SPEKTRÁLELMÉLET

Jegyzet

Járai Antal

KLTE
Debrecen
1992

1.§ Bevezetés

Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla kitűnő „Funkcionálanalízis” könyve, amelyen egy nemzedék nevelkedett, ma már magyar nyelven is rendelkezésére áll a spektrálelmélet iránt mélyebben érdeklődőknek. Kiváló feladatanyagot tartalmaz a spektrálelmélettel kapcsolatban Kirillov és Gvisiani magyarul „Feladatok a funkcionálanalízis köréből” címmel megjelent feladatgyűjteménye, amely vázlatosan tárgyalja az elméletet is, és a Halmos által is javasolt utat követve, a spektráltételhez annak szorzat alakján keresztül jut el. Ez a felépítés előnyösnek tűnik, mert a spektráltétel szorzat alakja elég szemléletes, gyakran jól használható, és egy operátor szorzat alakját megkeresve, abból könnyen kaphatjuk a spektrálfelbontást. Bár a spektrálelmélet különféle tárgyalási módjai gyakran nem egyszerű fogalmakat és mély tételeket (komplex mértékek, Radon-mérték, Riesz-féle reprezentációs tétel, Gelfand-elmélet, stb.) használnak fel, a spektráltétel szorzat alakja, a spektrálmérték és a spektrálintegrál fogalma, és a spektráltétel elég egyszerűen megfogalmazható, még igen általános, a Hilbert-tér nem feltétlenül korlátos, normális operátorainak szerkezetét leíró formájában is. Célszerűnek tűnik tehát azok számára, akik a spektráltételt csak alkalmazni kívánják, a legegyszerűbb tények ismertetése után mindjárt a spektráltételt elmondani bizonyítás nélkül, és az elmélet egyszerűbb tényeinek bizonyításával illusztrálni annak erejét. Ez a gondolat vezetett a Járai [1992] jegyzet írásakor. Így azonban a mélyebben érdeklődők számára nem világos, hogyan juthatunk el minél gyorsabban ehhez az alakhoz. Ezen a hiányosságon kíván segíteni ez a kis füzet. Készítése során Riesz–Szőkefalvi [1988] és Kirillov–Gvisiani [1985] már említett könyvén kívül elsősorban Rudin [1973], Halmos [1957] és Dieudonné [1985] könyvét használtam fel. Az analízisben általánosan szokásos jelöléseket használtam. Kétség esetén lásd Rudin [1978] könyvét. A felhasznált lineáris algebrai tételek megtalálhatók Halmos [1984] könyvében, a mértékelméleti eredmények pedig a Járai [1988] jegyzetben. A megértéshez szükség van a funkcionálanalízis alapjainak és a Gelfand-elméletnek az ismeretére: megtalálható Losonczi [1982] jegyzetében. Jelölésekben a Járai [1992] jegyzetet követem, mivel ez a kis füzet annak kiegészítése.

Járai Antal

Debrecen, 1992 február 24

2.§ Spektrálelmélet

1. Lineáris operátorok. Bár lineáris terek között ható lineáris leképezéseket is lehetne vizsgálni, ezzel a tisztán algebrai kérdéssel nem fogunk foglalkozni. Ezért számunkra az alábbi szóhasználat lesz célszerű. Legyenek X és Y normált terek $\mathbf{K}$ felett. Egy $A \subset X \times Y$ leképezést *lineáris operátor*nak nevezünk, ha X egy lineáris alterén van értelmezve, és minden $x, y \in \mathrm{dmn}(A)$-ra és $\alpha \in \mathbf{K}$-ra

$$A(x+y) = Ax + Ay \qquad (\textit{ additív}),$$
$$A(\alpha x) = \alpha Ax \qquad (\textit{ homogén}).$$

Ha $Y = \mathbf{K}$, akkor *lineáris funkcionál*ról beszélünk. Egy lineáris operátor $\mathrm{rng}(A)$ *képtere* (azaz értékkészlete) és $\ker(A) = A^{-1}(0)$ *mag*ja vagy *nulltere* lineáris alterek. A pontosan akkor kölcsönösen egyértelmű, ha $\ker(A) = \{0\}$, és ekkor A^{-1} is lineáris operátor, mert $y_1, y_2 \in \mathrm{rng}(A)$ esetén az $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$ jelölésekkel $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ és A linearitása miatt $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$, azaz

$$A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2 = x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2),$$

és hasonlóan $\alpha y_1 = \alpha Ax_1 = A(\alpha x_1)$, amiből

$$\alpha A^{-1}y_1 = \alpha x_1 = A^{-1}(\alpha y_1).$$

Megjegyezzük, hogy a közönséges algebrai műveletek óvatosan kezelendők, ha az operátorok nem az egész téren vannak értelmezve. Például a T és S operátorok összege csak a $\mathrm{dmn}(T+S) = \mathrm{dmn}(T) \cap \mathrm{dmn}(S)$ halmazon, szorzata (összetétele) pedig csak a $\mathrm{dmn}(TS) = \{x : x \in \mathrm{dmn}(S) \text{ és } Sx \in \mathrm{dmn}(T)\}$ halmazon értelmezhető.

Az A lineáris operátor *normá*ja $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\|$. Ha $\mathrm{dmn}(A) \ne \{0\}$, akkor

$$\|A\| = \sup_{0 \ne x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Nyilván $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ minden $x \in \mathrm{dmn}(A)$-ra, és $\|A\|$ a legkisebb ilyen konstans. Ha az A normája véges, akkor A-t *korlátos*nak nevezzük. A norma és a műveletek kapcsolatát az

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(\alpha A)x\| = |\alpha| \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = |\alpha|\|A\|,$$
$$\|A + B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(A+B)x\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \le 1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|,$$
$$\|AB\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|(AB)x\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|,$$

összefüggések jellemzik. Az X-et Y-ba képező korlátos lineáris operátorok terét $\mathcal{L}(X;Y)$-nal fogjuk jelölni. A fentiek szerint $\mathcal{L}(X;Y)$ normált tér. Az $\mathcal{L}(X;\mathbf{K})$ teret, X *konjugált ter*ét X^*-gal is jelöljük. A korlátos lineáris operátorok vizsgálatát illetően lásd Losonczi [1982] jegyzetét.

2. Zárt operátorok. Az X normált tér egy részhalmazát az Y normált térbe képező A operátort *zárt operátor*nak nevezzük, ha A zárt részhalmaza az $X \times Y$ normált térnek. Nyilván ha egy zárt operátor kölcsönösen egyértelmű, akkor az inverze is zárt opeátor. Az A operátor pontosan akkor zárt, ha bármely $(x, y) \in \overline{A}$ esetén $(x, y) \in A$. Az $(x, y) \in \overline{A}$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha van olyan $(x_n, y_n) \in A$ sorozat, amely (x, y)-hoz konvergál, azaz amelyre $x_n \in \mathrm{dmn}(A)$, $x_n \to x$, $y_n = Ax_n \to y$ ha $n \to \infty$. Az $(x, y) \in A$ feltétel pontosan azt jelenti, hogy $x \in \mathrm{dmn}(A)$ és $y = Ax$. Így beláttuk, hogy A pontosan akkor zárt operátor, ha tetszőleges $x_n \in \mathrm{dmn}(A)$ sorozatot véve, melyre $x_n \to x$, $Ax_n \to y$, következik, hogy $x \in \mathrm{dmn}(A)$ és $y = Ax$. Zárt operátorokkal kapcsolatban nevezetes tény a zárt gráf tétel: Banach-teret Banach-térbe képező zárt lineáris operátor korlátos. Lásd Losonczi [1982] jegyzetét.

3. Definíció. Legyen X egy normált tér. X egy *lineáris operátor*án egy $T \subset X \times X$ lineáris leképezést értünk. Ha T inverze X-en értelmezett korlátos lineáris operátor, akkor T-t *reguláris*nak nevezzük, egyébként pedig *szinguláris*nak. A $\lambda \in \mathbf{K}$ skalárt T *sajátérték*ének, az $0 \neq x \in \mathrm{dmn}(T)$ vektort pedig T *sajátvektor*ának nevezzük, ha $Tx = \lambda x$. Egy λ sajátérték esetén ennek az egyenletnek a megoldásai alkotják a λ-hoz tartozó *sajátalter*et. A sajátérték *multiplicitás*a ennek az altérnek a dimenziója.

4. Definíció. Legyen T az X komplex normált tér lineáris operátora. A *rezolvens halmaz* azon $\lambda \in \mathbf{C}$ számok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbf{1}$ reguláris. A rezolvens halmaz komplementere T *spektrum*a, $\sigma(T)$. Azon λ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbf{1}$ nem kölcsönösen egyértelmű, a T *pontspektrum*a, $\sigma_p(T)$. Azon λ skalárok halmaza, amelyekre $T - \lambda\mathbf{1}$ kölcsönösen egyértelmű, és képtere sűrű X-ben, de az inverz nem korlátos, T *folytonos spektrum*a, $\sigma_c(T)$. A $\sigma(T)$ többi eleme alkotja T *reziduális spektrum*át, $\sigma_r(T)$-t. Az $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ szám T *spektrálsugara*. Az spektrum és a spektrálsugár így definiált fogalma általánosítja a Banach-terek korlátos lineáris operátoraira, mint Banach-algebra elemekre definiált fogalmakat. Az operátor és a spektruma közötti összefüggést (heurisztikusan) a spektrálleképezés elveként fogalmazhatjuk meg: ha T egy operátor, f egy komplex változós, komplex értékű függvény, akkor $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$.

