogénfejlődés nagyon lelassul.

A másik probléma, hogy működés közben az elem pozitív sarkán hidrogén válik ki, ami bevonja az elektródot, és az hidrogén elektródként működik. Ettől az áram lecsökken. Ez „polarizálódásnak” szokás nevezni. Az az ötletünk támadhat, hogy valamilyen oxidálószerrel pusztítsuk el a hidrogént. Ez működik is. \square

3.4.29. Kísérlet. Az első ilyen típusú elem a *Lechlanché-elem* volt. Az anód cink, az elektrolit szalmiáksó oldat. A katód szén vagy grafit rúd, amit grafittal és korommal kevert barnakő, MnO_2 vesz körül. Tulajdonképpen a barnakő a katód, a szén, grafit, korom legfeljebb katalizátor, és az áramvezetést szolgálja. Elég stabil 1,5 V-os feszültséget ad. Hamarosan elkészítették „szárazelem” formájában is. Ebben a grafit-korom-barnakő keverék egy vászonból készült „babában” van közepében a szénrúddal. A szalmiáksó oldat vízzel főzött lisztből készült csirízben van felszívva, és az elem doboza cink henger, az anód. Ha szétszedjük egy vitorlázáshoz használt 6 V-os telep egyik elemét, vagy bármilyen régi (nem alkáli) elemet, akkor láthatjuk is ezt. \square

Mitől nőtt meg a szabad entalpia? Egy szemléletes, bár nem teljesen pontos indoklás, hogy a barnakő nagyon lecsökkenti a hidrogén nyomását a szénrúdon, így még „hasznos” elektromos munkaként kaphatjuk meg azt a munkát is, amit a hidrogén végezne, miközben normál nyomásról erre a kis nyomásra tágulna.

Az elem által leadható töltést amperszer órában, Aó-ban szokták megadni (angolul Ah). Egy AA típusú rúdelem nagyjából 0,8 Aó töltést bír leadni, ha nem nagyon nagy árammal sütik ki, hanem például 25–100 ó alatt. A nagyobb méretűek arányosan több töltést bírnak leadni, ugyanennyi kisütési idő mellett \square

3.4.30. Kísérlet. Mai elemeink nagy részében az anód cink, ritkán magnézium, kadmium vagy ólom. Katódnak viszont valamilyen oxidálószer alkalmaznak. Ez lehet valamilyen változó vegyértékű fém oxidja vagy hidroxidja, például MnO_2 , $\text{Fe}(\text{OH})_3$, $\text{Ni}(\text{OH})_3$, PbO_2 , ami az anódról jövő elektronokat felvéve alacsonyabb vegyértékűvé redukálódik, lehet egy nemesebb fém vegyülete, ami fémmé redukálódik, például CuO , HgO , Ag_2O , AgO , AgCl , CuCl_2 , de lehet más oxidálószer is. Lehet akár a levegő oxigénje is, ha megfelelő katalizátorral sikerül reakcióra bírni. Vannak például olyan játék elemek, amelyek „vízzel” működnek. Az anód legtöbbször magnézium, a víz csak feloldja a száraz sókat, hogy a kémiai folyamat beinduljon. \square

Egyébként Davy volt az, aki 1806-ban kimondta, hogy a galvánelemben a feszültségkülönbséget kémiai folyamatok hozzák létre és tartják fenn. Volta maga azt hitte, hogy

a feszültségkülönbség a fémek között jön létre. Ki is mutatott két összeérintett majd szétválasztott fém, cink és réz között ilyen feszültséget, a *Volta-féle feszültséget*. Ennek a keletkezéséről — a félvezetőkben létrejövő feszültségekkel együtt — majd a szilárdtest fizikában lesz szó. Ezek azonban zárt áramkörben „kiejtik” egymást, nem hozhatnak létre állandó áramot, mert az ellentmondana az energiamegmaradás elvének. Kivétel a hőelem, ahol az érintkezési helyek hőmérséklete különböző, és így a Volta-féle feszültségek is különböznek: ez egyfajta hőerőgép, a hő egy része alakul elektromos energiává.

3.4.31. Kísérlet. A ma legelterjedtebb elemek a lúgos elemek. Az anód legtöbbször cink. A katód sokféle lehet, különösen a kis gombaelemeknél. A nagyobb méreteknél szinte mindig barnakővel kevert grafit. Az elektrolit lehet nátronlúg, de legtöbbször kálilúg. Töltésük nagyobb, egy AA méretű rúdelem töltése 1,2 Aó vagy még több is lehet. Ezt a töltést majdnem teljesen képes leadni 2 ó alatt is, tehát jól terhelhető. Felépítésük lényegében a régi szárazelemek „kifordítása”. A külső acélház nem vesz részt az áramtermelésben, így nem is lyukad ki. A katód egy belső acél ház, a kettő között egy biztonsági felszívó réteg van. Ez a belső ház felül zárt, ez érintkezik a barnakő-grafit-korom réteggel. Ezen belül van a tömény kálilúg oldat, kocsonyásítva. Műanyag szigeteléssel elválasztva a katódtól legbelül van a cinkporból sajtolt anód, amibe alulról egy cinktű nyúlik be. Ez az elem aljához csatlakozik, és alul is műanyag szigeteli el a külső és a belső háztól. Óvatosan (VÉDŐSZEMÜVEG) szedjük szét egy ilyen „alkáli-elemet”. □

3.4.32. Kísérlet. Az *akkumulátor* egy kémiai úton működő töltéstároló. Kisütéskor, amikor áramot veszünk ki belőle, úgy működik, mint egy galvánelem. Töltéskor fordított irányban áramot vezetve át rajta, a kémiai folyamatok megfordulnak, és az eredeti galvánelem helyreáll. Az első használható töltéstároló a *Planté-féle ólomakkumulátor* volt. Ma is az ólomakkumulátor az egyik legfontosabb akkumulátorfajta, gondoljunk csak a gépkocsik akkumulátorára. Az elv elég egyszerű és könnyen kipróbálhatnánk, de inkább hagyjuk ezt a kísérletet a kémia részre, ahol bőven lesz szó a szükséges anyagok tulajdonságairól. Itt a leírás: Tegyük egy híg kénsavat tartalmazó pohárba két ólomlemez, és vezessük át az egészen előtétellenállással áramot. Legalább 4–5 V-ra lesz szükségünk. A negatív sarokhoz kapcsolt lemez szépen letisztul, felülete fémes lesz, a másikat viszont barna réteg vonja be. Ez a réteg ólom-dioxid, ami a kénsavból képződő oxigénnel képződik az ólomból. Ha lekapcsoljuk az áramot, a lemezek között akár napokig is 2 V körüli feszültséget mérhetünk. Kapcsoljunk egy nagyobb ellenállást, például egy zseblámpaizzót a két elektród közé. Az akkumulátorunk lassan lemerül. Mindkét elektródon fehéres színű ólom-szulfát, PbSO_4 képződik. Ha újra tölteni kezdjük az akkumulátort, visszaáll a fémesszürke ólom és a barna ólom-dioxid réteg, sőt, kicsit meg is vastagszik. Többször feltöltve és kisütve az akkumulátort, kb. 2 mm-ig tudjuk növelni az PbO_2 réteg vastagságát, tovább nem, mert lepattogzik.

E helyett a hosszadalmas, formázásnak nevezett folyamat helyett a mai akkumulátorokat úgy készítik, hogy kb. 7% antimon tartalmú ötvözetből (ez keményebb, mint a tiszta ólom; ez az úgynevezett *keményólom*) rácsokat öntenek, és a rács hézagaiba tiszta ólom-oxid és kénsav keverékéből készült pasztát kennek. A két anyag reagálva ólom-szulfátot ad. Ezeket a rácsokat akkumulátorsavba téve, lényegében egy kisütött akkumulátort

kapunk, amit csak fel kell tölteni.

A személygépkocsik akkumulátorai általában 12 V-osak, azaz hat sorba kapcsolt cellából állnak, és 40–50 A ó töltést vesznek fel. Legjobb, ha a kisütő és a töltő áram is olyan, hogy 10 ó (vagy több) alatt süsse ki, illetve töltse fel az akkumulátort. Rövid időre egy gépkocsiakkumulátor (például gépkocsi indításakor) akár több száz amper áramot is le bír adni. Az ólomakkumulátor nem szereti a töltetlen állapotban való tárolást. Ha nem használjuk is, 1–2 havonta töltsük fel, különben tönkremegy. □

3.4.33. Lúgos akkumulátorok. Vannak olyan akkumulátorok is, amelyek lúgot, rendszerint káliumlúgot tartalmaznak elektrolitként. Ezek első típusa az Edison által kifejlesztett NiFe akkumulátor. A negatív elektród vas, amely kisütéskor $\text{Fe}(\text{OH})_2$ -dá alakul, a pozitív pedig nikkelpelhellyel kevert $\text{Ni}(\text{OH})_3$, amely $\text{Ni}(\text{OH})_2$ -dá redukálódik. 1,3 V feszültséget ad, amely kisütéskor csökken. Eléggé „nyúzásálló”. Lényegében ennek a továbbfejlesztése a NiCd, azaz nikkell–kadmium akkumulátor. Mára már nincsen forgalomban, mert a kadmium mérgező, esetleg elektromos szerszámokban találkozhatunk vele. Annyi a különbség, hogy a negatív elektród Cd. Kibírnak 1 ó, egyes típusok 2–3 perc alatti kisütést, és kisütött állapotban célszerű őket tárolni. Feszültségük 1,2 V. Helyüket a NiMH, azaz nikkell–metall-hidrid akkumulátorok vették át. Itt a negatív elektród olyan fémötvözet, amely rendkívül sok hidrogént bír elnyelni. A feltöltéskor keletkező hidrogén adja az elektronokat. Feszültsége szintén 1,2 V. Számos lúgos elem is készül vagy legalábbis készült akkumulátor változatban is.

3.4.34. Li elemek és akkumulátorok. Egészen különlegesek a lítium elemek illetve akkumulátorok. Feszültségük magas, 3–3,6 V. Mivel a lítium bontja a vizet, az elektrolit nem vizes oldat, hanem például szerves oldószerben oldott lítiumsó. A CR sorozatú, barnakővel készült lítium elemekkel már találkoztunk. Vannak olyan lítium elemek illetve akkumulátorok, amelyekben a pozitív elektród szulforil-klorid azaz SO_2Cl_2 , tionil-klorid azaz SOCl_2 vagy jód. Ezek valóságos kis kémiai csodák. A szulforil-klorid például vízzel sósavat és kén-trioxidot ad: $\text{SO}_2\text{Cl}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{SO}_3 + 2\text{HCl}$. Azt várja az ember, hogy ha egy ilyen anyagot összehozunk egy alkálifémmel, abból robbanás lesz. Valóban ez is a helyzet, ha szétbontjuk az akkumulátort. A trükk egy vékony réteg a Li-on, amiben nincsenek szabad elektronok, tehát az áramot nem is vezeti, de a Li^+ ionok tudnak benne mozogni.

3.4.35. Kísérlet. Gyerekkoromban a 4,5 V-os elemeket úgy ellenőriztük, hogy az elem két sarkát nyelvünk két széléhez értettük. Ha csípett, akkor még jó volt. Próbáljuk ki óvatosan 4,5 V-os, 9 V-os és 12 V-os elemmel! A 9 és 12 V már határozottan kellemetlen. Ha 12 V-os autoakkumulátorral próbálkozunk, vigyázzunk, a vezetékek össze ne érjenek! □

3.4.36. Kísérlet. Üvegrúd megolvasztása.

3.4.37. Kísérlet. Elektrolitos egyenirányító cella.

3.4.38. Kísérlet. Rézszulfát oldat forgásba jön mágneses térben.

3.5. Indukció

Még nincs kész!

3.5.1. Kísérlet. Drót mágnespatkó sarkai közt. Megfordítjuk a mágnezt. A mágnezt mozgatjuk.

3.5.2. Kísérlet. Tekercs mozgatása mágneses térben. Forgas.

3.5.3. Kísérlet. Tekercs tekercsel: tekercs és tangens bussola. Vasmagos tekercs.

3.5.4. Kísérlet. Ugyanez, de áram ki-be.

3.5.5. Kísérlet. Két tekercs közös vasmagon. Az indukált feszültség. Szinuszos feszültség.

3.5.6. Kísérlet. Lenz törvénye. Mindegyik esetben. Tűcsapágyon forgó vagy felfüggesztett tangens bussola mérleg. Bussola fonálon.

3.5.7. Kísérlet. Kölcsonös indukció adott $\Delta I/\Delta t$ mekkora feszültséget indukál.

3.5.8. Kísérlet. Önindukció: bekapcsoláskor (video) és megszakításkor. Csillólámpával is, saját magunkkal is. Reszelőn húzogatjuk.

3.5.9. Kísérlet. Dinamó motorból. Motorgenerátor két fűróból, flexibilis tengellyel.

3.5.10. Kísérlet. Főáramkörű (változó feszültség) vagy mellékáramkörű (állandó feszültség)?

3.5.11. Kísérlet. Unipoláris dinamó: Siddons, 18. fej.

3.5.12. Kísérlet. Indukció a föld mágnességével, tekercsben vagy vastag rézdrót keretben.

3.5.13. Kísérlet. Lengő drótkeret, a drótok távolsága.

3.5.14. Kísérlet. Mágnesség — rézben? Alu gyertyatokkal. Lemezelt vasmagok.

3.5.15. Kísérlet. Ampere köráramai. Nem ide!

3.6. Váltóáram

Még nincs kész!

- 3.6.1. **Kísérlet.** Hődrótos ampermérő.
- 3.6.2. **Kísérlet.** Elosztót mozgatjuk.
- 3.6.3. **Kísérlet.** Csörömpölés.
- 3.6.4. **Kísérlet.** Frekvencia elektrolízissel, lámpaellenálláson keresztül. Csengőtranszformátorral.
- 3.6.5. **Kísérlet.** Induktív ellenállás: Elektromágnes vasmaggal vagy a nélkül, csengőtranszformátorral, zseblámpaizzóval.
- 3.6.6. **Kísérlet.** Induktív ellenállás mérése.
- 3.6.7. **Kísérlet.** Forgókondenzátor+fázisceruza.
- 3.6.8. **Kísérlet.** Hosszabb zsinór: a fázis átmegy a földre.
- 3.6.9. **Kísérlet.** Kapacitív ellenállás mérése.
- 3.6.10. **Kísérlet.** Transzformátor elektromágnesből. Működése, haszna. Csengőtranszformátor.
- 3.6.11. **Kísérlet.** Letranszformálás: pillanatpáka.
- 3.6.12. **Kísérlet.** Kondenzátorok. Elko.
- 3.6.13. **Kísérlet.** Transzformátor áttétele. Ismeretlen menetszám.
- 3.6.14. **Kísérlet.** Szekunder kör leterhelése lámpákkal. Az áramerősség a primer körben.
- 3.6.15. **Kísérlet.** Csengőtranszformátor szekunder körének előmágnesezése egyenárammal. Árammérés a primer körben. B függése H -tól.
- 3.6.16. **Kísérlet.** A transzformátor szerepe.
- 3.6.17. **Kísérlet.** Ponthegesztés pillanatpákával?
- 3.6.18. **Kísérlet.** Szinkronmotor modellje mágnestűvel és mágnespatkóval. Ha elvesszük, majd visszatesszük, nem indul el.
- 3.6.19. **Kísérlet.** Váltakozó áramú generátor modellje forgó mágnessel. Igaziból forgó elektromágnes.
- 3.6.20. **Kísérlet.** Háromfázisú generátor.
- 3.6.21. **Kísérlet.** Háromfázisú szinkron motor.
- 3.6.22. **Kísérlet.** Háromfázisú aszinkron motor.

- 3.6.23. Kísérlet.** Segédfázisú motor.
- 3.6.24. Kísérlet.** Induktivitás áramfüggése.
- 3.6.25. Kísérlet.** RLC körök. Fázis. Rezonancia.
- 3.6.26. Kísérlet.** Maxwell-híd, Wien-híd. Nullműszernek fülhallgató.
- 3.6.27. Kísérlet.** Periódikus jelek.
- 3.6.28. Kísérlet.** Tranziens jelenségek.

3.7. Elektromágneses hullámok

Még nincs kész!

- 3.7.1. Kísérlet.** Rezgőkör. Rezonancia.
- 3.7.2. Kísérlet.** Herz kísérletei. Egymásba fonódó mágneses és elektromos hurkok.
- 3.7.3. Kísérlet.** Szikratávíró.
- 3.7.4. Kísérlet.** Diódás vevő.
- 3.7.5. Kísérlet.** Diódás vevő egytranzisztoros erősítővel.
- 3.7.6. Kísérlet.** Egytranzisztoros vevő.

4. OPTIKA

4.1. Vizsaverődés és törés

Még nincs kész!

4.2. Képképzés

Még nincs kész!

4.3. Szín

Még nincs kész!

4.4. A fény mint hullám

Még nincs kész!

