ANALÍZIS ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Jegyzet

Járai Antal

KLTE
Debrecen
1989

Lektorálta:

dr. Páles Zsolt
a matematikai tudomány kandidátusa

dr. Rimán János
főiskolai docens

Felelős kiadó: Dr. Lipták András, a KLTE rektora
Készült a Kossuth Lajos Tudományegyetem
Könyvtárának sokszorosító üzemében.

Tartalomjegyzék

1.§ Bevezetés

Ezen jegyzet azoknak az előadásoknak az anyagát tartalmazza, amelyeket „analízis és valószínűségszámítás" címmel tartottam 1989-ben a KLTE-en második-harmad éves kémia–fizika és fizika–technika szakos hallgatók számára. A jegyzet lefedi a tantárgy tematikáját, amely akkor a következő volt:

Egyenletek közelítő megoldása. (Érintő, húr és szelő módszer.) Az approximációelmélet alapjai. (Lagrange és Newton-féle interpoláció, parabolikus interpoláció, a legkisebb négyzetek módszere.)

Lebesgue-mérték és integrál. (Fogalma, alapvető tulajdonságai.)

Hilbert-terek. (A Hilbert-tér fogalma, speciális Hilbert-terek, a négyzetesen integrálható függvények tere, ortonormált rendszerek, a trigonometrikus rendszer, Fourier-sorok vizsgálata, ortogonális polinomrendszerek, önadjungált operátorok Hilbert-térben, projekció operátorok, spektrál tétel.)

A valószínűségszámítás elemei. (Alapvető fogalmak, valószínűségi változó, eloszlás és sűrűségfüggvény, várható érték, szórás, nevezetes eloszlások.) A matematikai statisztika elemei.

A jegyzet néhány, a tematikában nem szereplő részt is tartalmaz, valamint példákat az elmélet alkalmazására és számos megoldandó feladatot, amelyek kidolgozása az anyag alapos elsajátítását teszi lehetővé. A nehezebb feladatokat *-gal megjelöltem. Tömör fogalmazásra törekedtem, így a jegyzet az előadást nem helyettesíti. Csak az egyszerű, új fogalmak bevezetését nem igénylő bizonyítások szerepelnek.

Az analízisben általánosan szokásos jelöléseket használtam. Kétség esetén lásd Rudin [12] könyvét analízisbeli, Halmos [4] könyvét pedig lineáris algebrai fogalmakkal kapcsolatban. Egy vektor koordinátáit, vagy egy lineáris leképezés matrixát $\mathbf{R}^n$-ben vagy $\mathbf{C}^n$-ben mindig a szokásos bázisban értjük.

Járai Antal

Debrecen, 1989 október 23.

I. NUMERIKUS MÓDSZEREK

2.§ Egyenletek megoldása

2.1. Abszolút és relatív hibák. Az adatokban mutatkozó hibát többféleképpen is mérhetjük. Ha felső becslésekre törekszünk, akkor célszerű az abszolút hibára keresni felső becsléseket. Ha x az x^* pontos érték közelítése, akkor az $|x - x^*|$ *abszolút hiba* egy $\delta(x)$ felső becslését keressük: $|x - x^*| \le \delta(x)$. A közelítés pontosságát gyakran jobban leírja a *relatív hiba*:

$$\frac{|x - x^*|}{|x|} \le \frac{\delta(x)}{|x|}.$$

Az abszolút hibát gyakran közelítőleg a helyes tizedes jegyek számával, a relatív hibát pedig az értékes jegyek számával fejezzük ki.

Összeadáskor és kivonáskor

$$\big|(x \pm y) - (x^* \pm y^*)\big| \le |x - x^*| + |y - y^*| \le \delta(x) + \delta(y),$$

azaz az abszolút hibák összeadódhatnak. Szorzáskor

$$\begin{aligned} |xy - x^*y^*| &= |xy - xy^* + xy^* - x^*y^*| \le |x|\delta(y) + |y^*|\delta(x) \\ &\approx |x|\delta(y) + |y|\delta(x), \end{aligned}$$

osztáskor pedig

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}\right| = \left|\frac{xy^* - x^*y}{yy^*}\right| &= \frac{|xy^* - xy + xy - x^*y|}{|yy^*|} \\ &\approx \frac{|x|\delta(y) + |y|\delta(x)}{|y|^2}. \end{aligned}$$

Ebből a relatív hibára

$$\frac{\delta(x \pm y)}{|x \pm y|} = \frac{\delta(x) + \delta(y)}{|x \pm y|},$$

ami, ha a nevező két ellenkező előjelű tag összevonásából adódik, igen nagy is lehet. Szorzásnál és osztásnál

$$\frac{\delta(xy)}{|xy|} \approx \frac{\delta(x)}{|x|} + \frac{\delta(y)}{|y|},$$

$$\frac{\delta\,(x/y)}{|x/y|} \approx \frac{\delta(x)}{|x|} + \frac{\delta(y)}{|y|},$$

azaz a relatív hibák összeadódhatnak.

Többváltozós függvények értékének számításakor

$$\delta\bigl(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\bigr) \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \delta(x_i).$$

2.2. Valószínűségi hibaanalízis. Ha a hibák egymástól független véletlen értékek, akkor nagyon valószínű, hogy részben kiejtik egymást. Ha például az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mennyiségeket összeadjuk, akkor a kapott s összeg hibájának négyzete az x_i-k hibáinak négyzetösszegével becsülhető. Így egyforma hibák esetén a hibára $\sqrt{n}$-szer kisebb becslést kapunk, mintha a hibákat összeadnánk.

2.3. A hibák terjedése. Mint láttuk, ellenkező előjelű mennyiségek összevonásakor a relatív hiba akármilyen nagyra is megnőhet. Ezért lehetőleg kerülni kell az olyan eljárásokat, amelyekben ellenkező előjelű, majdnem egyenlő abszolút értékű mennyiségek összevonására van szükség. Példaként tekintsük az

$$x^2 - 1000x + 1 = 0$$

egyenlet megoldását. A megoldóképlettel, öt értékes jegyre számolva,

$$x_{1,2} = \frac{1000 \pm \sqrt{999996}}{2}, \qquad x_1 \approx 1000{,}0, \quad x_2 \approx 0,$$

míg a második gyök számításánál az

$$x_2 = \frac{1000 - \sqrt{999996}}{2} = \frac{2}{1000 + \sqrt{999996}}$$

átalakítás után az öt értékes jegyet tartalmazó $x_2 \approx 0{,}0010000$ eredményt kapjuk. Ez a példa mutatja, hogy nem mindegy, hogy formuláinkat milyen alakban írjuk fel.

Gyakran problémát okoz az is, ha a használt eljárás sok lépésből áll, és minden lépésben az előző lépésekben kapott, hibával terhelt adatokat használunk a számítások folytatására. Lehetőleg kerüljük az ilyen módszereket, és ahol lehet, az eredeti adatokra alapozzuk a további számításokat.

2.4. Feladat. Egy gömb sugarát 1% pontossággal ismerjük. Milyen pontossággal számítható a köbtartalma?

2.5. Feladat. Mennyi zsebszámológépünk relatív pontossága az alapműveleteknél, illetve az elemi függvények számításakor?

2.6. Feladat. Határozzuk meg e^{-20} értékét e^x sorának a felhasználásával!

* **2.7. Feladat.** Írjunk programot egyszerű, csak néhány regiszterrel rendelkező zsebszámológépre egy hosszabb $x_1, x_2, \dots, x_n$ számsorozat $\overline{x}$ átlagának és s^2 empirikus szórásnégyzetének számítására. A programot igyekezzünk úgy szervezni, hogy a kerekítési hiba kicsi legyen.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

2.8. Intervallum felezés. Ha f az $[a, b]$ intervallumon folytonos, valós függvény, $f(a)f(b) < 0$, akkor az $f(x) = 0$ egyenlet $[a, b]$-beli megoldásának megkeresésére számítsuk ki $x_0 = a$, $x_1 = b$ jelöléssel az $x_2 = (a + b)/2$ helyen a függvényértéket. Ha $f(x_2) = 0$, akkor készen vagyunk, egyébként legyen $[a_2, b_2]$ az $[a, b]$ intervallumnak az a fele, amelynek végpontjaiban f előjele különböző, és alkalmazzuk az előző lépést x_3 és $[a_3, b_3]$ előállítására, stb. A kapott $x_0, x_1, x_2, \dots$ sorozat mindig konvergál f egy zérushelyéhez. Az eljárás hátránya, hogy a konvergencia lassú, és a módszer nem alkalmazható, ha a függvény az intervallumon nem vált előjelet (pl. x^2 a $[-1, 1]$-en).

2.9. Húrmódszer. Az eljárás hasonlít az intervallum felezéshez, de az x_{n+1} pontot az $\big(a_n, f(a_n)\big)$ és $\big(b_n, f(b_n)\big)$ pontokat összekötő egyenes és az x tengely metszéspontjaként definiáljuk, azaz

$$x_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n).$$

A konvergencia valamivel gyorsabb, mint az intervallum felezésnél. Előnyei és hátrányai hasonlóak.

2.10. Szelőmódszer. A szelőmódszernél az x_{n+1} közelítést úgy kapjuk, hogy vesszük az $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ és $(x_n, f(x_n))$ pontokon átmenő szelőnek az x tengellyel való metszéspontját. Így

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}).$$

A szelőmódszernél nem szükséges úgy választani az x_0, x_1 kezdőpontokat, hogy ott a függvény ellenkező előjelű legyen. A szelőmódszer gyorsabb, mint a húrmódszer. Egyetlen háránya, hogy nem mindig konvergens.

2.11. Newton-módszer. A Newton-módszernél elég a gyök egyetlen x_0 közelítéséből kiindulni. Az x_{n+1} közelítést az x_n pont beli érintő és az x tengely metszéspontjaként kapjuk, az

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

összefüggéssel. A Newton-módszer a szelőmódszernél is gyorsabban konvergál. Hátránya, hogy nem minden esetben konvergens — bár általában van a gyöknek olyan környezete, hogy onnan indítva konvergens — és hogy nem csak f, hanem f' értékeit is ki kell számítani. Ez utóbbi hátrány elkerülhető a *módosított Newton-módszer*rel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Így csak egy helyen van szükség f' kiszámítására, de a konvergencia lelassul.

2.12. Egy példa. A konvergencia rendje. Tekintsük a $2\sin x - x = 0$ egyenletet, és határozzuk meg egyetlen pozitív gyökét. Az ismertetett eljárásokkal az 1. és a 2. táblázatban látható eredményeket kapjuk.

Látjuk, hogy a húrmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben ugyanannyival nő, amit úgy szokás kifejezni, hogy a módszer *elsőrendben konvergens.* A Newton-féle érintőmódszernél a helyes jegyek száma minden lépésben körülbelül megduplázódik, a Newton-módszer *másodrendben konvergens.* A szelőmódszernél minden lépésben a helyes jegyek száma körülbelül 1,6-szeresére nő, a szelő módszer *konvergencia-rend*je $\approx 1{,}6$.

Megjegyezzük, hogy a módosított Newton-módszer is elsőrendben konvergens, és többszörös gyökök esetében, tehát ha nem csak $f(\alpha) = 0$, hanem $f'(\alpha) = 0$ is teljesül, akkor a Newton-módszer is csak elsőrendben konvergens.

2.13. Feladat. Készítsünk programot az előző példában bemutatott számítások elvégzésére!

2.14. Feladat. Mely módszerek alkalmazhatók a

$$4\sin^2 x - 4x\sin x + x^2 = 0$$

egyenlet egyetlen pozitív gyökének meghatározására, az egyenlet átalakítása nélkül? Milyen gyors lesz a konvergencia?

2.15. Feladat. Számítsuk ki $\sqrt[n]{a}$-t az $x^n = a$ egyenlet Newton–módszerrel történő megoldásával!

2.16. Egyenletrendszerek. Egy k egyenletből álló k ismeretlenes egyenletrendszert tömören

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

alakban írhatunk fel. Erre az eddig említett módszerek közül a Newton–módszer általánosítható:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \big(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\big)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Az iteráció általában csak a gyök közvetlen közeléből indítva konvergens. Ha a k dimenziószám magas, akkor az $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)$ mátrix kiszámítása és invertálása igen munkaigényes. Gyakran célszerű az összefüggést

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$$

	felezés	húr	módosított Newton
0	1,500000000000000	1,500000000000000	2,000000000000000
1	3,000000000000000	3,000000000000000	1,900995594203909
2	2,250000000000000	1,731105741103194	1,896061839711735
3	1,875000000000000	1,835346758106057	1,895554271020856
4	2,062500000000000	1,874711941565929	1,895500626429194
5	1,968750000000000	1,888467091368380	1,895494941197443
6	1,921875000000000	1,893136039488919	1,895494338504453
7	1,898437500000000	1,894704904454640	1,895494274610843
8	1,886718750000000	1,895230273680515	1,895494267837234
9	1,892578125000000	1,895406002936673	1,895494267119137
10	1,895507812500000	1,895464759477905	1,895494267043009
11	1,894042968750000	1,895484402686160	1,895494267034938
12	1,894775390625000	1,895490969427515	1,895494267034082
13	1,895141601562500	1,895493164663164	1,895494267033992
14	1,895324707031250	1,895493898518221	1,895494267033982
15	1,895416259765625	1,895494143841487	1,895494267033981
16	1,895462036132813	1,895494225851513	1,895494267033981
17	1,895484924316406	1,895494253266944	
18	1,895496368408203	1,895494262431748	
19	1,895490646362305	1,895494265495484	
20	1,895493507385254	1,895494266519671	
21	1,895494937896729	1,895494266862050	
22	1,895494222640991	1,895494266976506	
23	1,895494580268860	1,895494267014767	
24	1,895494401454926	1,895494267027558	
25	1,895494312047958	1,895494267031834	
26	1,895494267344475	1,895494267033263	
27	1,895494244992733	1,895494267033741	
28	1,895494256168604	1,895494267033901	
29	1,895494261756539	1,895494267033954	
30	1,895494264550507	1,895494267033972	

1. táblázat

alakba írni, így $\mathbf{x}_{n+1}$ meghatározásához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

	szelő	Newton
0	1,500000000000000	1,500000000000000
1	3,000000000000000	2,076558200630435
2	1,731105741103194	1,910506615659081
3	1,835346758106057	1,895622002987846
4	1,902230210959766	1,895494276472771
5	1,895250943924996	1,895494267033981
6	1,895493322966086	1,895494267033981
7	1,895494267166912	
8	1,895494267033981	
9	1,895494267033981	

2. táblázat

Gyakran használatos a módosított Newton-módszer is, amelynél a derivált mátrix kiszámítására és invertálására csak egyszer van szükség:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \big(\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)\big)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Időnként újra számolva a deriváltat, a konvergencia gyorsítható.

A Newton-módszer másodrendben, a módosított változat pedig elsőrendben konvergál egyenletrendszerek esetében is.

2.17. Kapcsolat minimumfeladatokkal. Ismeretes, hogy egy valós értékű

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \Phi(\mathbf{x})$$

többváltozós függvény minimumának megkeresését visszavezethetjük a $\nabla\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldására, ahol $\nabla\Phi$ a Φ függvény *gradiense*. Megfordítva, egy $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ egyenletrendszer megoldásait meghatározhatjuk úgy is, hogy megkeressük a

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k}\big(\lambda_i f_i(\mathbf{x})\big)^2$$

függvény minimumait, ahol az f_i függvények az $\mathbf{f}$ függvény koordinátái. A nem nulla λ_i súlyok tetszés szerint választhatók, de alkalmas megválasztásuk a minimumfeladat megoldását megkönnyítheti.