5. Tétel. *Egy komplex Banach-tér bármely lineáris operátorának a spektruma zárt halmaz.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha T inverze $S \in \mathcal{L}(X; X)$, azaz $ST \subset TS = \mathbf{1}$, akkor $S(\mathbf{1} - \lambda S)^{-1}$ a $T - \lambda\mathbf{1}$ inverze elég kis $|\lambda|$ esetén. Tegyük fel, hogy $|\lambda| < 1/\|S\|$. Ekkor $\mathbf{1} - \lambda S$ invertálható, és

$$(T - \lambda\mathbf{1})Sx = TSx - \lambda Sx = x - \lambda Sx = (\mathbf{1} - \lambda S)x$$

minden $x \in X$-re, így

$$(T - \lambda\mathbf{1})S(\mathbf{1} - \lambda S)^{-1}y = (\mathbf{1} - \lambda S)(\mathbf{1} - \lambda S)^{-1}y = y$$

minden $y \in X$-re, azaz $S(\mathbf{1} - \lambda S)^{-1}$ a $T - \lambda\mathbf{1}$ inverze.

6. Adjungált operátor. Legyenek X és Y Hilbert-terek. Nem nehéz megmutatni, hogy korlátos $T \subset X \times Y$ operátor mindig kiterjeszthető az egész X-re a norma megtartásával: az értelmezési tartomány lezártjának ortogonális komplementerén legyen nulla. Így a korlátos operátorok $\mathcal{L}(X;Y)$ elemeinek megszorításai. Ha T (nem feltétlenül korlátos, de) sűrű halmazon van definiálva, akkor azon $y \in Y$ elemekre, amelyekre $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ folytonos dmn(T)-n, ez a funkcionál egyértelműen kiterjeszthető X-re, és így van olyan $T^*y \in X$, amelyre $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Nyilván a kiterjesztés egyértelműségéhez szükséges, hogy dmn(T) sűrű legyen H-ban. Könnyű kiszámolni, hogy $T^* \subset Y \times X$ lineáris operátor. T^* a T *adjungált*ja. Az is nyilvánvaló, hogy ha $T \subset S$, akkor $S^* \subset T^*$. Ha $TT^* = \mathbf{1}$ és $T^*T = \mathbf{1}$, akkor T-t *unitér*nek nevezzük. Egy Hilbert-tér egy T lineáris operátorát *szimmetrikus*nak vagy *Hermite-félé*nek nevezzük, ha $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ minden $x, y \in$ dmn(T)-re. Így egy sűrűn definiált operátor pontosan akkor szimmetrikus, ha $T \subset T^*$. Ha $T = T^*$, akkor T-t *önadjungált*nak nevezzük. Egy sűrűn definiált zárt operátort *normális*nak nevezünk, ha $T^*T = TT^*$. Vegyük észre, hogy egy szimmetrikus operátorra $\langle Tx, x\rangle$ mindig valós.

$\to$ **7. Feladat: polarizáció.** Legyen H komplex Hilbert-tér, $T \subset H \times H$ lineáris operátor. Igazoljuk, hogy ha $x, y \in$ dmn(T), akkor

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle. \end{aligned}$$

Ha H valós, és T önadjungált, akkor

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle.$$

Ez a *polarizációs formula*. Speciálisan, a belső szorzat kifejezhető a normával.

$\to$ **8. Feladat.** Igazoljuk, hogy ha H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ és $\langle Tx, x\rangle = 0$ minden $x \in H$-ra, akkor $T = 0$.

9. Projekcióoperátorok és zárt alterek. Egy H Hilbert-téren értelmezett P korlátos lineáris operátort *projekcióoperátor*nak nevezünk, ha $P^2 = P$. A legegyszerűbb projekcióoperátorok az $\mathbf{1}$ identikus operátor és a nulloperátor. Megmutatjuk, hogy a $P \mapsto$ rng(P) leképezés kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít az önadjungált projekcióoperátorok és H zárt lineáris alterei között. Ennek belátásához, először is vegyük észre hogy a P operátor nulltere, a ker(P) zárt lineáris altér pontosan azokból az elemekből áll, amelyek előállnak $x - P(x)$ alakban, rng(P) pedig P fixpontjaiból áll, azaz $\mathbf{1} - P$ nulltere. Másrészt, P önadjungáltságát felhasználva, kapjuk, hogy rng$(P) = $ ker$(P)^\perp$. Ebből az ortogonális felbontás tételének felhasználásával már következik az állítás.

10. Példák. Példáinkban tekintsük a számegyenest a Lebesgue-mértékkel, és legyen a Hilbert-tér a megfelelő komplex $\mathbf{L}^2$-tér.

(1) Legyen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ egy korlátos Lebesgue-mérhető függvény, és M_g a g-vel való szorzás operátora, azaz

$$M_g(f)(t) = g(t)f(t), \quad \text{ha} \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ekkor M_g korlátos lineáris operátor. M_g adjungáltja $M_{\overline{g}}$. Ha g valós értékű, akkor M_g önadjungált. Ha g egy halmaz karakterisztikus függvénye, akkor M_g projekció-operátor.

(2) Legyen

$$(Mf)(t) = tf(t), \quad \text{ha} \quad f \in \mathbf{L}^2 \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 \, dt < \infty.$$

Megmutatható, hogy ekkor M nemkorlátos önadjungált operátor.

(3) Legyen $\hbar$ egy valós szám, és definiáljuk a D operátort az $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ függvényeken, úgy, hogy $Df = -i\hbar f'$. Ekkor D sűrűn definiált operátor, és

$$\langle Df, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} -i\hbar f' \overline{g} = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar f \overline{g'} = \int_{-\infty}^{\infty} f \overline{(-i\hbar g')} = \langle f, Dg \rangle,$$

ha $f, g \in \mathrm{dmn}(D)$, azaz D szimmetrikus. Megmutatható, hogy D nem önadjungált, de ha értelmezését kiterjesztjük azokra a $f \in \mathbf{L}^2$ függvényekre, amelyek minden kompakt intervallumon abszolút folytonosak, és deriváltjuk is négyzetesen integrálható, akkor nemkorlátos önadjungált operátort kapunk.

(4) Legyen M a (2)-ben definiált operátor, D pedig a (3)-ban definiált operátor. Az M és D operátorok kommutátora, $DM - MD$ az értelmezési tartományán megegyezik a $-i\hbar\mathbf{1}$ operátorral:

$$-i\hbar(tf(t))' + ti\hbar f'(t) = -i\hbar f(t)$$

(Heisenberg-féle felcserélési összefüggés).

11. Feladat. Bizonyítsuk be az előző példa állításait.

12. Tipikus példa. Legyen μ egy mérték, t mérhető, komplex értékű függvény, és M_t a t-vel való szorzás operátora:

$$(M_t x)(\tau) = t(\tau)x(\tau), \quad \text{ha} \quad x \in \mathbf{L}^2(\mu),\ tx \in \mathbf{L}^2(\mu).$$

Ha $\tilde{t}$ egy másik mérhető függvény, amely minden véges mértékű mérhető halmazon majdnem mindenütt egyenlő t-vel, akkor $M_t = M_{\tilde{t}}$, mivel az $\{x \neq 0\}$ halmaz σ-véges. Megmutatjuk, hogy $M_t^* = M_{\overline{t}}$. Ha $y \in \mathbf{L}^2$ esetén $x \mapsto \langle M_t x, y \rangle = \int tx\overline{y}\, d\mu$ korlátos lineáris funkcionál $\mathrm{dmn}(M_t)$-n, akkor előáll belső szorzat alakban, azaz van olyan $z \in \mathbf{L}^2$, hogy $\int xt\overline{y}\, d\mu = \int x\overline{z}\, d\mu$ ha $x \in \mathrm{dmn}(M_t)$. Azt kell megmutatnunk, hogy $t\overline{y}$ és $\overline{z}$ majdnem mindenütt megegyeznek. Ha $\mu\{t\overline{y} \neq \overline{z}\} > 0$ lenne, akkor felhasználva, hogy az $\{y \neq 0\}$ és $\{z \neq 0\}$ halmazok σ-végesek, választhatnánk olyan

A mérhető halmazt, amelyen $t\overline{y} \neq \overline{z}$ és $0 < \mu(A) < \infty$. Feltehetjük, hogy t korlátos A-n; valóban, alkalmazzuk az $A \cap \{|t| < n\}$ halmazokra a mérték folytonosságát. Ha most $x = \xi_A \operatorname{sgn}(t\overline{y} - \overline{z})$, akkor $x \in \operatorname{dmn}(M_t)$ és $\int x(t\overline{y} - \overline{z})\, d\mu = \int_A |t\overline{y} - \overline{z}|\, d\mu \neq 0$. Vegyük észre, hogy M_t normális, ha t valós értékű, akkor M_t önadjungált, ha t korlátos, akkor M_t is korlátos ugyanazzal a korláttal, ha t karakterisztikus függvény, akkor M_t önadjungált projekció, $\sigma(M_t) \subset \overline{\operatorname{rng}(t)}$, mert ha λ belső pontja $\operatorname{rng}(t)$ komplementerének, akkor az $M_{1/(t-\lambda)}$ korlátos operátor az $M_{t-\lambda}$ inverze, és ha $|t| \equiv 1$, akkor M_t unitér.

13. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér. Ekkor $H \times H$ is Hilbert-tér lesz, a $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle$ belső szorzattal, amiből a $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$ norma származik.

14. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, T egy sűrűn definiált lineáris operátor H-n, $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, ha $x_1, x_2 \in H$. Ekkor $T^* = V(T)^\perp$.*

Vegyük észre, hogy ha $H = \mathbf{R}$, akkor V a sík egy derékszöggel való elforgatása.

Bizonyítás. $(y, z) \in T^*$ pontosan akkor teljesül, ha $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle$ minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re. Ez azzal ekvivalens, hogy $\langle (-Tx, x), (y, z) \rangle = 0$ minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re, az utóbbi azonban pontosan akkor teljesül, ha (y, z) a $V(T)$ ortogonális komplementerében van.

15. Következmény. *T^* zárt operátor. Önadjungált operátor zárt, így normális. $\overline{T}$ pontosan akkor függvény, ha T^* sűrűn definiált, és ekkor $\overline{T} = T^{**}$.*

Bizonyítás. Ha T^* sűrűn definiált, akkor $T^{**} = V(V(T)^\perp)^\perp = T^{\perp\perp} = \overline{T}$ függvény. Ha T^* nem sűrűn definiált, akkor van olyan $0 \neq z \in H$, amely ortogonális $\operatorname{dmn}(T^*)$-ra. Ekkor $(z, 0)$ ortogonális T^*-ra, tehát $(0, -z)$ benne van $\overline{T}$-ban.

16. Mit állít a spektráltétel? A lineáris algebrából ismeretes, hogy ha T egy normális lineáris operátor egy véges dimenziós komplex H Hilbert-téren, akkor — alkalmas bázisban — Tf koordinátái $(t_1 f_1, t_2 f_2, \ldots, t_n f_n)$ alakba írhatók, ahol $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a T sajátértékei, és f koordinátái $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. A T operátor tehát ekvivalens egy adott $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ függvénnyel való szorzással.

Mivel ha μ tetszőleges mérték, akkor az $\mathbf{L}^2(\mu)$ téren egy mérhető t függvénnyel való szorzás M_t operátora, amelyre $(M_t f)(s) = t(s) f(s)$, normális operátor, amelynek adjungáltja a $\overline{t}$ függvénnyel való szorzás operátora, azt várhatjuk, hogy tetszőleges normális operátort ilyen alakban lehet előállítani. Valóban, a spektrál tétel szorzat alakja azt állítja, hogy ha T egy normális operátor egy H komplex Hilbert-téren, akkor van olyan lineáris izometria H és egy $\mathbf{L}^2(\mu)$ tér között, amely T-t egy t mérhető függvénnyel való szorzásba viszi át. A t választható úgy, hogy értékkészletének lezártja éppen $\sigma(T)$ legyen.

Approximáljuk a t függvényt egyszerű függvényekkel. Egy $\sum t_j \xi_j \approx t$ egyszerű függvénnyel való szorzás H-ban egy $\sum t_j P_j \approx T$ operátornak felel meg: a ξ_j karakterisztikus függvénnyel való szorzás egy P_j önadjungált projekcióoperátorba megy át, amely azt „méri", t_j-nek mekkora „súlya" van a $\sigma(T)$ spektrumban. Ha a közelítést finomítjuk, az összeg egy $\int_{\mathbf{C}} t\, dP(t) = T$ integrálhoz tart, ez a T spekrálelőállítása.

Itt P egy, a $\mathbf{C}$-n értelmezett, T-től függő, önadjungált projekcióoperátor értékű mérték, a T úgynevezett spektrálfelbontása. A spektrálmértékkel való munkánál gondot okoz, hogy az integrálközelítő sorozatok nem konvergensek $\mathcal{L}(H;H)$ normájában. Ezt a problémát úgy lehet megkerülni, hogy az $A \mapsto P(A)$ spektrálmérték helyett annak „árnyékaival”, az $A \mapsto \langle P(A)x, x\rangle$, $x \in H$ közönséges mértékekkel dolgozunk.

17. Tétel. *Egy H komplex Hilbert-téren egy $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális operátor pontosan akkor önadjungált, ha $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$ és pontosan akkor unitér, ha $\sigma(T) \subset \mathbf{T}$.*

Bizonyítás. A T által $\mathcal{L}(H;H)$-ban generált rész B^*-algebra, $\mathrm{B}^*(T)$ izometrikusan $*$-izomorf $\mathcal{C}(\sigma(T))$-vel, és T-nek az identikus $\lambda \mapsto \lambda$ függvény, T^*-nak pedig a $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ függvény felel meg. $T = T^*$ pontosan akkor, ha $\lambda = \overline{\lambda}$ a $\sigma(T)$-n, és $TT^* = \mathbf{1}$ pontosan akkor, ha $\lambda\overline{\lambda} = 1$ a $\sigma(T)$-n.

18. Definíció. Azt mondjuk, hogy a H Hilbert-tér a H_γ, $\gamma \in \Gamma$ zárt altereinek *Hilbert-összege*, ha a H_γ alterek páronként ortogonálisak, és egyesítésük lineáris burka sűrű H-ban.

19. Lemma. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, X egy $\mathbf{1}$-et tartalmazó rész $*$-algebrája $\mathcal{L}(H;H)$-nak. Ekkor léteznek olyan $H_\gamma, \gamma \in \Gamma$ zárt alterek, amelyek Hilbert-összege H, és amelyekre*

(1) $AH_\gamma \subset H_\gamma$ *minden $A \in X$ és $\gamma \in \Gamma$ esetén;*

(2) *minden $\gamma \in \Gamma$-ra létezik olyan $0 \neq x_\gamma \in H_\gamma$, hogy $\{Ax_\gamma : A \in X\}$ sűrű H_γ-ban.*

Bizonyítás. Tekintsük az összes, az (1) és (2) feltételeknek eleget tévő, páronként ortogonális zárt alterekből álló H_γ, $\gamma \in \Gamma$ rendszereket. Ezek a tartalmazásra nézve féligrendezett halmazt alkotnak, amelyre teljesülnek a Zorn-lemma feltételei, így van maximális eleme. Megmutatjuk, hogy erre $\cup_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ lineáris burka sűrű H-ban. Legyen erre a maximális elemre H' az $\cup_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ halmaz lineáris burkának a lezártja. Nyilván $AH' \subset H'$ minden $A \in X$-re. Ha $H \neq H'$, válasszunk egy $x'' \neq 0$ elemet H' ortogonális komplementeréből, és tekintsük az $\{Ax'' : A \in X\}$ halmazt. Ez altér, mert X részalgebra. Legyen H'' ennek a lezártja. Ekkor $AH'' \subset H''$ minden $A \in X$-re. Ha $x' \in H'$, akkor $\langle x', Ax''\rangle = \langle A^*x', x''\rangle = 0$ minden $A \in X$-re, így a belső szorzat folytonosságából következik, hogy $H' \perp H''$. A $H_\gamma, \gamma \in \Gamma$ rendszert kiegészítve H''-vel, ellentmondásra jutunk.

20. A spektrál-tétel szorzat alakja B^*-részalgebrákra. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és X egy kommutatív B^*-részalgebrája $\mathcal{L}(H;H)$-nak, amely tartalmazza az identikus operátort. Ekkor létezik olyan μ mérték egy mértéktéren, $U : H \to \mathbf{L}^2(\mu)$ unitér operátor és $T \mapsto t \in \mathbf{L}^\infty(\mu)$ leképezése X-nek, amelynél $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, a t-vel való szorzás operátora minden $T \in X$-re, és $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$. A μ mérték választható úgy, hogy $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, \mu(B) < \infty\}$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy van olyan $x \in H$, amelyre $\{Tx : T \in X\}$ sűrű H-ban. Rögzítve egy ilyen x-et, a $\Phi_T \mapsto \langle Tx, x\rangle$ leképezés korlátos lineáris funkcionál $\mathcal{C}(\hat{X})$-n, amely a nemnegatív függvényeken nemnegatív (alkalmazzunk ugyanis gyökvonást), így a Riesz-féle reprezentációs tétel szerint előáll $\langle Tx, x\rangle = \int_{\hat{X}} \Phi_T \, d\mu$ alakban. Legyen $U\Phi_T = Tx$. Ekkor

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \int |\Phi_T|^2 \, d\mu = \|\Phi_T\|^2,$$