4.4.1. Kísérlet. Röntgensugárzás keletkezése.

4.4.2. Kísérlet. ** Hagyjuk sötétben egy zseblámpa fehér fényét egy CD vagy DVD fényes felületén visszatükröződni a falra vagy valamilyen sima, fehér felületre. Gyönyörű szivárványszíneket látunk, amelyek körívekben helyezkednek el, elárulva, hogy a lemezre apró, még mikroszkópban is alig látható pontok és rövid vonalak alakjában felírt információ körök mentén helyezkedik el. Ha sötétben egy esernyő sűrű szövésű szövetén keresztül a zseblámpára nézünk, a fény kereszt alakban térül el, jelezve a szövetben keresztben és hosszában elhelyezkedő szálakat. A látható fény csak egy kis részét adja az elektromágneses hullámok nagy családjának, hullámhossza 380 nm-től 760 nm-ig terjed. Az ennél hosszabb hullámhosszú *infravörös* („vörösön inneni”) fény, a *hősugárzás* hullámhossza nagyságrendben 0,1 mm-ig terjed, onnan kezdve egészen sok kilométeres hullámhosszig *rádióhullámokról* szokás beszélni. Lefeje, 380 nm alatt egészen 10 nm-es nagyságrendig

ultraibolya („ibolyán túli”) sugárzásról beszélünk, ez alatt 10 pm nagyságrendig *röntgensugarakról*, majd γ -sugárzásról.

A sugárzás akkor adja a legtöbb információt a részletekről, ha hullámhossza a részletek méretének nagyságrendjébe esik, vagy ennél legfeljebb 1–2 nagyságrenddel nagyobb. Ezért az atomok méretéről és elrendeződéséről röntgensugarakkal sikerült a legtöbb információt megszerezni. Lényegében az történik, mint amikor lézerrel átvilágítjuk az esernyő szövetét, és a falra vetülő fénysugár eltérüléséből következtetünk a szövet szerkezetére. Próbáljuk ki! ** □

4.4.3. Kísérlet. Mikortól oldat az oldat? Milyen aprónak kell lenni a részecskének, hogy már oldatról beszélhessünk? Oldjunk fel 1 dl tömény denaturált szeszből 2,5 g (hegedűgyantát), és öntsünk ebből az oldatból állandó, egyenletes rázás közben cseppenként 1–1 dl desztillált vízbe 1, 3, 5, 10 illetve 20 ml-t. A gyanta rosszul oldódik vízben, az oldat zavaros lesz. Szűrjük le az oldatokat! Az utolsó oldat leszűrhető (le is ülepíthető), a gyantarészecskék elég nagyok, de a többinél a szűrlet zavaros. Az ilyen oldatokat *kolloid oldatoknak* vagy *szolnak* nevezzük. Ha átvilágítjuk egy jól fókuszálható zseblámpával, oldalról kékesen látszik a fénynyaláb, az átmenő fény sárgás vagy vöröses: az első oldatnál kékes, alig sárga, a másodikonál zöldes, kissé sárga, a harmadikonál narancssárga, a negyedikonál narancsvörös. Ezt a jelenséget *Tyndall-jelenségnek* nevezzük. *Rayleigh törvénye* szerint a fény hullámhosszánál kisebb részecskék is szórják a fényt, mégpedig annak hullámhossza negyedik hatványával fordítva arányosan. A kék fény tehát sokkal jobban szóródik, mint a vörös. Ezért látjuk vörösnek a lemenő Napot, különösen, ha a fénye távoli szélvihar által felkavart poros levegőn megy keresztül („vörös az ég alja, aligha szél nem lesz”). Az ég kék színét is a fényszórás okozza. Kísérletünkben a Tyndall-jelenség mutatja, hogy kolloid oldatról van szó, a részecskék nem a szokásos molekuláris méretűek, hanem nagyobbak. Az alsó mérethatár a nagyobb molekuláknál van, például igen gyengén a cukoroldat is mutatja a Tyndall-jelenséget: a cukormolekulák 19-szer nehezebbek, mint a vízmolekulák. Felső mérethatárnak a fénymikroszkóppal még éppen látható 0,1 μm átmérőjű részecskék tekinthetők. Az ennél kisebbek nem ülepíthetők le és szűrőpapíron sem szűrhetők. Ugyan oldalról erősen megvilágítva mikroszkóppal 2–3 nm átmérőjű részecskék is észlelhetők, de csak fénylő pontokként: ez az úgynevezett *ultramikroszkóp* elve. Tegyük el kolloid gyantaoldatainkat: lassanként a gyantarészecskék összeállnak, idegen szóval *koagulálnak* és leülepednek. (Ha nem szűrjük meg az oldatokat, a koagulálás hamarabb megtörténik.) Mi okozza, hogy nem tapadnak össze azonnal nagyobb darabokká? Rendszerint az, hogy azonos elektromos töltésűek, és taszítják egymást. Ha a kolloid oldatot meg akarjuk bontani, ezt a töltést kell megszüntetni. Ez történhet például jól oldódó ionvegyületeket az oldathoz adva: az ellentétes töltésű ionok a kolloid részecskékhöz tapadva semlegesítik a töltést. Ha az így koagulált kolloidból eltávolítjuk az ionokat (például leszűrjük és jól kimossuk), gyakran újra feloldódik. Ha olyan kolloidot adunk az oldathoz, amelynek részecskéi ellenkező töltésűek, akkor mindkettő kicsapódik. A kolloid oldatokat feloszthatjuk *liofil* (oldószer vonzó) és *liofob* (oldószer taszító) kolloid oldatokra. Vízben ez annak felel meg, hogy a finoman eloszlott szilárd anyag poláris, illetve nem poláris. A liofil kolloid oldatok viszkozitása és felületi feszültsége hasonlít az oldószeréhez, nem nagyon stabilak és a koagulálás általában nem

megfordítható, a részecskék ultramikroszkóppal könnyen láthatóak, elektromos feszültség hatására vándorolnak, és nem képeznek gélt (lásd később). Tipikusan ilyenek a kolloid fémek vízben. A liofil kolloidok viszkozitása nagy, felületi feszültsége kicsi, elég stabilak, a koagulálás gyakran megfordítható, a részecskék ultramikroszkóppal nehezen láthatóak, elektromos feszültség hatására nehezen vándorolnak, és könnyen képeznek gélt. A liofil kolloidok gyakran *védőkolloid*ként hatnak, állandóbbá teszik a szolt. Vízben legtöbbször így hat a *zselatin*. □

5. ATOMFIZIKA

5.1. Atomok

Még nincs kész teljesen!

5.1.1. Kísérlet. Kísérletünkhöz Epokitt (vagy Eporapid, vagy más hasonló, kétféle anyag összekeverésével dolgozó úgynevezett kétkomponensű „epoxigyanta”) ragasztóra lesz szükségünk. A használati utasítás szerint mérjük ki a kétféle anyagot, és keverjük össze. A ragasztó több–kevesebb idővel az összekeverés után megköt, és ha például két fadarabot bekenünk vele és összenyomjuk a két fát, akkor összeragasztja őket. A ragasztó megkötése kémiai reakció, a megkötött ragasztó két összetevőjét nem tudjuk egyszerűen elválasztani. Lényegében az történik, hogy a két anyag részecskéi összekapcsolódnak egymással, mégpedig mindegyiknek egy részecskéje a másiknak több részecskéjéhez is kapcsolódik, azok megint a másik anyag több más részecskéjéhez is kapcsolódnak, stb., és végül az egész keverék egyetlen egésszé áll össze. Figyeljük meg, hogy megadott arányban kell a két összetevőt keverni, például az Epokitt-nél az egyikből kétszer annyit adnak, mint a másiktól, és ebből kétszer annyit kell használni. Ha valamelyikből többet veszünk a kelletténél, nem használódik fel a kémiai reakcióban, és a megkötött ragasztóban marad, gyengítve azt. Egyszer egy ismerősöm nagyon jó ragasztást akart csinálni, és mivel a leírás az egyik anyagot „keményítőnek” nevezte, abból jóval többet vett a megadottnál. A ragasztás teljesen használhatatlan lett.

Ha mérlegben megmérjük a még össze nem kevert ragasztót, és a megkötött ragasztót, ugyanannyinak találjuk. A mi kísérleteinknél és az összes kémiai reakciónál a mérleg nem mutat észlelhető különbséget a kiindulási anyagok és a reakció termékeinek tömege között. Ez az *anyagmegmaradás törvénye*. Persze, például égésnél a kiindulási anyagokba az elhasznált levegőt, a termékekbe pedig a keletkezett gázokat is bele kell mérni. Ezt sokáig nem vették figyelembe, nem is tudtak a levegő és az égéstermékek tömegéről, és ez nagyon sok félreértéshez vezetett.

Az, hogy milyen gyorsan köt meg a ragasztó, nem csak a ragasztó fajtájától, hanem a hőmérséklettől is függ. Például az Epokitt 20 °C-on 24 óra alatt keményedik meg, de 50–60 °C-on a gyártó már 1-2 órát ad meg keményedési időnek. Általában is jellemző a kémiai reakciókra, hogy melegben gyorsabban játszódnak le. Szobahőmérséklet közelében 10 °C-kal emelve a hőmérsékletet általában 2–3-szor gyorsabban játszódnak le a reakciók. Például ha 10 °C-onként megduplázódna a ragasztó megkötésének sebessége, akkor az

Epokitt-ra 30 °C-on kétszer, 40 °C-on négyszer, 50 °C-on nyolcszor, 60 °C-on tizenhatszor kisebb keményedési időt kapnánk, ami 50 °C-on két és fél órát, 60 °C-on egy és egynegyed órát ad, így a kötési sebesség növekedése kicsit nagyobb a kétszeresnél. □

5.1.2. Kísérlet. Mitől függ, hogy milyen erős a ragasztás? Persze, nem bírhat el többet, mint amennyit az összeragasztott anyagok illetve a megszilárdult ragasztó elbírnak. Ezt az anyag részeit összetartó hatást idegen szóval *kohézió*nak hívjuk; ez tulajdonképpen az egyazon anyag részei közötti tapadás. Számít azonban az is, hogy a ragasztó mennyire tapad a ragasztott anyaghoz: egyes anyagokhoz jobban, másokhoz rosszabbul. Például fához, fémekhez, betonhoz, egyes műanyagokhoz jól, más műanyagokhoz pedig rosszul tapad az epoxigyanta: a vele adott keverőlapot és keverőlapátot szándékosan olyan műanyagból készítik, hogy ahhoz ne tapadjon jól. A különféle anyagok közti tapadást idegen szóval *adhézió*nak hívjuk. Nem csak szilárd anyagoknál van kohézió és adhézió, hanem folyadékoknál is, de jóval gyengébb. Ha például egy üvegpohár aljára egy csepp vizet cseppentünk és óvatosan felfordítjuk, a víz nem cseppen le: az üveghez tapasztja az adhézió. Ha olajos vagy zsíros az üveg (ehhez az is elég, ha hajunkhoz vagy homlokunkhoz dörzsöljük, onnan elég zsír kerül rá), akkor gyengébben tapad a víz az üveghez, és cseppekké áll össze. Ha tiszta az üveg, például szappannal vagy mosogatószerrel jól megmostuk, akkor teljesen szétfolyik a víz rajta, mert nagyobb az adhézió, a víz az üveget tökéletesen nedvesíti. Egyes anyagokhoz jól tapad a víz, másokhoz, például a teflonhoz rosszul. Ha egy falapot és egy teflon aljú edény alját vízbe mártjuk, és kiemeljük, a fa egész felülete nedves lesz, a teflon nem lesz nedves. Mindkét esetben lehet érezni a kohéziós, illetve az adhéziós erőt, mikor a falapot, illetve a teflon aljú edényt vízszintesen tartva kiemeljük a vízből. Ha nincs kéznél teflon aljú edény, vékonyan zsírozzuk, vajazzuk vagy olajozzuk be egy edény alját. □

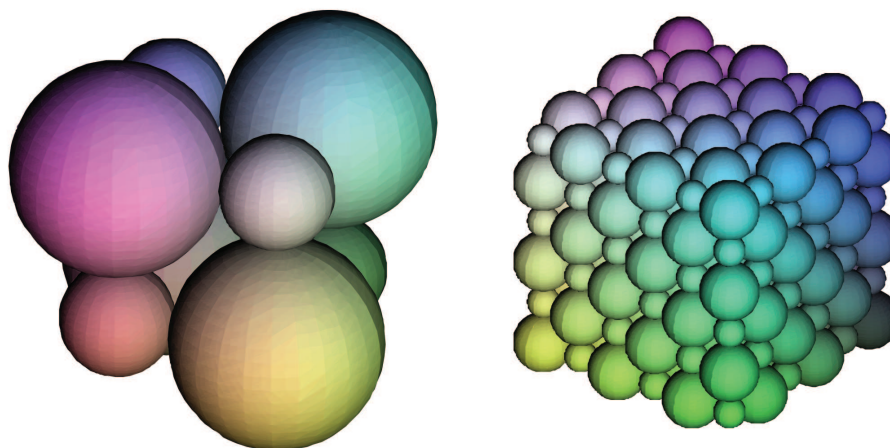
5.1.3. Kísérlet. Tehát jó kohézió és jó adhézió kell a jó ragasztáshoz. Ha például rozsdás vagy lepergő festékes darabokat próbálunk összeragasztani, még ha esetleg jól is tapad a ragasztó a rozsdához vagy a festékhez, az elválik. Ezért ragasztás előtt ha zsír vagy olaj van a felületen, azt szappannal, mosogatószerrel vagy más zsírolóval el kell távolítani, a ragasztandó felületet drótkéfével vagy csiszolópapírral meg kell tisztítani, és az adott anyaghoz ajánlott, ahhoz jól tapadó ragasztóval kell ragasztani. Egyes ragasztók 1 cm²-en akár 100 (az epoxigyanta), sőt, 300 kg súlyát is elbírnak. Vannak azért más szempontok is a ragasztásnál. Például hajlékony, gumyszerű anyagot olyan ragasztóval kell ragasztani, ami maga is hajlékony, nyújtható marad. Forró vízben oldott enyvvvel (lényegében szennyezett zselatin) vagy liszttel (ez a csiríz) vagy más alkalmas anyag alkalmas oldatával például tudunk fát vagy papírt ragasztani, nem tudunk azonban üveget vagy fémeket ragasztani, mert a víznek vagy más oldószernek be kell szívódnia vagy el kell párolognia.

Néha éppen azt használjuk ki, hogy zsíros, olajos felületet nem lehet ragasztani. Ha például fába fúrunk egy lyukat, abba epoxigyantát teszünk és egy vékonyan bezsírozott vagy olajjal bekent csavart teszünk bele, az epoxi megkötése után (de akár évek múlva is) a csavar kicsavarozható. (Tegyünk a csavarra például egy keménypapír karikát, vagy mélyítsük tovább a lyukat, hogy a csavar megálljon.) Így készíthetünk fába vagy sok minden másba is csavarmenetet. Egy 4 milliméter átmérőjű, 1 centiméter mély így

készült menet 25 kg súlyát könnyen elbírta, és ha gépszírral vagy szilikonolajjal kentem be a csavart, akkor könnyű volt kicsavarni; ha csak a hajamon zsíroztam be, sokkal nehezebb volt kicsavarni. Ha 2,6 milliméter átmérőjű, egészen finom menetű csavart használtam, akkor is elbírta 25 kg súlyát, kivéve a „hajolajozással” készült menet, az a csavar kicsavarásakor tönkrement. \square

5.1.4. Kísérlet. A 5.1.1. fényképek kősókristályokat mutatnak (útszóró só kristályait). A 5.1.2. képeken egy kristály hasítását, a 5.1.3. képen pedig egy kristályt egy kalapácsütés után láthatunk. Már régen megfigyelték, hogy a kősó (közönséges só, konyhasó) legszebb kristályai kocka alakúak. Egy kősókristályt könnyen szét lehet hasítani valamelyik lapjával párhuzamosan, ha egy kést teszünk rá, és a késre finoman ráütünk. Ha kalapáccsal törjük szét, általában téglatest alakú darabokra esik szét. A hasadási lapok az eredeti kristálylapokkal párhuzamosak. Mivel az eredeti kristálylapok egymásra merőlegesek, a hasadási lapok is. A kalcit nevű ásvány romboéderekre törik szét. (A romboéder úgy keletkezik a kockából, hogy két szembenlevő csúcsot összekötő irányban a kockát megnyújtjuk vagy összenyomjuk.) A hasadási lapok itt is bizonyos eredeti kristálylapokkal párhuzamosak, és egymással mindig ugyanakkora szöveget zárnak be, minden kalcit kristálynál. A csillám nevű ásvány könnyen hasad vékony lapokra, az azbeszt pedig finom szálakra. A grafit is könnyen hasad vékony lapokra. Mindezeknek a dolgoknak az a magyarázata, hogy a szilárd anyagokban az atomok szabályos rendben rendeződnek el. A 5.1.4. ábra bal oldalán egy lehető legkisebb sókristályt, egy úgynevezett *elemi cellát* láthatunk. Kétféle atomból (pontosabban ionból) áll, a nagyobb klór, a kisebb nátrium, mindegyikből négy van benne. A sókristály úgy épül fel, hogy az elemi cella mellé mindkét oldalon, alá-fölé és elé-mögé további elemi cellák sorakoznak. Az ábra jobb oldalán egy nagyobb kristály látható, amely 27 elemi cellából épül fel. Ha semmi nem zavarja a növekedést, a kristály kocka alakú lesz. Ha nem tud minden irányban egyformán növekedni, akkor téglalap alakú lesz, de a lapok az elemi cella lapjaival párhuzamosak. Hasadáskor a sókristály az elemi cella lapjainál hasad könnyen. Az 5.1.5. ábrán grafit kristály egy részletét ábrázoltuk. Egyforma atomokból áll, ezek síkokba tömörülnek. A síkok viszonylag távol vannak egymástól, ezért hasad a grafit könnyen lapokra. Amikor grafit ceruzával írunk, ilyen grafitlapok tapadnak fel a papírra. Egyébként az ábrán a középső sík atomjai nem mind az alsó sík atomjai fölé esnek, az atomok fele az alsó síkban levő „lyukak” felett van. A felső sík atomjai pontosan az alsó sík atomjai fölött vannak. \square