2.18. Az iránymenti csökkentés módszere. Lényege, hogy a $\Phi(\mathbf{x})$ függvény minimumát úgy keressük, hogy minden $\mathbf{x}_n$ közelítéshez meghatározunk egy $\mathbf{e}_n$ irányt, amerre a függvény értéke tovább csökken, és a közelítést ebben az irányban eltoljuk. Ha $\mathbf{e}_n$-nek egy bázis vektorait választjuk ciklikusan, akkor a *ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszeré*t kapjuk, ha pedig

$$\mathbf{e}_n = -\nabla\Phi(\mathbf{x}_n),$$

a legmeredekebb csökkenés iránya, akkor a *gradiens módszer*t.

Az eltolás mértékének meghatározásához az egyváltozós $g(t) = \Phi(\mathbf{x}_n + t\mathbf{e}_n)$ függvényt kell minimalizálnunk. Ez történhet a következőképpen. A $t_0 = 0$, t_1 és t_2 pontokban meghatározzuk a g függvény értékét, majd meghatározzuk azt a $p(t)$ másodfokú polinomot, amely ezekben a pontokban megegyezik $g(t)$-vel. (Lásd később, az interpolációnál.) A t_3 közelítést úgy kapjuk, hogy vesszük p minimumhelyét. Ha sikerült csökkenést elérni, akkor a t_0, t_1, t_2 és t_3 pontok egyikét elhagyjuk, és a többivel folytatjuk az eljárást. Ha nem sikerült, akkor t_1 és t_2 abszolút értékét csökkenteni kell. A t_1 értékének jó megválasztásához az előző lépések adhatnak útmutatást, t_2 választása pedig függhet $g(t_1)$-től is. Általában nem érdemes g minimumhelyét túl pontosan meghatározni, hanem egy elég jó t^* közelítés meghatározása után áttérhetünk az $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + t^*\mathbf{e}_n$ pontra.

A konvergencia általában elég lassú, és semmilyen garancia nincs arra, hogy a leírt módszer egy abszolút minimumhoz konvergál, bár konvergenciatartománya általában bővebb, mint a Newton-módszeré. Ezért szokás a közelítés kezdetén az irány menti csökkentések módszerét alkalmazni, majd áttérni a gyorsabb Newton–módszerre.

2.19. Algebrai egyenletek megoldása. A Newton-módszer minden további nélkül alkalmazható komplex változós, komplex értékű f függvényre is. Hogy a konvergenciát biztosabbá tegyük, kezdetben alkalmazhatjuk a gradiens-módszert az $|f|$ függvényre. Ennek gradiensét megvizsgálva, kiderül, hogy $f(x)/f'(x)$ irányú, ha $f(x) \neq 0$ és $f'(x) \neq 0$. Így az

$$x_{n+1} = x_n - t\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

alakban kell keresnünk a következő közelítést, ahol t pozitív valós szám. Eljárhatunk úgy, hogy először $t = 1$-el próbálkozunk, ami a

Newton-módszernek felel meg. Ha az így kapott x_{n+1}-re

$$\left|f(x_{n+1})\right| < \left|f(x_n)\right|,$$

akkor ezt választjuk következő közelítésnek, egyébként t-t csökkentjük. Az iteráció csak akkor szakad meg, ha valamelyik lépésben $f'(x_n) = 0$.

Polinomokra alkalmazva ezt az eljárást, meghatározhatjuk a polinom egy gyökét. Megjegyezzük, hogy még valós együtthatós polinom esetén is ajánlatos egy véletlen komplex kezdőértékből indítani az iterációt, mert így nagyon kicsi a valószínűsége, hogy megszakad, és újra kell indítani. A k-adfokú f polinomot elosztva $x - x_0$-lal, egy $k-1$-edfokú hányadost, és egy konstans maradékot kapunk:

$$\begin{aligned} &a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k \\ &= (x - x_0)(b_0x^{k-1} + b_1x^{k-2} + \cdots + b_{k-1}) + b_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Az együtthatók átrendezésével és összehasonlításával $b_0 = a_0$ és $b_j = a_j + x_0b_{j-1}$, ha $j = 1, 2, \ldots, k$. Ez a *Horner-elrendezés*. Vegyük észre, hogy $f(x_0) = b_k$, így az eljárás alkalmas a polinom helyettesítési értékének kiszámítására. Ha viszont $f(x_0) = 0$, akkor a polinomot elosztottuk egy gyöktényezőjével. Megismételve az eljárást, azaz ha $c_0 = b_0$, és $c_j = b_j + x_0c_{j-1}$, ha $j = 1, 2, \ldots, k-1$, $f'(x_0) = c_{k-1}$ értékét kaphatjuk meg. Így a Horner elrendezés alkalmas az iterációhoz szükséges mennyiségek kiszámítására is, és a megtalált gyöktényezők leválasztására is. A fenti módon egy algebrai egyenlet összes gyöke meghatározható.

2.20. Differenciálegyenlet rendszerek megoldása. Mivel a magasabbrendű közönséges differenciálegyenlet rendszerek új függvények bevezetésével elsőrendűre vezethetők vissza, csak az elsőrendű

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

differenciálegyenlet rendszer numerikus megoldásával foglalkozunk. A megoldás úgy történik, hogy egy $\mathbf{y}_0$ kezdőértékből kiindulva meghatározzuk a megoldás $x_{n+1} = x_n + h$, $n = 0, 1, \ldots$ helyeken vett értékeinek $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ közelítéseit. Az elméleti megfontolások mellőzésével egyetlen módszert ismertetünk, az úgynevezett *klasszikus Runge-Kutta módszert*:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

ahol

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\Big(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + h\frac{\mathbf{k}_1}{2}\Big),\\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\Big(x_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + h\frac{\mathbf{k}_2}{2}\Big),\\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_3).
\end{aligned}$$

A h lépésközt úgy kell megválasztani, hogy az $Lh < 2{,}8$ feltétel teljesüljön, ahol L a $\left\|\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{y}}\right\|$ egy felső korlátja egy olyan sugarú környezetében a közelítő megoldásnak, amelyen az igazi megoldás belül halad. Ajánlatos a h-t a szükségesnél jóval kisebbre választani. A gyakorlatban a megoldás pontosságát úgy szokás ellenőrizni, hogy fele akkora lépésközzel is megismételjük a számítást. Ha nincs lényeges eltérés, akkor a közelítés jónak tekinthető.

Ha biztosabb becslésre van szükségünk, akkor az $\mathbf{y}_n$ közelítés hibájára a következő, általában erősen túlzott becslést kaphatjuk, ahol $\mathbf{y}(x_n)$ a pontos megoldás a x_n helyen:

$$\big\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}(x_n)\big\| \le \big\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}(x_0)\big\| e^{L|x_n - x_0|} + \frac{E}{Lh}\big(e^{L|x_n - x_0|} - 1\big).$$

Itt végig h a lépésköz, E pedig az egy lépésben elkövetett hiba korlátja. Ez ennél a módszernél h^5-nel arányos. A h-t úgy kell megválasztani, hogy az egy lépésben elkövetett hiba kicsi legyen. Nem érdemes olyan kicsi h-t választani, hogy E a kerekítési hibáknál kisebb legyen. Az egy lépésben elkövetett hiba a következőképpen becsülhető: Az $\mathbf{y}_j$-ből számítsuk ki $\mathbf{y}_{j+1}$-et és $\mathbf{y}_{j+2}$-t h lépésközzel. Számítsuk ki $\mathbf{y}(x_{j+2})$ egy másik $\overline{\mathbf{y}}_{j+2}$ közelítését is $\mathbf{y}_j$-ből kiindulva, $2h$ lépésközzel. Ekkor $E \approx \|\mathbf{y}_{j+2} - \overline{\mathbf{y}}_{j+2}\|/15$.

2.21. Feladat. Oldjuk meg az

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$10x^2 - x^3 + xy - 10y + 1 = 0,$$

egyenletrendszert a Newton–módszerrel, a módosított Newton–módszerrel, a ciklikus koordinátánkénti csökkentés módszerével, és a gradiens módszerrel!

2.22. Feladat. Határozzuk meg a

$$z^3 - 2z^2 + z - 1 - i = 0$$

komplex algebrai egyenlet megoldásait!

2.23. Feladat. Határozzuk meg 1 mól CO_2 térfogatát 50 C°-on és 2 MPa nyomáson a van der Waals állapotegyenlet felhasználásával!

2.24. Feladat. Határozzuk meg a

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit!

2.25. Feladat. Megmutatható, hogy egy $n \times n$-es A mátrix $\|A\|$ normája (lásd az önadjungált operátoroknál) az A^*A mátrix legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke. Határozzuk meg az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix normáját!

2.26. Feladat. Határozzuk meg egy 1 m hosszúságú fonálon lengő tömegpont lengésidejét 90°-os kitérés esetén, Runge–Kutta módszerrel!

* **2.27. Feladat.** Két, Nap tömegű csillag egy adott pillanatban úgy mozog, mintha közös tömegközéppontjuk körül, attól 1 cs.e. távolságra körpályán keringenének. Egy harmadik csillag pályasíkjukra merőlegesen halad ugyanilyen sebességgel, a síkot az egyik csillagtól 5, a másiktól 3 cs.e. távolságra metsző egyenesen. Távolsága a síktól 10 cs.e.. Határozzuk meg mindhárom csillag pályáját Runge–Kutta módszerrel! (Háromtest probléma.)

* **2.28. Feladat.** Modellezzük egy 1000 csillagból álló spirálköd mozgását! (Képezzünk csoportokat, és a távoli csoportokat helyettesítsük tömegközéppontjukkal.)

3.§ Approximáció

3.1. Az approximáció feladata. Legyen adott egy H halmazon értelmezett f függvény. Ismerjük $f(x)$ értékeit a H halmazon, vagy annak adott $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontjaiban. Keresendő egy paraméteres $g(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ függvényseregből az a függvény, amely f-et a „legjobban közelíti". Ez az approximáció alapfeladata. Általában olyan függvények közül választjuk a közelítő függvényt, amelyek értékei könnyen számíthatók. Mivel számítógépen közvetlenül csak a négy alapművelet végezhető el, előnyben részesítjük a polinom és racionális törtfüggvény közelítéseket. Lehetséges az is, hogy érdemes H-t kisebb részekre osztani, és a részeken külön-külön keresni a közelítéseket.

Attól függően, hogy f és a közelítő függvény eltérését hogy mérjük, különböző eseteket kapunk. Ha azt követeljük meg, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen f-el, kapjuk az *interpoláció* esetét. Ha azt követeljük meg, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban mért eltérések négyzetösszege minimális legyen, akkor a *legkisebb négyzetek módszeré*t kapjuk. Végül, ha az egész H-n vett eltérés szuprémumát minimalizáljuk, akkor az *egyenletesen legjobb közelítés*t.

3.2. Interpoláció. Az interpoláció különösen akkor hasznos, ha az f függvény értékeit csak az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban ismerjük. A legáltalánosabb esetben az

$$f(x_j) = g(x_j, a_1, a_2, \ldots, a_m), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paraméterekre megoldva, kapjuk az interpoláló függvényt.

A legfontosabb az az eset, amikor f egy $[a, b]$ intervallumon értelmezett valós függvény, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az $[a, b]$ pontjai, interpoláló függvényként pedig legfeljebb $n-1$-edfokú polinomot keresünk. Legfeljebb egy interpolációs polinom létezik, hiszen két ilyen polinom különbsége olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amelynek legalább n gyöke van, így csak azonosan nulla lehet. Mindig létezik interpoláló polinom, és könnyen meg is adható. Ha $L_{k,k+1,\ldots,l}$-lel jelöljük az $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l$ pontokra támaszkodó interpolációs polinomot, akkor $L_j \equiv f(x_j)$-ből kiindulva az *Aitken-féle eljárás*sal

$$L_{k,k+1,\ldots,l}(x)$$

$$= \frac{L_{k+1,k+2,\dots,l}(x)(x-x_k) - L_{k,k+1,\dots,l-1}(x)(x-x_l)}{x_l - x_k}.$$

3.3. Osztott differenciák. Vezessük be az

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_l)$$

$$= \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_l) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{l-1})}{x_l - x_k}$$

*osztott differenciák*at. Az osztott differenciák és bizonyos polinomok elrendezhetők az úgynevezett *Fraser–diagram*ban:

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
f(x_1) & (x-x_1) & & \\
1 & f(x_1;x_2) & (x-x_1)(x-x_2) & \\
f(x_2) & (x-x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\
1 & f(x_2;x_3) & (x-x_2)(x-x_3) & f(x_1;x_2;x_3;x_4) \\
f(x_3) & (x-x_3) & f(x_2;x_3;x_4) & (x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\
1 & f(x_3;x_4) & (x-x_3)(x-x_4) & f(x_2;x_3;x_4;x_5) \\
f(x_4) & (x-x_4) & f(x_3;x_4;x_5) & (x-x_3)(x-x_4)(x-x_5) \\
1 & f(x_4;x_5) & (x-x_4)(x-x_5) & f(x_3;x_4;x_5;x_6) \\
f(x_5) & (x-x_5) & f(x_4;x_5;x_6) & (x-x_4)(x-x_5)(x-x_6) \\
1 & f(x_5;x_6) & (x-x_5)(x-x_6) & \vdots \\
f(x_6) & (x-x_6) & \vdots & \\
1 & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

A Fraser–diagrammból úgy kaphatunk interpolációs polinomokat, hogy valamelyik $f(x_i)$ pontból kiindulva minden lépésben vagy jobbra felfelé, vagy jobbra lefelé haladunk. Minden lépésnél egy új tagot adunk a polinomhoz, jobbra felfelé lépve az éppen elért osztott differencia és az alatta lévő polinom szorzatát, jobbra lefelé lépve pedig az éppen elért osztott differencia és a felette lévő polinom szorzatát. Például $f(x_1)$-ből indulva és jobbra lefelé haladva az

$$L_{1,2,\ldots,n}(x) = f(x_1) + f(x_1;x_2)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ f(x_1;x_2;\ldots;x_n)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

előállítást kapjuk, ez *Newton interpolációs formulája*. Megjegyezzük, hogy bárhogy is jutunk el az $f(x_k;\ldots;x_l)$ osztott differenciához a Fraser-diagramban, mindig az $x_k,\ldots,x_l$ pontokra támaszkodó $L_{k,k+1,\ldots,l}$ interpolációs polinomhoz jutunk, csak más alakban.

3.4. Az interpoláció alkalmazása. Az elsőrendű polinommal való *lineáris interpolációt* mindenki ismeri:

$$f(x) \approx f(x_1) + f(x_1;x_2)(x-x_1).$$

A másodfokú polinommal történő *parabolikus interpoláció* már ritkábban használatos. A gyakorlatban általában adott egy táblázat, és egy x értékre az $f(x)$ lehető legjobb közelítését szeretnénk meghatározni, de nem tudjuk, hogy milyen m fokszámot válasszunk. A következő eljárást követhetjük: Számozzuk meg az alappontokat $|x-x_i|$ növekvő sorrendjében. Legyen

$$\epsilon_m = \bigl|p_{m+1}(x) - p_m(x)\bigr|, \qquad \text{ahol } p_m = L_{1,2,\ldots,m},$$

és számítsuk ki rendre a

$$p_1(x), p_2(x), \epsilon_1, p_3(x), \epsilon_2, p_4(x), \epsilon_3, \ldots$$

értékeket. Ha E már kielégítő pontosság, akkor addig számolunk, amíg $\epsilon_m \le E$ lesz. Ha ilyen m nincs, akkor addig növeljük m-et, amíg ϵ_m csökken.