így U izometrikusan kiterjeszthető egy H-t $\mathbf{L}^2(\mu)$-be képező függvénnyé. Mivel $\mathcal{C}(\hat{X})$ sűrű, U értékkészlete $\mathbf{L}^2(\mu)$, továbbá

$$(U \circ T \circ U^{-1})(\Phi_S) = U(T(Sx)) = (U \circ U^{-1})(\Phi_T \Phi_S) = \Phi_T \Phi_S.$$

Az általános esetben tekintsük H-nak az előző lemma szerinti alterekre való direkt felbontását. A H_γ zárt alterekre alkalmazva az előző lépést, kapunk egy μ_γ mértéket $\hat{X}_\gamma$-n, egy $U_\gamma : H_\gamma \to \mathbf{L}^2(\mu_\gamma)$ izometriát, és egy $T|_{H_\gamma} \mapsto t_\gamma$ leképezést. Az $\hat{X}_\gamma$ tereket diszjunkttá téve, $\cup_{\gamma\in\Gamma} \hat{X}_\gamma$ mértéktérré tehető: egy A részhalmaz legyen mérhető, ha $A \cap \hat{X}_\gamma$ mérhető minden $\gamma \in \Gamma$-ra, és legyen $\mu(A) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu_\gamma(A \cap \hat{X}_\gamma)$. Ha $f \in \mathbf{L}^2(\mu)$, akkor az $U^{-1}f = \sum_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma^{-1}(f|_{X_\gamma})$ összeg csak megszámlálható sok nem nulla tagot tartalmaz, és nem függ az összegzés sorrendjétől, továbbá U^{-1} izometrikusan izomorf leképezése $\mathbf{L}^2(\mu)$-nek H-ra, és $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, ahol $t|_{X_\gamma} = t_\gamma$.

Végül vegyük észre, hogy ha $T - \lambda\mathbf{1}$ a H-t H-ra kölcsönösen egyértelműen képezi le, akkor $(T - \lambda\mathbf{1})|_{H_\gamma}$ a H_γ-t H_γ-ra kölcsönösen egyértelműen képezi le, így van inverze. Ebből $\operatorname{rng}(t_\gamma) = \sigma(T|_{H_\gamma}) \subset \sigma(T)$, amiből $\operatorname{rng}(t) \subset \sigma(T)$.

21. A spektrál-tétel szorzat alakja korlátos operátorra. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és $T \in \mathcal{L}(H; H)$ egy normális operátor. Ekkor létezik olyan μ mérték, $U : H \to \mathbf{L}^2(\mu)$-ra unitér operátor és μ-mérhető komplex értékű t függvény, hogy $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, a t-vel való szorzás operátora, és $\operatorname{rng} t \subset \sigma(T)$, továbbá μ választható úgy, hogy $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, \mu(B) < \infty\}$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt a T által generált B*-részalgebrára.

22. Spektrálmérték. Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és $\mathcal{A}$ az X halmaz részhalmazainak egy σ-algebrája. Egy, az $\mathcal{A}$ elemeit H önadjungált projekcióoperátoraiba képező P leképezést *spektrálmérték*nek nevezünk, ha $P(X) = \mathbf{1}$ és $P_x(T) = \langle P(T)x, x\rangle$ jelöléssel P_x mérték minden $x \in H$-ra. Vegyük észre, hogy minden P_x véges mérték, mert $P_x(X) = \langle \mathbf{1}x, x\rangle = \|x\|^2$, és

$$P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle = \langle P(A)x, P(A)x\rangle = \|P(A)x\|^2.$$

Ebből következik, hogy $P(\emptyset) = 0$. A P általában nem σ-additív a norma topológiában, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ nem Cauchy-sorozat, hiszen a projekciók normája csak nulla vagy egy lehet; azonban, ha $n = 1, 2, \ldots$-re $P(A_n) = 0$, akkor $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$. Valóban, $P_x(A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra és $n = 1, 2, \ldots$-re. Ebből $P_x(\cup A_n) = 0$ minden $x \in H$-ra, azaz $\|P(\cup A_n)x\|^2 = 0$ minden $x \in H$-ra, így $P(\cup A_n) = 0$. A következő tétel a spektrálmértékek további vizsgálatával foglalkozik.

23. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel,*

(1) ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(2) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ha $A, B \in \mathcal{A}$;

(3) bármely két $P(A)$, $P(B)$ projekció felcserélhető egymással és ha $A \cap B = \emptyset$, akkor $P(A)$ és $P(B)$ képtere ortogonális;

(4) ha A_n diszjunkt, mérhető halmazok egy sorozata, és $x \in H$, akkor

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x.$$

Bizonyítás. Ha A és B diszjunk mérhető halmazok, akkor

$$\langle P(A \cup B)x, x\rangle = \langle (P(A) + P(B))x, x\rangle$$

minden $x \in H$-ra. Ebből polarizációval $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, azaz teljesül (1). Ha $A \subset B$, akkor $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. Ebből $P(A)x = x$ esetén

$$\|x\|^2 = \|P(A)x\|^2 \leq \|P(A)x\|^2 + \|P(B \backslash A)x\|^2 = \|P(B)x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

azaz $\|P(B)x\| = \|x\|$. Ez azt jelenti, hogy $x \in \operatorname{rng}(P(B))$, azaz $P(B)x = x$. Így azt kaptuk, hogy $P(B)P(A) = P(A)$. Adjungálással adódik, hogy ez a $P(A)P(B) = P(A)$ összefüggéssel ekvivalens. A tetszőleges $A, B \in \mathcal{A}$ esetén fennálló

$$P(A \cup B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B) + P(A \backslash B)$$

összefüggés mindkét oldalához hozzáadva $P(A \cap B)$-t, azt kapjuk, hogy

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

Mindkét oldalt megszorozva $P(A)$-val, ebből azt kapjuk, hogy

$$P(A) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)P(A),$$

amiből adódik (2), abból pedig (3). Végül, (4)-ben a jobb oldalon ortogonális sor összege áll, amely a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P(A_n)x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = P_x(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \|P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x\|^2 \leq \|x\|^2$$

összefüggés szerint konvergens. Világos, hogy az $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)x$ hozzárendelés egy Q lineáris operátor, amelynek normája nem nagyobb, mint 1. Mivel

$$\begin{aligned}\langle Qx, x\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=1}^{n} P(A_k)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle P(A_k)x, x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_x(A_n) = \langle P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)x, x\rangle\end{aligned}$$

minden x-re. Polarizációval kapjuk, hogy $Q = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$, tehát teljesül (4).

24. Neumann tétele. *Legyen T egy sűrűn definiált zárt operátor a H Hilbert-téren. Ekkor* $\operatorname{dmn}(T^*T)$ *sűrű H-ban, a T^*T operátor zárt, és az $\mathbf{1}+T^*T$ operátor kölcsönösen egyértelmű leképezése* $\operatorname{dmn}(T^*T)$*-nek H-ra. A $B = (\mathbf{1}+T^*T)^{-1}$ operátor korlátos és önadjungált, spektruma része $[0,1]$-nek. Az $(x,y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ leképezés egy belső szorzat, és $C = TB$ egy H-n definiált folytonos lineáris operátor, amelyre $C(H) \subset \operatorname{dmn}(T^*)$ teljesül. Végül $(T^*T)^* = T^*T$.*

Bizonyítás. Az előző tétel jelöléseivel, T és $V(T^*)$ egymás ortogonális komplementerei $H \times H$-ban. Ezért minden $x \in H$-hoz pontosan egy $y \in \operatorname{dmn}(T)$ és $z \in \operatorname{dmn}(T^*)$ létezik, hogy

$$(x, 0) = (y, Ty) + (T^*z, -z). \tag{1}$$

Legyen $y = Bx$ és $z = Cx$. Nyilván B és C az egész H-n definiált lineáris operátorok, és $B(H) \subset \operatorname{dmn}(T)$ valamint $C(H) \subset \operatorname{dmn}(T^*)$, továbbá

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|Ty\|^2 + \|z\|^2 + \|T^*z\|^2,$$

amiből $\|Bx\| \le \|x\|$ és $\|Cx\| \le \|x\|$. Az (1) összefüggés ekvivalens az

$$x = Bx + T^*Cx \quad \text{és} \quad 0 = -Cx + TBx$$

összefüggésekkel. Ebből $C = TB$ és $T(B(H)) \subset \operatorname{dmn}(T^*)$, azaz $B(H) \subset \operatorname{dmn}(T^*T)$. Következésképpen T^*TB az egész H-n definiálva van, és teljesül, hogy

$$\mathbf{1} = B + T^*TB = (\mathbf{1} + T^*T)B;$$

ezzel megmutattuk, hogy B kölcsönösen egyértelmű, $\mathbf{1} + T^*T$ pedig H-ra képez. Minden $w \in \operatorname{dmn}(T^*T)$-re teljesül, hogy

$$\langle w + T^*Tw, w\rangle = \|w\|^2 + \langle T^*Tw, w\rangle = \|w\|^2 + \|Tw\|^2; \tag{2}$$

mivel $T = T^{**}$, ez az összefüggés azt mutatja, hogy $w + T^*Tw = 0$-ból $w = 0$ következik, tehát $\mathbf{1} + T^*T$ kölcsönösen egyértelmű. Mivel B zárt, $\mathbf{1} + T^*T$ is zárt, amiből következik, hogy T^*T is zárt. Továbbá, minden $u, v \in H$-ra

$$\begin{aligned}\langle Bu, v\rangle &= \langle Bu, Bv + T^*TBv\rangle = \langle Bu, Bv\rangle + \langle Bu, T^*TBv\rangle \\ &= \langle Bu, Bv\rangle + \langle TBu, TBv\rangle = \langle Bu, Bv\rangle + \langle T^*TBu, Bv\rangle \\ &= \langle(\mathbf{1} + T^*T)Bu, Bv\rangle = \langle u, Bv\rangle,\end{aligned}$$

azaz B önadjungált. Ha (2)-ben w helyére Bx-et teszünk, akkor azt kapjuk, hogy minden $x \in H$-ra $\langle x, Bx\rangle = \|Bx\|^2 + \|TBx\|^2 \ge 0$. Mivel $\|Bx\| \le \|x\|$, következik, hogy $\sigma(B) \subset [0,1]$. Továbbá $\langle x, Bx\rangle = 0$ esetén $Bx = 0$ tehát $x = 0$, így az $(x,y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ leképezés belső szorzat.