A 5.1.6. ábrán jég, víz és levegő látható vázlatosan. A víz molekulái kétféle atomból állnak, az egyik, a nagyobb oxigén, jele O, ebből egy van egy vízmolekulában, a másik sokkal kisebb, a hidrogén, jele H, ebből kettő van egy vízmolekulában. Ezért a vízmolekulát H_2O -val szoktuk jelölni. Az ábrán alul víz van. A bal oldalon szilárd állapotban, azaz jégként, mellette folyadékként. A jégben a vízmolekulák valódi helyzetükben láthatók. Az összes többi molekula „oldalnézetben” van ábrázolva. Egy-két kóbor vízmolekula felül, a levegőben is van, ez a vízgőz. A levegő molekulái két-két egyforma atomból állnak. A kisebb részük atomjai ugyanolyanok, mint a vízmolekulák nagy atomjai, azaz ezek O_2

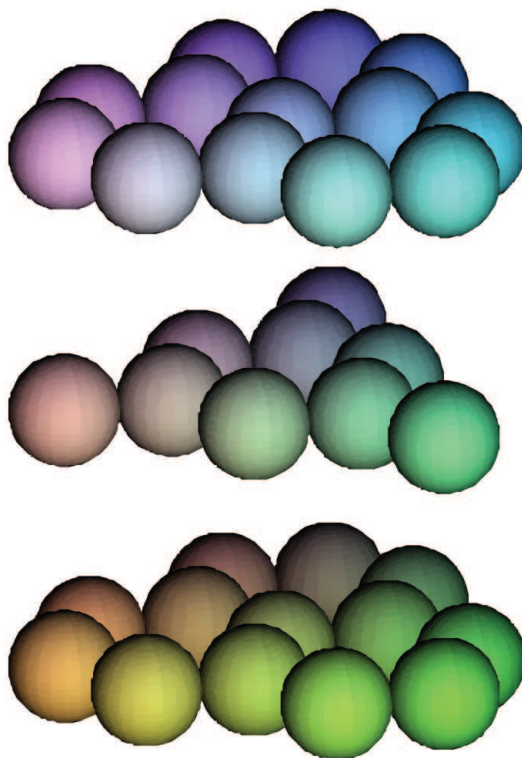


5.1.4. ábra: kősó elemi cellája és pici kristálya

molekulák, nagyobb részük másmilyen, egy picit kisebb atomokból, nitrogén atomokból áll, ezek jele N_2 . Egy-két kóbor levegőmolekula a vízben is van, ez a vízben oldott levegő. Honnan tudjuk, hogy az atomok így rendeződnek el? Ma már képeket is tudunk készíteni molekulákról és atomokról, sőt filmet a mozgásukról! Bár az atomelmélet már az ókorban felvetődött, csak a modern kémia kialakulásával, a XVII.–XVIII. századtól kezdtek komolyan venni, és azóta vegyészek és fizikusok seregének munkája derítette ki a részleteket, és a XX. században vált megcáfolhatatlan tényné. A XIX. század elején fogalmazták meg azt a tényt, hogy a kémiai reakcióknál a reakcióba lépő anyagok súlyának viszonya (aránya) állandó. Ez az *állandó súlyviszonyok törvénye*. Már legelső kísérletünkénél láttunk erre példát: a súlyviszony 1:2, a ragasztó egyik összetevőjéből kétszer annyi kell venni, mint a másiktól. Persze, más reakcióknál más ez a súlyviszony, lehet például 1 : 1,6 vagy 0,83 : 1, stb. Az állandó súlyviszonyok törvényét az magyarázza, hogy a reakcióban az egyik anyag 1 molekulája a másik anyag 1, 2, 3, ... molekulájával reagál, vagy az egyik anyag 1, 2, 3, ... molekulája reagál a másik anyag 1 molekulájával, vagy az egyik anyag 2 molekulája a másik anyag 2, 3, ... molekulájával reagál, stb. Ne felejtjük el, hogy a két anyag molekuláinak súlya nem egyenlő, ezektől is függ a súlyarány.

A 5.1.7. ábra vázlatosan kősó oldódását ábrázolja vízben, a 5.1.8. ábra pedig a szén égését. Az ábrák azt szemléltetik, hogy a kémia az atomok és molekulák „játéka”.

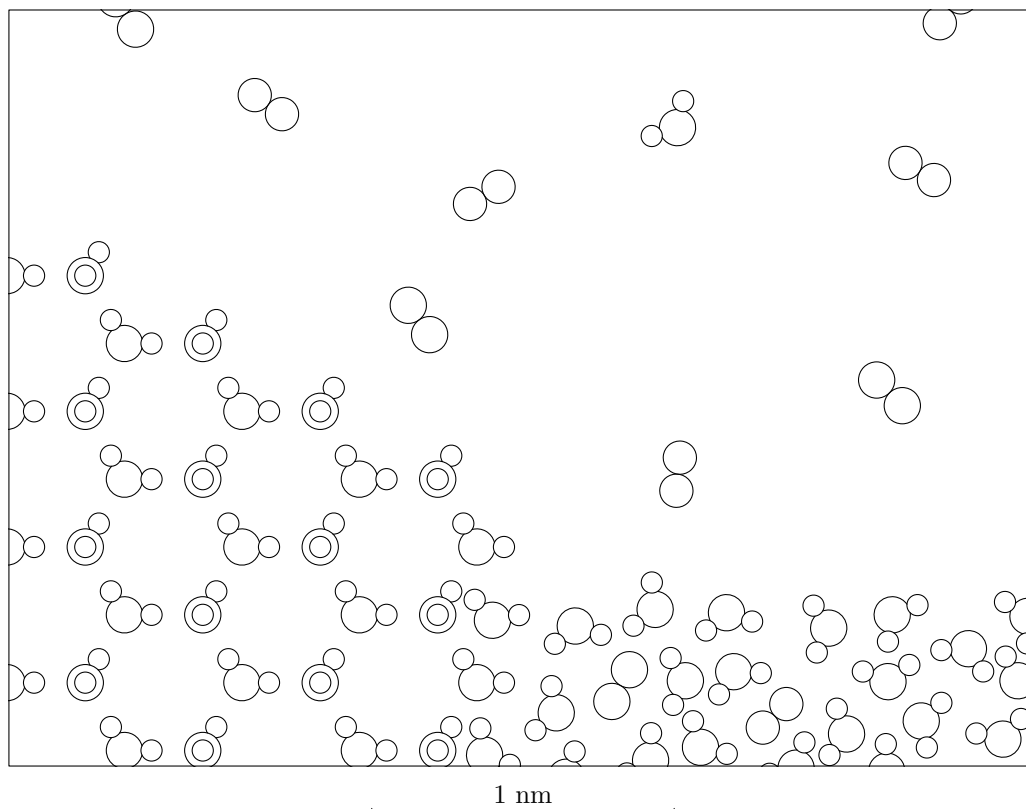
5.1.5. Kísérlet. Minden anyag atomjai állandó mozgásban vannak. A szilárd anyagok atomjai rezegnek a kristályrácsban. A folyadékok molekulái „nyüzsögnek”, forognak, sűrűn egymásnak ütköznek, és bennük az atomok rezegnek. A gázok molekulái gyorsan repülnek és egymásnak ütköznek, bennük az atomok rezegnek. Milyen bizonyítékaink vannak erre a mozgásra? Ha kinyitunk egy kölnis üveget, a kölni szaga gyorsan szétterjed. Molekulái szétrepülnek, ütköznek a levegő molekuláival, és elég hamar messzebbre



5.1.5. ábra: grafit szerkezete

is eljutnak. Csak annak van szaga, aminek a molekulái eljutnak az orrunkba. Milyen gyorsan mozognak a levegő molekulái? A hang keletkezésénél valami megmozgatja a levegőt. Nézzünk meg például egy működő hangszórót: a tölcsére rezeg. A levegő összenyomódása-kitágulása terjed tova a hangban. Milyen gyorsan terjed a hang? Nyilván nem terjedhet gyorsabban, mint ahogy a levegőmolekulák mozognak, de sokkal lassabban sem. A hangsebességet tűzijátéknál megbecsülhetjük, ha tudjuk, nagyjából milyen messze van a tűzijáték, és megmérjük, a robbanás fénye után mennyivel ér oda a hang. (A fény nagyon gyorsan terjed, terjedési idejét nyugodtan figyelmen kívül hagyhatjuk.) Pontos mérést is lehet ezen az elven csinálni. A hang sebessége levegőben szobahőmérsékleten kb. 340 méter másodpercenként. A levegőmolekulák tehát puszkagolyó sebességgel mozognak! A hangsebesség a hőmérséklettel nő, tehát melegebb test molekulái gyorsabban mozognak, hidegebbé lassabban. \square

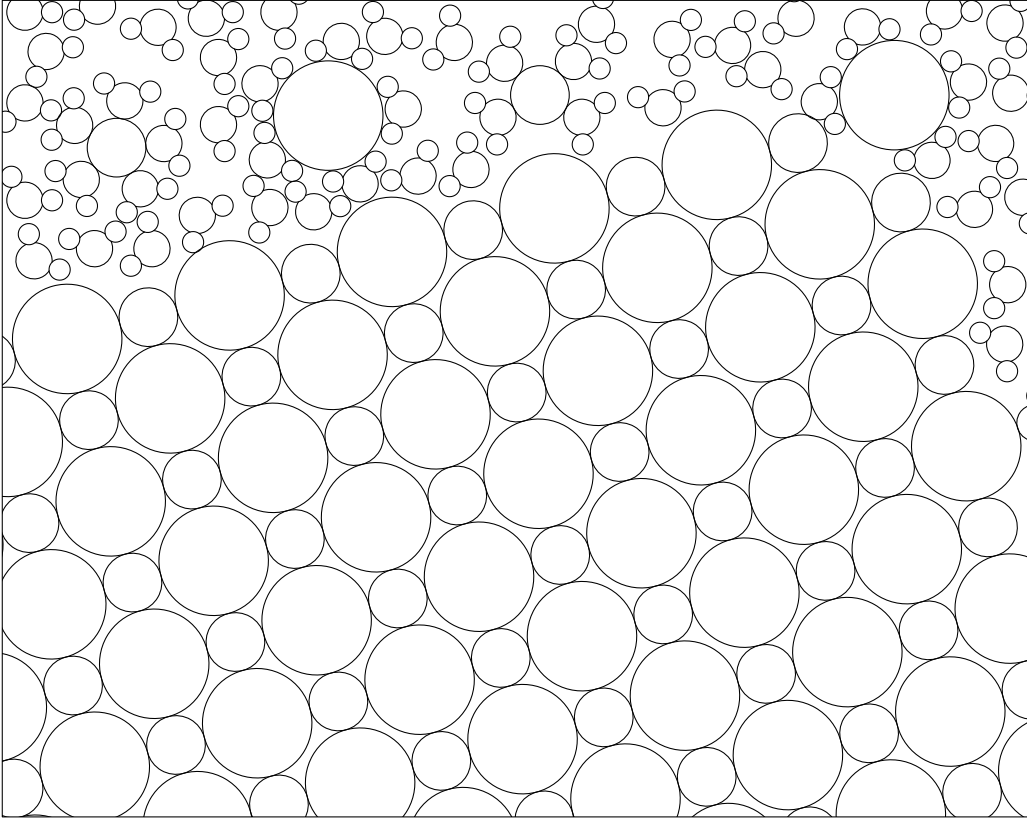
5.1.6. Kísérlet. Milyen kísérlettel tudnánk még kimutatni ezt a nagy nyüzsgést? Tegyük egy pohár vízbe egy kanál vörös bort. A kanalat töltsük meg, tegyük a víz tetejére, és a bort óvatosan öntsük ki. Ha ügyesek voltunk, a bor nem nagyon keveredik el a vízzel, hanem úszik a víz tetején. Hagyjuk magára nyugodt helyen a poharat.



5.1.6. ábra: jég, víz, levegő

Néha nézzük meg. Ha hozzá sem nyúlunk, akkor is lassan elkeveredik a bor a vízzel. Nekem kb. 1 nap után már egyenletesnek látszott a keverék. Ugyanezt kipróbálhatjuk valamilyen színes szörppel. Ez lesüllyed a víz aljára, mert nehezebb a víznél. Itt 4 nap kellett az elkeveredéshez. Ez az elkeveredés a *diffúzió*. A folyadékokban sokkal lassabb, mint a gázokban (napok másodpercek helyett), mert a folyadék molekulái nem repülnek szabadon, csak „nyüzsögnek”. Szilárd anyagokban gyakorlatilag nincs diffúzió, legfeljebb magasabb hőmérsékleten, az előállítható legnagyobb hidegtől mért olvadáspontjuk $2/3$ -a felett, akkor is kismértékű, mert a molekulák helyhez kötöttek a kristályrácsban, és csak úgy tudnak elmozdulni, ha helyet cserélnek valamelyik szomszédjukkal. Csak az olvadáspont közelében nő meg a sebessége. Itt már egyes molekulák kimozdulnak a kristályrácsbeli helyükről, ott egy lyuk marad, amibe egy szomszédos molekula átugorhat. Végül annyi lyuk lesz a kristályrácsban, olyan gyors lesz a diffúzió, hogy a kristályrács összeomlik, az anyag megolvad.

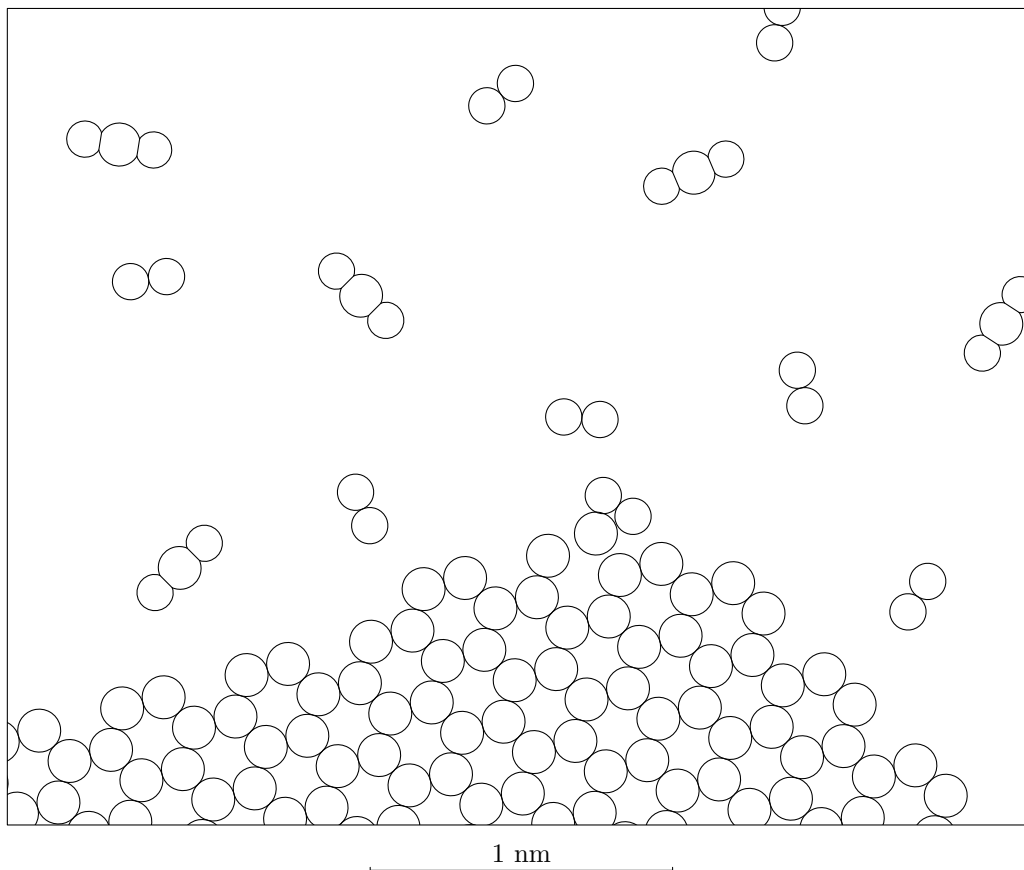
* Kicsit gondolkodjunk el, vajon milyen szabályszerűség található a diffúzióban? Ha mondjuk a bor koncentrációja egy rétegben 50%, alatta 1 milliméterrel pedig 49%, akkor



5.1.7. ábra: kősó oldódása vízben

azt várjuk, hogy a diffúzió feleannyi, mintha 51%-ról csökkenne 49%-ra a koncentráció, vagyis a diffúzió sebessége arányos az egységnyi hosszra jutó koncentrációkülönbséggel. Persze, az anyag arra diffundál, amerre csökken a koncentrációja. Tegyük fel, hogy valamennyi idő alatt a bor eljutott valamilyen távolságra. Mennyi idő alatt jut el kétszer annyi távolságra? Nem kétszer annyi idő alatt, mert közben az egységnyi távolságra eső koncentrációkülönbség is felére csökken, hanem négyszer annyi idő alatt. Tehát x -szer annyi távolságra való diffúzióhoz $x \cdot x = x^2$ -szer annyi idő kell. * \square

5.1.7. Kísérlet. A molekulák állandó „nyüzsgését” majdnem közvetlenül is észlelhetjük, ha van egy jó mikroszkópunk. Pár csepp tejet vízzel felhígítva vizsgáljunk meg mikroszkóp alatt, olyan vékony rétegben, hogy színe már alig látszódjon, kb. 800-szoros nagyításban. A tejben lévő apró zsírcseppek „nyüzsgönek”. (Lehet, hogy van valamilyen irányú áramlás is a rétegben, de ne erre figyeljünk. Ez egyébként egy idő után rendszerint megáll.) A jelenség megfigyeléséhez tussal, temperafestékkel is próbálkozhatunk. Ez a mozgás a *Brown-mozgás*; először Brown angol botanikus figyelte meg virágporszemcséken. Ha valakinek nincs mikroszkópja, az 5.1.9. videón megnézheti a Brown-mozgást.