3.5. Példa. Határozzuk meg a KNO_3 oldhatóságát vízben 40 C°-on, ha adott 0, 20, 50, 80 és 100 C°-on az oldhatóság.

Az Aitken-féle eljárással számolva az

$$\begin{array}{lllll}
L_1(x) & & & & \\
& L_{1,2}(x) & & & \\
L_2(x) & & L_{1,2,3}(x) & & \\
& L_{2,3}(x) & & L_{1,2,3,4}(x) & \\
L_3(x) & & L_{2,3,4}(x) & & L_{1,2,3,4,5}(x) \\
& L_{3,4}(x) & & L_{2,3,4,5}(x) & \\
L_4(x) & & L_{3,4,5}(x) & & \\
& L_{4,5}(x) & & & \\
L_5(x) & & & &
\end{array}$$

értékeket, g KNO_3/100 g H_2O egységben

50 C°	85,5				
		67,53			
20 C°	31,6		64,00		
		49,90		64,12	
0 C°	13,30		63,65		64,36
		91,15		62,94	
80 C°	169,0		60,69		
		15,00			
100 C°	246,0				

Mivel a kiindulási értékek egy tizedesre vannak megadva, $E = 0{,}2$-nél jobb közelítést nem várhatunk. A számítások szerint másodfoku interpolációnál kell megállni, és a kapott közelítő érték 64,0. A mért érték 63,9. Láthatjuk, hogy ha tovább növeljük a fokszámot, a közelítés romlik.

3.6. Feladat. NH_4NO_3 és KCl cserebomlásával KNO_3-ot és NH_4Cl-ot akarunk előállítani. Ábrázoljuk e sók oldhatóságát a hőmérséklet függvényében, mól/100 g H_2O egységben, a táblázatban talált adatokat interpolációval sűrítve!

3.7. Feladat. Határozzuk meg $\sqrt{110}$ értékét a négyzetszámok gyökeiből, interpolációval!

3.8. Feladat. Készítsünk táblázatot, amelyből $\sin x$ értéke 2^{-15} pontossággal meghatározható lineáris interpolációval! Mennyi lehet a lépésköz?

3.9. A legkisebb négyzetek módszere. Sokszor a közelítendő függvény mért értékei elég nagy hibát tartalmaznak. Ilyenkor nem célszerű azt kívánni, hogy a közelítő függvény az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontokban megegyezzen a mért értékekkel, mert akkor a hibát is tartalmazza. Elég azt megkövetelni, hogy a mért értékek közelében legyen. A módszer értelmében tehát az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ paramétereket úgy kell megválasztani, hogy ha $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ a mért értékek, akkor a

$$\Phi(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} w_i\big(f(x_i) - g(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_m)\big)^2$$

eltérés minimális legyen. Itt a w_i-k pozitív súlyok, amelyeket az $f(x_i)$ értékek szórásnégyzete reciprokának célszerű választani. Ezt a minimumot a $\nabla\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásával kereshetjük.

Ha speciálisan

$$g(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_m g_m(x),$$

akkor bevezetve függvényekre a

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \phi(x_i) \psi(x_i)$$

„belső szorzatot”, a

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \langle g_k, g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk. A megoldás különösen egyszerű, és a számítási hibák kicsik, ha a g_k függvények ortogonálisak. Ezt úgy érhetjük el, hogy a $g_1, \ldots, g_m$ függvényeket egy $h_1, \ldots, h_m$ függvényrendszerből a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással állítjuk elő (lásd később, a Hilbert tereknél). A közelítendő és a közelítő függvény távolságát mérő $\delta_m = \Phi(a_1, \ldots, a_m)$ mennyiség az $f - \sum_{j=1}^{m} a_j g_j$ hibafüggvény önmagával vett belső szorzata.

Ha egyváltozós polinomközelítést keresünk, akkor $h_1(x) = 1$, $h_2(x) = x$, és $h_{k+1}(x) = x g_k(x)$ választással érdemes dolgozni, mert ekkor $\langle h_{k+1}, g_j \rangle = 0$, ha $j < k - 1$. A fokszámot addig érdemes növelni, amíg a $\delta_m/(n - m)$ mennyiség lényegesen csökken.

3.10. Simítás. Ha a keresendő függvényről nem tételezhető fel, hogy az egész értelmezési tartományán egy polinommal jól közelíthető, akkor is csökkenthetjük a véletlen hibákat simítással. Ha például az x_i pont egy környezetében feltehető, hogy ott a keresett függvény jól közelíthető egy egyenessel, akkor az ezen környezetben lévő pontokra a legkisebb négyzetek módszerével egy lineáris függvényt illesztünk, és ezen függvény x_i helyen felvett értéke lesz az új, simított érték. Legtöbbször a simításhoz a legközelebbi 3 vagy 5 pontot használjuk. Az (x_j, y_j) pontokra a legkisebb négyzetek módszerével illeszthető egyenes egyenlete:

$$y - m_y = \frac{r}{s_x}(x - m_x),$$

ahol m_x az x_j-k, m_y az y_j-k átlaga, és

$$s_x = \sum_j (x_j - m_x)^2, \qquad r = \sum_j (x_j - m_x)(y_j - m_y).$$

3.11. Feladat. 50 C°-on, különböző nyomásokon megmértük 1 mól NH_3 térfogatát:

P/kPa	118,6	498	957	1573
V/dm^3	22,13	5,11	2,55	1,456

Határozzuk meg a van der Waals állandókat!

3.12. Feladat. Egy Weston-elem feszültsége 20 C°-tól eltérő hőmérsékleten, az eltérés függvényében:

δ/C°	−10	−5	0	5	10	15
U/V	1,01895	1,01883	1,01865	1,01842	1,01816	1,01786

Adjunk egy polinomközelítést az $U = f(\delta)$ függvényre!

3.13. Feladat. Folyadékok gőznyomása az $\ln P = A + B/T$ összefüggés szerint változik. Határozzuk meg az A és B állandókat aceton esetében, ha

P/MPa	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4
t/C°	56,5	78,6	113,0	144,5	181,0	205,0	214.5

3.14. Egyenletesen jó közelítések. Csak az egyváltozós polinomközelítésekkel fogunk foglalkozni. Helyettesítéssel elérhetjük, hogy az f függvény a $[-1, 1]$ intervallumon legyen értelmezve. Alacsony fokszámú, de mégis jó közelítést úgy kaphatunk, hogy egy pontos, de magas fokszámú polinomközelítés fokszámát alkalmasan csökkentjük. Erre alkalmasak a *Csebisev-polinomok*: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, és $T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$, ha $k > 1$. A p_n kezdeti közelítést, amelynek hibája ϵ_n, felírhatjuk a Csebisev–polinomok segítségével:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{k=0}^{n} b_k T_k(x).$$

A b_k konstansok az együtthatók összehasonlításával meghatározhatók. A

$$p_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k T_k(x)$$

csökkentett fokszámú közelítés ϵ_m hibája legfeljebb

$$\epsilon_n + \sum_{k=m+1}^{n} |b_k|,$$

míg a lehető legjobb legfeljebb m-edfokú polinommal történő közelítés hibája is legalább

$$|b_{m+1}| - \epsilon_n - \sum_{k=m+2}^{n} |b_k|.$$

A T_k polinomok értékei a definíciójukból könnyen számíthatók. Az m fokszámot úgy kell megválasztani, hogy a hiba még megengedhető legyen. A kezdeti pontos közelítést kaphatjuk például a Taylor-sor felhasználásával, vagy az alábbi tétel alapján:

3.15. Tétel. *Legyen f folytonos, valós értékű függvény* $[-1,1]$-*en. Ha p_n a*

$$\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2n}\right), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

alappontokhoz tartozó interpolációs polinom, akkor $n \leq 20$ esetén hibája legfeljebb négyszer, $n \leq 100$ esetén hibája legfeljebb ötször akkora, mint az f-et egyenletesen legjobban közelítő polinom hibája.

3.16. Feladat. Adjunk meg 2^x-et $[0,1]$-en 10^{-3}-nál pontosabban közelítő, alacsony fokszámú polinomot!

* **3.17. Feladat.** Írjunk $e^x, \sin x, \cos x, \ln x$, és $\operatorname{arctg} x$ lehető legpontosabb kiszámítására alkalmas programokat az alapműveletek felhasználásával!

*** **3.18. Feladat.** Írjunk programot a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének (lásd a valószínűségszámításnál) gyors és pontos számítására!

3.19. Közelítő differenciálás. A függvény egy közelítését deriválva, a derivált egy közelítését kaphatjuk. A hiba jóval nagyobb, mint az eredeti közelítés hibája, ezért már kis hibák esetén is inkább a legkisebb négyzetek módszerét használjuk, mint interpolációt. Durva tájékozódásra alkalmasak az osztott differenciák is, mert

$$f(x_k; \dots; x_l) = \frac{f^{(l-k)}(\zeta)}{(l-k)!},$$

$$\min\{x_k, \dots, x_l\} < \zeta < \max\{x_k, \dots, x_l\}.$$

3.20. Közelítő integrálás. Az approximáció felhasználható közelítő integrálásra is. Egy valós változós, valós értékű függvény integrálját a közelítő függvény integráljával közelíthetjük. Ha a függvény értékeit csak bizonyos pontokban ismerjük, akkor interpolációt érdemes használni. Azt is megtehetjük, hogy az $[a, b]$ értelmezési tartományt kisebb részekre osztjuk, minden szakaszon egy egyszerű függvénnyel közelítünk, ennek az integrálját számítjuk ki, és a kis részeken vett integrálokat összeadjuk. Például minden kis részen egyenessel közelítve, trapézok területeit kell összeadni.

Ha a függvényértékek könnyen számíthatók, akkor szokás az értelmezési tartományt egyenlő részekre osztani; n egyenlő részre osztva, és minden részen egyenessel közelítve, kapjuk a *trapéz–formulá*t:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\frac{b-a}{2n}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

Ha $2n$ egyenlő részre osztunk, és az $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ szakaszon parabolikus interpolációt használunk, kapjuk a *Simpson-formulá*t:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\big(&f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)\\ &+ 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\big)\end{aligned}$$

A pontosság az osztópontok számának növelésével fokozható. Célszerű az osztópontok számát minden lépésben duplázni. Jelölje S_k az

$n2^k$ osztópontra alkalmazott trapézformulával kapott értékeket. Kiszámítására célszerű az

$$S_k = \frac{S_{k-1}}{2} + \frac{b-a}{n2^k} \sum_{j=1}^{n2^{k-1}} f\Big(a + \frac{2j-1}{n2^k}(b-a)\Big)$$

összefüggést használni. A pontosság tovább növelhető *Romberg módszerével*: számítsuk ki az

$$S_k^{(i)} = S_k^{(i-1)} + \frac{1}{2^i - 1}\left(S_k^{(i-1)} - S_{k-1}^{(i-1)}\right)$$

mennyiségeket, ahol $S_k^{(1)} = S_k$. Az $S_k^{(i)}$ mennyiség általában annál pontosabb közelítése az integrálnak, minél nagyobb i és k. A számítást addig folytatjuk, míg két közelítés között az eltérés már elég kicsi. Megjegyezzük, hogy az $S_k^{(2)}$ közelítések ugyanazok, amiket a Simpson-formulával kapunk.

3.21. Feladat. Egy függőlegesen emelkedő ágyúgolyó magassága az idő függvényében:

t/s	0	2	4	6	8
h/m	0	98	371	801	1463

Mikor lépte át a hangsebességet?

3.22. Feladat. Egy gázkromatográf érzékelő berendezése egy „csúcs" érzékelése során, 0.1 s-onként az alábbi intenzitásokat mérte, μg/s egységekben: 0,00, 0,01, 0,04, 0,18, 0,54, 1,30, 2,42, 3,52, 3,99, 3,81, 3,33, 2,66, 1,94, 1,30, 0,79, 0,44, 0,22, 0,10, 0,04, 0,02, 0,01, 0,00. Határozzuk meg az anyagmennyiséget!

3.23. Feladat. Számoljuk ki az

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

integrált Romberg módszerével!

* **3.24. Feladat.** Határozzuk meg az $x = 0,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 5{,}0$ értékekre az

$$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt$$

integrált!

II. MÉRTÉK ÉS INTEGRÁL

4.§ Mértékterek

4.1. Bővített valós számok. A *bővített valós számok* halmazán az $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazt értjük, a nyilvánvaló rendezéssel. A műveletek akkor vannak értelmezve, ha ez folytonosan lehetséges. Például $\infty + \infty = \infty$, $x \cdot \infty = \infty$, ha $x > 0$, de $\infty - \infty$ nincs definiálva. Néhányszor $0 \cdot \infty$-t érdemes 0-nak definiálni, ha ezt a megállapodást használjuk, jelezni fogjuk.

4.2. Definíció. Az X halmaz részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ rendszerét *σ-algebrá*nak nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $X \backslash A \in \mathcal{A}$;

(3) ha $A_i \in \mathcal{A} \quad (i = 1, 2, \ldots)$, akkor $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazok*nak nevezzük. Az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ hármast *mértéktér*nek, μ-t pedig *mérték*nek nevezzük, ha μ az $\mathcal{A}$-n értelmezett, nemnegatív, bővített valós értékű halmazfüggvény, amelyre

(4) $\mu(\emptyset) = 0$;

(5) ha az A_i, $\quad i = 1, 2, \ldots$ halmazok mérhetőek és páronként diszjunktak, akkor

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad (\sigma\text{-additivitás}).$$

Mértéktér egy mérhető részhalmazát *σ-véges*nek nevezzük, ha előállítható megszámlálható sok véges mértékű mérhető halmaz egyesítéseként. A mértékteret *véges*nek nevezzük, ha $\mu(X) < \infty$, *σ-véges*nek, ha X σ-véges, és *teljes*nek, ha bármely mérhető és nullmértékű halmaz minden részhalmaza is mérhető.

4.3. Példa. Legyen X egy tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ az X összes részhalmazainak rendszere, és $\mu(A)$ az A elemeinek száma, ha A véges halmaz, míg $\mu(A) = \infty$, ha A-nak végtelen sok eleme van. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér; μ-t *számláló mérték*nek nevezzük.

4.4. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbség-, a megszámlálható unió- és a metszetképzés.*

Bizonyítás.

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$$

miatt $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a véges unióképzés. Most a

$$\bigcap_i A_i = X \backslash \left(\bigcup_i (X \backslash A_i) \right)$$

összefüggés szerint $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható metszetképzésre. Végül $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$ miatt $\mathcal{A}$-ból nem vezet ki a különbségképzés.

4.5. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor*

(1) mérhető halmazok bármely véges, páronként diszjunkt rendszerére

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \qquad \textit{(additivitás)};$$

(2) ha $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, akkor $\mu(A) \leq \mu(B)$ (monotonitás), és ha $\mu(A) < \infty$, akkor $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$;

(3) mérhető halmazok bármely megszámlálható rendszerére

$$\mu\left(\cup_i A_i\right) \leq \sum_i \mu(A_i) \qquad \textit{(σ-szubadditivitás)};$$

(4) mérhető halmazok bármely bővülő $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ sorozatára

$$\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i);$$

(5) mérhető halmazok egy szűkülő $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ sorozatára

$$\mu\left(\cap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i),$$

hacsak $\mu(A_1) < \infty$.

A (4) és (5) tulajdonságokat szokás a *mérték folytonosságá*nak nevezni.

Bizonyítás. (1) közvetlenül következik a definícióból, $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$ választással. (2) azon múlik, hogy A és $B\backslash A$ diszjunktak, uniójuk pedig B. (3) bizonyításához azt kell észrevenni, hogy $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i\backslash(\cup_{j<i}A_j)$, ha $i > 1$ jelöléssel $\cup_i A_i = \cup_i B_i$ és a B_i-k diszjunktak. (4) feltételei mellett $B_1 = A_1$ és $B_i = A_i\backslash A_{i-1}$, ha $i > 1$ jelöléssel a B_i-k diszjunktak, így

$$\begin{aligned}\mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).\end{aligned}$$

(5)-öt megkapjuk, ha (2)-t és (4)-et alkalmazzuk a $B_i = A_1\backslash A_i$ halmazokra.