Most megmutatjuk, hogy $\mathrm{dmn}(T^*T)$ sűrű. Jelölje a T megszorítását $\mathrm{dmn}(T^*T)$-re T'. Elég megmutatni, hogy T' sűrű T-ben, mivel $\mathrm{dmn}(T^*T)$ a T' képe az $(x,y) \mapsto x$ projekciónál, és $\mathrm{dmn}(T)$ sűrű H-ban. Annak bizonyítására, hogy a $T' \subset T$ altér a T Hilbert-térben sűrű, elég azt megmutatni, hogy egy T'-re ortogonális $(u, Tu) \in T$ vektor szükségképpen nulla. Ez azonban azt jelenti, hogy $\langle (u,Tu),(v,Tv)\rangle = 0$ minden $v \in \mathrm{dmn}(T^*T)$-re, azaz $\langle u,v\rangle + \langle Tu,Tv\rangle = 0$; mivel azonban $Tv \in \mathrm{dmn}(T^*)$ teljesül, következik, hogy $\langle u,v\rangle + \langle u,T^*Tv\rangle = 0$, és így $\langle u,(\mathbf{1}+T^*T)v\rangle = 0$. Azonban $\mathbf{1}+T^*T$ a $\mathrm{dmn}(T^*T)$ halmazt H-ra képezi le, így $u = 0$, ami bizonyítandó volt.

Mivel B önadjungált, B a $V(B)$ ortogonális komplementere. Ebből $\mathbf{1}+T^*T$ a $V(\mathbf{1}+T^*T)$ ortogonális komplementere. Más szóval, $(\mathbf{1}+T^*T)^* = \mathbf{1}+T^*T$, tehát $(T^*T)^* = T^*T$.

25. Tétel. *Legyen H egy Hilbert-tér. Ha T egy normális operátor, akkor $\mathrm{dmn}(T) = \mathrm{dmn}(T^*)$ és $\|Tx\| = \|T^*x\|$ minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$ esetén.*

Bizonyítás. Mint Neumann tételének bizonyításában láttuk, a T operátor $\mathrm{dmn}(T^*T)$-re való megszorítása sűrű T-ben; létezik tehát minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$-hez $\mathrm{dmn}(T^*T)$-beli pontoknak olyan y_n sorozata, hogy $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} Ty_n = Tx$. Minden $z \in \mathrm{dmn}(T^*T)$-re teljesül azonban, hogy

$$\|Tz\|^2 = \langle z, T^*Tz\rangle = \langle z, TT^*z\rangle = \|T^*z\|^2,$$

mivel $T^*T = TT^*$. Ha ezt az összefüggést alkalmazzuk $z = y_n - y_m$-re, akkor azt mutatja, hogy a T^*y_n sorozat Cauchy-sorozat, tehát konvergens. Mivel T^* zárt, ebből következik, hogy $x \in \mathrm{dmn}(T^*)$ és $T^*x = \lim_{n\to\infty} T^*y_n$ teljesül; ebből következik, hogy $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Beláttuk tehát, hogy $\mathrm{dmn}(T) \subset \mathrm{dmn}(T^*)$. Mivel $T^{**} = T$, a T^* operátor is normális, és $\mathrm{dmn}(T^*) \subset \mathrm{dmn}(T)$.

26. Lemma. *Legyen a H Hilbert-tér a megszámlálható sok H_n zárt altér Hilbert-összege, és minden n-re T_n a H_n egy korlátos operátora. Ekkor pontosan egy olyan T zárt operátora létezik H-nak, amelyre $H_n \subset \mathrm{dmn}(T)$, $T|_{H_n} = T_n$ és $P_nTx = TP_nx$ minden n és minden $x \in \mathrm{dmn}(T)$ esetén, ahol P_n a H-nak H_n-re való ortogonális projekciója. Továbbá $\mathrm{dmn}(T)$ azon $x = \sum_n x_n$, $x_n \in H_n$ elemek halmaza, amelyekre $\sum_n \|T_nx_n\|^2 < \infty$, és $Tx = \sum_n T_nx_n$. Ha T_n minden n-re egy folytonos normális operátor H_n-en, akkor T normális operátor, és $T^*x = \sum_n T_n^*x_n$.*

Bizonyítás. Jelölje X az összes olyan $x = \sum_n x_n$, $x_n \in H_n$ alakú elemek halmazát, amelyekre $\sum_n \|T_nx_n\|^2 < \infty$. Mivel $\sum_n \|P_nTx\|^2 = \|Tx\|^2 < \infty$ kell, hogy teljesüljön, feltételeinkből következik, hogy $\mathrm{dmn}(T) \subset X$. A minden Hilbert-térben érvényes $\|z+z'\|^2 \le 2\|z\|^2 + 2\|z'\|^2$ egyenlőtlenségből következik, hogy X altere H-nak. Minden $x = \sum_n x_n \in X$ esetén legyen $T'x = \sum_n T_nx_n$. Megmutatjuk, hogy az így definiált T' operátor zárt. Mivel T nyilván tartalmazza a $\sum_n (x_n, T_nx_n)$ véges összegeket, T sűrű T'-ben, és mivel T zárt, ebből következik, hogy $T = T'$. Nyilvánvaló, hogy T' lineáris. Legyen továbbá $x_m \in X$ egy sorozat, amely egy $x \in H$ elemhez konvergál úgy, hogy Tx_m egy $y \in H$ elemhez konvergál. Ekkor

$P_nT'x_m = T_nP_nx_m$ a T_n folytonossága miatt T_nP_nx-hez konvergál, tehát $x \in X$ és $y = T'x$.

A második állítás bizonyításához először megmutatjuk, hogy $T^*(H_n) \subset H_n$. Ha $m \neq n$, bármely $y_n \in H_n$ és $x_m \in H_m$ esetén, $\langle x_m, T^*y_n\rangle = \langle Tx_m, y_n\rangle = 0$, mivel $T(H_m) \subset H_m$. Ezért T^*y_n minden H_m, $m \neq n$ altérre ortogonális, tehát H_n-ben van. Következő lépésként megmutatjuk, hogy minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re $P_nTx = TP_nx = T_nP_nx$, ahol P_n a H_n altérre történő ortogonális projekció. Valóban, minden $y_n \in H_n$ esetén

$$\langle P_nTx, y_n\rangle = \langle Tx, P_ny_n\rangle = \langle Tx, y_n\rangle = \langle x, T^*y_n\rangle,$$

és mivel az előzőek szerint $T^*y_n = P_nT^*y_n$, azt kapjuk, hogy

$$\langle P_nTx, y_n\rangle = \langle P_nx, T^*y_n\rangle = \langle TP_nx, y_n\rangle = \langle T_nP_nx, y_n\rangle.$$

Mivel ez minden $y_n \in H_n$-re teljesül, a P_nTx és a T_nP_nx elemek egybeesnek.