5.1.8. ábra: szén égése oxigénben

Magyarázata az, hogy a nagyon gyorsan mozgó, de igen kicsi (a mikroszkópban nem látható) molekulák ide-oda lökdösik a kis részecskéket. Ez okozza például a füst diffúzióját levegőben. Mivel minél nagyobbak a molekulák, annál nagyobbak ezek a lökések, és minél kisebbek, annál több kis lökés van időegység alatt, amelyek jobban kiegyenlítik egymást, a Brown-mozgás megfigyeléséből kiszámítható a molekulák nagysága. \square

5.1.8. Kísérlet. Öveges József látványos kísérletet ajánl a Brown-mozgás szabad szemmel, pusztán egy kézi nagyító segítségével való megfigyelésére. Tegyük vízbe egy kevés ezüst gombfestéket. Porfestékként is kapható ezüst festék is jó. Tulajdonképpen alumínium lemezekből áll. Ha nem keveredik el a vízzel, tegyük hozzá kevés mosogatószer, és alaposan rázzuk össze. Napok alatt a durvább szemcsék leülepednek, de a folyadékot oldalról erősen megvilágítva (legegyszerűbben egy lézermutatóval) világó apró pontokat látunk. Tízszeres nagyítású kézi nagyítóval a látvány nagyon szép. Vigyázzunk, a lézer fénye nehogy közvetlenül a szemünkbe jusson, pláne a nagyítón keresztül ne! Voltak kétségeim, hogy valóban az alumínium lemezekék Brown-mozgását

látjuk, és nem csak a lézer által felmelegített víz áramlása forgatja őket. Egy téglatest alakú kis lapos, átlátszó műanyag edényben, mikroszkóp alatt, 64-szeres nagyítással, bár a víz áramlik, a szemcsék feltűnnek, eltűnnek, majd újra feltűnnek elég véletlenszerűen, ami Brown-mozgásra utal. Egyébként azt, hogy napok alatt sem ülepednek le, szintén a Brown-mozgás okozza. Nagyon apró részecskék sohasem ülepednek le, és oldalsó megvilágításban még olyan kicsik is láthatóak, amelyeket egyébként nem látnánk: gondoljunk a redőny résén beszűrődő napfényben táncoló porszemcsékre.

Innen nincs kész!

5.2. A periódusos rendszer

Még nincs kész!

5.3. Kvantummechanika

Még nincs kész!

5.4. Szilárdtestfizika

Még nincs kész!

5.4.1. Kísérlet. A legtöbb szilárd anyag kristályos. A természetben sok ásvány gyönyörű nagy kristályokban fordul elő. Ha szép szabályos, nagy kristályokat akarunk előállítani, akkor legjobb egy kristálykát egy selyem vagy műselyem (nylonharisnyából) szálra felfüggeszteni, és úgy lógatni a kissé túltelített oldatba. Szép kristályok növeszthetők például timsóból (festésnél a fal előkészítésére szokták használni). Készítsünk desztillált vízzel mintegy fél liter langyos telített oldatot, (20%-kal több timsót vegyünk, mint amennyi kell), szűrjük meg, öntsük egy lapos tálba, és hagyjuk újságpapírral letakarva állni. A kivált kristálykák közül válasszunk ki egy szép szabályos „oltókristályt”. Legálább 3 mm nagy legyen. Az oltókristályról az oldatot papírsebkeendővel itassuk le. Ha nincs elég nagy kristályka, készítsünk újra langyos telített oldatot, szűrjük meg, de most tegyük bele az oltókristályt, hogy az növekedjen tovább. A szálát hurkoljuk az oltókristályra; ez nem nagyon megy, ha túl kicsi. Másik lehetőség, hogy a szálát betesszük a tál aljára, és a rajta kivált kristálykák közül választunk oltókristályt. A felette lévő kristálykákat lemorzsoljuk, közvetlenül alatta pedig elvágjuk a szálát. Egy nagyobb, tiszta befőttes üvegbe készítsünk telített, gondosan megszűrt oldatot. Újságpapírral fedjük be, és az azon fűrt lyukon keresztül lógassuk bele a szálát. Néhány nap alatt olyan helyiségben, ahol a napi hőmérsékletingadozás nem több, mint 5 °C, szépen megnő a kristályka, persze csak akkor, ha más kristályok nincsenek az oldatban. Néha kristályok válnak ki

ott, ahol a szál az oldatba ér. Ezt elkerülhetjük, ha vastagabb nylon zsinórból (például fűkaszához használnak ilyet) egy állványt hajlítunk, ami teljesen az oldatban van, és erre kötözzük a szálát: lásd az 5.4.1. fényképet.

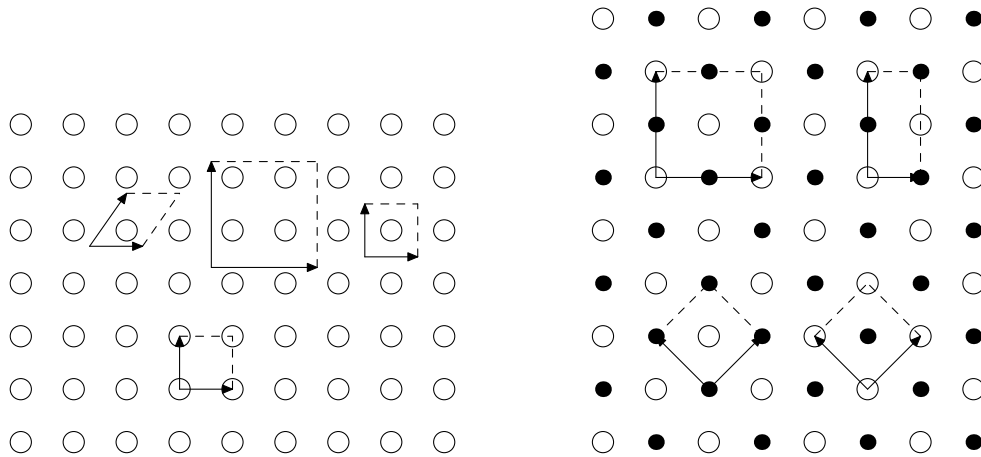
Nem csak a timsóra, hanem két másik anyagra is megadom, hogy 100 g víz hány g anyagot old fel, és hogy milyen túltelítettség célszerű 24 °C körüli növesztési hőmérsékleten (g/100 g víz). A nátrium-klorát azért érdekes, mert elforgatja a poláros fény síkját; készítését lásd a kémia részben.

Anyag	20 °C	25 °C	30 °C	Túltelítés
timsó	11,40	14,14	16,58	4
nátronsalétrom	88	92	96	3
nátriumklorát	101	106	113	4

5.4.2. Kísérlet. Nagyon kevés anyag elég, hogy a kristályosodását megfigyelhessük. Egy mikroszkóp tárgylemezre tegyünk néhány szemcse kősót, szódat, glaubersót, timsót, keserúsót, fehérgálicot, kékgálicot, zöldgálicot, fixírsót, cukrot, stb. Cseppentsünk rá egy csepp vizet, és (fedőlemez nélkül) tegyük a mikroszkóp tárgyasztalára. Általában nem kell nagy nagyítás, játékmikroszkóp, esetleg még lupe is megfelel. Ahogy a víz párolog, szemünk előtt képződnek a kristályok. Például a szódából a csepp szélén tű alakú kristályok válnak ki, a cukor nagyon nehezen kristályosodik, a kékgálic szép kristályai tízszeres nagyítóval is jól láthatóak, a kőső kristályaihoz nagyobb nagyítás kell, akkor érdemes a mikroszkóp alá tenni, amikor kezd a csepp beszáradni. Ha nagyobb kristályokat akarunk növesztetni, borítsunk a vízcsepre egy pohárkát vagy műanyag edénykét, egy kis rést hagyva a tárgylemez szélénél, hogy a víz csak lassan párologhasson el. Például gipszes vízből így — persze hosszabb idő alatt — jellegzetes „fecskefarkú” gipszkristályok válnak ki, amelyek 100-szoros nagyításban már jól látszanak, két hét alatt pedig 1 mm-es kristály és egész „bokor” nőtt.

A kristályok alakja, vagy ahogy a geológusok mondják, *termete* függhet a kristályosítás körülményeitől. Gondoljunk a jégre: ha egy tó befagy, a jégkristályok egymáshoz tapadnak, határukat nem is látjuk. Ugyanilyen jég jön létre, ha fagypontra eső esik. A jégesőben már megfagyott víz esik. Hóeséskor általában szép hópolyheket láthatunk, de a hódara kerek, megfagyott szemcsékből áll. A zúzmara pelyhes fehér réteg, mikroszkópi-kus jég szemcsékből áll. A dér pikkely, tűcske, pelyeg alakú jégkristályokból áll, amelyek a levegő víztartalmából képződnek. Oldatból való kristályosításkor nem ekkora a változatosság, de előfordulhat, hogy tömény vagy szennyezett oldatból más alakú kristályok válnak ki. □

5.4.3. A kristályok szerkezete. * Az egyszerűség kedvéért először atomok síkban való szabályos elrendeződéseivel foglalkozunk. Ha ezt megértettük, akkor térünk rá a térbeli elrendeződésekre. Az 5.4.2. ábrán bal oldalt egyforma atomok síkbeli szabályos négyzetrácsba való elrendeződését látjuk. (Az atomokat körök jelzik.) Szabályos elrendeződésen azt értjük, hogy ki lehet választani egy paralelogrammát úgy, hogy az egész minta ennek a két irányban való eltolásával keletkezzen. Ez a paralelogramma lesz az úgynevezett *elemi cella*. Az elemi cella kiválasztásánál három fő szempontunk van:



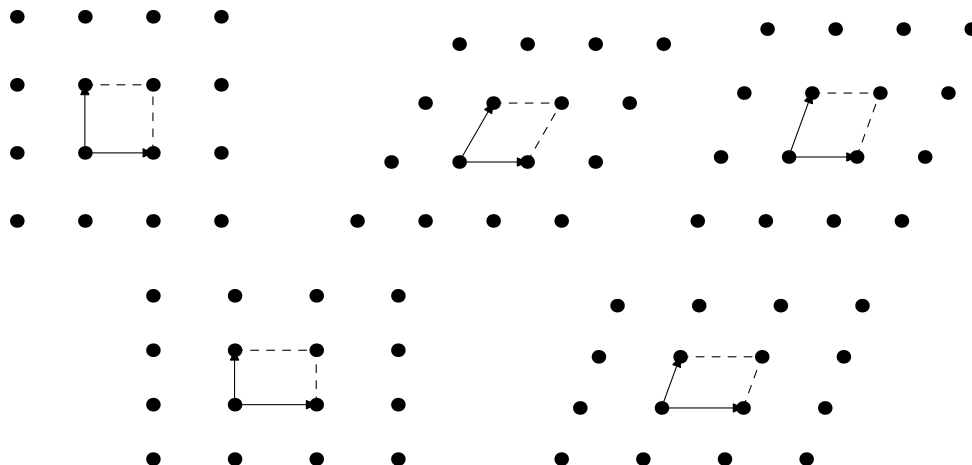
5.4.2. ábra: síkbeli négyzetrács

- (1) az elemi cella élei lehetőleg egyenlő hosszúak legyenek;
- (2) az elemi cella élei lehetőleg merőlegesek legyenek egymásra;
- (3) az elemi cella a lehető legkevesebb atomot tartalmazza.

Az ábrán a felső sorban szereplő három lehetőségből a bal szélső nem felel meg az első és második követelménynek, a középső nem felel meg a harmadik követelménynek, így a jobb szélső tűnik a legjobb választásnak. Mégis, egy negyedik követelmény miatt, ami szerint az elemi cella csúcsai lehetőleg atomok középpontjai legyenek, inkább a lenti lehetőséget választjuk. Hogy erre a negyedik követelményre miért van szükség, az később derül ki. A negyedik követelmény miatt az elemi cellában nem csak egész atomok lehetnek: itt például négy negyed atom esik az elemi cellába, összesen egy. Ez a kezdőnek nehézséget okozhat az elemi cellába eső atomok összeszámlálásánál. (Az 5.1.4. ábra bal oldalán ezért nem így választottunk elemi cellát.) Az 5.4.2. ábra jobb oldalán, ahol a négyzetrács kétféle atomból áll, első pillantásra úgy tűnhet, hogy a fenti két elemi cella választás lehetséges csak, de a lenti kettő jobb.

Az 5.4.3. ábrán összefoglaltuk a lehetséges síkrácsokat egyforma atomokkal, csökkenő szabályosság sorrendjében. A felső sorban a nyilak egyenlő hosszúak, az alsóban nem. Első pillantásra úgy tűnhet, hogy a felső sorban a középső elrendezés nem szabályosabb, mint a jobb szélső, de ez nem így van. A középsőnél az elemi cella oldalai közötti szög 60° , és ez külön szabályosságot visz az elrendezésbe: a két nyíl kezdőpontja és csúcsaik szabályos háromszöget alkotnak, a nyilak kezdőpontjához legközelebbi atomok szabályos hatszöget. Egyforma atomokra ez adja a legszorosabb elrendezést.

Nézzük a térbeli elrendezéseket. Az egyszerűség kedvéért egyforma atomokkal is elképzelhetjük őket, de nem ez számít, hanem az elemi cella, ami most egy paralelepipedon, egy „pofoncsapott téglatest”. Ennek az egy csúcsból induló éleinek hosszát a , b , c -vel, az élek által bezárt szögeket pedig α , β , γ -val jelöljük. Mindig α az a éllel „szemben” lévő szög, tehát a b és c által bezárt szög, β az a és c által bezárt szög, γ az a



5.4.3. ábra: síkbeli rácsok

és b által bezárt szög. A felső sorban szereplő síkbeli elrendezések közül a bal szélsőből kétféle térbeli elrendezés adódik. Mindkét esetet úgy képzelhetjük el, hogy a következő atomrétegek pontosan az első fölé jönnek, egymástól egyforma távolságban. Az első eset akkor adódik, ha ezek távolsága pontosan annyi, mint a síkban a legközelebbi atomok távolsága, a másik akkor, ha nem annyi:

I. Szabályos vagy köbös rendszer (latinus a kocka kubus): az elemi cella kocka, az egy csúcsból induló élek tehát egyenlőek és páronként merőlegesek; $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

II. Négyzetes, idegen szóval tetragonális rendszer: az elemi cella négyzet alapú hasáb, az egy csúcsból induló élek páronként merőlegesek és közülük kettő egyenlő, de a harmadik nem ugyanannyi; $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

A felső sorban szereplő síkbeli elrendezések közül a középsőből egyféle térbeli elrendezés adódik. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a következő atomrétegek pontosan az első fölé jönnek, egymástól egyforma távolságban:

III. Hatszöges, idegen szóval hexagonális rendszer: az elemi cella rombusz alapú hasáb, az egy csúcsból induló élek közül kettő egyenlő és 60° -os szöget zár be, a harmadik él ezekre merőleges; $a = b$, $\gamma = 60^\circ$, $\alpha = \beta = 90^\circ$.

A felső sorban szereplő síkbeli elrendezések közül a jobb szélsőből egyféle térbeli elrendezés adódik. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a következő atomrétegek elcsúsztatva jönnek az első fölé, egymástól egyforma távolságban, de úgy, hogy az elemi cella romboéder:

IV. Háromszöges, idegen szóval trigonális rendszer: az elemi cella romboéder, az egy csúcsból induló élek egyenlőek és egyforma szöveget zárnak be; $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$.