4.6. Definíció. Legyen X egy halmaz. A μ^* nemnegatív bővített valós értékű halmazfüggvényt *külső mérték*nek nevezzük, ha X összes részhalmazán van értelmezve, és

(1) ha az $A_i \subset X$ megszámlálható halmazrendszer lefedi az A halmazt, azaz $A \subset \cup_i A_i$, akkor $\mu^*(A) \le \sum_i \mu^*(A_i)$ (σ-szubadditivitás).

Egy $A \subset X$ halmazt μ^*-*mérhető*nek nevezünk, ha

(2) $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T\backslash A)$ minden $T \subset X$-re.

4.7. Tétel. *Legyen μ^* külső mérték X-en, jelölje $\mathcal{A}$ a μ^*-mérhető halmazok osztályát, és μ a μ^* megszorítását $\mathcal{A}$-ra. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér.*

4.8. A Lebesgue-mérték. Egy *k-dimenziós téglatest*en k darab intervallum (egydimenziós téglatest) Descartes–szorzatát értjük. Egy T téglatest $\nu^k(T)$ *térfogata* az oldalhosszak szorzata. (Itt $0\cdot\infty = 0$.) Egy $A \subset \mathbf{R}^k$ halmazra legyen

$$\lambda^{k,*}(A) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \nu^k(T_i),$$

ahol az infimum az összes olyan T_i, $i = 1, 2, \ldots$ téglatestrendszerre értendő, amely lefedi A-t. Megmutatható, hogy $\lambda^{k,*}$ külső mérték

$\mathbf{R}^k$-n. A $\lambda^{k,*}$ külső mértéket *k-dimenziós Lebesgue külső mérték*nek nevezzük. Jelölje $\mathcal{L}^k$ a $\lambda^{k,*}$-mérhető halmazok osztályát és λ^k a $\lambda^{k,*}$ megszorítását $\mathcal{L}^k$-ra. Az $\mathcal{L}^k$ halmazrendszer elemeit *k-dimenziós Lebesgue-mérhető halmazok*nak, a λ^k mértéket pedig *k-dimenziós Lebesgue-mérték*nek nevezzük.

4.9. Tétel. *A k-dimenziós téglák Lebesgue-mérhetőek, és Lebesgue-mértékük a térfogatuk. Minden nyílt és zárt halmaz Lebesgue-mérhető. Bármely $A \subset \mathbf{R}^k$ Lebesgue-mérhető halmazhoz és bármely $\epsilon > 0$-hoz van olyan G nyílt és F zárt halmaz, hogy $F \subset A \subset G$ és $\lambda^k(G \backslash F) < \epsilon$.*

4.10. Borel-halmazok. A nyílt halmazok Lebesgue-mérhetőségéből igen sok $\mathbf{R}^k$-beli halmaz mérhetősége következik. Például mindazok a halmazok Lebesgue-mérhetőek, amelyek előállíthatók a nyílt halmazokból kiindulva, megszámlálható sok művelettel, ahol minden művelet komplementerképzés vagy unióképzés. Az ilyen halmazokat *Borel-halmazok*nak nevezzük.

4.11. Geometriai mértékek. A három dimenziós euklideszi téren a Lebesgue-mérték a térfogat fogalmának általánosítása. Be lehet azonban vezetni olyan kétdimenziós mértéket az $\mathbf{R}^3$ téren, amely a felszínt adja, illetve olyan egydimenziós mértéket, amely a görbék ívhosszát adja. Általánosabban, az $\mathbf{R}^k$ téren $0 \leq m \leq k$ esetén definiálható az m-dimenziós χ^m Hausdorff-mérték. A nyílt halmazok, és így a Borel-halmazok is χ^m-mérhetőek. Megjegyezzük, hogy $\chi^k = \lambda^k$.

4.12. Majdnem mindenütt. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Ha P egy pontbeli tulajdonság, akkor gyakran fogjuk azt mondani, hogy P majdnem mindenütt teljesül X-en. Ez azt jelenti, hogy azon pontok halmaza, ahol P nem teljesül, vagy nincs értelmezve, mérhető, és mértéke nulla. Például, az hogy az f és g függvények majdnem mindenütt egyenlőek, azt jelenti, hogy az $\{x : x \in X, f(x) = g(x)\}$ halmaz komplementere mérhető és nullmértékű. Ezt a halmazt egyébként gyakran röviden, bár némileg pontatlanul $\{f = g\}$-vel jelöljük. Hasonlóan értjük az $\{f < g\}$, $\{f < a\}$, stb. jelöléseket is.

4.13. Mérhető függvények. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér. Egy X-et $\overline{\mathbf{R}}$-ba képező f függvényt *mérhető*nek nevezünk, ha az $\{f < a\}$ *nívóhalmazai* mérhetőek minden $a \in \mathbf{R}$-re. Egy komplex értékű függvényt akkor nevezünk *mérhető*nek, ha a valós és képzetes része mérhető, egy vektor értékű függvényt pedig akkor, ha a koordinátafüggvényei mérhetőek. Az $\mathbf{R}^k$-n értelmezett függvények esetén, ha a nívóhalmazok mérhetősége helyett az tesszük fel, hogy azok Borel-halmazok, a *Borel-függvény* fogalmát kapjuk. Megjegyezzük, hogy a folytonos függvények mind Borel-függvények.

4.14. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* $f : X \to \mathbf{R}^k$ *egy mérhető függvény,* $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ *pedig Borel-függvény. Ekkor a* $g \circ f$ *összetett függvény mérhető.*

4.15. Következmény. *Ha* f *és* g *mérhető függvények,* $c \in \overline{\mathbf{R}}$, *akkor az* $f + c$, cf, $|f|$, $1/f$, $f + g$, fg *függvények — ha értelmezve vannak — mérhetőek.*

4.16. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* f_n, $n = 1, 2, \ldots$ *pedig mérhető, bővített valós értékű függvények sorozata. Ekkor az* $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *és* $\limsup_{n\to\infty} f_n$ *függvények mérhetőek.*

4.17. Következmény. *Ha* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *minden* $x \in X$*-re, akkor az* f *függvény is mérhető.*

4.18. Feladat. Határozzuk meg a racionális számok halmazának Lebesgue-mértékét!

4.19. Feladat. Határozzuk meg a sík azon pontjai halmazának mértékét, amelyek egyik koordinátája racionális!

4.20. Feladat. Határozzuk meg azon $[0, 1]$-beli számok halmazának a mértékét, amelyek felírhatók úgy hármas számrendszerben, hogy a felírás nem tartalmaz egyest!

4.21. Feladat. A $[0, 1]$ intervallum közepéből kiveszünk egy $1/4$ hosszúságú nyílt intervallumot. A visszamaradó két zárt intervallum közepéből kiveszünk egy-egy $1/4^2$ hosszúságú nyílt intervallumot, stb. Határozzuk meg a visszamaradó halmaz mértékét!

5.§ Integrálás

5.1. Az integrál. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér, és $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ egy mérhető függvény. Ha az f függvény nemnegatív, akkor az

$$\int f\,d\mu \qquad \text{vagy} \qquad \int_X f\,d\mu \qquad \text{vagy} \qquad \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

*integrál*ját az összes

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i)$$

integrálközelítő összegek szuprémumaként definiáljuk, ahol

$$A_1, \ldots, A_n$$

diszjunkt mérhető halmazok,

$$f(x) \geq y_i, \quad \text{ha} \quad x \in A_i.$$

Itt is $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Ha most az f tetszőleges, akkor legyen

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu,$$

ahol

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{és} \quad f^- = \max\{-f, 0\}.$$

Ha $\int f\,d\mu$ véges, akkor a függvényt *integrálható*nak nevezzük.

Komplex értékű mérhető függvény integrálját az

$$\int f\,d\mu = \int \Re f\,d\mu + i \int \Im f\,d\mu$$

összefüggéssel definiáljuk, ha a $\Re f$ valós és az $\Im f$ képzetes rész is integrálható. Végül, vektor értékű f függvény esetén legyen

$$\int \mathbf{f}\,d\mu = \mathbf{y}, \quad \text{ahol} \quad y_j = \int f_j\,d\mu \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

ha az f_j koordináta-függvények mind integrálhatóak.

X egy A mérhető részhalmaza felett úgy integrálhatunk, hogy a részhalmazon kívül a függvényt nullának definiáljuk, és az így kiterjesztett függvényt integráljuk.

5.2. Tétel. *Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ egy mértéktér, f és g az X-en értelmezett, bővített valós, komplex, vagy vektor értékű, mérhető függvények, $c \in \mathbf{R}$.*

(1) Ha f csak megszámlálható sok $y_1, y_2, \dots$ értéket vesz fel, akkor pontosan akkor integrálható, ha az alábbi sor abszolút konvergens, és ekkor

$$\int f\,d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \mu\big(\{f = y_j\}\big) \qquad (\textit{itt } 0\cdot\infty = \infty\cdot 0 = 0);$$

(2) f pontosan akkor integrálható, ha $|f|$ integrálható, és

$$\left|\int f\,d\mu\right| \le \int |f|\,d\mu;$$

(3) ha $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$, akkor

$$\int_A f\,d\mu = 0;$$

(4) ha

$$\int |f|\,d\mu = 0,$$

akkor $f = 0$ majdnem mindenütt;

(5) ha $|f| \le g$ és g integrálható, akkor f is;

(6) ha $f = g$ majdnem mindenütt és $\int f\,d\mu$ létezik, akkor

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu;$$

(7) ha $\int f\,d\mu$ létezik, akkor

$$\int cf\,d\mu = c\int f\,d\mu \qquad (\textit{itt } 0\cdot\infty = 0);$$

(8) ha f és g integrálhatóak, akkor

$$\int (f+g)\,d\mu = \int f\,d\mu + \int g\,d\mu.$$

5.3. Beppo Levi tétele. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér, és legyen* $f_1, f_2, \ldots$ *mérhető, bővített valós értékű, nemnegatív függvények egy monoton növekedő sorozata. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, d\mu(x).$$

5.4. Lebesgue tétele. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér, és legyenek* $f, f_1, f_2, \ldots$ *bővített valós, komplex, vagy vektorértékű mérhető függvények,* g *pedig nemnegatív, bővített valós értékű, integrálható függvény. Ha*

$$|f_n| \leq g \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \text{és} \quad f_n \to f,$$

akkor

$$\int |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{és} \quad \int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

5.5. A Riemann- és a Lebesgue-integrál. Ha a Lebesgue-mérték szerint integrálunk, akkor a *Lebesgue-integrál*t kapjuk. Megmutatható, hogy egy korlátos halmazon értelmezett korlátos függvény, ha Riemann-integrálható, akkor mindig Lebesgue-integrálható is, és a két integrál megegyezik. Így a Lebesgue-integrál általánosabb a Riemann-integrálnál.

5.6. Mértékterek szorzata. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek. Ha $S \subset X \times Y$, akkor legyen

$$(\mu \times \nu)^*(S) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i),$$

ahol az infimum az összes olyan összegre veendő, amelyben az A_i halmazok mérhető részhalmazai X-nek, a B_i halmazok mérhető részhalmazai Y-nak, és az $A_i \times B_i$ halmazrendszer lefedi S-et. (Itt $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.) Megmutatható, hogy $(\mu \times \nu)^*$ külső mérték $X \times Y$-on. Jelölje $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ a $(\mu \times \nu)^*$-mérhető halmazok osztályát, $\mu \times \nu$ pedig a $(\mu \times \nu)^*$ megszorítását erre az osztályra. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *mértékterek szorzatá*nak nevezzük. Például belátható, hogy az $(\mathbf{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ és $(\mathbf{R}^m, \mathcal{L}^m, \lambda^m)$ mértékterek szorzata $(\mathbf{R}^{n+m}, \mathcal{L}^{n+m}, \lambda^{n+m})$.

5.7. Fubini tétele. *Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-véges mértékterek, és f egy $X \times Y$-on értelmezett, bővített valós, komplex vagy vektor értékű függvény, amelynek $\mu \times \nu$-integrálja létezik. Ekkor az alábbi integrálok léteznek, és*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\, d\,\mu\times\nu(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y).$$

5.8. Integráltranszformációs formula. *Legyen $m \le n$, V nyílt részhalmaza $\mathbf{R}^m$-nek, $g : V \to \mathbf{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű differenciálható függvény, $Jg(x) = \sqrt{\det\bigl(g'(x)^* \circ g'(x)\bigr)}$, $A \subset \mathbf{R}^m$ egy λ^m-mérhető halmaz, és $f : \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$ egy χ^m-mérhető függvény. Ekkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és*

$$\int_A f(g(x)) Jg(x)\, d\lambda^m(x) = \int_{g(A)} f(y)\, d\chi^m(y).$$

5.9. Feladat. Mennyi egy mérhető halmaz karakterisztikus függvényének az integrálja?

5.10. Feladat. Legyen $f(x) = 1$, ha x racionális, nulla egyébként. Riemann-integrálható-e az f a $[0, 1]$-en? Mennyi a Lebesgue-integrálja $[0, 1]$-en?

5.11. Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 x^\alpha\, d\lambda(x) \quad \text{és} \quad \int_1^\infty x^\alpha\, d\lambda(x)$$

integrálokat, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$.

5.12. Feladat. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x}\, d\lambda(x)$$

integrált!

5.13. Feladat. Mennyi

$$\int_0^x e^{it}\, d\lambda(t)?$$

5.14. Feladat. Számítsuk ki egy ellipszis területét!

5.15. Feladat. Számítsuk ki egy ellipszoid térfogatát!

* **5.16. Feladat.** Határozzuk meg az n-dimenziós origó középpontú, egységnyi sugarú gömb λ^n-mértékét!

5.17. Feladat. Határozzuk meg a $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ csavarvonal ívhosszát!

5.18. Feladat. Számítsuk ki a gömb felszínét!

* **5.19. Feladat.** Az

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\, d\lambda^2(x,y)$$

integrált polárkoordinátákban is kiszámítva, vezessük le az

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}$$

összefüggést!

5.20. Feladat. Határozzuk meg egy homogén gömb tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva.

5.21. Feladat. Mekkora erővel vonzza az origóban lévő m tömeget az $x^2 + y^2 = r^2$, $y \geq 0$ félköríven egyenletesen eloszló M tömeg?

5.22. Feladat. Milyen erős mágneses teret létesít az 1 m átmérőjű, kör alakú vezetőben folyó 1 A erősségű áram a kör középpontjában?

5.23. Feladat. Az $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $z \geq 0$ félgömb felületén egyenletesen eloszló Q töltés milyen erővel vonzza az origóban lévő, q nagyságú, ellenkező előjelű töltést?

5.24. Feladat. Az $y = x^2$ parabola ívén egy tömegpont csúszik le az $x = 0$ pontba. Határozzuk meg a végzett munkát, ha adott a kezdőpont, a súrlódási tényező, és a gravitáció!

III. HILBERT-TEREK

6.§ A Hilbert-tér

6.1. Definíció. Ha H lineáris tér $\mathbf{K}$ felett, ahol $\mathbf{K}$ vagy $\mathbf{R}$, vagy $\mathbf{C}$, és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezése $H \times H$-nak $\mathbf{K}$-ba úgy, hogy minden $x, y, z \in H$-ra és $\alpha \in \mathbf{K}$-ra

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle t, z\rangle$;

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(5) ha $\langle x, x\rangle = 0$, akkor $x = 0$,

akkor H-t *belső szorzat tér*nek nevezzük $\mathbf{K}$ felett. Az x és y elemek $\langle x, y\rangle$ *belső szorzatá*nak jelölésére az $\langle x \mid y\rangle$, (x, y), $(x|y)$ és $x \cdot y$ szimbólumok is szokásosak.