Csak annak bizonyítása van hátra, hogy T normális. Minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re teljesül azonban, hogy $\|T_n^*P_nx\| = \|T_nP_nx\|$; alkalmazva az eddig bizonyítottakat a T_n^* operátorokra, azt kapjuk, hogy pontosan egy T' zárt operátor létezik, amely minden n-re a $H_n \subset \operatorname{dmn}(T')$, $T'|_{H_n} = T_n^*$ és $P_nT'x = T'P_nx$ ha $x \in \operatorname{dmn}(T')$ feltételeket teljesíti, továbbá $\operatorname{dmn}(T') = \operatorname{dmn}(T)$, és $x = \sum_n x_n \in \operatorname{dmn}(T')$ esetén $T'x = \sum_n T_n^*x_n$. Ebből a formulából közvetlenül következik, hogy minden $x, y \in \operatorname{dmn}(T)$-re a $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ összefüggés teljesül; más szavakkal, $T' \subset T^*$. Az is teljesül azonban, hogy $P_nT^*y = T^*P_ny$ minden n-re és minden $y \in \operatorname{dmn}(T')$-re; valóban, minden $x_n \in H_n$ esetén $\langle x_n, P_nT^*y\rangle = \langle x_n, T^*y\rangle$, és mivel $x_n \in \operatorname{dmn}(T)$, kapjuk, hogy $\langle x_n, T^*y\rangle = \langle Tx_n, y\rangle = \langle Tx_n, P_ny\rangle$, mivel $Tx_n = T_nx_n \in H_n$. Felhasználva, hogy $H_n \subset \operatorname{dmn}(T^*)$, kapjuk, hogy $\langle x_n, P_nT^*y\rangle = \langle x_n, T^*P_ny\rangle$, ami állításunkat bizonyítja. Mivel T^* zárt, az előző lemmából következik, hogy $T' = T^*$. Az eddig bizonyítottakból következik, hogy minden $x, y \in \operatorname{dmn}(T) = \operatorname{dmn}(T^*)$ esetén $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ teljesül. Ha $z \in \operatorname{dmn}(TT^*)$, akkor ebből minden $x \in \operatorname{dmn}(T)$-re $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*z\langle = \langle x, TT^*z\rangle$; ez az adjungált operátor definíciója szerint azt jelenti, hogy $Tz \in \operatorname{dmn}(T^*)$ teljesül, és hogy $T^*Tz = TT^*z$. Megmutattuk tehát, hogy $TT^* \subset T^*T$. A bizonyítás teljes lesz, ha T és T^* szerepét felcseréljük, mivel $T^{**} = T$.

27. Spektrálintegrál. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és P egy spektrálmérték X-en $\mathcal{L}(H; H)$-beli értékekkel. Ekkor létezik egy és csak egy, az X-en értelmezett mérhető komplex értékű függvényeket H lineáris operátoraiba képező*

$$f \mapsto \varphi(f) = \int_X f(t)\, dP(t)$$

leképezés (spektrálintegrál*), amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) $\operatorname{dmn}\varphi(f) = \{x : x \in H, \int_X |f|^2\, dP_x < \infty\}$;

(2) $\langle\varphi(f)x, x\rangle = \int_X f\, dP_x$ *minden* $x \in \operatorname{dmn}\varphi(f)$*-re.*

Teljesül továbbá, hogy minden $\varphi(f)$ sűrűn definiált zárt lineáris operátor, és

(3) $\|\varphi(f)x\|^2 = \int_X |f|^2 \, dP_x$ *ha* $x \in \operatorname{dmn} \varphi(f)$;

(4) *ha* $S \in \mathcal{L}(H;H)$, *és* $SP(A) = P(A)S$ *minden* A *mérhető halmazra, akkor* $S\varphi(f) \subset \varphi(f)S$.

Ha $f, g : X \to \mathbf{C}$ *mérhető függvények,* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ *pedig skalárok, akkor*

(5) *ha* $P\{f \neq g\} = 0$, *akkor* $\varphi(f) = \varphi(g)$;

(6) $\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \subset \varphi(\alpha f + \beta g)$;

(7) $\varphi(f)\varphi(g) \subset \varphi(fg)$ *és* $\operatorname{dmn}(\varphi(f)\varphi(g)) = \operatorname{dmn} \varphi(g) \cap \operatorname{dmn} \varphi(fg)$;

(8) $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$ *és* $\varphi(f)\varphi(f)^* = \varphi(|f|^2) = \varphi(f)^*\varphi(f)$.

Bizonyítás. Ha f egyszerű mérhető függvény $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ értékekkel, akkor definiáljuk $\varphi(f) \in \mathcal{L}(H;H)$-t a $\varphi(f) = \sum_{j=1}^n \alpha_j P\{f = \alpha_j\}$ összefüggéssel. Mivel P értékei önadjungált projekciók, $\varphi(f)^* = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j} P\{f = y_j\} = \varphi(\overline{f})$. Ha a g egyszerű függvény a β_k értékeket veszi fel, akkor

$$\varphi(f)\varphi(g) = \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k P\{f = \alpha_j\} P\{g = \beta_k\} = \sum_l \sum_{\alpha_j \beta_k = \gamma_l} \gamma_l P\{fg = \gamma_l\} = \varphi(fg).$$

Hasonlóan belátható, hogy $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)$. Ha $x \in H$, akkor definíció szerint

$$\langle \varphi(f)x, x \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle P\{f = \alpha_j\}x, x \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j P_x\{f = \alpha_j\} = \int_X f \, dP_x.$$

A fentiekből következik, hogy

$$\varphi(f)^*\varphi(f) = \varphi(\overline{f})\varphi(f) = \varphi(\overline{f}f) = \varphi(|f|^2).$$

Ezért

$$\|\varphi(f)x\|^2 = \langle \varphi(f)^*\varphi(f)x, x \rangle = \langle \varphi(|f|^2)x, x \rangle = \int_X |f|^2 \, dP_x,$$

amiből következik, hogy $\|\varphi(f)\| \leq K$ ha $|f| \leq K$. Legyen most f korlátos mérhető függvény. Léteznek olyan f_k egyszerű mérhető függvények, amelyek konvergálnak f-hez egyenletesen. Az előző egyenlőtlenség szerint, a $\varphi(f_k)$ operátorok Cauchy-sorozatot alkotnak $\mathcal{L}(H;H)$-ban. Ez konvergál egy operátorhoz, amelyet $\varphi(f)$-el fogunk jelölni. Könnyű látni, hogy $\varphi(f)$ nem függ az f_k megválasztásától. Nyilvánvaló, hogy az előző egyenlőtlenségből következik az általánosabb

$$\|\varphi(f)\| \leq K \quad \text{ha} \quad |f| \leq K$$

összefüggés. Az egyszerű függvényekre eddig bizonyítottakból a tétel minden állítása következik a korlátos mérhető függvények esetére.

Az általános esetben osszuk fel X-et megszámlálható sok diszjunkt, mérhető X_n halmazra, úgy, hogy $f|_{X_n}$ korlátos legyen; például tekintsük az $X_n = \{n \le |f| < n+1\}$ halmazokat. Tekintsük az f_n függvényeket, amelyek X_n-en f-el egyeznek meg, egyébként nullák. Mivel $\varphi(f_n)$ felcserélhető $P(X_m)$-el, a $H_n = \operatorname{rng}(P(X_n))$ zárt altér ortogonális komplementerén nulla, ezt pedig önmagába leképezi le. Legyen $T_n = \varphi(f_n)|_{H_n}$, és legyen $\varphi(f)$ az előző lemma szerint a T_n operátorokhoz tartozó T zárt lineáris operátor. Az előző tétel és az integrál σ-additivitása miatt $\varphi(f)$ sűrűn definiált, és eleget tesz az (1) és (2) feltételeknek. Mivel az (1) jobb oldalán szereplő halmaz f és P által egyértelműen meghatározott, kapjuk, hogy sűrű altér, és polarizációval adódik, hogy (1) és (2) egyértelműen meghatározza $\varphi(f)$-et. Az előző lemma felhasználásával a (3)–(8) állítások is könnyen beláthatók, ha az X_n mérhető halmazokat úgy választjuk, hogy g is korlátos legyen X_n-en. Ez könnyen elérhető, ha a $\{j \le |f| < j+1\} \cap \{k \le |g| < k+1\}$ halmazokat rendezzük sorozatba.

$\to$ **28. Feladat.** Az előző tétel jelöléseivel, mutassuk meg, hogy $\sigma(\varphi(f)) \subset \overline{\operatorname{rng}(f)}$.

29. A spektrál-tétel korlátos normális operátorokra. *Legyen H komplex Hilbert-tér. Ha $T \in \mathcal{L}(H;H)$ egy normális operátor, akkor pontosan egy P spektrálmérték létezik $\sigma(T)$ Borel-halmazain, a T* spektrálfelbontása, *amelyre $T = \int_{\sigma(T)} \lambda\, dP(\lambda)$.*

Bizonyítás. A spektrál tétel szorzat alakját felhasználva, legyen $P(A) = U^{-1} \circ M_{\xi_A \circ t} \circ U$, ha A Borel-halmaz $\sigma(T)$-ben. Mivel $\xi_A \circ t$ csak 0 és 1 értékeket vehet fel, $M_{\xi_A \circ t}$ önadjungált projekció. Bármely $x \in H$-ra

$$P_x(A) = \langle P(A)x, x\rangle = \int \xi_A(t(s))|Ux(s)|^2\, d\mu(s) = \int_{t^{-1}(A)} |Ux(s)|^2\, d\mu(s),$$

amiből látszik, hogy P_x véges mérték $\sigma(T)$ Borel-halmazain, és így P spektrálmérték. Az előző összefüggés úgy is írható, hogy

$$\int_{\sigma(T)} \xi_A(\lambda)\, dP_x(\lambda) = \int \xi_A(t(s))|Ux(s)|^2\, d\mu(s),$$

és hasonló összefüggés teljesül ξ_A helyett minden egyszerű Borel-függvényre, és tetszőleges $\sigma(T)$-n értelmezett korlátos, komplex értékű Borel-függvényre is, speciálisan $\varphi(\lambda) = \lambda$-ra is. Ebből

$$\int_{\sigma(T)} \lambda\, dP_x(\lambda) = \int t(s)|Ux(s)|^2\, d\mu(s) = \langle Tx, x\rangle.$$

Másrészt, a spektrálintegrál tulajdonságai szerint, ha p egy kétváltozós komplex polinom, akkor

$$\langle p(T, T^*)x, x\rangle = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \overline{\lambda})\, dP_x(\lambda).$$

A Weierstrass-Stone tétel komplex változata szerint a $\lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda})$ függvények sűrűek $\mathcal{C}(\sigma(T))$-ben. Így a T operátor egyértelműen meghatározza az $\int_{\sigma(T)} \varphi(\lambda)\, dP_x(\lambda)$ értékeket, ha $\varphi \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ és $x \in H$. Mivel $\mathbf{C}$ Borel-halmazain minden véges mérték Radon-mérték, a Riesz-féle reprezentációs tétel unicitás része szerint a P_x mértékek, így az P spektrálmérték is, egyértelműen meghatározott.

30. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ egy normális operátor, és P a T spektrálfelbontása. Ha f Borel-függvény $\sigma(T)$-n, legyen $f(T) = \int_{\sigma(T)} f\, dP$.

31. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T \in \mathcal{L}(H;H)$ normális operátor, S a H sűrűn definiált, zárt lineáris operátora. Ha $TS \subset ST$ és $T^*S \subset ST^*$, akkor $f(T)S \subset Sf(T)$ minden $f : \sigma(T) \to \mathbf{C}$ korlátos Borel-függvényre.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \operatorname{dmn}(S)$, $y \in \operatorname{dmn}(S^*)$. Ha p tetszőleges kétváltozós komplex polinom, akkor

$$\langle p(T,T^*)Sx, y\rangle = \langle Sp(T,T^*)x, y\rangle = \langle p(T,T^*)x, S^*y\rangle.$$

Legyen P a T spektrálfelbontása, és jelölje $P_{u,v}$ a $B \mapsto \langle P(B)u, v\rangle$ komplex mértéket $\sigma(T)$ Borel-halmazain. A fenti egyenlőségből

$$\int_{\sigma(T)} p(\lambda, \overline{\lambda})\, dP_{Sx,y}(\lambda) = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \overline{\lambda})\, dP_{x,S^*y}(\lambda)$$

bármely p kétváltozós komplex polinomra. A Weierstrass-Stone tétel komplex változata szerint a $\lambda \mapsto p(\lambda, \overline{\lambda})$ függvények sűrűek $\mathcal{C}(\sigma(T))$-ben, így

$$\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, dP_{Sx,y}(\lambda) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, dP_{x,S^*y}(\lambda)$$

teljesül minden $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$ komplex függvényre. Mivel $\mathbf{C}$ Borel-halmazain minden véges mérték Radon-mérték, a Riesz-féle reprezentációs tétel unicitás részéből következik, hogy a $P_{Sx,y}$ és a P_{x,S^*y} komplex mértékek megegyeznek, amiből viszont a fenti összefüggés bármely $f : \sigma(T) \to \mathbf{C}$ korlátos Borel-függvényre teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\langle f(T)Sx, y\rangle = \langle f(T)x, S^*y\rangle$ ha $x \in \operatorname{dmn}(S)$ és $y \in \operatorname{dmn}(S^*)$, amiből $f(T)x \in \operatorname{dmn}(S^{**}) = \operatorname{dmn}(S)$ és $\langle f(T)Sx, y\rangle = \langle Sf(T)x, y\rangle$. Mivel $\operatorname{dmn}(S^*)$ sűrű, $f(T)Sx = Sf(T)x$ ha $x \in \operatorname{dmn}(S)$, azaz ha a bal oldal értelmezve van.

32. Tétel. *Legyen T a H komplex Hilbert-tér egy normális operátora. Ekkor a H Hilbert-tér megszámlálható sok $H_n \subset \operatorname{dmn}(T)$ zárt altér Hilbert-összege, amelyek T-vel és T^*-gal szemben invariánsak, és a T_n megszorítása T-nek H_n-re normális operátor.*

Bizonyítás. Tekintsük a $B = (\mathbf{1} + T^*T)^{-1}$ folytonos szimmetrikus operátort, amelynek spektruma része $I = [0,1]$-nek. Ha $x \in \operatorname{dmn}(T)$, akkor $TB(H) \subset \operatorname{dmn}(T^*)$ és $T^*TBx = x - Bx \in \operatorname{dmn}(T)$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$BTx = BT(\mathbf{1} + T^*T)Bx = B(T + TT^*T)Bx,$$

mivel $B(H) \subset \mathrm{dmn}(T)$ teljesül Neumann tétele szerint. Mivel azonban $TT^* = T^*T$, kapjuk hogy

$$BTx = B(T + TT^*T)Bx = B(\mathbf{1} + T^*T)TBx = TBx,$$

más szavakkal, hogy $BT \subset TB$. Ebből az előző tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy $f(B)T \subset Tf(B)$ bármely $f : [0, 1] \to \mathbf{C}$ korlátos Borel-függvényre. Jelölje f_0 a $\{0\}$ halmaz karakterisztikus függvényét, f_n pedig a $]1/(n+1), 1/n]$ halmaz karakterisztikus függvényét. Legyen minden $n \in \mathbf{N}$-re H_n a $P_n = f_n(B)$ önadjungált projekcióoperátor értékkészlete. Ekkor H a H_n zárt alterek Hilbert-összege. Vegyük észre, hogy H_0 a B operátor magja, így mivel $(x, y) \mapsto \langle Bx, y\rangle$ belső szorzat, tehát $\langle Bx, x\rangle = 0$-ból $x = 0$ következik, $H_0 = \{0\}$.

A fentiek szerint $P_nT \subset TP_n$. Másrészt, f_n, $n > 0$ definíciója miatt a $g_n(\lambda) = f_n(\lambda)/\lambda$ (és $g_n(0) = 0$) összefüggéssel definiált függvények korlátos Borel-függvények, így $P_n = Bg_n(B)$ írható, amiből $TP_n = TBg_n(B)$. Láttuk azonban, hogy TB az egész H-n definiált korlátos operátor. Ezért a T_n megszorítása T-nek $H_n \cap \mathrm{dmn}(T)$-re folytonos leképezése a H_n altérnek önmagába. $P_n(\mathrm{dmn}(T)) \subset H_n \cap \mathrm{dmn}(T)$ miatt $H_n \cap \mathrm{dmn}(T)$ sűrű H_n-ben; mivel T_n nyilván zárt operátor H_n-en, kapjuk, hogy $H_n \subset \mathrm{dmn}(T)$. Végül $T^*T = TT^*$ miatt az eddig mondottakban T és T^* szerepét felcserélhetjük, anélkül, hogy B megváltozna; tehát a T_n' megszorítása T^*-nak H_n-re ennek az altérnek egy folytonos lineáris operátora, és nyilván megegyezik a T_n operátor T_n^* adjungáltjával. Így T_n normális, és a bizonyítás kész.

33. A spektráltétel szorzat alakja. *Legyen H egy komplex Hilbert-tér, és T egy normális operátor H-n. Ekkor létezik olyan μ mérték, $U : H \to \mathbf{L}^2(\mu)$ unitér operátor és μ-mérhető komplex értékű t függvény, hogy $U \circ T \circ U^{-1} = M_t$, a t-vel való szorzás operátora, és $\mathrm{rng}(t) \subset \sigma(T)$, továbbá μ választható úgy, hogy $\mu(A) = \sup\{\mu(B) : B \subset A, \mu(B) < \infty\}$ teljesüljön minden $A \in \mathcal{A}$-ra.*

Bizonyítás. Az előző tételt fogjuk felhasználni. Az ottani jelölésekkel, tekintsük a T_n korlátos normális operátorokat (H_n ortogonális komplementerén nullának definiálva) és a P_n projekciókat. Ezek az operátorok és adjungáltjaik páronként felcserélhetőek. Tekintsük az ezek által generált legszűkebb zárt B*-részalgebráját $\mathcal{L}(H; H)$-nak, és alkalmazzuk erre a spektrál tétel szorzat alakjának B*-algebrákra vonatkozó változatát. t_n-el, illetve p_n-el jelölve a T_n-hez, illetve P_n-hez tartozó függvényt, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy p_n egy $A_n \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, az A_n halmazok diszjunktak, egyesítésük X, és a t_n függvény az A_n-en kívül nulla. Legyen $t = \sum_n t_n$. Az előző tételből, és az integrál σ-additivitásából következik, hogy t a T-nek megfelelő függvény.

34. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér, $T, N, M \in \mathcal{L}(H; H)$, és tegyük fel, hogy N és M normális operátorok. Ha $MT = TN$, akkor $M^*T = TN^*$.*

Bizonyítás. Legyen $S \in \mathcal{L}(H; H)$ tetszőleges operátor. Ha $R = S - S^*$ és $Q = \exp(R)$, akkor $R^* = -R$ miatt $Q^* = \exp(R^*) = \exp(-R) = Q^{-1}$, azaz Q unitér. Így $\|\exp(S - S^*)\| = 1$ minden S-re. Most a tétel feltételéből teljes indukcióval $M^kT = TN^k$ minden k természetes számra, így $\exp(M)T = T\exp(N)$, vagyis $T = \exp(-M)T\exp(N)$. Legyen $U = \exp(M^* - M)$, $V = \exp(N - N^*)$. Mivel az M és N operátorok normálisak, az előző összefüggésből azt kapjuk, hogy $\exp(M^*)T\exp(-N^*) = UTV$, amiből következik, hogy $\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\| \le \|T\|$. Ha M, illetve N helyére $\overline{\lambda}M$-et, illetve $\overline{\lambda}N$-et írunk, akkor azt kapjuk, hogy a

$$\lambda \mapsto \exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda N^*)$$

leképezés korlátos az egész komplex síkon. A Liouville-tételből következik, hogy ez a leképezés konstans, így, mivel az origóban értéke T, azt kapjuk, hogy $\exp(\lambda M^*)T = T\exp(\lambda N^*)$ ha $\lambda \in \mathbf{C}$. A deriváltak egyenlőségéből az origóban kapjuk az állítást.

35. Spektráltétel. *Egy H komplex Hilbert-tér bármely T normális operátorához létezik egy és csak egy P spektrálmérték $\mathbf{C}$ Borel-halmazain, a T spektrálfelbontása, amelyre $T = \int_{\mathbf{C}} t\,dP(t)$. Erre a spektrálmértékre $P(\mathbf{C}\backslash\sigma(T)) = 0$, így az integrálás $\sigma(T)$ felett is végezhető. Továbbá, $P(A)S = SP(A)$ minden $A \subset \mathbf{C}$ Borel-halmazra, és minden olyan $S \in \mathcal{L}(H;H)$-ra, amelyre $ST \subset TS$.*

A bizonyítás a spektráltétel szorzat alakját használja. A spektrálfelbontás a $P(A) = U^{-1} \circ M_{\xi_A \circ t} \circ U$, összefüggéssel definiálható. Egy másik bizonyítás található Rudin [1973] könyvében.

Bizonyítás. A fenti összefüggés egy $P : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(H;H)$ leképezését definiálja $\mathbf{C}$ Borel halmazainak H önadjungált projekcióoperátoraiba. Nyilván $P(\mathbf{C}) = \mathbf{1}$. Vegyük észre, hogy

$$\langle P(A)x, x\rangle = \int_{t^{-1}(A)} |Ux|^2\,d\mu,$$

amiből következik, hogy P_x mérték minden $x \in H$-ra. Általánosan, azt fogjuk megmutatni, hogy minden $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Borel-függvényre

$$\int_{\mathbf{C}} |f(\lambda)|^2\,dP_x(\lambda) = \int |f \circ t|^2 |Ux|^2\,d\mu,$$

így $\int f\,dP$ és $U^{-1} \circ M_{f\circ t} \circ U$ értelmezési tartománya megegyeznek, és ha ez az integrál véges, akkor

$$\int f(\lambda)\,dP_x(\lambda) = \int (f \circ t)|Ux|^2\,d\mu, \tag{1}$$

mert ebből következik, hogy $\int f\,dP = U^{-1} \circ M_{f\circ t} \circ U$ minden $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Borel-függvényre, speciálisan az identikus leképezésre is. Ez azonban egyszerű függvényre triviális, és ha f korlátos függvény, akkor határátmenettel következik (ilyenkor az integrálok mind végesek). Az általános esetben osszuk fel a komplex síkot megszámlálható sok diszjunkt Borel-halmazra úgy, hogy az f mindegyiken korlátos legyen, például legyen $A_n = f^{-1}\{n \le |f| < n+1\}$. Legyen $f_n = f\xi_{A_n}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} |f(\lambda)|^2\,dP_x(\lambda) &= \sum_n \int_{A_n} |f(\lambda)|^2\,dP_x(\lambda) = \sum_n \int_{\mathbf{C}} |f_n(\lambda)|^2\,dP_x(\lambda)\\ &= \sum_n \int_X |f_n\circ t|^2 |Ux|\,d\mu = \sum_n \int_{t^{-1}(A_n)} |f\circ t|^2|Ux|\,d\mu\\ &= \int_X |f\circ t|^2|Ux|^2\,d\mu,\end{aligned}$$

azaz ez a két integrál egyszerre véges. Ha ez a két integrál véges, akkor a minden $z\in\mathbf{C}$-re teljesülő $|z| \le 1+|z|^2$ becslés szerint az (1)-ben szereplő integrálok is végesek, és egyszerű függvényekkel közelítve f-et, kapjuk, hogy fennáll (1).

Tegyük fel, hogy $S\in\mathcal{L}(H;H)$ és $ST\subset TS$. Legyen $Q = Q_n = P(A_n)$, ahol $A_n = \{\lambda : |\lambda| < n\}$, n természetes szám. Ekkor a TQ operátor előállítása $TQ = \int f\,dP$, ahol $f(\lambda) = \lambda$ ha $|\lambda| < n$, és $f(\lambda) = 0$ egyébként. Így ez az operátor korlátos normális operátor. A TQ operátor spektrálfelbontása $P'(A) = P(f^{-1}(A))$, azaz

$$\begin{aligned}P'(A) &= P(A\cap A_n) = QP(A) \quad \text{ha} \quad 0\notin A,\\ P'(\{0\}) &= P(\{0\}\cup(\mathbf{C}\backslash A_n)) = P(\{0\}) + \mathbf{1} - Q.\end{aligned}$$

Ebből

$$P(A) = QP(A) = QP'(A) \quad \text{ha} \quad A\subset A_n.$$

A spektrálintegrál tulajdonságaiból következik, hogy $QT\subset TQ = QTQ$, továbbá

$$(QSQ)(TQ) = QSTQ \subset QTSQ \subset (TQ)(QSQ).$$

Mivel $(QSQ)(TQ)\in\mathcal{L}(H;H)$, ez a tartalmazás azt jelenti, hogy egyenlőség teljesül. Ezért a 2.31 tételből és az előző tételből következik, hogy QSQ felcserélhető a $P'(A)$ projekciók mindegyikével.

Most tetszőleges A korlátos Borel-halmazra van olyan n, hogy $A\subset A_n$; ekkor

$$QSP(A) = QSQP'(A) = P'(A)QSQ = P(A)SQ,$$

így $Q_nSP(A) = P(A)SQ_n$ minden elég nagy n-re. Ha n tart végtelenhez, kapjuk a felcserélhetőséget minden korlátos Borel-halmazra, így tetszőleges Borel-halmazra is.

Legyen P' egy másik spektrálmérték, amelyre $T = \int\lambda\,dP'(\lambda)$. Ekkor $P'(A')T\subset TP'(A')$ minden A' Borel-halmazra. Mivel a $P(A)$ projekciók minden olyan $S\in\mathcal{L}(H;H)$ transzformációval felcserélhetők, amelyre $ST\subset TS$, azt kapjuk, hogy $P'(A')P(A) = P(A)P'(A')$. Legyen A_n korlátos Borel-halmazok egy sorozata, amelyek egyesítése $\mathbf{C}$. A $H_n = P(A_n)(H)$ altérre megszorítva $P(A)$-t és $P'(A)$-t, két olyan spektrálsereget kapunk, amelyek mindegyike a $TP(A_n)$ operátor H_n-re való megszorításának spektrálfelbontása. Így ez a két spektrálsereg megegyezik H_n-en, és mivel H a H_n-ek Hilbert-összege, a lemmából következik, hogy mindenütt.

36. Definíció. Legyen H komplex Hilbert-tér, T a H egy normális operátora, és P a T spektrálfelbontása. Ha f Borel-függvény $\sigma(T)$-n, legyen $f(T) = \int_{\sigma(T)} f\,dP$.

Irodalom

[1] Dieudonné, J., *Grundzüge der modernen Analysis I–IX.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971–1988.

[2] Halmos, P. R., *Introduction to Hilbert space.* Chelsea Publishing Company, New York 1, N.Y., 1957.

[3] Halmos, P. R., *Véges dimenziós vektorterek.* Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1984.

[4] Járai, A., *Mérték és integrálelmélet. Kézirat, KLTE TTK.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[5] Járai, A., *Modern alkalmazott analízis. Kézirat, KLTE TTK.* Debrecen, 1992.

[6] Kirillov, A. A., Gvisiani, A. D., *Feladatok a funkcionálanalízis köréből.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.

[7] Losonczi L., *Funkcionálanalízis I.* KLTE TTK jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982. J3-1170.

[8] Neumann J., *A kvantummechanika matematikai alapjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980.

[9] Riesz F., Szőkefalvi-Nagy B., *Funkcionálanalízis.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[10] Rudin, W., *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[11] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Index

A legfontosabb hivatkozás (általában a definíció) oldalszáma *írott* betűvel van szedve.