Az alsó sorban szereplő síkbeli elrendezések közül a bal szélsőből egyféle térbeli elrendezés adódik. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a következő atomrétegek pontosan az első fölé jönnek, egymástól egyforma távolságban:

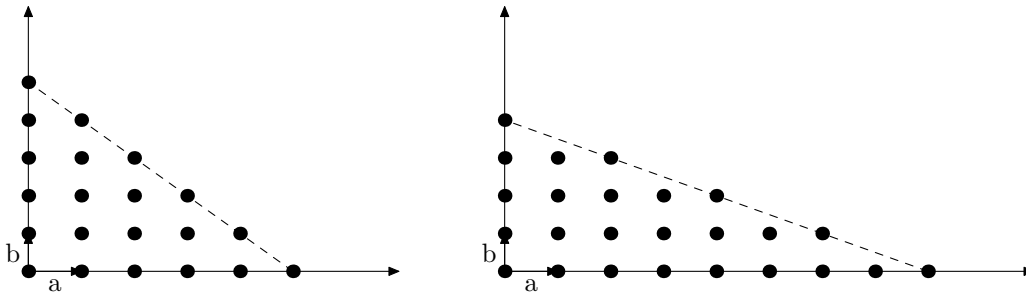
V. Rombos rendszer (az elnevezést később megmagyarázzuk): az elemi cella téglatest, az egy csúcsból induló élek mind különbözőek és páronként merőlegesek; $a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Az alsó sorban szereplő síkbeli elrendezések közül a jobb szélsőből kétféle térbeli elrendezés adódik. Az egyiket úgy képzelhetjük el, hogy a következő atomrétegek pontosan az első fölé jönnek, egymástól egyforma távolságban, a másikat pedig úgy, hogy a következő atomrétegek ugyanannyival elcsúsztatva jönnek egymás fölé, egymástól egyforma távolságban:

VI. Egyhajlású, idegen szóval monoklin rendszer (neve onnan ered, hogy csak egy derékszögtől eltérő szög van): az elemi cella romboid alapú hasáb, az egy csúcsból induló élek mind különbözőek lehetnek és az egyik merőleges a másik kettőre; $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$.

VII. Háromhajlású, idegen szóval triklin rendszer (neve onnan ered, hogy három különböző szög van): az elemi cella tetszőleges paralelepipedon, az egy csúcsból induló élek mind különbözőek lehetnek és a szögek is; $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$.

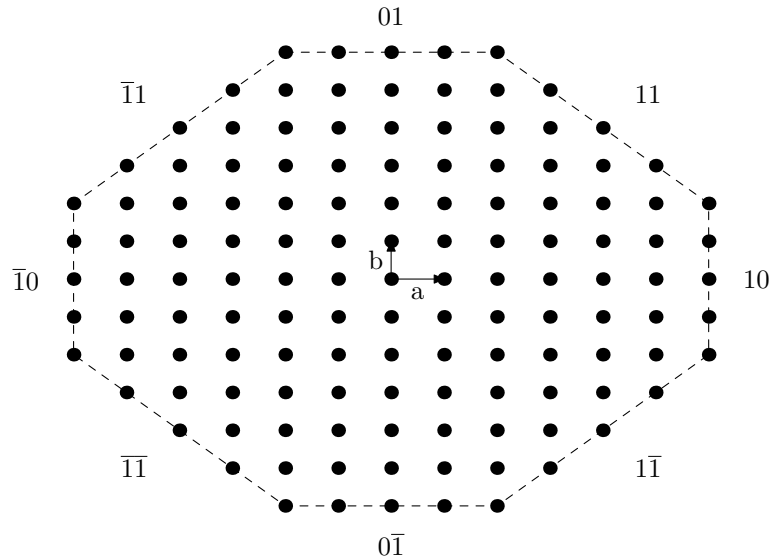
A hét kristályrendszert tovább lehet osztani 32 kristályosztályra, azokat pedig 230 tércsoportra, de ezzel nem foglalkozunk. * \square



5.4.4. ábra: kristályok termete I

5.4.4. A kristályok termete. * Az 5.4.4. ábrán, újra síkban, téglalap alakú „elemi cellákból” felépülő kétféle „lépcsőt” láthatunk. A bal oldalinál a berajzolt egyenes az a tengelyből $5a$ egységet, a b tengelyből pedig $5b$ egységet vág le, metsz le. A tengelymetszetek aránya tehát $5a : 5b$. Ha még egy „lépcsőrétet” ráépítünk, akkor $6a : 6b$ arányt kapunk, ha pedig egyet lebontunk, akkor $4a : 4b$ arányt, ami tulajdonképpen ugyanaz az arány. Akárhogyan tologatjuk el a lépcsőket, az arány mindig ugyanaz marad, tulajdonképpen $1a : 1b$. (Ezért kellett az elemi cella sarkát egy atom középpontjába helyezni!) A jobb oldali lépcsőnél az arány $8a : 4b$, amely egy lépcsőrétet ráépítve $10a : 5b$, egyet lebontva pedig $6a : 3b$, tulajdonképpen $2a : 1b$ arány lesz.

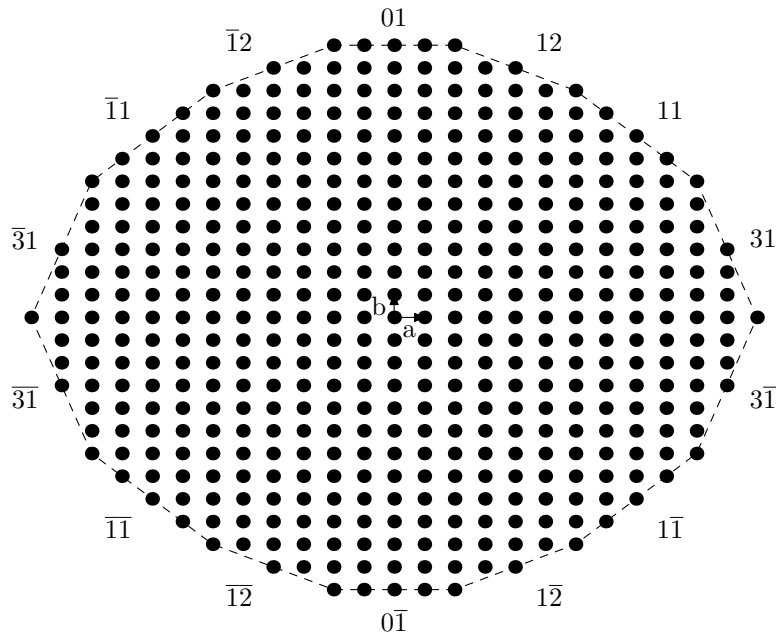
Most vizsgáljuk meg az 5.4.5. ábrát. Milyen arányokat írhatnánk az oldalak mellé? A jobb felső ferde oldalhoz — gondolatban tovább építve az oldalt alkotó lépcsőt — láthatjuk, hogy $xa : xb$, azaz $1a : 1b$ arányt. Hasonlóan a jobb alsó ferde oldalhoz $xa : -xb$, azaz $a : -b$ arányt, a bal felső ferde oldalhoz $-xa : xb$ azaz $-a : b$ arányt, a bal



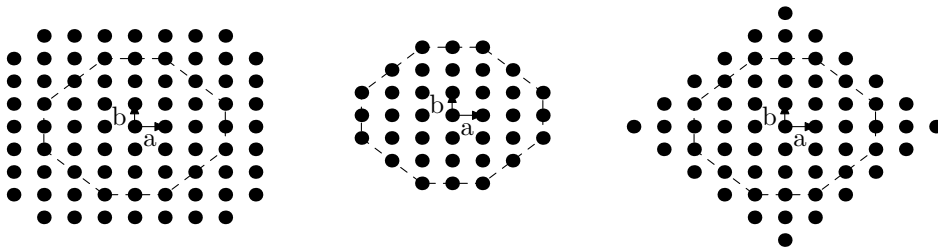
5.4.5. ábra: kristályok termete II

alsó ferde oldalhoz pedig $-xa : -xb$, azaz $-a : -b$ arányt. De mit írhatunk a felső, az alsó és a két szélső oldalhoz? A felső oldalt akármeddig is továbbépíthetjük, soha nem metszi az a tengelyt. Ezért logikus $\pm\infty a : xb$ arányt, azaz $\pm\infty a : b$ arányt írni ehhez az oldalhoz; ∞ a végtelen jele. Az alsó oldalhoz ugyanígy $\pm\infty a : -xb$, azaz $\pm\infty : -b$ arányt írhatunk, a bal illetve a jobb oldalhoz pedig $-a : \pm\infty$ illetve $a : \pm\infty b$ arányt. Ez a jelölésmód logikus, de kissé nehézkes. Először is elhagyhatjuk az a és b betűket, elég, ha tudjuk, hogy ezek az egységek a tengelyeken, ebben a sorrendben. Másodszor, az előjeleket a számok fölé írjuk. Harmadszor, jó lenne megszabadulni a $\pm\infty$ jelektől. Ezt úgy tehetjük meg, hogy a számok reciprokát vesszük; ezeket a reciprokokat *indexeknek* nevezzük. Mivel úgysis szabad az arányt akármilyen pozitív számmal osztani vagy szorozni, és nem akarunk törtet írni, szorzunk a lehető legkisebb egész számmal, amivel az indexek egészek lesznek. Az indexek is jellemzik az oldal állását. Például a $6a : 3b$, azaz $2a : b$ arányból $(1/2, 1)$, azaz $(2, 1)$ indexek, még rövidebben 21 lesz, a $-a : b$ arányból $(\bar{1}, 1)$ indexek, rövidebben $\bar{1}1$, az $-1a : \pm\infty b$ arányból pedig $(\bar{1}, 0)$ indexek, rövidebben $\bar{1}0$. Az 5.4.5. és 5.4.6. ábrán számos oldal indexét feltüntettük.

Mi a helyzet három dimenzióban? Három tengely van, három, a , b és c egységgel. Az arányok tehát három tagúak, és így az indexek is. Az 5.4.7. fényképeken legoból kirakott ferde lapokat láthatunk. Az a tengely legyen a felénk mutató, kissé lejtő tengely, a b tengely a jobbra mutató tengely, a c tengely pedig a felfele mutató tengely. Most a tengelyek merőlegesek és $a = b \neq c$. A képek közül a bal oldalin a ferde lapot a $12a : 12b : 12c$ arány, és így 111 indexek, a középsőn láthatót a $22a : 33b : 11c$ arány, tehát 326 indexek, a jobb oldalin láthatót a $8a : \pm\infty b : 8c$ arány, tehát 101 indexek jellemzik. * \square



5.4.6. ábra: kristályok termete III



5.4.8. ábra: kristályok termete IV

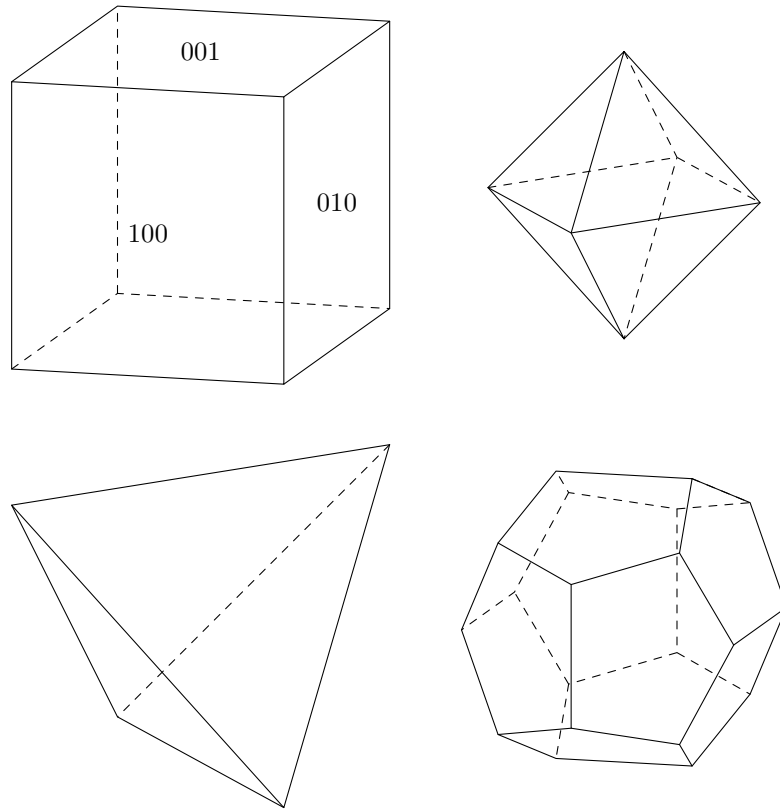
5.4.5. A termet kialakulása. * Látjuk, hogy egy kristálynak sokféle lapja lehet. Mitől függ, hogy milyen lapok alakulnak ki, milyen lesz a kristály alakja, azaz termete? Tekintsük az 5.4.8. ábrán középen látható — az egyszerűség kedvéért síkbeli — „kristálycsírá”. Az elemi cella téglalap, ferde és nem ferde oldalak vannak. Ha a ferde oldalak gyorsabban növekednek — ugyanannyi idő alatt több réteg rakódik rájuk — akkor a bal oldali ábrán látható helyzet áll elő. (Hogy jobban lássuk, mi változott, berajzoltuk az eredeti kristálycsíra határát.) Látjuk, hogy a ferde oldalak mérete csökkent. Még egy ilyen lépés, és a ferde oldalak eltűnnek, a kristály termete téglalap lesz. Ha viszont a ferde oldalak lassabban nőnek, mint a többi, akkor a jobb oldali ábrán látható helyzet áll elő: csak a ferde oldalak maradnak meg, a kristály „kinőtte” a többit, alakja

rombusz. A rombusz tulajdonképpen „szabályosabb”, mint a téglalap, mert az oldalai egyenlőek, egyenrangúak. Három dimenzióban, ha az elemi cella téglatest, így alakul ki gyakran rombusz alakú keresztmetszet. Innen kapta ez a kristályrendszer a rombos nevet. Például — mint majd látjuk — ez a helyzet a keserűsónál is. Ha egy ilyen rétegre aztán hasonló rétegek rakódnak, akkor rombusz keresztmetszetű oszlop képződik, mint a keserűsónál.

Nézzünk egy példát. Gondolatban egy kocka alakú kősókristályka nyolc sarkából vágunk le egy kicsit. A keletkezett új lapok egy oktaéder lapjainak felelnek meg. Ha ezt a kősókristálykát tovább növesztjük, az új lapok gyorsabban növekednek, ezeket a kristály kinövi, és kocka alakú lesz. Ha most egy oktaéder alakú timsókristályka hat csúcsából vágunk le egy kicsit, akkor az új lapok egy kocka lapjainak felelnek meg, a kristályka pont olyan, mint a kősókristályka a „műtét” után. Ha azonban ezt tovább növesztjük, akkor a kockalapok gyorsabban növekednek, azokat a timsó kinövi, és oktaéder alakú kristály alakul ki. Bár a kősó és a timsó is szabályos rendszerű, az elemi cella kocka, a kristályok termete más. Idegen anyagok a növekedést megzavarhatják, és más termet alakul ki. Annyit azonban mondhatunk, hogy általában gyakoribbak azok a lapok, amelyeknek indexében kis számok vannak. A kocka hat lapjának indexében két nulla és egy ± 1 szerepel, az oktaéder nyolc lapjának indexében pedig minden szám ± 1 .