6.2. Tétel. *Ha H belső szorzat tér $\mathbf{K}$ felett, akkor az x elem* normáját *a $\|x\| = \langle x, x\rangle^2$ összefüggéssel definiálva*

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\| \qquad \text{minden } x, y \in H\text{-ra} \tag{1}$$

(Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség), továbbá

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, ha $x \in H$ és $\alpha \in \mathbf{K}$;

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, ha $x, y \in H$ (háromszög-egyenlőtlenség);

(4) $\|x\| \geq 0$, ha $x \in H$;

(5) ha $\|x\| = 0$, akkor $x = 0$.

Bizonyítás.

$$0 \le \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

amiből ha $\|x\| = 0$ és $\|y\| = 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle$ helyettesítéssel $\langle x, y\rangle = 0$. Ha ez nem áll fenn, mondjuk $\|y\| \ne 0$, akkor $\alpha = \langle x, y\rangle / \|y\|^2$ helyettesítéssel

$$0 \le \|x\|^2 - \frac{\big|\langle x, y\rangle\big|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2, \end{aligned}$$

amiből adódik (3). Minden más triviális.

6.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző tétel állításainak bizonyításakor csak (5) bizonyításához kellett kihasználnunk a definíció (5) feltételét. Ebből következik, hogy ha az $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezés (5)-nek nem tesz eleget, akkor ezen segíthetünk, ha $\|x - y\| = 0$ esetén az x és y elemeket azonosítjuk.

6.4. A belső szorzat terek topológiája. Egy H belső szorzat térben az x_n sorozatra azt mondjuk, hogy *konvergál* az $x \in H$ ponthoz, ha $\|x_n - x\| \to 0$. Egy $A \subset H$ halmazt *zárt*nak nevezünk, ha minden A-beli konvergens sorozatnak a határértéke is A-ban van. Az A halmazt *sűrű*nek nevezzük, ha minden $x \in H$ előáll valamely A-beli sorozat határértékeként. A teret *szeparábilis*nek nevezzük, ha van megszámlálható sűrű részhalmaza. Ha $z_n \in H$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ sort *konvergens*nek nevezzük, és *összege* $z \in H$, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = z.$$

Egy x_n sorozatot *Cauchy-sorozat*nak nevezünk, ha minden $\epsilon > 0$-hoz van olyan N, hogy ha $n, m \ge N$, akkor $\|x_n - x_m\| < \epsilon$. A belső szorzat teret *Hilbert-tér*nek nevezünk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

6.5. Példák. (1) Jól ismert példa $\mathbf{K}^n$, amely az

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

belső szorzattal véges dimenziós Hilbert-tér.

(2) Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, és jelölje $\mathbf{L}^2(\mu)$ (vagy röviden csak $\mathbf{L}^2$) azon $\mathbf{K}$-beli értékű mérhető f függvények osztályát, amelyekre

$$\int |f|^2 \, d\mu < \infty.$$

Az

$$|f+g|^2 \le \Big(2\max\{|f|, |g|\}\Big)^2 = 2^2 \max\{|f|^2, |g|^2\} \le 4\big(|f|^2 + |g|^2\big)$$

becslés szerint $\mathbf{L}^2(\mu)$ lineáris tér, és ha $f, g \in \mathbf{L}^2$, akkor

$$4f\overline{g} = (f+\overline{g})^2 - (f-\overline{g})^2$$

miatt $f\overline{g}$ integrálható. Legyen

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\, d\mu.$$

Ezzel a belső szorzattal $\mathbf{L}^2$ belső szorzat tér, ha a majdnem mindenütt egyenlő függvényeket azonosítjuk. A nevezetes *Riesz–Fischer-tétel* szerint $\mathbf{L}^2$ Hilbert-tér. Néha előfordul, hogy egy pozitív valós értékű integrálható ϱ függvény, a *súlyfüggvény* segítségével értelmezzük a belső szorzatot és a normát:

$$\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\varrho \, d\mu.$$

Ez ugyanazt adja, mintha a μ helyett a

$$\nu(A) = \int_A \varrho \, d\mu, \quad \text{ha} \quad A \in \mathcal{A}$$

mérték szerint integrálnánk.

Megmutatható, hogy ha a mérték λ^n vagy χ^n egy σ-véges halmazon, akkor bármilyen súlyfüggvény esetén $\mathbf{L}^2$ szeparábilis lesz.

(3) Ha az $X = \{1, 2, \ldots\}$ halmazon a μ számláló mértéket tekintjük, akkor az $\mathbf{L}^2(\mu)$ tér az összes olyan $\mathbf{K}$-beli $x = (x_1, x_2, \ldots)$ sorozatok osztálya lesz, amelyekre

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty,$$

az

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

belső szorzattal. Ezt a teret l^2-vel szokás jelölni; l^2 szeparábilis Hilbert-tér.

6.6. Definíció. Legyen H Hilbert-tér. Ha

$$x, y \in H, \quad \text{és} \quad \langle x, y\rangle = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy x és y *ortogonálisak*. Jelölése: $x \perp y$. Az $M, N \subset H$ halmazokat *ortogonálisak*nak nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M$, $y \in N$-re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset H$ halmaz *ortogonális komplementer*én a H összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: $M^{\perp}$. Egy z_n sorozatot *ortogonális sorozat*nek nevezünk, ha bármely két különböző tagja egymásra ortogonális. Egy $z \in H$ elemet *normált*nak nevezünk, ha $\|z\| = 1$. Ha egy ortogonális sorozat minden eleme normált, akkor *ortonormált sorozat*ről beszélünk.

6.7. Tétel. *Legyen z_n ortogonális sorozat egy H Hilbert-térben. A*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

sor pontosan akkor konvergens, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty.$$

Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z,$$

akkor

$$\langle z, z_n \rangle = \|z_n\|^2 \quad \textit{és} \quad \|z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|^2.$$

Bizonyítás. Ha $n > m$, akkor

$$\|s_n - s_m\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} z_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \|z_k\|^2,$$

így a részletösszegek sorozatai egyszerre alkotnak Cauchy–sorozatot. Mivel $\big|\|z\| - \|s_n\|\big| \leq \|z - s_n\|$,

$$\big|\|z\|^2 - \|s_n\|^2\big| = \big(\|z\| + \|s_n\|\big)\big|\|z\| - \|s_n\|\big| \to 0,$$

azaz

$$\|z\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|^2.$$

Végül, ha $n < m$, akkor

$$\begin{aligned} \big|\langle z, z_n\rangle - \|z_n\|^2\big| &= \big|\langle z, z_n\rangle - \langle s_m, z_n\rangle\big| \\ &= \big|\langle z - s_m, z_n\rangle\big| \leq \|z - s_m\|\|z_n\| \to 0. \end{aligned}$$

6.8. Definíció. Legyen z_n egy ortogonormált sorozat egy H Hilbert-térben, és $x \in H$. Az x-nek a z_n sorozatra vonatkozó *Fourier-együtthatói*n az $\langle x, z_n\rangle$ számokat értjük.

6.9. Tétel. *Legyen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ egy véges ortogonormált sorozat a H Hilbert-térben. Ekkor bármely $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$-re*

$$\|z - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\|^2 \geq \|z\| - \sum_{k=1}^{n} \big|\langle z, z_k\rangle\big|^2,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_k = \langle z, z_k\rangle$ *fennáll* $k = 1, 2, \ldots, n$*-re.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\|z - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k\|^2 &= \|z\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k\overline{\alpha_k} - \overline{\alpha_k}\langle z, z_k\rangle - \alpha_k\langle z_k, z\rangle\big)\\ &= \|z\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\big|\langle z, z_k\rangle\big|^2 + \sum_{k=1}^{n}\big|\alpha_k - \langle z, z_k\rangle\big|^2.\end{aligned}$$

6.10. Bessel-egyenlőtlenség. *Legyen* z_n *egy ortogonormált sorozat egy* H *Hilbert-térben, és* $x \in H$*. Ekkor*

$$\sum_{n}\big|\langle x, z_n\rangle\big|^2 \le \|x\|^2. \tag{1}$$

Bizonyítás. Az előző tételből

$$\sum_{k=1}^{n}\big|\langle x, z_k\rangle\big| \le \|x\|^2$$

bármely n-re, így teljesül (1).

6.11. Tétel. *Legyen* $z_1, z_2, \ldots$ *egy ortogonormált sorozat a* H *Hilbert-térben. Minden* $x \in H$*-ra a*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, z_k\rangle z_k$$

sor konvergál H*-ban egy* $y \in H$ *elemhez, és* $x - y$ *ortogonális minden* z_k*-ra.*

Bizonyítás. A Bessel-egyenlőtlenségből következik a sor konvergenciája. Ha s_n az n-edik részletösszeg, akkor $n \ge k$ esetén

$$\begin{aligned}\big|\langle x - y, z_k\rangle\big| &\le \big|\langle x - s_n, z_k\rangle\big| + \big|\langle s_n - y, z_k\rangle\big|\\ &\le \Big|\langle x, z_k\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle x, z_j\rangle\langle z_j, z_k\rangle\Big| + \|s_n - y\|\|z_k\|\\ &= \|s_n - y\|\|z_k\| \to 0.\end{aligned}$$

6.12. Definíció. Egy H Hilbert-térbeli z_n sorozatot *teljes*nek nevezzük, ha egyedül a 0 elem ortogonális minden z_n-re.

6.13. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér. Egy z_n ortogonormált sorozatra a következők ekvivalensek:*

(1) z_n teljes ortonormált sorozat;

(2) minden $x \in H$-ra $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n$ (ez az összeg x Fourier-sora*);*

(3) minden $x \in H$-ra $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\langle x, z_n \rangle\right|^2$ (ez a Parseval-egyenlőség*);*

(4) minden $x, y \in H$-ra

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle \overline{\langle y, z_n \rangle}$$

(ez az általánosított Parseval-egyenlőség*);*

(5) bármely lineáris altere H-nak, amely tartalmazza az összes z_n-et, sűrű H-ban.

Bizonyítás. Mivel $x - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle z_n$ az előző tétel szerint ortogonális minden z_k-ra, (1)-ből következik (2). Ha (2) teljesül, legyen x_n az x, az y_n pedig az y Fourier-sorának n-edik részletösszege. Ekkor

$$\begin{aligned}
\left|\langle x, y \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, z_k \rangle \overline{\langle y, z_k \rangle}\right| &= \left|\langle x, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle\right| \\
&\leq \left|\langle x, y \rangle - \langle x_n, y \rangle\right| + \left|\langle x_n, y \rangle - \langle x_n, y_n \rangle\right| \\
&\leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \|y_n - y\| \to 0,
\end{aligned}$$

azaz teljesül (4). (4)-nek speciális esete (3). Ha (3) teljesül, és x minden z_n-re ortogonális, akkor $\|x\| = 0$, így (3)-ból következik (1).

(2)-ből nyilván következik (5). Másrészt (5)-ből következik (1), mert ha x minden z_n-re ortogonális, akkor ezek minden véges lineáris kombinációjára is. Választva egy ilyen lineáris kombinációkból álló y_k sorozatot, amely x-hez tart,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle - \langle x, y_k \rangle = \langle x, x - y_k \rangle \leq \|x\| \|x - y_k\| \to 0.$$

6.14. Gram-Schmidt ortogonalizálás. Legyen H egy Hilbert-tér, és y_k egy véges vagy végtelen, lineárisan független tagokból álló sorozat H-ban. Egy olyan z_k ortonormált sorozatot fogunk megkonstruálni, amelyre

$$\{y_k : k \leq n\} \quad \text{és} \quad \{z_k : k \leq n\}$$

ugyanazt az alteret feszítik ki minden n-re.

Legyen $u_1 = y_1$ és $z_1 = u_1/\|u_1\|$. Legyen $u_2 = y_2 - \langle y_2, z_1\rangle z_1$ és $z_2 = u_2/\|u_2\|$. Folytassuk teljes indukcióval ezt az eljárást. Legyen

$$u_n = y_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle y_n, z_k\rangle z_k \quad \text{és} \quad z_n = u_n/\|u_n\|.$$

Ha $1 \leq k < n$, akkor

$$\langle z_n, z_k\rangle = \frac{1}{\|u_n\|}\left\langle \left(y_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle y_n, z_j\rangle z_j\right), z_j \right\rangle = 0.$$

Mivel u_n benne van az $u_1, \ldots, u_{n-1}, y_n$ által kifeszített altérben, mindkét rendszer ugyanazt az alteret feszíti ki.

6.15. Tétel. *Egy Hilbert-tér pontosan akkor szeparábilis, ha van benne teljes ortonormált sorozat.*

Bizonyítás. Egy teljes ortonormált sorozat tagjainak racionális (vagy racionális valós és képzetes részű) együtthatókkal vett véges lineáris kombinációi megszámlálható sűrű halmazt alkotnak.

Megfordítva, ha x_n egy megszámlálható sűrű halmaz, akkor elhagyva minden olyan tagot, amely az előzőek lineáris kombinációja, majd a maradékot a Gram–Schmidt eljárással ortogonalizálva, egy teljes ortonormált sorozatot kapunk.

6.16. Megjegyzés. Tételeink szerint, ha z_n egy teljes ortonormált sorozat, akkor minden $x \in H$-hoz hozzárendelve a Fourier-együtthatóit, H-nak egy művelet- és belső szorzat tartó leképezését kapjuk l^2-re. Így bármely szeparábilis Hilbert-tér l^2-vel, tehát bármely két szeparábilis Hilbert-tér egymással is azonos szerkezetű.

7.§ Ortogonális sorok

7.1. Klasszikus Fourier-sorok. Legyen $l > 0$ és tekintsük a $(-l, l)$ intervallumon a Lebesgue-mértéket. A megfelelő $\mathbf{L}^2$-térben az

$$1, \sin\frac{\pi x}{l}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots$$

függvények ortogonális sorozatot alkotnak. Ugyanez teljesül, ha bármilyen más $2l$ hosszúságú intervallumot tekintünk. Mivel ezek a függvények $2l$ szerint periódikusak, olyan f függvényt érdemes tekinteni, amely szintén $2l$ szerint periódikus, és $(-l, l)$-en négyzetesen integrálható. Minden ilyen f függvényhez hozzárendeljük az

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\Bigr)$$

függvénysort, az f *klasszikus Fourier-sorát*, ahol

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,d\lambda(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,d\lambda(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

A részletösszegekre bevezetve az

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mathbf{n}}\Bigl(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\Bigr)$$

jelölést, az általános elméletből kapjuk, hogy

$$\int_{-l}^{l} |f - s_n|^2\,d\lambda \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A Parseval-egyenlőség megfelelője

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f|^2\,d\lambda = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(|a_k|^2 + |b_k|^2\bigr).$$

7.2. Tétel. *Ha az f illetve f^* függvények $2l$ szerint periódikusak, a $(-l, l)$-en négyzetesen integrálhatóak, és Fourier-együtthatóik*

$$a_k, b_k \qquad \text{illetve} \qquad a_k^*, b_k^*,$$

$c \in \mathbf{C}$, *akkor*

(1) *a* cf *függvény Fourier-együtthatói* ca_k, cb_k*;*

(2) *az* $f + f^*$ *függvény Fourier-együtthatói* $a_k + a_k^*, b_k + b_k^*$*;*

(3) *ha* $f(x+\alpha) = f^*(x)$*, akkor*

$$a_k^* = a_k \cos\frac{k\pi\alpha}{l} + b_k \sin\frac{k\pi\alpha}{l}$$

és

$$b_k^* = b_k \cos\frac{k\pi\alpha}{l} - a_k \sin\frac{k\pi\alpha}{l};$$

(4) *ha* $F(x) = \int_0^x f\,d\lambda$ *is* $2l$ *szerint periódikus, akkor Fourier-együtthatói* $-lb_k/(k\pi), la_k/(k\pi)$ $(k > 0)$*.*

7.3. Tétel. *Ha az* f *függvény* $2l$ *szerint periódikus, és* $(-l, l)$*-en négyzetesen integrálható, továbbá egy* $x \in \mathbf{R}$ *pontban léteznek az*

$$f(x+) = \lim_{t\downarrow 0} f(x+t), \qquad f(x-) = \lim_{t\uparrow 0} f(x+t)$$

határértékek és a

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}, \qquad \lim_{t\uparrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-)}{t}$$

félérintők [speciálisan, ha létezik $f'(x)$*], akkor*

$$s_n(x) \to \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

7.4. Ortogonális polinomok. Tekintsünk egy $(a, b) \subset \mathbf{R}$ intervallumot a Lebesgue-mértékkel, és egy ϱ súlyfüggvénnyel. Ha van olyan $r > 0$ szám, hogy

$$\int_a^b e^{r|x|} \varrho(x)\, d\lambda(x) < \infty,$$

(ez a feltétel véges intervallumon mindig teljesül), akkor az

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

hatványfüggvények mind a megfelelő $\mathbf{L}^2$-térben vannak, és a belőlük a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással (és esetleg konstanssal való szorzással) kapott ortogonális polinomrendszer teljes. Ilyen ortogonális polinomrendszerek számos érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, és fontosak az ortogonális polinomrendszerek szerinti sorfejtések is. Az alábbiakban felsoroljuk a legfontosabb ortogonális polinomrendszereket.

Név	Jelölés	Intervallum	Súlyfüggvény
Jacobi ($\alpha, \beta > -1$)	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(-1,1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
Legendre	P_n	$(-1,1)$	1
Elsőfajú Csebisev	T_n	$(-1,1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
Másodfajú Csebisev	U_n	$(-1,1)$	$\sqrt{1-x^2}$
Laguerre	L_n	$(0,\infty)$	e^{-x}
Hermite	H_n	$(-\infty,\infty)$	e^{-x^2}

7.5. Feladat. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát:

(1) $|\sin x|$;

(2) $\operatorname{sgn}\sin x$;

(3) $x-[x]$;

(4) $f(x)$ az x távolsága a legközelebbi egésztől.

Mely pontokban konvergens a Fourier-sor, és mi az összege?

7.6. Feladat. Határozzuk meg egyutas egyenirányításnál az egyenáramú komponens és a harmadik felharmonikus amplitudójának arányát!

7.7. Feladat. Szimmetrikus fűrészfogfeszültség integrálásával szinuszos jelalakot közelítünk. Határozzuk meg, hogy az alapharmónikus a teljes teljesítmény hanyadrészét képviseli!

* **7.8. Feladat.** Számoljunk ki Gram–Schmidt ortogonalizációval néhány Legendre-, Csebisev-, Laguerre-, és Hermite-polinomot!

7.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy az elsőfajú Csebisev-polinomok az approximáció tárgyalásánál megadott formulával kaphatók meg!

7.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \quad \text{ha} \quad x \in [-1,1].$$

Milyen kapcsolat van az elsőfajú Csebisev-polinomok és a Lissajous-görbék között?

7.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k > 0$$

jelölésekkel a Fourier-sor

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\pi x/l}$$

alakba írható, és

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{-ik\pi t/l}\, dt.$$

7.12. Feladat. Véges Fourier-transzformáció. Legyen f egy $2l$ szerint periódikus függvény. Az előző feladat jelöléseivel, osszuk a $[0, 2l]$ intervallumot n egyenlő részre, és számoljuk ki c_k közelítését a trapéz formulával. (A közelítés csak $|k| \le n/2$ esetén lesz jó.) Mutassuk meg, hogy $f_j = f(2l/n)$, ha $j = 0, 1, \ldots, n-1$ jelöléssel

(1) $$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{-jk}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{ahol } \omega = e^{2\pi i/n};$$

(2) $c_k = c_{k+n}$ minden k-ra;

(3) az

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}) \mapsto (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$$

lineáris leképezést F-el jelölve, F^2 az $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ sorozathoz az $\frac{1}{n}(f_{n-1}, \ldots, f_1, f_0)$ sorozatot rendeli, és $F^{-1} = n\overline{F}$.

* **7.13. Feladat: gyors Fourier-transzformáció.** Az előző feladat jelöléseivel, legyen $n = 2^k$, $k > 0$, $\omega = e^{-2\pi i/n}$. Mutassuk meg, hogy az alábbi algoritmus az F leképezést valósítja meg. Hány szorzást igényel? Írjunk gépi programot az elvégzésére!

Az algoritmus az $A[j]$, $0 \le j < n = 2^k$ sorozat Fourier-transzformáltját számolja ki. Az eredmény az A tömbben keletkezik, de a Fourier-transzformált j-edik eleme $A\big[r_k(j)\big]$, ahol $r_k(j)$ a j természetes szám k bites bináris reprezentációjának megfordításával kapott természetes szám.

(1) [Inicializálás.] Legyen $l \leftarrow 2^{k-1}$.
(2) [Menet kezdete.] Legyen $i \leftarrow 0$ és $t \leftarrow 0$.
(3) [Pillangósorozat kezdete.] Legyen $j \leftarrow i + l$ és $w \leftarrow \omega^{r_{k-1}(t)}$.
(4) [Pillangó.] Legyen $x \leftarrow A[i]$ és $y \leftarrow wA[i+l]$, majd legyen $A[i] \leftarrow x + y$ és $A[i+l] \leftarrow x - y$, végül legyen $i \leftarrow i + 1$.
(5) [Pillangósorozat vége?] Ha $i < j$, menjünk vissza (4)-re.
(6) [Menet vége?] Ha $j + l < 2^k$, legyen $i \leftarrow j + l$, $t \leftarrow t + 1$ és menjünk vissza (3)-ra.
(7) [Vége?] Legyen $l \leftarrow \lfloor l/2 \rfloor$. Ha $l > 0$, menjünk vissza (2)-re, egyébként az algoritmus véget ért.

8.§ Önadjungált operátorok

8.1. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér. H egy *lineáris operátorán* vagy röviden *operátorán* H egy sűrű lineáris alterén értelmezett H-beli értékű A lineáris leképezést értünk. Az A értelmezési tartományát $\mathcal{D}(A)$-val, értékkészletét $\mathcal{R}(A)$-val fogjuk jelölni. Hasonlóan, *lineáris funkcionál* alatt a H egy sűrű alterén értelmezett skalár értékű lineáris leképezést értünk. Az A operátort *korlátos*nak nevezzük, ha

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \bigl\|A(x)\bigr\|,$$

az A *normája* véges. Hasonlóan, egy f funkcionált *korlátos*nak nevezünk, ha *normá*ja, az

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} \bigl|f(x)\bigr|$$

mennyiség véges. Nem nehéz megmutatni, hogy korlátos operátor, illetve funkcionál egyértelműen kiterjeszthető az egész H-ra, és a kiterjesztés nem változtatja meg a normát. Így korlátos operátorokról, illetve funkcionálokról feltehetjük, hogy az egész H-n vannak értelmezve.

Megjegyezzük, hogy a közönséges algebrai műveletek óvatosan kezelendők nemkorlátos operátoroknál. Például az A és B operátorok összege csak a

$$\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$$

halmazon, szorzata pedig csak a

$$\mathcal{D}(AB) = \{x : x \in \mathcal{D}(B) \text{ és } Bx \in \mathcal{D}(A)\}$$

halmazon értelmezhető.

8.2. Riesz tétele. *Legyen f korlátos lineáris funkcionál a H Hilbert-téren. Ekkor egy és csak egy olyan $v \in H$ létezik, amelyre*

$$f(x) = \langle x, v\rangle \qquad \textit{minden } x \in H\textit{-ra.}$$

8.3. Önadjungált operátorok. Ha A egy lineáris operátor a H komplex Hilbert-téren, akkor definiáljuk az A^* *adjungáltját* A-nak. Az A^* értelmezési tartománya, $\mathcal{D}(A^*)$ azon $y \in H$ elemekből áll, amelyekre az $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ lineáris funkcionál korlátos. Ha $y \in \mathcal{D}(A^*)$, akkor a fenti funkcionál egyértelműen kiterjeszthető H-ra, és így Riesz tétele szerint van olyan $A^*y \in H$, amelyre

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle.$$

Könnyű kiszámolni, hogy A^* lineáris leképezés. Ha $A^* = A$, akkor A-t *önadjungált*nak nevezzük. Az önadjungáltságnál gyengébb feltétel a szimmetrikusság. Az A lineáris operátort *szimmetrikus*nak nevezzük, ha

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

minden $x, y \in \mathcal{D}(A)$-ra. Így egy lineáris operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $A \subset A^*$.

8.4. Projekcióoperátorok. Egy H komplex Hilbert-téren értelmezett P korlátos lineáris operátort *projekció-operátor*nak nevezünk, ha $P^2 = P$. A legegyszerűbb projekcióoperátorok az I identikus operátor és az O azonosan nulla nulloperátor. Az önadjungált projekcióoperátorok merőleges vetítéseket írnak le.

8.5. Példák. Példáinkban tekintsük a számegyenest a Lebesgue-mértékkel, és legyen a Hilbert-tér a megfelelő komplex $\mathbf{L}^2$-tér.

(1) Legyen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény, és M_g a g-vel való szorzás operátora, azaz

$$M_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ekkor M_g korlátos lineáris operátor. Az M_g operátor adjungáltja $M_{\overline{g}}$. Ha g valós értékű, akkor M_g önadjungált. Ha g egy halmaz karakterisztikus függvénye, akkor M_g önadjungált projekcióoperátor.

(2) Legyen

$$M(f)(t) = tf(t), \quad \text{ha} \quad f \in \mathbf{L}^2 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \big|f(t)\big|^2 \, d\lambda(t) < \infty.$$

Megmutatható, hogy ekkor M nemkorlátos önadjungált operátor.

(3) Legyen $\hbar$ egy valós szám, és definiáljuk a D operátort azon $f \in \mathbf{L}^2$ függvényeken, amelyek majdnem mindenütt differenciálhatóak, deriváltjuk is négyzetesen integrálható, és amelyekre $f(x) = c + \int_0^x f'(t)\, d\lambda(t)$, úgy, hogy legyen $Df = -i\hbar f'$. Ekkor megmutatható, hogy D önadjungált operátor.

(4) Legyen M a (2)-ben definiált operátor, D pedig a (3)-ban definiált operátor. Az M és D operátorok kommutátora, $DM - MD$ az értelmezési tartományán megegyezik a $-i\hbar I$ operátorral:

$$-i\hbar\big(tf(t)\big)' + ti\hbar f'(t) = -i\hbar f(t)$$

(Heisenberg-féle felcserélési összefüggés).

8.6. Definíció. Legyen A egy lineáris operátor a H komplex Hilbert-téren. A *rezolvens halmaz* azon $t \in \mathbf{C}$ számok halmaza, amelyekre $A - tI$ olyan kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathcal{D}(A)$-nak H-ra, amelynek inverze korlátos lineáris operátor. A rezolvens halmaz komplementere A *spektrum*a, $\sigma(A)$. Egy $t \in \sigma(A)$ értéket A *sajátérték*ének nevezünk, ha $A - tI$ nem kölcsönösen egyértelmű. A sajátértékek halmaza A *pontspektrum*a, $\sigma_p(A)$. Azon t-k halmaza, amelyekre $A - tI$ kölcsönösen egyértelmű, és képtere sűrű H-ban, de az inverz nem korlátos, A *folytonos spektrum*a, $\sigma_c(A)$. A $\sigma(A)$ többi eleme alkotja A *reziduális spektrum*át, $\sigma_r(A)$-t.

8.7. Tétel. *Egy komplex Hilbert-tér bármely lineáris operátorának spektruma zárt halmaz. Egy önadjungált operátor spektruma valós számokból áll.*

8.8. Mit állít a spektráltétel? A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha T egy önadjungált lineáris operátor egy véges dimenziós komplex H Hilbert-téren, akkor — alkalmas bázisban — a T operátor

$$Tf = (t_1 f_1, t_2 f_2, \ldots, t_n f_n)$$

alakba írható, ahol $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a T sajátértékei, és

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Ha P_k-val jelöljük a t_k sajátértékhez tartozó egydimenziós altérre való ortogonális projekció operátorát, akkor ez az előállítás

$$T = \sum_{k=1}^{n} t_k P_k$$

alakba írható. Ezt az alakot szeretnénk a végtelen dimenziós esetre általánosítani. Ekkor az összeg egy projekcióoperátor értékű mérték szerinti integrálba megy át.

8.9. Definíció. Legyen H egy komplex Hilbert-tér. A $\mathbf{C}$ Borel-halmazain értelmezett, értékként önadjungált projekcióoperátorokat felvevő P leképezést *spektrálmérték*nek nevezünk, ha $P(\mathbf{C}) = I$ és minden $x \in H$-ra a $P_x(\omega) = \big\langle P(\omega)x, x\big\rangle$ összefüggéssel definiált halmazfüggvény mérték $\mathbf{C}$-n.

8.10. Tétel. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és P egy spektrálmérték $\mathbf{C}$-n. Ekkor létezik egy és csak egy, a $\mathbf{C}$-n értelmezett mérhető komplex értékű függvényeket H lineáris operátoraiba képező*

$$f \mapsto \varphi(f) = \int f \, dP$$

leképezés, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(1) $\mathcal{D}(\varphi(f)) = \Big\{x : x \in H, \int |f|^2 \, dP_x < \infty\Big\}$;

(2) $\big\langle \varphi(f)x, x\big\rangle = \int f \, dP_x$ *minden* $x \in \mathcal{D}\big(\varphi(f)\big)$*-re;*

Teljesül továbbá, hogy

(3) $\big\|\varphi(f)x\big\|^2 = \int |f|^2 \, dP_x$, *ha* $x \in \mathcal{D}\big(\varphi(f)\big)$;

(4) $\varphi(f)\varphi(g) \subset \varphi(fg)$ *és* $\mathcal{D}\big(\varphi(f)\varphi(g)\big) = \mathcal{D}\big(\varphi(g)\big) \cap \mathcal{D}\big(\varphi(fg)\big)$;

(5) $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$ *és* $\varphi(f)\varphi(f)^* = \varphi\big(|f|^2\big) = \varphi(f)^*\varphi(f)$.

8.11. Spektráltétel. *Egy H komplex Hilbert-tér bármely A önadjungált operátorához létezik egy és csak egy P spektrálmérték, az A* spektrálfelbontása, *amelyre*

$$A = \int t \, dP(t).$$

Továbbá $P\big(\mathbf{C}\backslash\sigma(A)\big) = 0$.

8.12. Fizikai alkalmazások. A kvantumelméletben a fizikai rendszer állapotait egy szeparábilis Hilbert tér normált elemeivel reprezentáljuk, a fizikai mennyiségeket pedig önadjungált operátorokkal. Ha valamely fizikai mennyiséget egy A önadjungált operátor reprezentál, a rendszer állapotát pedig a ψ normált vektor írja le, és A spektrálfelbontása

$$A = \int t\,dP(t),$$

akkor egy $\omega \subset \mathbf{R}$ Borel-halmaz esetén $\big\|P(\omega)\psi\big\|^2$ adja meg annak valószínűségét, hogy a rendszeren mérést végezve, az illető fizikai mennyiségre olyan értéket kapunk, amely ω-ba esik.