Az 5.4.9. ábrán bal oldalon felül egy *kocka* látható. A látható lapok közepére ráírtuk az indexüket. Mellette egy szabályos *oktaéder*, magyarul nyolclap, amit úgy kapunk, hogy gondolatban a kocka minden csúcsát levágjuk egy, a vele szomszédos három csúcsra átmenő síkkal. Ha csak minden második csúcsot vágunk így le, akkor egy szabályos *tetraédert*, magyarul négylapot kapunk; ez látható alul bal oldalt. A lapok indexe 111 , $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$, $1\bar{1}\bar{1}$ és $1\bar{1}1$. Ezek mind előfordulnak szabályos rendszerű — azaz kocka alakú elemi cellával rendelkező — anyagok kristályformájaként. De nem csak ezek. Ha bonyolultabb indexű lapok is fellépnek, akkor sokkal bonyolultabb kristályformák is felléphetnek. Például a *pirit* nevű ásvány szabályos rendszerű, rendszerint kocka alakúak a kristályai, de előfordulnak *pentagondodekaéder*, magyarul ötszögtizenkétlap alakú kristályai is. Ezt az alakot az ábra jobb szélén alul mutatjuk be. Úgy kapható a kockából, hogy a felső lapnak az elülső éllel párhuzamos középvonalán és az elülső lapnak az elülső éllel párhuzamos, az elülső lapot felső háromnegyedénél húzott egyenesen átmenő síkkal levágjuk a felső lap elülső élet. Hasonlóan levágjuk a felső lap hátsó élet is. Ezután hasonlóan levágjuk az első és a hátsó lap bal és jobb oldali éleit, majd a bal és jobb oldali lapok felső és alsó éleit. A keletkezett test nem szabályos, az ötszögek nem szabályos ötszögek, éleik nem egyforma hosszúak. Az indexek 102 , $\bar{1}02$, $10\bar{2}$, $\bar{1}0\bar{2}$, 210 , $2\bar{1}0$, $\bar{2}10$, $2\bar{1}0$, 021 , $0\bar{2}1$, $0\bar{2}\bar{1}$. * □

5.4.6. Kísérlet. A geológusok gyakran olyan gyakorlatra tesznek szert a kristályformák megkülönböztetésében, hogy több száz ásványt megismernek pusztán a kristály termete alapján. Vegyésznek ez nem olyan fontos, mert a laboratóriumban sok lehetősége van arra, hogy a különböző anyagokat felismerje. Fiyikusnak sem árt, ha legalább a hét kristályrendszert meg tudja különböztetni. Hogyan tudjuk ezt megtenni? Először is próbáljuk meg az „ideális” kristályformát megtalálni. A kristályok gyakran nem egyformán nőnek minden irányban és gyakran látunk összenőtt kristályokat is (íkek vagy



5.4.9. ábra: kristályok termete V

többszörös ikrek), de azért általában találunk egy pár szabályos kristályt. A kősónál például a szabályos kristály kocka alakú. A kockának sokféle szimmetriája van. Például a középpontjára tükrözve saját magába megy át. Ezt a szimmetriát *inverzió*nak nevezzük. Aztán a középpontján átmenő, valamely lapjával párhuzamos síkra tükrözve is saját magába megy át: ez a szimmetria a síkra való *tükrözés*. A kocka alakú kristály a két szemben lévő lap közepén átmenő tengely körül 90° -kal elforgatva is saját magába megy át. Azt mondjuk, hogy ez a tengely *négyfogású*, mert négy egyforma, 90° -kal való elforgatás ad ki egy teljes körülfordulást. Idegen szóval a négyfogású tengelyt *tetragír*nek nevezzük. A kockánál két másik négyfogású forgástengely is van, amelyek a másik két szembenlévő lappár közepén mennek át. Persze, ezek egyúttal *kétfogásúak* is, idegen szóval *digírek*, ezek körül 180° -kal elforgatva is saját magába megy át a kocka. Vannak ezen kívül a kocka két szemben lévő csúcsán átmenő tengelyek, ezek körül 120° -kal elforgatva is saját magába megy át a kocka, ezek *háromfogásúak*, idegen szóval *trigírek*. Más kristályoknál lehetséges még *hatfogású* tengely, idegen szóval *hexagír* is. Néha előfordul, hogy egy tengely körül valamilyen szöggel forgatva a kristály nem önmagába megy

át, de ha még a tengely egy adott pontjára vonatkozó inverziót is alkalmazunk, akkor igen: ilyenkor *giroidról* beszélünk. Gondos vizsgálattal kiderül, hogy ötfogású és hatnál többfogású gír vagy giroid a térben szabályos rendben ismétlődő atomokból álló kristályoknál nem lehetséges, és csak a négyfogású giroid jelent igazán új szimmetriaelemet, a többi az eddigiekből előáll. Ha két olyan tengelyt találtunk, amely kettőnél több fogású, akkor a kristály a *legnagyobb szimmetriájú* kategóriába tartozik, amibe csak egyetlen kristályrendszer van:

I. Szabályos vagy köbös: több kettőnél több fogású tengely, általában „kerekded” formák. Példák: kősó, kálisó, szalmiáksó, timsó.

Ha nem találunk több kettőnél több fogású gírt vagy giroidot, de egyet igen, akkor az a *főtengely*, a kristály a *közepes szimmetriájú* vagy *főtengelyes* kategóriában van. Ide három kristályosztály tartozik:

II. Négyzetes, idegen szóval tetragonális: négyfogású főtengely (gír vagy giroid). Négyzet keresztmetszetű formák. Példa: karbamid.

III. Hatszöges, idegen szóval hexagonális: hatfogású főtengely. Szabályos hatszög keresztmetszetű formák. Példák: jég, grafit.

IV. Romboéderekes vagy trigonális: háromfogású főtengely, romboéderekből felépülő, háromszög keresztmetszetű formák. Példák: nátronsalétrom és például a kalcit nevű ásvány.

Ha nincs kettőnél többfogású gír vagy giroid, akkor a kristály az *alacsony szimmetriájú* vagy *főtengely nélküli* kategóriában van. Még lehetnek kétfogású tengelyek, szimmetriasíkok vagy szimmetriaközéppont. Ide három kristályrendszer tartozik:

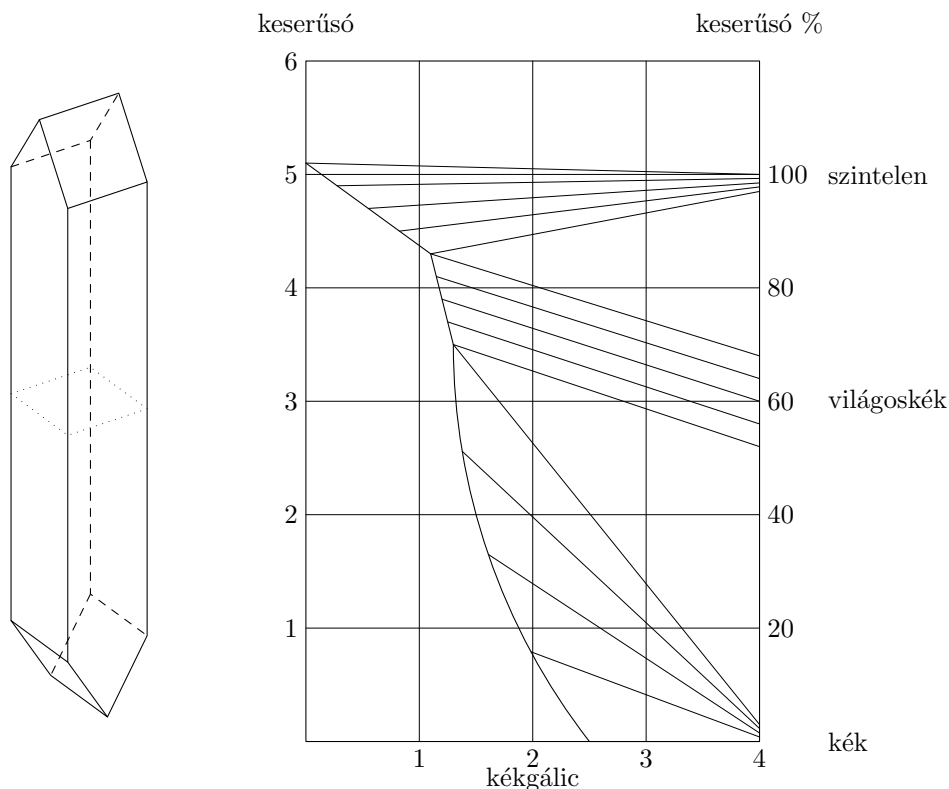
V. Rombos: több szimmetriatengely illetve szimmetriasík van. Rombusz vagy téglalap keresztmetszetű formák. Példák: keserűsó, glaubersó, kálszulfát, kálsalétrom, fehérgálic.

VI. Egyhajlású, idegen szóval monoklin: lehet szimmetriatengelye és szimmetriasíkja is, de egyikből sem lehet egynél több. Példák: gipsz, kristálysóda, bórax, fixírsó, cukor, borkősav, zöldgálic.

VII. Háromhajlású, idegen szóval triklin: nincs szimmetriatengely, sem szimmetriasík, sőt, még szimmetriaközéppont se mindig, azaz teljesen „aszimmetrikus” formák. Példa: kékgálic.

Amelyik példaként említett anyaghoz hozzájutunk, próbáljuk ki kicsiben a kristályosítását, figyeljük meg a kristályok alakját. □

5.4.7. Kísérlet. Elég sokat beszéltünk már a kristályok termetéről, ideje vele kapcsolatban egy kísérletet is csinálni. Oldjunk fel 14 g keserűsót (gyógyszertárban is kapható) 20 g vízben, és ha kell, szűrjük meg. Az oldatot osszuk két egyforma részre. Oldjunk fel 0,1 g bóraxot 1 g vízben, és az oldatot adjuk az egyikhez. (Ha nincs pontos mérlegünk, több bóraxot oldjunk több vízben, és vegyünk ki 1 ml-t az oldatból.) Mindkét keserűsó oldatot takarjuk le papírral és hagyjuk lassan elpárologni a vizet. Mielőtt teljesen beszárna az oldat, vegyünk ki kézzel egy vagy néhány jól formált kristályt. Ezek a keserűsó heptahidrátjának kristályai. Ne mossuk le, hanem szárítsuk meg törlőpapíron görgetve, majd levegőn. Vizsgáljuk meg nagyítóval, előtte néhányszor finoman görgetve az ujjaink között, hogy a rászáradt apró kristályok váljanak le. A tiszta oldatból kivált kristályok



5.4.10. ábra: keserűsítő kristályalakja és izodimorfizmusa

négy oldalú hosszúkás prizmák, amelyek az 5.4.10. ábrán bal oldalon látható alakhoz hasonlóak. Pontosán megmérve a prizma lapjai által bezárt szöget, kiderül, hogy nem derékszög, a prizma keresztmetszete rombusz. Bár a keserűsítőnél az elemi cella téglatest, már tudjuk, hogy ebből hogy jöhet létre rombusz keresztmetszet. A bóraxos oldatból kivált kristályok első pillantásra nem is emlékeztetnek ezekre, inkább tetraéder alakúak, a természetük alaposan megváltozott. Azonban figyelmesen vizsgálva őket kiderül, hogy a prizmák hosszú oldalai csak erősen megrövidültek, de ott vannak. Az én kísérletem eredményei az 5.4.11. fényképeken láthatók, balra a tiszta oldatból kivált kristályok. A bórax az oszlopnövekedést megzavarja, megváltoztatva a keserűsítő kristály természetét. Más anyagoknál szennyezések hatására teljesen meg is változhat a kristályalak, például kocka alakú kristályok helyett oktaéder alakúak válnak ki. □

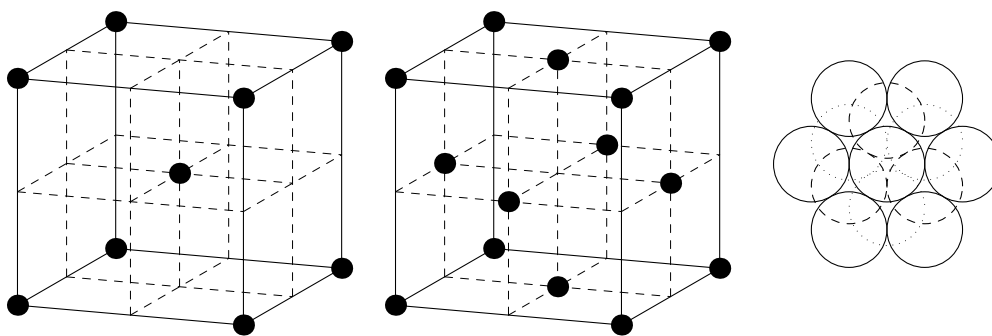
5.4.8. Kísérlet. Mint említettük, a keserűsítő és a fehérgálic egyforma rendszerben kristályosodnak, ráadásul minkettő heptahidrátként. Egyébként kémiaailag is hasonlóak. Az elemi cellák is hasonló méretűek. Ilyenkor előfordul, hogy a sók elegykristályokat képeznek, szilárd formában is „oldódnak” egymásban. Itt is ez a helyzet.

Még érdekesebb a keserűsítő és a kékgálic esete. Ezek is hasonlóak kémiaailag, de nem

azonos rendszerben kristályosodnak, ráadásul a kékgálic pentahidrátként. Van azonban a keserűsónak egy nem stabil monoklin heptahidrátja, és a kékgálicnak is van egy nem stabil monoklin heptahidrátja. Ha a kettőt megfelelő arányban elegyítjük, akkor monoklin heptahidrát elegykristály válik ki az oldatból. Ezt a jelenséget *izodimorfizmus*nak nevezzük: izo egyformát, morf alakot jelent. * A helyzetet vázlatosan az 5.4.10. ábra jobb oldala mutatja. A vízszintes tengelyen a száz molekula vízre jutó kékgálic, a függőlegesen a száz molekula vízre jutó keserűsó molekulák száma van feltüntetve. A görbe a két anyag együttes oldhatósága szobahőmérsékleten, a jobb szél felé induló vonalak pedig azt mutatják, hogy adott összetételű oldatból milyen összetételű (hány százalék keserűsót tartalmazó) kristályok válnak ki. A fehér, tű alakú kristályok rombos keserűsó kristályok kevés kékgáliccal, a kék kristályok monoklin kékgálic kristályok kevés keserűsóval, a világoskék kristályok pedig monoklin elegykristályok.

A kísérletnél az első öt oldat 10 g keserűsót (heptahidrátot) tartalmaz 10 ml kénsavas vízben oldva (amelyet 5 ml hígított kénsavat vízzel 100 ml-re hígítva készítünk) és rendre az alábbi mennyiségű kékgálic pentahidrátot adjuk hozzá: 1,5 g; 2,0 g; 2,8 g; 4,0 g; 6,0 g. Az utolsó három oldat 10 ml savas vízben rendre 9, 5 és 3 g keserűsót illetve 7, 7 és 6 g kékgálicot tartalmaz. Mindegyiket forrón oldjuk fel, az üveget vattadugóval dugjuk be, és lassan, sokáig hagyjuk kihűlni. A kristályokat leszűrjük, de nem mossuk, papír között kinyomkodjuk, és levegőn megszáritjuk. Az én kísérletem eredményeit az 5.4.12. fényképek mutatják. * □

5.4.9. Fémek kristályszerkezete. A fémek kristályosak, de kristályaik általában igen aprók, csak mikroszkópban láthatók. Egy kivétel a cink, vagy nyelvújítás korabeli nevén horgany. Talán láttatok már *horganyzott vaslemezt*. Ez cinkkel bevont vaslemez. Úgy készülhet, hogy a vaslemezt olvasztott cinkbe mártják. A cinkbevonat arra szolgál, hogy megvédje a vasat a rozsdásodástól. Az ilyen lemezen a cinkkristályok jégvirágszerű mintát képeznek. A 5.4.13. fényképeken cink kristályokat láthatunk. Úgy készültek, hogy a megolvasztott és dermedőfélben lévő cinkről hirtelen leöntöttem a még olvadt fémét. Egyébként öntött cinkdarabot kettétörve is nagyon szépen látszanak a kristályok.



5.4.14. ábra

** A fémek három féle kristályszerkezetben kristályosodnak. A 5.4.14. ábrán balra láthatjuk a *tércentrált köbös* rács alapcelláját. A jobb áttekinthetőség kedvéért csak az

atomok középpontját tüntettük fel: egy atom a kocka középpontjában, nyolc a csúcaiban helyezkedik el, így az elemi cellában $1 + 8 \cdot 1/8 = 2$ atom van. A valóságban az atomok inkább egymáshoz érő gömbök, így a cella 68%-át töltik ki. Ilyen szerkezetű a Li, Na, K, Mn, Fe, Cr, Mo, V, W. Középen látható a *lapcentrált köbös* rács elemi cellája (vázlatosan). Itt az atomok a kocka csúcaiban, illetve lapjainak középpontjaiban helyezkednek el, így az elemi cellában $8 \cdot 1/8 + 6 \cdot 1/2 = 4$ atom van. A térkitöltés 74%-os. Ilyen szerkezetű például az Al, Au, Ag, Ca, Cu, Ni, Fe, Pb, Pd, Pt, Rh, Ir. Végül tekintsük a jobb oldali ábrát. A folytonos vonallal rajzolt körök egy réteg egyforma golyót jelképeznek. Könnyen el tudjuk képzelni, hogy a síkot egy réteg golyóval így töltjük ki. Most tekintsük a szaggatott vonallal rajzolt golyókat. Csak három golyó van lerajzolva, de könnyen el tudjuk képzelni az egész golyóréteget: ez van a folytonos vonallal rajzolt réteg alatt. Jelöljük ezt az alsó réteget A-val, a folytonos vonallal rajzolt réteget B-vel. A B réteg fölé megint jöhet egy A réteg, stb., így egy *legszorosabb illeszkedésű hatszöges* ABABAB... kristályszerkezetet kapunk; a térkitöltés 74%-os. Ilyen szerkezetű például a Be, Mg, Zn, Ti, Cd, Os és Co. Talán meglepő, de a B réteg fölé (vagy alá) nem csak A réteg jöhet. A jobb oldali ábrán pontozott vonallal berajzolt három kör egy olyan C réteggé folytatható, amely ugyan hasonló az A réteghez (és a B-hez is), de el van tolva azokhoz képest. Lehetségesek tehát ACACAC... vagy ABACABAC..., stb., típusú rétegződések is. Ezek is legszorosabb illeszkedésűek és hatszögesek is.