8.13. Feladat. Határozzuk meg az alábbi funkcionálok, illetve operátorok normáját, ha a Hilbert-tér a $[0,1]$-en a Lebesgue-mértékre nézve négyzetesen integrálható függvények tere:

(1) $$f(x) = \int_0^1 x(t)\sin t\,dt;$$

(2) $$f(x) = \int_0^1 x(t)(t - 1/2)\,dt;$$

(3) $$(Ax)(s) = \int_0^1 x(t)\cos(s - t)\,dt;$$

(4) $$(Ax)(s) = \begin{cases} x(s), & \text{ha } 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2} < s \le 1; \end{cases}$$

(5) $$(Ax)(s) = x(s)\sin s;$$

(6) $$(Ax)(s) = x(s)e^{is}.$$

8.14. Feladat. Határozzuk meg az alábbi operátorok normáját, ha a Hilbert-tér $\mathbf{L}^2(\lambda)$, $c \in \mathbf{R}$, $a(s)$ korlátos mérhető függvény:

(1) $$(Ax)(s) = x(s+c);$$

(2) $$(Ax)(s) = a(s)x(s);$$

(3) $$(Ax)(s) = \frac{1}{2}\big(x(s) + x(-s)\big).$$

** **8.15. Feladat.** Próbáljuk meg meghatározni az eddigi példákban és feladatokban szereplő operátorok sajátértékeit, folytonos és reziduális spektrumát!

*** **8.16. Feladat.** Próbáljuk meg meghatározni az eddigi példákban és feladatokban szereplő önadjungált operátorok spektrálfelbontását!

* **8.17. Feladat.** Egy részecske állapotát egy adott időpontban a

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{-x^2/4}$$

$\mathbf{L}^2(\lambda)$-beli állapotfüggvény írja le. Helyét meghatározva, milyen valószínűséggel fogjuk a $[-1, 1]$ intervallumban találni?

8.18. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $\psi_2 = c\psi_1$, $c \in \mathbf{C}$, $|c| = 1$, akkor a ψ_1 és ψ_2 állapotok esetén bármely fizikai mennyiség mérésekor bármely Borel-halmaz esetén annak valószínűsége, hogy a mért érték az adott Borel-halmazba esik, megegyezik!

* **8.19. Feladat.** Mutassuk meg, hogy ha a ψ állapotú fizikai rendszeren az A operátorral reprezentált fizikai mennyiséget mérjük, a mérés várható értéke $\langle A\psi, \psi\rangle$.

* **8.20. Feladat.** Tegyük fel, hogy a fizikai mennyiségeket reprezentáló A és B operátorokra teljesül az

$$AB - BA \subset i\hbar I$$

Heisenberg–féle felcserélési összefüggés. Mutassuk meg, hogy ekkor bármilyen ψ állapot esetén, a fizikai mennyiségek mért értékeinek szórását $\mathbf{D}_\psi(A)$, illetve $\mathbf{D}_\psi(B)$-vel jelölve, teljesül a

$$\mathbf{D}_\psi(A)\mathbf{D}_\psi(B) \geq \hbar/2$$

Heisenberg–féle határozatlansági reláció.

IV. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

9.§ Valószínűségszámítás

9.1. Valószínűségi mező. A *valószínűségi mező* olyan

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$$

mértéktér, amelyre $\mathbf{P}(\Omega) = 1$. A valószínűségszámításban Ω-t *eseménytér*nek, elemeit *elemi esemény*eknek, $\mathcal{A}$ elemeit *esemény*eknek, $\mathbf{P}$-t *valószínűség*nek szokás nevezni. Az Ω a *biztos esemény*, az $\emptyset$ a *lehetetlen esemény*. Két esemény *kizárja egymást*, ha metszetük üres. *Teljes eseményrendszer* alatt eseményeknek egy olyan sorozatát értjük, amelyek páronként kizárják egymást, és egyesítésük a biztos esemény.

9.2. Klasszikus valószínűségi mező. Ha Ω véges halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω összes részhalmazaiból áll, és minden elemi esemény valószínűsége egyforma, akkor *klasszikus valószínűségi mező*ről beszélünk. Ekkor egy A esemény valószínűségét megkapjuk, ha A elemeinek számát (a „kedvező esetek száma") osztjuk Ω elemeinek számával (az „összes esetek száma").

9.3. Példa. Kockadobásnál hat elemi esemény van, tehát

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$$

Események például: „páros számot dobni", „háromnál kisebbet dobni", stb. Ha az elemi események valószínűsége egyforma, akkor ezek valószínűsége 1/2, 1/3, stb.

9.4. Geometriai valószínűségek. Gyakran Ω az $\mathbf{R}^n$ egy részhalmaza, az események Ω mérhető részhalmazai, a valószínűség pedig a Lebesgue-mérték vagy valamilyen geometriai mérték konstansszorosa. Ilyen esetekben geometriai valószínűségről beszélünk.

9.5. Példa. Bekötött szemmel 30 cm átmérőjű, kör alakú céltáblára lövünk, amíg el nem találjuk. Mi a valószínűsége, hogy tízest lőttünk, ha a tízes kör átmérője 3 cm? A területek arányából adódik a valószínűség, vagyis 0,01 lesz.

9.6. Feltételes valószínűség. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező, A, B események, $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Az A esemény B-re vonatkozó *feltételes valószínűség*én a

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

számot értjük. Nyilván $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$, ez a *valószínűségek szorzási szabálya*. Ha $B_1, B_2, \ldots$ egy teljes eseményrendszer, $\mathbf{P}(B_k) > 0$ minden k-ra, és A egy esemény, akkor

$$\mathbf{P}(A) = \sum_k \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k),$$

ez a *teljes valószínűség tétele*. Ha még $\mathbf{P}(A) > 0$ is teljesül, akkor

$$\mathbf{P}(B_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}{\sum_i \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)},$$

ez a *Bayes-tétel*.

9.7. Függetlenség. Egy valószínűségi mező A_i eseményeit *független*nek nevezzük, ha különböző $i_1, i_2, \ldots, i_n$ indexek esetén

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_n}).$$

Az A_i eseményeket *páronként független*nek nevezzük, ha bármely kettő közülük független.

9.8. Feladat. Kockadobásnál határozzuk meg annak valószínűségét, hogy háromnál nagyobbat dobtunk, feltéve, hogy páros számot dobtunk!

9.9. Feladat. Két különböző pénzdarabot feldobunk. A megfelelő elemi valószínűségi mezőben adjunk meg három olyan eseményt, amelyek páronként függetlenek, de nem függetlenek!

9.10. Feladat. Mi a valószínűbb, az, hogy egy kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk, vagy az, hogy két kockával 24-szer dobva, legalább egyszer két hatost dobunk?

* **9.11. Feladat.** Határozzuk meg pókerban annak valószínűségét, hogy osztáskor lapunk 1 pár, 2 pár, drill, stb., royalflush!

9.12. Feladat. Péter pénzét három borítékban tartja. Az elsőben két ötvenes, a másodikban egy ötvenes és egy százas, a harmadikban egy ötvenes és három százas van. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen választva egy borítékot és abból egy bankjegyet, az százas lesz?

9.13. Feladat. Egy városban ugyanannyi férfi él, mint nő. 100 férfiből 5, míg 10000 nőből 25 színvak. Egy színvak kartonját kiválasztva, az milyen valószínűséggel lesz nő?

9.14. Valószínűségi változó. *Valószínűségi változó*n egy valószínűségi mezőn értelmezett, mérhető függvényt értünk. Egy valós értékű ξ valószínűségi változó F *eloszlásfüggvény*ét vagy *eloszlás*át az

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}, \quad \text{ha} \quad x \in \mathbf{R}$$

összefüggéssel értelmezzük. Megmutatható, hogy az eloszlásfüggvény monoton növekedő, balról folytonos, és

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Ha létezik olyan $f : \mathbf{R} \to [0,\infty)$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, d\lambda(t),$$

akkor azt mondjuk, hogy f a ξ *sűrűségfüggvény*e. Megmutatható, hogy ekkor $F'(x) = f(x)$ λ-majdnem mindenütt.

9.15. Diszkrét valószínűségi változók. Azokat a valószínűségi változókat, amelyek csak megszámlálható sok különböző értéket vesznek fel értékként, *diszkrét valószínűségi változók*nak nevezzük. Diszkrét valószínűségi változónak sohasem létezik sűrűségfüggvénye.

9.16. Várható érték, szórás. Egy ξ valószínűségi változó *várható értékén* az $\mathbf{E}(\xi) = \int_\Omega \xi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega)$ integrált értjük, ha létezik. Egy valós ξ valószínűségi változó *szórásnégyzete* $\mathbf{E}\Big(\big(\xi - \mathbf{E}(\xi)\big)^2\Big)$, a $\mathbf{D}(\xi)$ *szórása* pedig ennek négyzetgyöke. Fontos tudni, hogy egy valós valószínűségi változó várható értéke és szórása, sőt, bármely Borel-függvényének a várható értéke is csak a valószínűségi változó eloszlásfüggvényétől függ. Ezt az állítást nem bizonyítjuk, csak két fontos speciális esetét vizsgáljuk meg.

9.17. Diszkrét valószínűségi változók várható értéke. Legyen ξ valós értékű diszkrét valószínűségi változó, vegye fel a $x_1, x_2, \ldots$ értékeket $p_1, p_2, \ldots$ valószínűségekkel. Ha $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy Borel-függvény, és $g(\xi)$-nek létezik várható értéke, akkor

$$\mathbf{E}\big(g(\xi)\big) = \sum_i g(x_i) p_i.$$

9.18. Sűrűségfüggvény és várható érték. Ha ξ-nek létezik a f sűrűségfüggvénye, és $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy tetszőleges Borel-függvény, akkor az alábbi két integrál egyszerre létezik és

$$\mathbf{E}\big(g(\xi)\big) = \int_{\mathbf{R}} g(x) f(x)\, d\lambda(x).$$

9.19. Csebisev-egyenlőtlenség. *Legyen a ξ valószínűségi változó várható értéke E, szórása pedig D. Ekkor minden $\epsilon > 0$ valós számra*

$$\mathbf{P}\big\{|\xi - E| > D/\epsilon\big\} < \epsilon^2.$$

Bizonyítás. Ellenkező esetben azt kapnánk, hogy

$$D^2 = \int_\Omega |\xi - E|^2\, d\mathbf{P} \geq \int_{\big\{|\xi - E| \geq D/\epsilon\big\}} |\xi - E|^2\, d\mathbf{P}$$

$$\geq \frac{D^2}{\epsilon^2} \mathbf{P}\big\{|\xi - E| \geq D/\epsilon\big\} > D^2,$$

ami ellentmondás.

9.20. Valószínűségi változók függetlensége. A valós értékű ξ_i valószínűségi változókat *páronként független*nek, illetve *függetlennek* nevezzük, ha a $\{\xi_i < x_i\}$ események bármilyen x_i valós számok esetén páronként függetlenek, illetve függetlenek. Megmutatható, hogy két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke a várható értékek szorzata. Ebből következik, hogy független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege.

9.21. Feladat. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok maximumának, illetve minimumának várható értéke, illetve szórása?

9.22. Feladat. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, még kétszer dobunk, ha írás, még egyszer. Mennyi a fejek számának várható értéke és szórása?

9.23. Feladat. Adjunk példát páronként független, de nem független valószínűségi változókra!

** **9.24. Feladat.** Egy érmét addig dobunk fel, amíg egymás után két fejet dobunk. Mennyi a dobások számának várható értéke? És ha addig dobunk, amíg fejre írás jön?

9.25. Binomiális eloszlás. Egy ξ valószínűségi változót n-ed rendű, p paraméterű *binomiális eloszlású*nak nevezünk, ha a $k = 0, 1, \ldots, n$ értékeket veszi fel rendre

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

valószínűséggel, ahol $0 < p < 1$. Ilyen eloszlás lép fel például visszatevéses mintavételnél. Várható értéke np, szórása $\sqrt{np(1-p)}$.

9.26. Hipergeometrikus eloszlás. A ξ valószínűségi változó *hipergeometrikus eloszlású*, ha értékei a $k = 0, 1, \ldots, n$ számok, és a k értéket

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $0 < n \leq \min(M, N-M)$ és $M < N$. Ilyen eloszlás lép fel például visszatevés nélküli mintavételnél. Várható értéke Mn/N, szórása pedig

$$\sqrt{n\left(\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right)}.$$

9.27. Poisson-eloszlás. Egy ξ valószínűségi változó *Poisson-eloszlású*, ha a $k = 0, 1, \ldots$ értékeket

$$\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$$

valószínűséggel veszi fel, ahol $\alpha > 0$ pozitív állandó. Ha n nagy és p kicsi, akkor a binomiális eloszlás jól közelíthető $\alpha = np$ paraméterű Poisson-eloszlással. Várható értéke α, szórása $\sqrt{\alpha}$.

9.28. Egyenletes eloszlás. A ξ valószínűségi változó az (a, b) intervallumon *egyenletes eloszlású*, ha sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{b-a}, \quad \text{ha} \quad a < x < b, \qquad 0 \quad \text{egyébként}.$$

Várható értéke $(a+b)/2$, szórása pedig $(b-a)/(2\sqrt{3})$.

9.29. Exponenciális eloszlás. A ξ valószínűségi változót α *paraméterű exponenciális eloszlású*nak nevezzük akkor, ha sűrűségfüggvénye

$$\alpha e^{-\alpha x}, \quad \text{ha} \quad x > 0, \qquad 0 \quad \text{egyébként}.$$

Itt $\alpha > 0$. Várható értéke $1/\alpha$, és szórása is $1/\alpha$.

9.30. Normális eloszlás. Az (m, σ) paraméterű *normális eloszlás* sűrűségfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}.$$

Itt m tetszőleges, σ pedig pozitív konstans. Az eloszlás várható értéke m, szórása pedig σ. Az F eloszlásfüggvény kifejezhető a 0 várható értékű, 1 szórású *standard normális eloszlás* Φ eloszlásfüggvényével:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Megjegyezzük, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

9.31. A χ^2-eloszlás. Ha n darab független, standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetét összeadjuk, kapjuk az n *szabadságfokú* χ^2*-eloszlás*t. Ennek sűrűségfüggvénye

$$\frac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad \text{és} \quad 0 \ \text{egyébként.}$$

Várható értéke n, szórása pedig $\sqrt{2n}$. Megjegyezzük, hogy a Γ függvény értékei a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ összefüggés segítségével $\Gamma(1) = 1$ és $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ismeretében a szükséges helyeken kiszámíthatók.

9.32. Feladat. Egy vegyi anyaggal kezelve 20 kísérleti állatot, 10-nél jött létre (nem látható) elváltozás. Ha 10-et kiválasztunk és felboncolunk, milyen valószínűséggel fogunk 0, 1, ... 9, 10 egyednél elváltozást tapasztalni?

9.33. Feladat. Egy üzemben tízen egymástól függetlenül használnak 1 kW-os kéziszerszámot. Mindenki átlagosan 12-szer 1 percet használja óránként a gépét. Ha a hálózat 7 kW-ot bír el, akkor az időnek hány százalékában lép fel túlterhelés?

9.34. Feladat. Rutherford 2608 alkalommal 7,5 s-ig észlelt rádióaktív bomlást. Alkalmanként 3,87 bomlást észlelt átlagosan. Várhatóan hány alkalommal észlelt 0, 1, 2, ..., 9, $\geq$10 bomlást?