Mi van az ABCABC... rétegződéssel? Egy kis gondolkodással beláthatjuk, hogy ez megegyezik a lapcentrált köbös ráccsal. Szemeljük ki a középső ábrán egy csúcst, mondjuk a jobb hátsó felső csúcst. A kiszemelt csúcshoz három legközelebbi szomszédja egy szabályos háromszöget alkot, amely merőleges a kiszemelt csúcstól a szembe lévő csúcshoz tartó testátlóra. Ezek lesznek a jobb oldali ábrán az A síkban fekvő atomok. (A szomszédos csúcscok atomjai is ehhez a síkhoz tartoznak.) A kiszemelt csúcshoz nyolc kockához tartozik, amelyek ebben a csúcshoz futnak össze. Az egyiknek a testátló meghosszabbítása a testátlója. Az ebben a kiszemelt csúcshoz legközelebbi atomok felelnek meg a jobb oldali ábrán a C síkban fekvő atomoknak; figyeljük meg, hogy 60° -kal elforgatott, a testátlóra merőleges háromszöget alkotnak. Végül a másik hat kockában a kiszemelt csúcshoz legközelebbi, eddig még nem vizsgált hat atom (mindegyik két kockához tartozik) egy szabályos hatszöget alkot, aminek a középpontja a kiszemelt atom. Ezek felelnek meg a jobb oldali ábrán a B síkhoz tartozó atomoknak.

Az ötvözetek szerkezete általában bonyolultabb, bár nem mindig. Az Au és az Ag például ugyanolyan szerkezetben kristályosodnak, és a rácsállandóik közötti különbség is csak 2‰. Ennek megfelelően az Au és az Ag folyékony és szilárd alakban is tökéletesen keverednek, az atomok a kristályrácsban véletlenszerűen helyezkednek el. A réz és az arany ötvözetek Cu_3Au összetételénél lapcentrált köbös, az Au atomok a kocka csúcaiban helyezkednek el, a Cu atomok pedig a lapok közepén. A CuAu összetételénél olyan kristály alakulhat ki, amelynél egy kocka csúcaiban, felső és alsó lapjának középpontjában Cu atomok vannak, az oldallapok középpontjaiban pedig Au atomok. Lehetséges rendezetlen szerkezet is, vagy a különböző szerkezetű kristálykák keveredhetnek. Mint azt az acélnál már láttuk, az ötvözet tulajdonságait a kristályszerkezet határozza meg, ezért jó ötvözetek készítéséhez nélkülözhetetlen a kristályszerkezetek ismerete. **

5.4.10. Kísérlet. Kísérletek tranzisztorral.

5.5. Magfizika

Még nincs kész!

6. TÁBLÁZATOK

Az eddigiekben már számos fogalommal találkoztunk.

6.1. Szilárd anyagok mechanikai tulajdonságai

Anyag [†]	sűrűs. g/cm ³	kem. Mohs	kem. kbar	szakít. kbar	rug.hat. kbar	Young kbar	fajhő J/g	hőtág. 10 ⁻⁶ /C°	hővez. W/(mC°)	o.p. C°			
Alumínium	2,7	3	2,3-4,4	0,9-1,6	0,35-1,5	700	0,96	23	222	650			
Kvarcüveg	2,2	7		3-11,5	3-11,5	600	0,73	0,5	1,34	1700			
Bronz, Bz10	8,8	4	24	3-9	1-3	1110		18	51	1000			
Vas	7,86		13-17,5	4,5-6,3	2,6-4,3	2070	0,45	12	52	1510			
Rozsdamentes V2A acél	8,02		16-38	7-14	2,1-11,4	1930	0,50	17	16,3	1410			
Acélok	7,7-8,1	6,5		7-32	2-8			4-19		1400			
Invar	8,0							0,8		1495			
Volfram	19,3	4,5-8	29-	32-43	25-37	3670	0,14	4,3	200	3370			
Platina	21,4	4,5	6,4-10	3,4	2,6	1520	0,13	9,0	67	1755			
Sárgaréz, Sr65	8,47	3,5	5,4-18	3,3-5,1	1,3-4,1	1040	0,38	18,9	120	930			
Forrasztóórn, 50-es	8,89		1,4	0,46			0,21	24	45	216			
Nikkel	8,89		10-21	4,9-7,3	1,4-6,6	2070	0,54	12	61	1440			
Magnézium	1,77		5,5-7,1	2,6-2,9	1,5-2,2	450	1,03	26	78	627			
Ezüst	10,5		3-9	1,6-3,0	0,8-2,6	720	0,23	19	418	960			
Arany	19,3		2,8-4,8	1,2-2,1		740	0,15	14	153	1063			
Vörösréz	8,91		4,1-9,8	2,2-3,2	0,69-2,8	1180	0,39	17	390	1083			
Cink	7,14		4,0-6,4	1,35-1,85			0,39	23-32	108	419			
Ón	7,29		3,8	0,14		410	0,40	23	62	232			
Ólom	11,35		0,5	0,17	0,13	137	0,13	30	35	327			
Korund	4,0	9					1,38	7,4	4,1	2010			
Porcelán	2,3-2,5	7-7,5		0,32		700-900	0,8	3,8	1,0	1680			
Grafit	2,22	<1	0,1-0,24	0,03-0,06		56-98	0,84	2	5,0	>350			
Gyémánt	3,51	10	880				0,5	1	≈2000	>350			
Selyem				4,5	1				0,052				
Pókfonal				4,2	1								
Üveg, közönséges	2,4	5-6,5		2-34		500-800	0,84	9,7	0,7-1,0	800*			
Üveg, labor		5-6,5		2-34		400-1000	0,84	3,3-5,0	1,1	800-			
Erdeifenyő	0,52		0,40 ⁰	0,19 ^{0±}	1,04	0,030 [±]	120	1,78	≈3,8	≈27 [±]	≈0,093 [±]	≈150	
Lucfenyő	0,47		0,32 ⁰	0,12 ^{0±}	0,90	0,027 [±]	110	1,78	≈3,3	≈29 [±]	0,22	0,12 [±]	≈150
Vörösfenyő	0,59		0,48 ⁰	0,19 ^{0±}	1,07	0,023 [±]	138	1,78					≈150
Akácfa	0,87		0,80 ⁰		1,48	0,040 [±]	136	1,78					≈150
Bükkfa	0,73		0,72 ⁰	0,30 ^{0±}	1,30	0,070 [±]	160	1,78	≈6,8	≈48 [±]	0,26	≈0,22 [±]	≈150
Diófa	0,68		0,51 ⁰	0,28 ^{0±}	1,00	0,035 [±]	125	1,78	≈2,6	≈48 [±]			≈150
Égerfa	0,54		0,38 ⁰	0,16 ^{0±}	0,94	0,020 [±]	117	1,78					≈150
Fűzfa	0,57		0,35 ⁰	0,16 ^{0±}	0,60		72	1,78					≈150
Gesztenyefa	0,57		0,33 ⁰	0,18 ^{0±}	1,35		90	1,78	≈6,5	≈32 [±]			≈150
Gyertyánfa	0,83		0,71 ⁰	0,36 ^{0±}	1,35	0,245 [±]	162	1,78					≈150
Hársfa	0,54		0,44 ⁰	0,22 ^{0±}	0,87	0,500 [±]	76	1,78	5,5	44 [±]			≈150
Juharfa	0,63		0,62 ⁰	0,27 ^{0±}	0,82		94	1,78	≈4,0	≈28 [±]	0,43	≈0,15 [±]	≈150
Körisfa	0,69		0,65 ⁰	0,37 ^{0±}	1,60	0,070 [±]	120	1,78	0,50		0,31	≈0,17 [±]	≈150
Nyárfa	0,39		0,20 ⁰		0,43	0,032 [±]	80	1,78	≈3,4	≈29 [±]			≈150
Nyírfa	0,73		0,77 ⁰	0,34 ^{0±}	0,70	0,064 [±]	144	1,78	≈3,5	≈35 [±]	≈0,14 [±]		≈150
Platánfa	0,63		0,45 ⁰	0,25 ^{0±}	0,053 [±]		100	1,78					≈150
Szilfa	0,68		0,59 ⁰	0,29 ^{0±}	0,80	0,040 [±]	110	1,78	5,6	44 [±]			≈150
Tölgyfa	0,69		0,69 ⁰	0,35 ^{0±}	0,90	0,040 [±]	130	1,78	≈4,2	≈35 [±]	0,29	≈0,17 [±]	≈150
Afrikai vasfa	1,07		1,30 ⁰	0,90 ^{0±}	2,17	0,045 [±]	225	1,78					≈150
Rétegelt lemez	0,60			0,65	0,55 [±]		100	≈1,78					150*
Polietilén, kemény	0,94-0,96		0,40-0,65	0,18-0,35		7-14	2,1-2,7	200	0,38-0,51	90-1			
Polietilén, lágy	0,914-0,928		0,13-0,20	0,08-0,23		2-5	2,1-2,5	250	0,32-0,40	80-9			
Polipropilén	0,900-0,907		0,36-0,70	0,21-0,37		11-13	2,0	150	0,17-0,22	140*			
PVC, kemény	1,38-1,55		0,75-1,55	0,50-0,75		10-35	0,85-0,90	70-80	0,14-0,17	75-1			
PVC, lágy	1,16-1,35			0,10-0,25			0,9-1,8	150-210	0,15	55-6			
Polisztirol	1,05		1,20-1,30	0,45-0,65		32-32,5	1,3	70	0,18	60-8			
Plexi	1,17-1,20		1,80-2,00	0,50-0,77		27-32	1,47	70	0,18	85-1			
Teflon	2,15-2,20		0,27-0,35	0,25-0,36		4,1	1,0	100	0,25	300*			
Nylon	1,14		1,0	4,5-7,7	0,65-1,6	20-100	1,7	80	0,23	170-			
Polikarbonát	1,2		1,1	0,56-0,67		21-24	1,17	60-70	0,21	160*			
Bakelit	1,4		2,5-3,2	0,25		56-120	1,3	30-50	0,35	140*			
Epoxigyanta	1,9		1,0-2,1	0,30-0,40		215	0,8	11-35	0,88	180*			
Celluloid	1,38		0,6-0,9	0,40-0,60		25	1,4-1,6	100	0,18	120*			

†: Az értékek nem tiszta, hanem a szokásos kereskedelmi anyagokra vonatkoznak. Faanyagok esetén 15%-os nedvességtartalomra (kb. légszáraz) vonatkoznak az adatok. Műanyagoknál általában nem adtunk meg rugalmasságo határt, mert már kis erőhatásra is maradandóan nyúlnak. *: lágypont. **: bomlási hőmérséklet. ‖: száliránnyal párhuzamosan. \perp : szálirányra merőlegesen. \emptyset : az átmérő irányában. $\emptyset\perp$: érintőirányban.

Irodalom

IRODALOM

- [1] Atkins, P. W.: *Fizikai kémia I–IV*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [2] Bártfai Béla: *Galvanizálás*. Nehézipari Könyvkiadó, 1954.
- [3] Bártfai Béla: *Galvanizálók zsebkönyve*. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1962.
- [4] Born, Max–Wolf, Emil: *Principles of Optics*. Pergamon Press, 1965.
- [5] Buchböck Gusztáv: *Physikai-chemiai mérő módszerek*. Kir. Magyar Természettudományi Társulat, Budapest, 1922.
- [6] Budó Ágoston: *Kísérleti fizika I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 1972.
- [7] Budó Ágoston–Mátrai Tibor: *Kísérleti fizika III*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [8] Buzágh Aladár: *Kolloidika I*. Egyetemi Nyomda, Budapest, 1946.
- [9] Buzágh Aladár: *A kolloidika praktimuma*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [10] Curie, Eve: *Madame Curie*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1967.
- [11] D'Ans, J.–Lax, E.: *Taschenbuch für Chemiker und Physiker*. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
- [12] Dobos Dezső: *Elektronikus kémiai mérőkészülékek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
- [13] Dobos Dezső: *Elektrokémiai táblázatok*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [14] Domininghaus, Hans: *Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1986.
- [15] Eder, Franz X.: *Moderne Messmethoden der Physik*. VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [16] Erdey-Grúz Tibor: *A fizikai kémia alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [17] Erdey-Grúz Tibor–Proszjt János: *Fizikai-kémiai praktikum I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- [18] Erdey-Grúz Tibor–Schay Géza: *Elméleti fizikai kémia I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

-
- [19] Erdey László–Mázor László: *Analitikai kézikönyv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.
- [20] Eucken, Arnold: *Grundriss der physikalischen Chemie*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1951.
- [21] Ferszman, A. E.: *Szórakoztató geokémia*. Dante Könyvkiadó, Budapest, 1950.
- [22] Ferszman, A. J.: *Szórakoztató ásványtan*. Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest, 1951.
- [23] Feynman, R. P.–leighton, R. B.–sands, M.: *Mai fizika I–X*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [24] Grasselly Gyula: *Ásvány- és ércelemzési módszerek*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.
- [25] Greenwood, N. N.–Earnshaw, A.: *Az elemek kémiája I–III*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [26] Hargittai István: *Szimmetria egy kémikus szemével*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.
- [27] Homjakov, V. G.–Masovec, V. P.–Kuzmin, L. L.: *Az elektrokémiai iparágak technológiája*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [28] Horváth Pál–Sors László: *Kémiai áramforrások és alkalmazásaik*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [29] Inzelt György: *Az elektrokémia korszerű elmélete és módszerei I–II*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [30] Jeges Károly: *Elektrotechnika egyszerű kísérletekkel*. Gondolat, Budapest, 1961.
- [31] Juhász András (szerk.): *Fizikai Kísérletek gyűjteménye I–III*. Arkhimédész Bt.–TypoTeX, Budapest, 2001, 1995, 1996.
- [32] Kakas Péter: *A gyémántról*. Blueground Kft, Budapest, 2004.
- [33] Karapetjang, M. H.–Drakin, Sz. I.: *Az anyag szerkezete*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [34] Kiss László–Láng Győző: *Elektrokémia*. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2008.
- [35] Koch Sándor–Sztrókey Kálmán Imre: *Ásványtan I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.
- [36] Kohlraus, F.: *Praktische Physik I–II*. Teubner, Leipzig, 1950.
- [37] Kovács Lajos: *Műanyag zsebkönyv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [38] Kremer, Bruno P.: *A mikroszkóp használata*. Geobook, 2008.
- [39] Langhammer, Günter: *Versuche zur physikalischen Chemie*. Volk und Wissen volkseigener Verlag, Berlin, 1956.
- [40] Lapp, Ralph E.: *Az anyag*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [41] Leisztner László–Bujtás Piroska: *Az anyag vallomása bűnügyben*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- [42] Marx György: *Életrevaló atomok*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978.
- [43] Marx György: *Atommagközelben*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1996.
- [44] Máthé János: *Az anyag szerkezete*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

-
- [45] Máthé János: *Molekulaspektroszkópiai és kvantumkémiai számítások*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.
- [46] Mázor László: *Laboratóriumi technika*. Nehézipari Könyvkiadó, Budapest, 1952.
- [47] Mázor László: *Analitikai zsebkönyv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960, 1966.
- [48] Náray-Szabó István: *Kristálykémia*. Kir. Magyar Egyetemi Nyomda, Budapest, 1944.
- [49] Oláh György–Goepfert, Alain–Prakash, G. K. Surya: *A metanolgazdaság*. Better Kiadó, Budapest, 2007.
- [50] Öveges József: *Kis fizika I–II*. Művelt Nép Könyvkiadó, Budapest, 1953, 1954.
- [51] Öveges József: *Klasszikus fizika*. Minerva, Budapest, 1968.
- [52] Öveges József: *Kísérletezzünk és gondolkozzunk!* Gondolat Kiadó, Budapest, 1979.
- [53] Öveges József–Molnár Ottó: *Színes fizikai kísérletek a „semmiből”*. Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- [54] Öveges József–Molnár Ottó: *Játékos kísérletek az elektronnal*. Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [55] Palmer, W. G.: *Experimental physical chemistry*. Cambridge, at the University Press, 1946.
- [56] Palotás László: *Mérnöki kézikönyv 1.–4.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [57] Pápay László: *Kristálytan, ásványtan, kőzettan*. Szegedi Egyetemi Kiadó, Szeged, 2006.
- [58] Partington, J. R.: *An advanced treatise on physical chemistry I*. Longmans, Green and Co., London – New York – Toronto, 1949.
- [59] Perry, John H.: *Vegyésmérnökök kézikönyve I–II*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
- [60] Pesty László: *Akkumulátorok elemek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.
- [61] Póta György: *Fizikai kémiai III/1*. Debrecen, 2004.
- [62] Preisich Miklós: *Bevezetés az elektrokémiába*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1960.
- [63] Proszk János–Erdey-Grúz Tibor: *Fizikai-kémiai praktikum*. Sopron, 1934.
- [64] Rimbach, Eberhard: *Kleines physikalisch-chemisches praktikum*. Friedrich Cohen, Bonn, 1909.
- [65] Sękowski: *Galvanizáljunk otthon!* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
- [66] Siddons, Collin: *Fizikai kísérletek*. Novotrade, Budapest, 1991.
- [67] Sólyom Jenő: *A modern szilárdtest-fizika alapjai I–III*. ELTE Eötvös Kiadó, 2009.
- [68] Sztrókey Kálmán: *Száz kísérlet*. Királyi Magyar Egyetemi Nyomda, 1942?
- [69] Sztrókey Kálmán: *Még száz kísérlet*. Királyi Magyar Egyetemi Nyomda, 1943?
- [70] Sztrókey Kálmán: *A technika ábécéje*. Ifjúsági Könyvkiadó, Budapest, 1953.

-
- [71] Sztrókay Kálmán Imre–Grasselly Gyula–Nemecz Ernő–Kiss János: *Ásványtani praktikum I–II*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1971, 1970.
- [72] Tóth Eszter, Holics László, Marx György: *Atomközvetben*. Gondolat, Budapest, 1981.
- [73] Vándor József: *Kémiai termodinamika*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.
- [74] Vermes Miklós: *Fizikai kísérletek*. Jedlik Oktatási Stúdió, Budapest, 2005.
- [75] Vincent, Alan: *Molekuláris szimmetria és csoportelmélet*. Tankönyvkiadó Vállalat, Budapest, 1987.
- [76] Veszprémi Tamás: *Általános kémia*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2015.
- [77] Zátonyi Sándor: *Játékok zsebleppel és mágnespatkóval*. Móra Ferenc Könyvkiadó, Budapest, 1980.

MUTATÓ

A legfontosabb hivatkozás (általában a definíció) oldalszáma *dőlt* betűvel van szedve. A külső, azaz más könyvekre történő hivatkozások előtt szögletes zárójelben szerepel az adott könyv sorszáma az irodalomjegyzékben.

- abszolút entalpia 172
abszolút érték 26
abszolút szabad entalpia 172
abszorpció 99
adhézió 233
adszorbátum 107
adszorpció 107
adszorbens 107
aerométer 44
alacsony szimmetriájú 249
alap 13
alig oldódik 127
állandó súlyviszonyok törvénye 235
állapotábra 96
alsó égéshő 166
általános gáztörvény 86, 148
amorf 67
Ampere, ??, ??-?? 197, 208
anhidrit 137
anód 218
anyagmegmaradás törvénye 232
anyalúg 118
apoláris 194
ár 15
áram 197
áramjelző 219
áram kémiai hatása 218
áram mágneses hatása 213
argumentum 27
átkapcsoló 212
Atkins, P. W. 257
atmoszféra 48
Avogadro 86, 148, 149, 152
azeotróp elegy 145

Bánki Donáth, ??-?? 112
barométer 85
Bártfai Béla 257
belsőégésű gép 111
belső ellenállás 211, 213
belső energia 92, 154
belső surlódás 66
bioetanol 147
Boltzmann 152, 155
Boltzmann-állandó 152
Boltzmann-eloszlás 155
bontási feszültség 220
Born, Max 257
borszesz 145
Boyle 49, 53, 83
Briggs ??, ??-?? 21, 23
Brown 239
Brown-mozgás 239
Buchböck Gusztáv 257
Budó Ágoston 257
Bujtás Piroska 258
Bunsen-szelep 49

- Buzágh Aladár 257
- Cardano-képlet 25
- Carnot, Nicolas Léonar Sadi (1796–1832) 111
- Cavalieri [kavalieri], Francesco Bonaventura (1598?–1647) 18
- Celsius 79
- Charles 83
- Clapeyron, Benoît Paul Émile (1799–1864) 113, 128, 136, 177
- Clapeyron-egyenlet 113
- Coulomb 189
- coulumb 187
- csengőgomb 212
- Csonka János, ??–?? 112
- csúcshatás 186
- Curie, Eve 257
- Dalton ??, ??–?? 102
- Dalton törvénye 102
- D'Ans, J. 257
- Davy, ??? (??–???) 68
- dekantálás 119, 127
- denaturált szesz 147
- derivált 29
- Descartes 55
- deszorpció 99
- desztillálás 145
- desztillált víz 144
- dielektrikum 193
- dielektromos állandó 193
- differencia 14, 29
- differenciahányados 29
- differenciálási szabály 30
- differenciálhányados 29
- diffúzió 45, 237
- diffúziós együttható 158
- digír 248
- digitális mérleg 35
- disszociálnak 226
- Dobos Dezső 257
- domén 203
- Domininghaus, Hans 257
- döngölt sűrűség 43
- dörzselektromos gép 198
- Drakin, Sz. I. 258
- dugattyús légszivattyú 49
- dugó 94
- dugófúrás 51
- durranógáz 223, 225
- Earnshaw, A. 258
- Eder, Franz X. 257
- Edison, Thomas Alva, ??–?? 211
- edzés 204
- égéshő 72
- égetett gipsz 137
- egyenlő szétesztás 153
- egyesített gáztörvény 83
- ekvipartíció 153
- elektród 218
- elektrofor 196
- elektrolízis 220, 223
- elektromos térerősség 189
- elektromos vezető 206
- elektronvolt 190
- elektroszkóp 179
- elemi cella 234
- ellenállás 210
- előtétellenállást 225
- elsőfokú közelítés 78
- emulzió 56
- endoterm 128
- energiamegmaradás törvénye 70
- entrópia 172, 173
- Erdey-Grúz Tibor 257, 259
- Erdey László 258
- erővonal 189
- Eucken, Arnold 258
- Euler-féle összefüggés 27
- Euler, Leonhard (1707–1783) 27
- eutektikum 120
- exoterm 128
- exponenciális alak 27

- fagyáspontgörbe 120
 Fahrenheit 78
 fajhő 67
 fajlagos ellenállás 210
 farad 192
 Faraday 100, 192, 224
 Faraday-kalitka 192
 Faraday $t^{\frac{1}{2}}$ törvénye 224
 faszesz 195
 fázis 96
 fázisszabály 97
 fegyverzet 192
 felezési idő 89
 felhajtóerő 43
 féligáteresztő 142
 feloldódik 116
 felületi feszültség 56, 58
 ferrit 204
 Ferszman, A. E. 258
 Ferszman, A. J. 258
 feszültség különbség 184, 190
 feszültségosztó 215, 222
 Feynman, R. P. 258
 folytonos 31
 forráshő 72
 forráspontgörbe 96
 forráspontgörbéje 120
 forró 20
 főtengely 249
 főtengelyes 249
 főtengely nélküli 249
 főzött só 119
 Franz 210
 frekvencia 158
 fűtőérték 73, 166
- Galilei, Galileo (1564–1642) 48, 50, 107
 γ -sugárzás 230
 Gauss, ?? (??-??) 201
 Gay-Lussac 83
 gáz 95
 gázállandó 86
 gázgyújtóra 111
 gerjesztett mágnesség 202
 Gibbs 167, 174
 Gibbs-Helmholz-egyenlet 174
 gipsz 137
- giroid 248
 Goeppert, Alain 259
 görög ábécé 15
 gőz 95
 gőzfürdő 75
 gőzfürdőben 75
 gőznyomásgörbe 96
 Grasselly Gyula 258, 260
 Greenwood, N. N. 258
 Gr $\frac{1}{2}$ F uneseisen 74
 Guericke, Otto von (??-??) 48, 198
 Guldberg 95
 Guldberg-Guye-szabály 95
 gumidugó 94
 Guye 95
 gyakorlatilag oldhatatlan 127
 gyök 21
 gyöktényező alak 25
 gyorsulás 32
- hajszálcső 58
 halmazsűrűség 43
 haranggörbe 153
 Hargittai István 258
 harmadfokú 25
 hármaspont 97
 harmatpont 103
 harmatpontgörbe 146
 háromfogású 248
 határozatlan integrál 34
 határfok 108
 hatfogású 248
 hatvány 12
 Heisenberg, Werner Karl (1901–1976) 159
 hektár 15
 Helmholtz 174
 hemi 137
 hemihidrát 137
 Henry törvénye 99
 Henry, William (1774–1836) 99
 hexagír 248
 hideg 20
 hidrát 133
 hidratációs hő 135
 hidrogén 218, 223
 hidrogénhíd 226

-
- hidroxóniumion 226
 hígításhő 128
 hígított szesz 147
 higroszkópos 136
 Hoffmann-szorító 145
 hőkapacitás 79
 hőkiegyenlítődési törvény 89, 130
 Holics László 260
 hőmérsék 20
 hőmérsékleti alappontok 87
 Homjakov, V. G. 258
 Hook ??, ??-?? 49
 horganyzott vaslemez 251
 Horváth Pál 258
 hőszugárzás 230
 hőtan első főtétele 70
 hőtan harmadik főtétele 172
 hőtan második főtétele 108
 hővezetési tényező 69
 hűtőcső 145
 hűtőgép 111
 hűvös 20
- ideális elegy 139
 ideális gáz 84, 92
 illóolaj 103
 imaginárius 25
 index 245
 infravörös 230
 inverz 21
 inverz függvény differenciálása 31
 inverzió 248
 Inzelt György 258
 ion 183, 221
 ionizáló sugárzás 183
 izodimorfizmus 250
- Jeges Károly 258
 jól oldódik 127
 Juhász András 258
- Kakas Péter 258
 kalibrál 41
 kálisó 116
 kalóriá 66
 kaloriméter 65
 kapacitás 192
 kapilláris 58
 kapillárkondenzáció 107
 Karapetjang, M. H. 258
 katód 218
 kékgálic 250
 kémcsőfogó 19
 kemiszorpció 107
 kénsav 250
 Kepler 18, 41
 képzetes 25
 képzetes rész 25
 képződéshő 165
 képződési szabad entalpia 171
 kétfogású 248
 kettőstörés 126
 kevésbé oldódik 127
 kikristályosodik 116
 kísérlet 8
 Kiss János 260
 Kiss László 258
 kisül 182
 kitevő 13
 koagulál 231
 köbgyök 21
 Koch Sándor 258
 kocka 247
 koffein 101
 kohézió 233
 Kohlraus, F. 258
 kolloid oldat 231
 komplex szám 25
 kompresszibilitási együttható 163
 koncentráció 45
 kondenzációs kazán 73
 kondenzált állapot 104
 kondenzátor 192
 konjugált 27
 konstans 110
 köpűs légszivattyú 49
 körfolyamat 109
 Kovács Lajos 258

- közepes szabad úthossz 158
 közepes szimmetriájú 249
 Kremer, Bruno P. 258
 kristályosítás 116
 kristályvíz 133
 kritikus hőmérséklet 95
 kritikus nyomás 95
 kritikus sűrűség 95
 különbségi hányados 29, 78
 Kuzmin, L. L. 258
 kvadratikus interpoláció 78
 kvantumkémia 159
 kvarc 43
 kvarcüveg 44
- laboratóriumi jegyzőkönyv 8
 láncszabály 31
 Láng Győző 258
 Langhammer, Günter 258
 langyos 20
 lapcentrált köbös 251
 Lapp, Ralph E. 258
 Lax, E. 257
 Le Châtelier 128, 129, 171, 177
 Le Châtelier-elv 128
 legnagyobb szimmetriájú 248
 légnyomásnéző 85
 legszorosabb illeszkedésű hatszöges 252
 legtömegebb szesz 147
 légüres tér 69
 legvalószínűbb sebesség 155
 lehülési törvény 130
 Leibniz ??, ??-?? 29, 34
 leighton, R. B. 258
 Leisztner László 258
 lepárlás 145
 leydeni palack 199
 lineáris interpoláció 78
 liofil 231
 liofob 231
 logaritmus 21
 lupe 13
- magasabb fokú 24
 magasság 15
 mágneses megosztás 201
 mágneses polarizáció 202
 mágneses tartományok 203
 mágnes sarka 200
 mágnesvaskő 199
 magnetit 199
 Mariotte 53
 Martin, Pierre Émile (1824–1915) 109
 Marx György 258, 260
 másodfajú örökmozgó 167, 169
 Masovec, V. P. 258
 Máthé János 258, 259
 Mátrai Tibor 257
 Maxwell 155, 159
 Maxwell-féle sebességeloszlás 155
 Mázor László 258, 259
 megfordítható 111
 megosztás 181
 meleg 20
 mérsékelten oldódik 127
 mézshidrát 223
 mésztej 223
 mézsvíz 223
 metastabil 125, 135
 modellgipsz 137
 mol 86
 moláris entrópia 173
 mólhő 154
 Molnár Ottó 259
 Morse kapcsoló 212
- nagyon jól oldódik 127
 Náray-Szabó István 259
 nedvszívó 136
 négyfogású 248
 négyzetes közelítés 78
 négyzetgyökvonás 18
 Nemezc Ernő 260
 Newcomen [], Thomas (1664–1729) 108
 Newton hőkiegyenlítődési törvénye 88
 Newton [njútn], Isaac (1643–1727) 34,
 36, 88, 89, 129
 Newton–Leibniz-formula 34
 nóniusz 13
 normál hőmérséklet 83

- normál képződési entalpia 165
normál nyomás 53, 83
nylon 132
- ohm 210, 218
oktaéder 247
Oláh György 259
oldat 116
oldhatósági görbe 120
oldódik 116
oltott mész 223
olvadáshő 66
olvadási görbe 96
öntés 63
osztott differencia 78
Öveges József 259
oxigén 223
ozmózis 142
- PA 132
Palmer, W. G. 259
Palotás László 259
Pápay László 259
Papin, Denis (1647–1712) 89
paraffin 63
paraffinolaj 193
parciális nyomás 102
párhazamos kapcsolás 207
párhuzamos kapcsolás 211
párlat 145
párolt só 119
Partington, J. R. 259
Pascal, Blaise (1623–1662) 48, 49, 50
pentagondodekaéder 248
Perry, John H. 259
Pesty László 259
piknométer 42
pirit 248
Planck 158, 159
Planck-állandó 158
poláris 194
polarizálódik 194
poliamid 132
polimorfia 128
pólus 200
porlasztó 112
- Póta György 259
Prakash, G. K. Surya 259
Preisich Miklós 259
primitív függvény 34
Proszk János 257, 259
- rádióhullám 230
Rault ??, ??-?? 138, 143
Rault törvénye 138
Rayleigh, [reli] John William Strouutt (1842–1919) 231
Rayleigh törvénye 231
rázott sűrűség 43
reakcióentalpia 164
reciproka 13
redős szűrő 118
regeneratív tüzelés 109
regenerátor 109
relatív dielektromos állandó 193
relatív hőmérséklet 160
relatív nyomás 160
relatív páratartalom 103
relatív térfogat 160
részleges nyomás 102
rezgésszám 158
Rimbach, Eberhard 259
röntgensugarak 230
rövidzár 206
- sands, M. 258
Schay Géza 257
Schrödinger, Erwin (1887–1961) 159
Sękowski 259
Selényi Pál, ??-?? 195
Siddons, Collin 259
Siemens, Ernst Werner von (1816–1892) 109
síkkondenzátor 193
siklószám 80
simítás 131
Simpson, Thomas (1710–1761) 17, 18
Sólyom Jenő 259
soros kapcsolás 207
Sors László 258
standard hőmérséklet 83
statisztikus mechanika 148

- Stirling [sztörling], Robert (1790–1878) 111
- Stokes, Sir George Gabriel (1819–1903) 67, 131
- stukatúr gipsz 137
- sújtólég 68
- súly 35
- sűrítő 192
- sűrűség 42
- sűrűségmérő 44
- sütő 133
- szabad entalpia 166
- szabadsági foka 96
- szedőedény 145
- szelep 48
- szigetelő 206
- szigetelt vezeték 206
- szobahőmérséklet 20
- szódavíz 99
- szol 231
- szorbció 99
- szorzat differenciálási szabálya 31
- Sztrókey Kálmán 259
- Sztrókey Kálmán Imre 258, 260
- szublimációs görbe 97
- szuperkritikus 96
- szűrlet 117
- szűrőpapír 116
- tárgylemez 57
- teflon 44
- telítetlen gőz 96
- telített 117
- telített gőz 96
- teljes oldáshő 128
- tércentrált köbös 251
- természetes logaritmus 24
- termet 241
- termik 80
- termoszkóp 79
- terület 17
- tetraéder 248
- tetragír 248
- többalakúság 128
- tömeg 35
- tömeghatás törvénye 169, 176
- tömény szesz 147
- tonna 35
- torr 48
- Torricelli 48
- Tóth Eszter 260
- trapéz 15
- trigír 248
- trigonometrikus alak 27
- Trouton, Frederick Thomas 1863–1922) 113
- Trouton-szabály 113
- tükrözés 248
- Tyndall-jelenség 231
- Tyndall, John 1820–1893) 231
- ultraibolya 230
- ultramikroszkóp 231
- üveg 67
- üvegtölcsér 116
- üvegvagás 57
- vákuum 69
- vákuum dielektromos állandója 193
- valós rész 25
- váltóáram 222
- van der Waals 160, 163, 194, 195, 227
- van der Waals-állandók 160
- van der Waals-egyenlet 160
- Vándor József 260
- van't Hoff 143, 169, 170, 171, 175, 177, 178
- van't Hoff-egyenlet 177
- védőkolloid 231
- vegyérték 224
- Vermes Miklós 260
- Veszprémi Tamás 260
- Vincent, Alan 260
- viszkozitás 66
- vízfürdő 75
- vízfürdőben 75
- vízgázreakció 168
- vízgőzdesztillálás. 103
- vízmentes szesz 147
- vízugárszivattyú 55

Watt, James 38
Wiedemann 210
Wolf, Emil 257

zagy 128
Zátonyi Sándor 260
zománcozott 116
zselatin 231