9.35. Feladat. Egy mérés eredmény normális eloszlású 0,1 szórással, várható értéke a mérendő mennyiség. Mennyi a valószínűsége, hogy a mérés hibája nagyobb, mint 0,3?

9.36. Feladat. Alkatrészek, készülékek meghibásodásáig eltelt idő, illetve a két meghibásodás közötti idő legtöbbször exponenciális eloszlást követ. Ha egy készüléknél ezen idő várható értéke, az MTBF 1000 óra, határozzuk meg, hogy mennyi a valószínűsége, hogy a készülék 500 óráig, 1000 óráig, 2000 óráig hibátlanul működik. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy a készülék még t ideig hibátlanul működik, feltéve, hogy T ideig már hibátlanul működött, nem függ T-től.

* **9.37. Feladat.** Hasonlítsuk össze a 3 szabadságfokú χ^2-eloszlás sűrűségfüggvényét egy nemesgáz atomjainak energiaeloszlását leíró függvénnyel! Mi a magyarázat?

*** **9.38. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy a megismert eloszlások várható értéke és szórása a megadott érték!

9.39. A nagy számok gyenge törvénye. *Legyenek a ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és páronként függetlenek E várható értékkel. Ekkor minden $\epsilon > 0$-ra*

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - E\Big| > \epsilon\Big\} \to 0, \quad \textit{ha} \quad n \to \infty.$$

9.40. A nagy számok erős törvénye. *Legyenek a ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek E várható értékkel. Ekkor*

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = E\Big\} = 1.$$

9.41. Centrális határeloszlás tétel. *Legyenek a ξ_k, $k = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egyforma eloszlásúak és függetlenek nem nulla szórással. Legyen továbbá*

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, \quad \textit{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbf{E}(\eta_n)}{\mathbf{D}(\eta_n)}$$

Jelölje F_n a ζ_n eloszlásfüggvényét, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \quad \textit{ha} \quad x \in \mathbf{R}.$$

9.42. Feladat. Egy pénzérmét 10000-szer feldobva, 5400-szor kaptunk fejet. Szabályos-e az érme?

* **9.43. Feladat.** Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, $[0, 1]$-ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók,

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k \quad \text{és} \quad \zeta_n = \frac{\eta_n - \mathbf{E}(\eta_n)}{\mathbf{D}(\eta_n)}.$$

Ábrázoljuk ζ_1, ζ_2 és ζ_3, valamint a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét. Mennyi $\mathbf{D}(\eta_{12})$ és $\mathbf{E}(\eta_{12})$?

*** **9.44. Feladat: szimuláció, Monte–Carlo módszerek.** Számos olyan természeti folyamat van, amelynek a lefolyását különböző véletlen tényezők befolyásolják. Ilyen folyamatok jellemzőinek pontos meghatározása gyakran nem megoldható, de jó közelítéseket kaphatunk *szimulációval*. Példaként a láncreakciót szimulálva, határozzuk meg egy Pu^{239} gömb kritikus sugarát!

10.§ Matematikai statisztika

10.1. Minta, statisztika. *Statisztikai mintá*n független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egy $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sorozatát értjük. *Statisztiká*nak nevezzük a mintaelemek bármely Borel-függvényét.

10.2. Az empirikus eloszlásfüggvény. Az $F(x)$ eloszlású valószínűségi változókból álló $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintához legyen

$$F_n(x) = \sum_{\xi_k < x} \frac{1}{n},$$

a minta *empirikus eloszlásfüggvény*e. Ha

$$\Delta_n = \sup_x \big| F_n(x) - F(x) \big|,$$

az eloszlásfüggvény és az empirikus eloszlásfüggvény távolsága, akkor megmutatható, hogy

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty} \Delta_n = 0\} = 1.$$

Ez a *matematikai statisztika alaptétele.*

10.3. Hisztogramm. A sűrűségfüggvény közelítésére használható a hisztogramm. Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a minta, és a számegyenesen $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$ osztópontokat választunk, akkor a hisztogramm

$$f_n(x) = \sum_{t_{i-1} \le \xi_k < t_i} \frac{1}{n(t_i - t_{i-1})}, \quad \text{ha} \quad t_{i-1} \le x < t_i.$$

Az osztópontok helytelen választása, túl sok vagy túl kevés osztópont használata a közelítést erősen lerontja, ezért több különböző osztópontrendszerrel is érdemes próbálkozni.

10.4. Becslések. Ha a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ statisztikai mintánk $F_\vartheta(x)$ eloszlású, és a ϑ paramétert nem ismerjük, közelítésére egy alkalmas $\hat{\vartheta}_n$ statisztikát használhatunk. Ezt az eljárást nevezzük *becslésnek.* A jó becsléstől elvárjuk, hogy *torzítatlan* legyen, azaz $\mathbf{E}(\hat{\vartheta}_n) = \vartheta$ teljesüljön, valamint hogy *konzisztens* legyen, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}(\hat{\vartheta}_n) = 0$$

teljesüljön. Kívánatos, hogy a $\mathbf{D}(\hat{\vartheta}_n)$ szórás minél kisebb legyen.

Példaként tekintsük a várható érték becslését. A

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$$

átlag a várható értéknek torzítatlan és konzisztens becslése.

Másik példaként vizsgáljuk a szórásnégyzet becslését. Az

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2$$

empirikus szórásnégyzet a szórásnégyzetnek nem torzítatlan becslése. Torzítatlan és konzisztens becslés viszont az

$$s_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \overline{\xi})^2$$

korrigált empirikus szórásnégyzet.

10.5. Konfidencia-intervallumok. Gyakran arra van inkább szükségünk, hogy a ϑ valós paraméterhez és egy adott $\epsilon > 0$-hoz a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ minta segítségével olyan $\hat{\vartheta}_1$ és $\hat{\vartheta}_2$ statisztikákat adjunk meg, hogy

$$\mathbf{P}(\hat{\vartheta}_1 < \vartheta < \hat{\vartheta}_2) > 1 - \epsilon$$

teljesüljön. A $(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2)$ intervallumot *konfidencia-intervallum*nak nevezzük.

Például ha tudjuk, hogy a mintaelemek normális eloszlásúak ismert σ szórással de ismeretlen m várható értékkel (a legtöbbször ez a helyzet méréseknél), akkor a várható értékre szerkeszthetünk konfidencia-intervallumot. Az

$$u = \frac{\overline{\xi} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

valószínűségi változó standard normális eloszlású lesz, így meghatározható olyan u_ϵ szám, amelyre

$$\mathbf{P}\big\{|u| \le u_\epsilon\big\} = 1 - \epsilon = 2\Phi(u_\epsilon) - 1.$$

Ebből

$$\mathbf{P}\left\{|\overline{\xi}-m|\le u_\epsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=\mathbf{P}\left\{\overline{\xi}-u_\epsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{\xi}+u_\epsilon\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$
$$=1-\epsilon.$$

10.6. Hipotézisvizsgálat. A hipotézisvizsgálatnál valamely adott H_0 *hipotézis* fennállásáról kell döntenünk. Az egyéb lehetséges eseteket a H_1 *ellenhipotézis*ben gyűjtjük össze. A rendelkezésre álló adatok alapján egy *próba statisztiká*t készítünk, és megvizsgáljuk, hogy ennek értéke egy T_0 *elfogadási tartomány*ba esik-e, vagy ennek komplementerébe, a *kritikus tartomány*ba. Ha a próba statisztika az elfogadási tartományba esik, a H_0 hipotézist elfogadjuk, egyébként elvetjük. Az egész eljárást *próbá*nak nevezzük. Kétféle hibát követhetünk el. Ha a H_0 hipotézis fennáll, mégis elvetjük, akkor *elsőfajú hibá*ról, ha pedig a H_1 ellenhipotézis áll fenn, és hipotézisünket mégis elfogadjuk, akkor *másodfajú hibá*ról beszélünk. A hibák nagyságát elsősorban az elfogadási tartomány megválasztásával befolyásolhatjuk. Az elsőfajú hiba valószínűségének csökkentésével a másodfajú hiba valószínűsége általában nő, és viszont. Természetesen a próba statisztika helyes megválasztása is befolyásolja az eredményt. Ha $\epsilon>0$-hoz úgy választottuk az elfogadási tartományt, hogy az elsőfajú hiba $1-\epsilon$ valószínűségű legyen, akkor a hipotézis elfogadása esetén azt mondjuk, hogy *az eltérés* $1-\epsilon$ *szinten nem szignifikáns*, egyébként pedig *szignifikáns*. Ha egy mintánk van, és a hipotézis az, hogy a mintaelemek valamilyen adott eloszlásúak, akkor *egymintás próbá*ról, ha pedig két mintánk van, és a hipotézis az, hogy a két minta eloszlása, vagy a két eloszlás valamilyen paramétere megegyezik, akkor *kétmintás próbá*ról beszélünk.

10.7. Paraméteres próbák. Ezeknél a próbáknál az eloszlásfüggvénynek csak egy vagy néhány paramétere ismeretlen. Két példát mutatunk be.

Az *egymintás u-próba* esetén tudjuk, hogy a $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ mintaelemek normális eloszlásúak ismert σ szórással. Hipotézisünk az, hogy az m várható érték egy m_0 adott érték, ellenhipotézisünk pedig, hogy $m\ne m_0$. A hipotézis fennállása esetén az

$$u=\frac{\overline{\xi}-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

próba statisztika standard normális eloszlású. Adott $\epsilon > 0$ esetén az u_ϵ értéket úgy választva, hogy

$$\Phi(u_\epsilon) - \Phi(-u_\epsilon) = 2\Phi(u_\epsilon) - 1 = 1 - \epsilon$$

legyen, $(-u_\epsilon, u_\epsilon)$ az elfogadási tartomány.

Kétmintás u-próba akkor használható, ha a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ mintánk normális eloszlású ismert σ_1, az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ mintánk pedig normális eloszlású ismert σ_2 szórással, hipotézisünk, hogy az eloszlások várható értékei megegyeznek, ellenhipotézisünk pedig, hogy nem. A hipotézis fennállása esetén az

$$u = \frac{\overline{\xi} - \overline{\eta}}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}$$

próbastatisztika standard normális eloszlású, így ismét a fenti elfogadási tartomány használható.

10.8. Nemparaméteres próbák. Paraméteres próbák csak bizonyos eloszlások (például normális eloszlás, illetve exponenciális eloszlás) esetén konstruálhatók. Általánosabban használhatók a nemparaméteres próbák. Kettőt mutatunk be.

A Kolmogorov-próba annak a hipotézisnek az ellenőrzésére használható, hogy mintánk eloszlásfüggvénye egy adott folytonos $F(x)$ eloszlásfüggvény-e? Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvény bármilyen más folytonos eloszlásfüggvény. A próba azon alapul, hogy az empirikus eloszlásfüggvénynél említett Δ_n mennyiség $\sqrt{n}$-szeresének eloszlása a hipotézis fennállása esetén nem függ $F(x)$-től, sőt, a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sqrt{n}\Delta_n < t\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2t^2}$$

összefüggés szerint már kb. $n = 30$-tól az n-től való függéstől is eltekinthetünk.

A *Kolmogorov-Szmirnov próba* a Kolmogorov-próba kétmintás megfelelője. Annak a hipotézisnek a vizsgálatára alkalmas, hogy a folytonos eloszlásokból származó két mintánk $F(x)$, illetve $G(x)$ eloszlásfüggvénye megegyezik-e? Az ellenhipotézis, hogy az eloszlásfüggvények folytonosak, de nem egyeznek meg. A próbastatisztika

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\Delta_{n,m}, \quad \text{ahol} \quad \Delta_{n,m} = \sup_x \bigl|F_n(x) - G_m(x)\bigr|.$$

Ennek eloszlása nem függ F-től és G-től, határeloszlása ugyanaz, mint $\sqrt{n}\Delta_n$-é, és $n, m \geq 30$ esetén a határeloszlás használható.

10.9. A χ^2-próba. Igen sok célra, például illeszkedés- és függetlenségvizsgálatra használható nem paraméteres próba. Alapgondolata, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_r$ egy teljes eseményrendszer, és teljesül az a hipotézis, hogy az A_i esemény valószínűsége $p_i > 0$, továbbá n független kisérletet végezve ν_i az A_i esemény bekövetkezéseinek száma, akkor a

$$k = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

próbastatisztika jó közelítéssel $r-1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ. A jó közelítéshez általában az szükséges, hogy az np_i értékek 10-nél nagyobbak legyenek. A próba akkor is használható, ha a p_i valószínűségek meghatározásához s darab, a mintából számított becslést használtunk fel, de ekkor a χ^2-eloszlás szabadságfoka $r - s - 1$.

10.10. Feladat. Egy fizikai mennyiséget mértünk, és az alábbi eredményeket kaptuk: 12,15, 12,33, 10,94, 10,25, 9,80, 12,90, 12,04, 11,45, 9,64, 11,20, 9,78, 10,89, 11,22, 11,91, 10,78, 10,04, 10,35, 11,32, 9,18, 11,36, 10,40, 10,89, 11,50, 11,26, 11,95, 9,28, 11,11, 10,34, 11,12, 9,71. Ábrázoljuk az empirikus eloszlásfüggvényt! Készítsünk hisztogrammot! Becsüljük meg a várható értéket és a szórást! Feltételezve, hogy a minta normális eloszlású 1 szórással, készítsünk konfidencia-intervallumot a várható értékre, és 95%-os szinten döntsük el azt a hipotézist, hogy a várható érték 11,2.

10.11. Feladat. Egy másik laboratóriumban az előző feladatban szereplő fizikai mennyiség mérésekor az alábbi értékeket kaptuk: 10,62, 13,10, 12,40, 9,80, 10,31, 9,25, 10,87, 9,93, 9,72, 12,34, 11,77, 13,23, 9,20, 10,11, 11,66, 10,79, 11,06, 12,71, 10,89, 11,19, 10,93, 10,17, 11,97, 9,14, 11,76, 11,60, 9,14, 10,56, 11,57, 12,53. Ha tudjuk, hogy ezek az adatok is normális eloszlásúak, de szórásuk 1,2, elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy a két minta átlaga megegyezik?

10.12. Feladat. Elfogadható-e 95%-os szinten az a hipotézis, hogy az előző feladatban szereplő minta normális eloszlású 11,2 várható értékkel és 1,2 szórással? Hát az, hogy a két előző feladatban szereplő minták egyforma eloszlásúak?

10.13. Feladat. Egy kockát 600-szor feldobva, rendre 92, 87, 91, 101, 86, 143 esetben kaptuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ellentmond-e ez 95%-os szinten annak, hogy a kocka szabályos?

*** **10.14. Feladat.** Készítsünk programot a megismert becslésekre és próbákra! Használjunk adatbázis-kezelőt!

Irodalom

[1] Bahvalov, N. Sz., *A gépi matematika numerikus módszerei.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1977.

[2] Daróczy Z., *Mérték és integrál. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[3] Feller, W., *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1978.

[4] Halmos P. R., *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1984.

[5] Henrici, P., *Numerikus analízis.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1985.

[6] Járai A., *Mérték és integrálelmélet. Kézirat, KLTE TTK.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[7] Losonczi L., *Funkcionálanalízis I. Kézirat.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[8] Meszéna Gy., Ziermann M., *Valószínűségelmélet és matematikai statisztika* Közgazdasági és jogi könyvkiadó, Budapest, 1981.

[9] Neumann J., *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai kiadó, Budapest, 1980.

[10] Rényi A., *Valószínűségszámítás.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[11] Riesz F., Szőkefalvi-Nagy B., *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[12] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1984.

[13] Szidarovszky F., *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Közgazdasági és jogi könyvkiadó, Budapest, 1974.

[14] Szőkefalvi-Nagy B., *Valós függvények és függvénysorok.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.